

基于超平面法矢量的欠定盲信号分离算法

肖明^{1,2} 谢胜利¹ 傅予力¹

摘要 探讨欠定情况下(观测信号少于源数目)的盲信号分离. 首先给出了 m 维超平面的法矢量的计算公式, 提出了一个基于超平面法矢量的矩阵恢复算法. 其次针对语音分离, 提出了 k 源区间及其检测方法, 从而使 k -SCA 条件下的算法推广到了非稀疏信号的盲分离. 在源信号重建上, 提出了一个简化 l^1 范数解的新算法. 几个仿真实验(含语音信号实验)证实了所提出算法的性能.

关键词 欠定盲信号分离(BSS), 稀疏成分分析(SCA), 超平面聚类, 法矢量, k 源区间
中图分类号 TN912.3

Underdetermined Blind Source Separation Algorithm Based on Normal Vector of Hyperplane

XIAO Ming^{1,2} XIE Sheng-Li¹ FU Yu-Li¹

Abstract Discussion of blind signal separation problem under underdetermined case (i.e., the case of less observed signals than sources) is presented. First, a formula to calculate the normal vector of any hyperplane is given and a mixing matrix recovery algorithm based on the normal vector of any hyperplane is proposed. Second, for audio signal, k -source intervals are introduced and a method to detect them is proposed. So, the algorithms under the k -SCA condition are extended to blind non-sparse signal separation. To reconstruct the sources, a new algorithm is proposed to simplify the l^1 -norm solution. Several experiments demonstrate the performance of the proposed algorithm.

Key words Underdetermined blind signal separation (BSS), sparse component analysis (SCA), hyperplane clustering, normal vector, k -source interval

大多数采用独立元分析 (Independent component analysis, ICA) 的盲信号分离 (Blind signal separation, BSS) 算法要求观测信号数目多于源信号^[1-3], 而观测信号少于源数目的情况属于欠定盲信号分离. 近几年, 通过利用信号的稀疏表示, 欠定的盲分离问题采用两步法已经得到解决^[4-8], 但要求信号在表示域中是稀疏的, 即在每个样本点上仅有一个源信号非零或较大, 而其余源信号为零或可忽略不计. 最近, Georgiev 等考虑更加宽松的条件, 提出了 k -SCA 条件^[9-10], 并证明了 k -SCA 条件是

源信号和混叠矩阵可恢复的充分条件. k -SCA 条件的算法涉及到子空间、超平面聚类^[11-14], 比一般的统计数据聚类困难. Theis 和 Cichocki 也提出了一个基于法矢量的聚类算法^[12], 按极坐标形式构造法矢量, 以累计与 m 维空间的每个矢量正交的数据的方法来确定法矢量, 该算法有明显的缺陷, 存在角度分辨率带来的误差.

此外, k -SCA 条件是非常苛求的, 特别是在语音信号的分离中, 因为一些数据不满足 k -SCA 条件, 所以给超平面聚类带来麻烦, 以至于无法估计混叠矩阵. 例如, 当 4 个语音信号混叠成 3 个观测信号时, 从散落图 (见下页图 1) 中可知, 源信号在时域上是非稀疏的, 在球面的投影图中无法看到估计混叠矩阵的超平面, 此时大部分的数据都不满足 k -SCA 条件, 所以, 利用子空间或超平面聚类是无法估计混叠矩阵的, k -SCA 条件下的算法都将失效.

鉴于上述问题, 本文首先给出超平面的法矢量计算公式, 证明超平面和法矢量的一一对应关系, 提出一个在 k -SCA 条件下基于法矢量的混叠矩阵恢复算法. 其次, 指出语音信号的一种混叠特性, 即 k 源区间; 分析 k 源区间性质, 提出 k 源区间的检测方法, 并得出混叠矩阵的可恢复性条件. 在源信号的重

收稿日期 2006-11-06 收修改稿日期 2007-05-08
Received November 6, 2006; in revised form May 8, 2007
国家自然科学基金(U0635001, 60505005, 60674033), 广东省自然科学基金(04205783, 05006508), 科技部重大基础前期研究专项(2005CCA04100)资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (U0635001, 60505005, 60674033), Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (04205783, 05006508), Specialized Phrasic Basic Research Projects of Ministry of Science and Technology, China (2005CCA04100)
1. 华南理工大学电子与信息学院 广州 510641 2. 茂名学院电子信息工程系 茂名 525000
1. College of Electrics and Information Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641 2. Department of Electrics and Information Engineering, Maoming College, Maoming, Guangdong 525000
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00142

建上, 针对 l^1 范数的特殊性, 提出一个简化的代数优化方法. 最后, 用几个仿真实验分别与 Theis 算法^[12] 和 Washizawa 在线算法^[14] 比较, 证实所提出算法的性能和实用性.

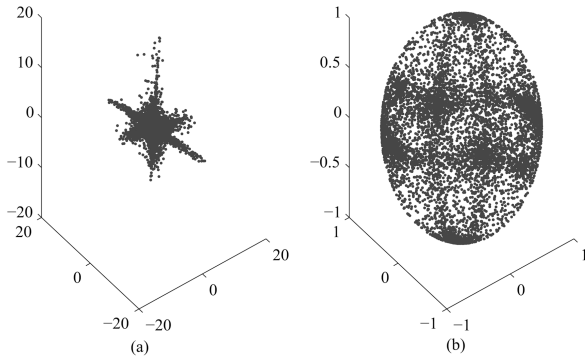


图 1 4 个语音信号混叠成 3 个混叠信号

((a) 混叠信号的散落图; (b) 在单位球面上的投影)

Fig. 1 Four speech signals mixed into three mixtures

((a) Scatter plot of three mixtures; (b) Their projections on unit sphere)

1 问题的描述

在无噪声的情况下, 实时线性盲信号混叠的模型为

$$X = AS \quad (1)$$

其中, 混叠矩阵 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 和源信号 $S \in \mathbf{R}^{n \times N}$ 均未知. 最近 Georgiev 提出了如下的 k -SCA 条件: 1) 混叠矩阵 A 的任意 $m \times m$ 子矩阵都非奇异; 2) 源信号是 $n - m + 1$ 水平稀疏, 即矩阵 S 的每一列至少有 $n - m + 1$ 个非零元素; 3) 源信号充分地表现出以下特征: 任何 $n - m + 1$ 个元素集 $I = \{i_1, \dots, i_{n-m+1}\} \subset \{1, \dots, n\}$, 在 S 中至少存在 m 列使得它们的 0 元素位置与元素集 I 一致, 且每 $m - 1$ 列是线性独立的. 在 k -SCA 条件下, 关键的问题是: 如何进行超平面聚类 and 估计混叠矩阵?

给定一组 m 维线性无关的矢量 $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{m-1}$, 其中 $\mathbf{u}_k = (u_{k1}, \dots, u_{km})^T$, 由此生成的子空间 \mathcal{H} , 记为 $\mathcal{H} = \{\mathbf{y} | \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m, \forall c_1, \dots, c_{m-1} \in \mathbf{R}, \mathbf{y} = c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_{m-1} \mathbf{u}_{m-1}\}$. 在三维线性空间里, 任意两个线性无关的矢量张成的子空间是一个过原点的平面, 其法矢量在不考虑尺度比例变化的情况下是唯一的. 依此类推, 在 m 维空间, 任意 $m - 1$ 个线性无关的矢量张成的子空间 \mathcal{H} 是一个通过坐标原点的超平面, 那么, 其法矢量在不考虑尺度比例变化的情况下是否唯一、其形式又应如何表示?

定义 1. 给定一个非零 m 维矢量 \mathbf{n} 和由一组 m 维线性无关的矢量 $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{m-1}$ 生成的超平面 \mathcal{H} , 如果

$\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}$, 都有 $\langle \mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle = 0$ 成立, 则称矢量 \mathbf{n} 是超平面 \mathcal{H} 的法矢量 (或称正交矢量), 记作 $\mathbf{n} \perp \mathcal{H}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示两个矢量的内积.

为了确定超平面的法矢量, 令 $U = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1})$ 是 $m \times (m - 1)$ 矩阵, 当抽去第 l 行时, 可以得到非奇异的 $(m - 1) \times (m - 1)$ 子矩阵

$$U_l = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{m-1,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,l-1} & \cdots & u_{m-1,l-1} \\ u_{1,l+1} & \cdots & u_{m-1,l+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1m} & \cdots & u_{m-1,m} \end{bmatrix}$$

定理 1. 给定由一组 m 维线性无关的矢量 $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{m-1}$ 生成的超平面 \mathcal{H} , 在法矢量不考虑尺度比例变化的情况下, $\mathbf{n}_0 = (\det(U_1), -\det(U_2), \dots, (-1)^{m-1} \det(U_m))^T$ 是超平面 \mathcal{H} 的唯一法矢量; 同时, 与矢量 \mathbf{n}_0 正交的 m 维空间中的通过原点的超平面 \mathcal{H} 也是唯一的.

证明. 不失一般性, 考虑矢量 \mathbf{n}_0 与 $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{m-1}$ 中矢量 \mathbf{u}_1 的内积:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_0, \mathbf{u}_1 \rangle &= u_{11} \det(U_1) - u_{12} \det(U_2) + \cdots + \\ &u_{1m} (-1)^{m-1} \det(U_m) = \\ &\begin{vmatrix} u_{11} & u_{11} & \cdots & u_{m-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1m} & u_{1m} & \cdots & u_{m-1,m} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

所以, $\langle \mathbf{n}_0, \mathbf{u}_l \rangle = 0 (l = 1, \dots, m)$, 矢量 \mathbf{n}_0 是超平面 \mathcal{H} 的法矢量.

证唯一性, 为求一个超平面所有的法矢量, 设 $\mathbf{n} \perp \mathcal{H}$, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{u}_l \rangle = 0 (l = 1, \dots, m - 1)$, 则法矢量就是线性方程组 $U^T \mathbf{n} = 0$ 的解, 因为 U 的秩为 $m - 1$ 且 \mathbf{n}_0 是它的一个解, 所以线性方程组的基础解系为 $c \mathbf{n}_0$ (即 $\mathbf{n} = c \mathbf{n}_0, c \in \mathbf{R}$), 全部法矢量仅与 \mathbf{n}_0 成比例, 在不考虑尺度比例变化的情况下, 它是超平面 \mathcal{H} 唯一的法矢量.

反之, 假设与 \mathbf{n}_0 正交的超平面, 除了有矢量 $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{m-1}$ 生成的超平面 \mathcal{H} , 还有另外一个超平面 \mathcal{H}' , 则存在一个非零矢量 $\mathbf{v} \in \mathcal{H}'$ 但 $\mathbf{v} \notin \mathcal{H}$, \mathbf{v} 不能被 $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{m-1}$ 线性表示的, 故 $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{m-1}$ 和 \mathbf{v} 组成 m 个线性无关的 m 维矢量, 则它们可张成整个 m 维线性空间, 由于 \mathbf{n}_0 正交于超平面 \mathcal{H} 和 \mathcal{H}' , 所以 \mathbf{n}_0 正交于 $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{m-1}$ 和 \mathbf{v} , 进而 \mathbf{n}_0 正交于 m 维线性空

间的任意一个矢量, 这是不可能的, 故矛盾假设不成立, 矢量 \mathbf{n}_0 唯一决定的超平面是 \mathcal{H} . \square

注. 通常计算超平面 \mathcal{H} 的单位法矢量, 即 $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 / \|\mathbf{n}_0\|$.

2 k -SCA 条件下的混叠矩阵恢复

为了便于稀疏成分分析, 将混叠矩阵 A 按列矢量 \mathbf{a}_j 展开, 则式 (1) 可转化为

$$\mathbf{x}^t = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j s_j^t \quad (2)$$

其中, 矢量 \mathbf{x}^t 是矩阵 X 的列, 同时设 $\|\mathbf{a}_j\| = 1$. 这里, 混叠矩阵 A 满足 k -SCA 条件 1), 任意 $m-1$ 列 $\{\mathbf{a}_{i_k}\}_{k=1}^{m-1}$ 张成一个 m 维线性空间的超平面 \mathcal{H}_q , 记为 $\mathcal{H}_q = \{\mathbf{y} | \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m, c_{i_k} \in \mathbf{R}, \mathbf{y} = c_{i_1} \mathbf{a}_{i_1} + \dots + c_{i_{m-1}} \mathbf{a}_{i_{m-1}}\}$, 其中, $q = 1, \dots, C_n^{m-1}$, $C_n^{m-1} = n! / [(m-1)!(n-m+1)!]$.

根据定理 1, 令 $\mathbf{b}_q = (\det(A_1^q), -\det(A_2^q), \dots, (-1)^{m-1} \det(A_m^q))^T$, 则 \mathbf{b}_q 是超平面 \mathcal{H}_q 的法矢量, 其中, 子矩阵 A_l^q 为

$$A_l^q = \begin{bmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l-1,j_1} & \cdots & a_{l-1,j_{m-1}} \\ a_{l+1,j_1} & \cdots & a_{l+1,j_{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,j_1} & \cdots & a_{m,j_{m-1}} \end{bmatrix}, \quad l = 1, \dots, m$$

当源信号满足 k -SCA 条件 2) 时, 矩阵 S 的每一列 \mathbf{s}^t 中至少有 $n-m+1$ 个零元素, 很明显, 矩阵 X 的任意一列 \mathbf{x}^t 都位于由 A 的列张成的 Q 个超平面 \mathcal{H}_q 中的一个超平面上, 即 $\mathbf{x}^t \in \bigcup_{q=1}^Q \mathcal{H}_q$ ($Q = C_n^{m-1}$, $t = 1, \dots, N$), 所以, 在三维空间里, X 的所有数据列在球面上的投影将成为 Q 个圆圈 (参见第 5 节中的图 3(b)).

如何聚类 Q 个超平面 \mathcal{H}_q 并利用法矢量确定混叠矩阵? 其算法可概括如下:

1) 去除数据矩阵 X 中为零的列矢量, 然后对 X 中的列 $\{\mathbf{x}^t\}_{t=1}^N$ 进行归一化, 即 $\mathbf{x}^j = \mathbf{x}^j / \|\mathbf{x}^j\|$.

2) 如果 $\mathbf{x}^j + \mathbf{x}^k = 0$ 或 $\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^k = 0$, 则称它们为相同矢量或相反矢量. 令 $\mathbf{y}^l = \mathbf{x}^j$, 将在 X 中所有与 \mathbf{y}^l 相同或相反的列归为一类, 聚类得到 $\{\mathbf{y}^j\}_{j=1}^{N_l}$, 组成矩阵 $Y = (\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{N_l})$, 并记录 \mathbf{y}^l 类中的数据数为 h_l .

3) 根据行列式 $\det(\mathbf{y}^{l_1}, \dots, \mathbf{y}^{l_m}) \neq 0$, 可以任选 m 个线性无关的矢量 $\{\mathbf{y}^{l_i}\}_{i=1}^m$, 该组矢量可以形成 m 个超平面, 计算其中任意的 $m-1$ 个矢量张成的超平面的单位法矢量, 如果在数据矩阵 Y 中与 \mathbf{n}_1 正交的列矢量数目大于 N_{\min} , 则移去所有与它正交的列. 依次类推, 可以得到一组法矢量 $\{\mathbf{n}_j\}_{j=1}^L$, 它决定 L 个不同的超平面 $\{\mathcal{H}_j\}_{j=1}^L$.

4) 检测矩阵 Y 中与 \mathbf{n}_j 正交的列, 如果下标为 $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, N_l\}$, 则可以计算在矩阵 X 中与 \mathbf{n}_j 正交的非零列矢量的数目 m_j , 即 $m_j = \sum_{i=1}^k h_{j_i}$, m_j 也为聚类超平面的数据列数.

5) 按聚类超平面的数据列数 m_j , 从大到小排列, 重新选择前 Q 个法矢量 \mathbf{n}_j , 确定为超平面的法矢量, 且 $\hat{\mathbf{b}}_j = \mathbf{n}_j$.

6) 在估计法矢量 $\{\hat{\mathbf{b}}_j\}_{j=1}^Q$ 后, 矢量 \mathbf{a}_j 是 C_{n-1}^{m-2} 个超平面的交, 与 $\{\hat{\mathbf{b}}_j\}_{j=1}^Q$ 中的 C_{n-1}^{m-2} 个法矢量正交, 可以用法矢量 $\{\hat{\mathbf{b}}_j\}_{j=1}^Q$ 的任意 $m-1$ 个线性无关的矢量张成的超平面的法矢量求出矢量 \mathbf{a}_j .

在信号混叠中, 并不是矩阵 S 的所有列 \mathbf{s}^t 至少有 $n-m+1$ 个零元素, 所以任意 $m-1$ 列 $\{\mathbf{a}_{i_k}\}_{k=1}^{m-1}$ 张成一个 m 维线性空间的 C_n^{m-1} 个超平面 \mathcal{H}_q 不能包含全部的矢量 \mathbf{x}^t , 但是, 矩阵 S 的大多数列 \mathbf{s}^t 至少有 $n-m+1$ 个零元素, 即大部分归一化的列位于 C_n^{m-1} 个超平面 \mathcal{H}_q 上, 此时上述算法仍然成立, 但计算的超平面增多, 计算量增大.

3 k 源区间和混叠矩阵的恢复

在线性混叠系统中, k -SCA 的条件 2) 是苛刻的, 像语音信号、生物医学信号等信源的混叠很难满足其条件, 所以 k -SCA 算法在盲信号处理中的运用价值较低. 为了能够有效地利用 k -SCA 条件下的理论, 通过对语音信号的研究, 我们发现 k 源区间具有如下的物理特性: 如果有 4 个人同时讲话, 人们常常能够在某些极小的时间区间辨别出其中 1 个人的声音, 则称该区间为单源区间; 如果在某些极小的时间区间能辨别出两个人的声音, 则称该区间为 2 源区间; 如果在某些极小的时间区间能辨别出 3 个人的声音, 则称该区间为 3 源区间. 讨论的 k 源区间的的数据是较稀疏的情况, 至少是 $n-m+1$ 水平稀疏, 即非零元素不超过 $m-1$ 个, 所以 k 一定小于观测信号的个数. 以下是 k 源区间的定义.

定义 2. 在实时线性混叠系统中, 如果在给定的时间区间 $[t_1, t_2]$ 上, 至多仅有 k ($k \leq m-1$) 个源信号非 0, 其余的源信号为 0, 则区间 $[t_1, t_2]$ 为 k 源区间.

在文献 [15-16] 中, 单源区间就是 k 为 1 的情

况, 其定义为:

定义 3. 在实时线性混叠系统中, 如果在给定的时间区间 $[t_1, t_2]$ 上, 仅有一个源信号非 0, 则区间 $[t_1, t_2]$ 为单源区间。

根据上述定义, 很容易得到 k 源区间的性质。

定理 2. 当 m 个观测信号的数据构成一个 m 维线性空间时, 如果区间 $[t_1, t_2]$ 是 k 源区间, 且 $k = m - 1$, 则 $\forall t' \in [t_1, t_2]$, $\mathbf{x}^{t'}$ 都位于同一超平面上; 如果 $\mathbf{x}^{t'}$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 存在 $m - 1$ 个线性无关的列矢量, 则在不考虑尺度比例时, 存在唯一的法矢量。

证明. 因 $\forall t' \in [t_1, t_2]$, $\mathbf{s}^{t'}$ 至少有 $n - m + 1$ 个零元素, 至多有 $m - 1$ 个非零元素, 不失一般性, 设 $\{s_{j_l}^{t'}\}_{l=1}^{m-1}$ 非零, 于是 $\mathbf{x}^{t'} = \sum_{l=1}^{m-1} \mathbf{a}_{j_l} s_{j_l}^{t'}$, 则 $\mathbf{x}^{t'}$ 属于 $\{\mathbf{a}_{j_i}\}_{i=1}^{m-1}$ 张成的子空间, 该子空间为一个超平面, 又因为 $\mathbf{x}^{t'}$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 存在 $m - 1$ 个线性无关的列矢量, 所以在区间 $[t_1, t_2]$ 的列矢量都位于这 $m - 1$ 个线性无关的列矢量张成的超平面, 再由定理 1 可知, 在不考虑尺度比例时, 存在唯一的法矢量。□

如果 $\forall t'_i \in [t_1, t_2] (i = 1, \dots, m)$, 那么矢量 $\{\mathbf{x}^{t'_i}\}_{i=1}^m$ 是一组线性相关的矢量, 于是可得如下推论:

推论 1. 当 m 个观测信号的数据构成一个 m 维线性空间时, 如果区间 $[t_1, t_2]$ 是 k 源区间, 且 $k = m - 1$, 则 $\forall t'_i \in [t_1, t_2] (i = 1, \dots, m)$, $\det([\mathbf{x}^{t'_1}, \dots, \mathbf{x}^{t'_m}]) = 0$, 即 k 源区间中的任意 m 个列矢量 $\{\mathbf{x}^{t'_i}\}_{i=1}^m$ 组成的行列式为 0。

根据上述定理和定义, 如果能够从观测信号中寻找出所有 k 源区间数据, 而这些 k 源区间数据能够满足 k -SCA 的 3 个条件, 则可得出混叠矩阵的可恢复的条件。

定理 3. 在线性实时的盲信号处理中, 如果混叠信号的 k 源区间 ($k = m - 1$) 数据能够满足 k -SCA 的 3 个条件, 则混叠矩阵是可识别的。

证明. 抽取所有 k 源区间的数据组成新的混叠信号, 混叠矩阵没有发生变化, 新的源信号也是抽取所有 k 源区间的源信号, 所以, 根据文献 [9] 得, 混叠矩阵是可识别的, 源信号的个数也是可确定的。□

定理 3 与 k -SCA 的 3 个条件的根本区别在于: 不需要观测信号数据的每列都要求 $n - m + 1$ 水平稀疏。根据定理 2 或推论 1 可确定 k 源区间 ($k = m - 1$), 但是定理 2 和推论 1 的逆定理并不成立, 所以, 设 k 源区间的最小长度为 N_{\min} , k 源区间的混叠矩阵的恢复算法概括如下:

1) 根据单源区间混叠矩阵恢复算法^[16] 确定混叠矩阵部分列矢量;

2) 根据定理 2 或推论 1 确定 k 源区间, 检测长度大于 N_{\min} 的 k 源区间;

3) 根据第 2 节中 k -SCA 条件下的混叠矩阵恢复算法确定超平面的法矢量和混叠矩阵。

4 重建源信号

在假定源信号概率密度为拉普拉斯 (Laplacian) 分布和混叠矩阵 A 已经被估计的条件下, 利用最大后验概率准则, 可得 l^1 范数 $J(S) = \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n |s_j^t|$, 并作为源信号 S 的稀疏性的度量。 l^1 范数可写成如下优化问题^[6]

$$\min \sum_{j=1}^n |s_j^t|, \quad \text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^n \mathbf{a}^j s_j^t = \mathbf{x}^t \quad (3)$$

在稀疏成分分析中, 数据矩阵 X 分解的目标是希望得到源信号的最稀疏解; 如果假设在每个时刻都至多有 m 个非 0 的较大源信号, 其余的源信号为 0 或忽略不计时, 那么, 优化 (3) 的问题可以近似简化为

$$\min_{A_{i_k}} \sum_{j=1}^n |s_j^t|, \quad \text{s. t.} \quad \sum_{k=1}^m \mathbf{a}^{i_k} s_{i_k}^t = \mathbf{x}^t \quad (4)$$

其中, 非奇异子矩阵 A_{i_k} 是矩阵 A 的任意 m 列构成的方阵, 即 $A_{i_k} = (\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_m})$. 非奇异子矩阵集 A_{i_k} 共有 C_n^m 个, 式 (4) 的优化问题实质就是在 C_n^m 个子矩阵中寻找使得 $\sum_{j=1}^n |s_j^t|$ 最小的一个子矩阵, 从 $\sum_{k=1}^m \mathbf{a}^{i_k} s_{i_k}^t = \mathbf{x}^t$, 可以得到 $s_{i_k}^t$, 该子矩阵设为 $A_{i_k}^{\min}$, 则源信号可以按下式重构

$$\begin{cases} A_{i_k}^{\min}(s_{i_1}^t, \dots, s_{i_m}^t)^T = \mathbf{x}^t \\ s_j^t = 0 \quad (i \neq i_k) \end{cases} \quad (5)$$

按照式 (4) 和式 (5) 重建源信号比求解 l^1 范数简单, 但增加了一个限制条件, 即在每个时刻都至多有 m 个非 0 的较大源信号, 其余的源信号为 0 或忽略不计。

5 仿真实验

5.1 实验 1

根据 Theis 的仿真实验^[12], 同样按照 k -SCA 条件将人工随机构造的信号 (如图 2(a)) 作为源信号, 混叠信号如图 2(b), 其混叠的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0.4545 & -0.7912 & -0.6634 & 0.4568 \\ 0.4545 & 0.2120 & -0.3830 & -0.7912 \\ 0.7660 & 0.5736 & 0.6428 & 0.4067 \end{bmatrix}$$

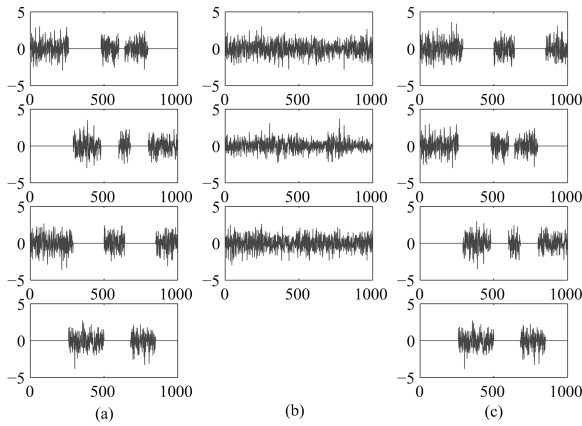


图 2 信号的波形
((a) 源信号; (b) 混叠信号; (c) 估计信号)

Fig. 2 Waveform of signals

((a) Sources; (b) Mixtures; (c) The estimated signals)

图 3 为混叠信号的散落图, 在图 3(b) 中, 实线圆为混叠矩阵的列矢量构成的平面, 当混叠信号矩阵的列矢量向单位球面上投影时, 可以发现所有数据点都落在 6 个实线圆上; 按照算法仿真, 可计算出 6 条法矢量 (用 $\hat{\mathbf{b}}_1, \dots, \hat{\mathbf{b}}_6$ 表示) 对应的超平面的数据点分别为 400、317、302、286、257、244, 令其超平面的法矢量矩阵为 $B = [\hat{\mathbf{b}}_1, \dots, \hat{\mathbf{b}}_6]$.

$B =$

$$\begin{bmatrix} 0.5857 & 0.6105 & 0.5653 & 0.8012 & 0.3655 & 0.0999 \\ -0.8005 & 0.2197 & 0.6112 & 0.1672 & 0.5837 & -0.8806 \\ 0.1275 & 0.7610 & 0.5539 & -0.5746 & 0.7250 & 0.4632 \end{bmatrix}$$

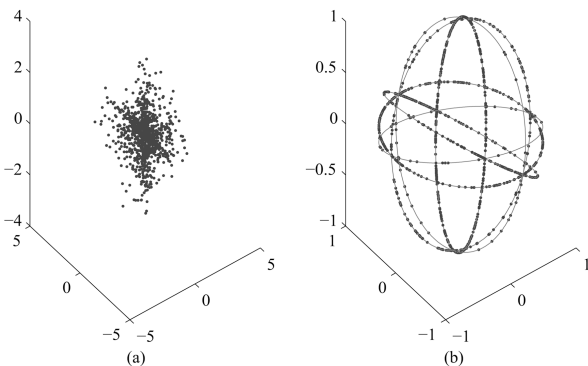


图 3 4 个稀疏源混叠成 3 个混叠信号

((a) 观测信号的散落图; (b) 观测信号的列归一化后的散落图)

Fig. 3 Four sparse sources mixed into three mixtures

((a) Scatter plot of mixtures; (b) Scatter plot of the normalized mixtures)

另外, 当不设估计超平面的最小数据点数目时, 会出现两条法矢量 $(0.494, -0.7598, -0.4225)$, $(0.2646, 0.8419, -0.47)$, 它们分别有 10 个和 7 个数据点, 所以在混叠信号矩阵 X 中的列矢量也可构成其他的超平面, 但位于其上的数据点较少. 在算法仿真中仅由 8 条矢量, 就得到需要的法矢量, 而不需要遍历在三维空间的所有的法矢量, 从而计算量大大降低.

根据法矢量形成的平面中 3 张平面同时交于同一条直线的性质, 可得到

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.6634 & 0.4545 & 0.7912 & 0.4568 \\ 0.3830 & 0.4545 & -0.2121 & -0.7912 \\ -0.6428 & 0.7660 & -0.5736 & 0.4067 \end{bmatrix}$$

用 $\min_{P \in \mathcal{P}} \|\hat{A}P - A\|_2$ 表示估计矩阵与混叠矩阵的误差, \mathcal{P} 是所有转置矩阵的集合. 在本实验中, 在计算精度内误差为 0. 而在 Theis 的算法仿真实验^[2] 中, 其算法误差 $\min_{P \in \mathcal{P}} \|\hat{A}P - A\|_2$ 为 0.04, 本文算法精度明显高于 Theis 算法.

最后, 本文算法估计的源信号如图 2(c), 与源信号的信噪比高达 108 dB、145 dB、228 dB 和 115 dB; 而 Theis 算法估计的源信号的信噪比仅为 36 dB、38 dB、36 dB 和 37 dB.

5.2 实验 2

按照 Washizawa 仿真实验中的源信号构造方法, 人工产生同样的源信号 (如图 4(a))^[14], 在源矩阵 S 中随机地选取 40% 的元素为 0, 构成稀疏源, 它不完全满足 k -SCA 条件, 但在大多数的数据点满足至少有 $n - m + 1$ 个零元素. 混叠矩阵为

$A =$

$$\begin{bmatrix} 0.5525 & 0.3919 & 0.5707 & 0.3934 & 0.6904 \\ 0.6863 & -0.6066 & 0.5166 & 0.8634 & -0.6007 \\ 0.4730 & 0.6917 & -0.6383 & -0.3158 & 0.4032 \end{bmatrix}$$

图 5 是混叠信号在三维空间的散落图, 实线圆是混叠矩阵的列矢量构成的所有平面, 当数据点向单位球面投影时, 可以发现不是所有的数据点都位于实线圆上, 说明混叠信号不完全满足 k -SCA 条件.

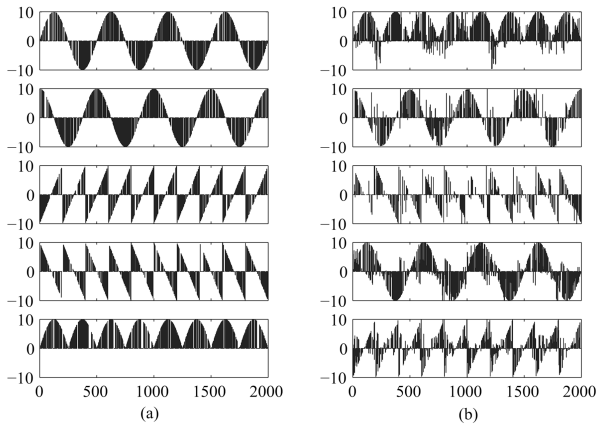


图 4 信号的波形
((a) 源信号; (b) 估计信号)
Fig. 4 Waveform of signals
((a) Sources; (b) The estimated signals)

在算法仿真中, 为了减少计算量, 先对同向或反向的矢量聚类, 并按出现的数目从多到少的排列, 抛弃排列在后面的部分数据后检测超平面, 最后得到 10 个超平面的法向量, 其样本数目分别为 406、372、364、359、358、358、356、351、340、338, 令 $B = [\hat{\mathbf{b}}_1, \dots, \hat{\mathbf{b}}_{10}]$, 矩阵 B 中的数据见本页下方.

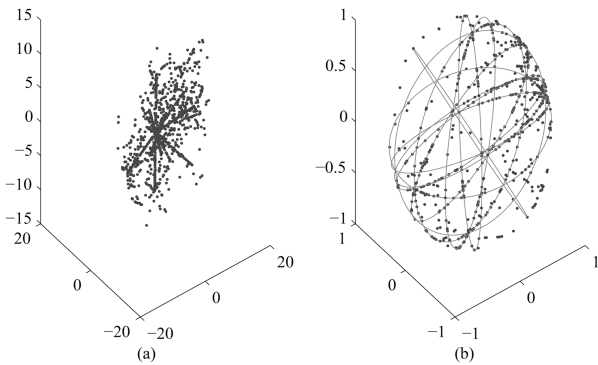


图 5 5 个稀疏源混叠成 3 个混叠信号
((a) 混叠信号的散落图; (b) 归一化的散落图)
Fig. 5 Five sparse sources mixed into three mixtures
((a) Scatter plot of mixtures; (b) Scatter plot of the normalized mixtures)

在矩阵 B 中, 除 $\hat{\mathbf{b}}_{10}$ 不是混叠矩阵构成的超平面的法向量外, 其他均是它的法向量, 不影响混叠矩

$$B = \begin{bmatrix} 0.5681 & 0.0331 & 0.7930 & 0.4046 & 0.1779 & 0.4270 & 0.7678 & 0.5066 & 0.8326 & 0.1655 \\ 0.1051 & 0.7610 & -0.1448 & 0.7851 & 0.6812 & 0.7877 & -0.1986 & -0.4899 & -0.4803 & -0.4094 \\ -0.8162 & 0.6479 & 0.5917 & 0.4690 & 0.7102 & 0.4440 & -0.6091 & -0.7095 & -0.2758 & -0.8972 \end{bmatrix}$$

阵的估计, 最后得到估计的混叠矩阵为

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.6918 & 0.3755 & 0.3931 & 0.5527 & 0.5703 \\ -0.5981 & -0.6102 & 0.8636 & 0.6860 & 0.5179 \\ 0.4045 & 0.6976 & -0.3156 & 0.4731 & -0.6376 \end{bmatrix}$$

估计的混叠矩阵与原混叠矩阵的误差 $\min_{P \in \mathcal{P}} \|\hat{A}P - A\|_2 = 3.2956E-004$. 此外, 本文算法估计的源信号如图 4(b) 所示, 它与源信号的信噪比分别为 21 dB、11 dB、17 dB、10 dB 和 17 dB. 而在 Washizawa 的仿真实验^[14] 中, 其算法误差 $\min_{P \in \mathcal{P}} \|\hat{A}P - A\|_2 = 0.2018$, 显然本文算法的误差小于该算法.

5.3 实验 3

来自 <http://www.princeton.edu/~srickard/bss.html> (Available date: June 17, 2005) 的语音信号为源信号, 其中为 3 男 1 女的讲话声, 其波形图如图 6(a) 所示, 设混叠矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0.4545 & -0.7912 & -0.6634 & 0.4568 \\ 0.4545 & 0.2120 & -0.3830 & -0.7912 \\ 0.7660 & 0.5736 & 0.6428 & 0.4067 \end{bmatrix}$$

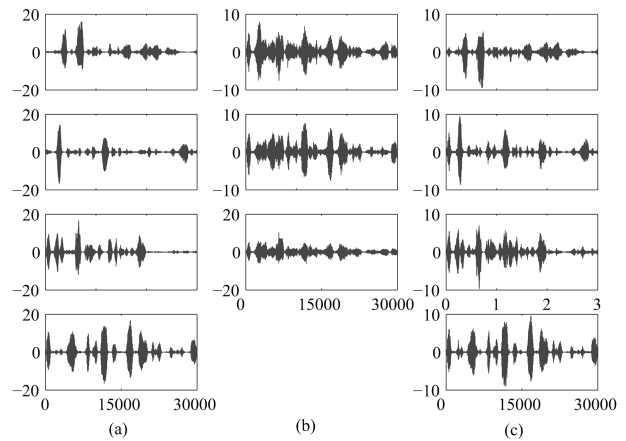


图 6 信号的波形
((a) 源信号; (b) 混叠信号; (c) 估计信号)

Fig. 6 Waveform of signals
((a) Sources; (b) Mixtures; (c) The estimated signals)

混叠信号如图 6(b) 所示(见上页), 其混叠信号的散落图和投影见图 1. 图 1 显示出了源信号的稀疏性较弱, 因此无论是传统的聚类算法还是超平面或子空间的聚类算法都难估计混叠矩阵.

在仿真实验中, 首先利用单源区间矩阵恢复算法来确定混叠矩阵, 设单源区间的检索误差为 0.025, 单源区间的最小长度为 3, 然后得到

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.4522 & 0.7917 & 0.4613 \\ -0.4556 & -0.2195 & -0.7940 \\ -0.7668 & -0.5702 & 0.3960 \end{bmatrix}$$

其中 3 个列矢量的单源区间的数据数为 16、8、14. 继续 k 源区间的搜索, 首先将所有单源区间的列矢量合并成一个矢量, k 源区间的检索误差为 0.008, k 源区间的最小长度为 6, 然后根据定理 2 确定 k 源区间, 将 k 源区间的数据重新排列, 作其散落图, 并投影到单位球面上, 如图 7 所示. 图 7(a) 为 k 源区间数据的散落图; 图 7(b) 中的实线为混叠矩阵的列矢量张成的 6 个平面, k 源区间的数据均匀分布在各个平面上; 图 7(c) 中的实线为单源区间矩阵恢复算法估计的混叠矩阵的 3 条列矢量张成的 3 个平面. 从图 7 可以看到, k 源区间的数据基本形成了另外 3 个平面.

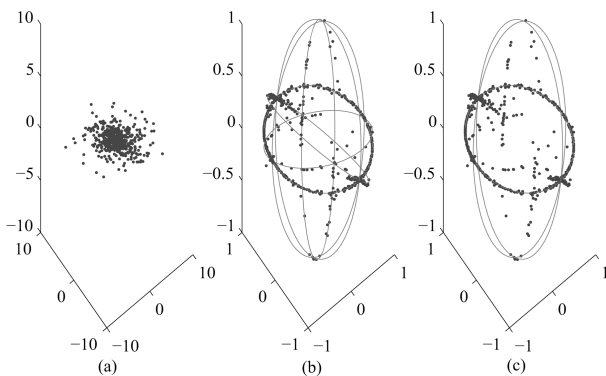


图 7 仿真结果

((a) k 源区间数据的散落图; (b) 和 (c) 在球面上的投影)

Fig. 7 Simulation results

((a) Scatter plot of the samples in k -sources intervals; (b) and (c) Their projections on the unit sphere)

对比图 1 到图 7 的变化可以看出, 此时可按照第 2 节中的矩阵恢复算法进行仿真. 对 k 源区间数据进行超平面聚类时, 首先除去已经估计得到的混叠矩阵的列矢量张成的平面上的所有数据, 然后根据矩阵恢复算法确定法向量 (0.3662, 0.5827, 0.7255), (-0.5718, 0.8123, -0.1151) 和 (-0.6334, -0.2768, -0.7226), 在估计的 3 个列矢量张成的平

面上, 很容易确定矢量 (0.6673, 0.3789, -0.6412) 与这 3 个列矢量正交, 即为混叠矩阵的另一列矢量, 最后的混叠矩阵为

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -0.4522 & 0.7917 & 0.4613 & 0.6673 \\ -0.4556 & -0.2195 & -0.7940 & 0.3789 \\ -0.7668 & -0.5702 & 0.3960 & -0.6412 \end{bmatrix}$$

误差 $\min_{P \in \mathcal{P}} \|\hat{A}P - A\|_2 = 2.5258E-004$, 估计源信号的信噪比为 34.7 dB、7.6 dB、18.3 dB 和 8.1 dB.

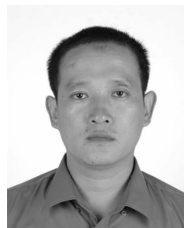
6 结论

本文从 k -SCA 条件出发讨论了欠定的盲信号分离的算法, 主要有两方面的贡献: 1) 通过一个计算任意 m 维超平面的计算公式, 避免了 Georgiev 的算法中对所有角度的法矢量的遍历, 得出了基于超平面法矢量的矩阵恢复算法, 实验结果也表明了该算法的矩阵恢复的准确性优于 Theis 的算法; 2) 提出了 k 源区间的定义及其检测方法, 解决了 k -SCA 条件下的算法不能解决的非稀疏信号混叠处理问题, 从而展现了 Georgiev 的 k -SCA 条件的现实意义. 最后, 实验结果充分证实了该算法的优越性, 特别地, 4 个语音信号混叠的实验展现了 k 源区间在估计混叠矩阵中的重大意义.

References

- Cardoso J F. Blind signal separation: statistical principles. *Proceedings of the IEEE*, 1998, **90**(10): 2009–2025
- Cichocki A, Amari S I. *Adaptive Blind Signal and Image Processing: Learning Algorithms and Applications*. New York: Wiley, 2002
- Li Y Q, Wang J. Sequential blind extraction of instantaneously mixed sources. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(5): 997–1006
- Bofill P, Zibulevsky M. Underdetermined blind source separation using sparse representations. *Signal Processing*, 2001, **81**(11): 2353–2362
- He Zhao-Shui, Xie Sheng-Li, Fu Yu-Li. Sparse representation and blind source separation of illposed mixtures. *Science in China (Series E): Information Sciences*, 2006, **36**(8): 864–879
(何昭水, 谢胜利, 傅予力. 稀疏表示及其病态混叠盲信号分离. 中国科学 (E 辑): 信息科学, 2006, **36**(8): 864–879)
- He Zhao-Shui, Xie Sheng-Li, Fu Yu-Li. Sparsity analysis of signals. *Progress in Natural Science*, 2006, **16**(9): 1167–1173
(何昭水, 谢胜利, 傅予力. 信号的稀疏性分析. 自然科学进展, 2006, **16**(9): 1167–1173)
- Delgado K K, Murray J F, Rao B D, Engan K, Lee T W, Sejnowski T J. Dictionary learning algorithms for sparse representation. *Neural Computation*, 2003, **15**(2): 349–396

- 8 Li Y Q, Amari S, Cichocki A, Ho D W C, Xie S L. Underdetermined blind source separation based on sparse representation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(2): 423–437
- 9 Georgiev P, Theis F J, Cichocki A. Blind source separation and sparse component analysis of overcomplete mixtures. In: *Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Montreal, Canada: IEEE, 2004. 493–496
- 10 Georgiev P, Theis F J, Cichocki A. Sparse component analysis and blind source separation of underdetermined mixtures. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2005, **16**(4): 992–996
- 11 Bradley P S, Mangasarian O L. k -plane clustering. *Journal of Global Optimization*, 2000, **16**(1): 23–32
- 12 Theis F J, Georgiev P, Cichocki A. Robust overcomplete matrix recovery for sparse sources using a generalized hough transform. In: *Proceedings of the 12th European Symposium on Artificial Neural Networks*. Bruges, Belgium: 2004. 343–348
- 13 He Z, Cichocki A. k -subspace clustering and its application in sparse component analysis. In: *Proceedings of the 14th European Symposium on Artificial Neural Networks*. Bruges, Belgium: 2006. 26–28
- 14 Washizawa Y, Cichocki A. On line k -plane clustering learning algorithm for sparse component analysis. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Toulouse, France: IEEE, 2006
- 15 Xiao M, Xie S L, Fu Y L. A novel approach for underdetermined blind source in frequency domain. *Lecture Notes in Computer Science*, 2005, **3497**: 484–489
- 16 Xie S L, Xiao M, Fu Y L. A novel approach for underdetermined blind speech sources separation. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis*, 2006, **13**(4): 1846–1853



肖 明 华南理工大学电信学院博士, 茂名学院高级实验师. 主要研究方向为盲信号处理.

E-mail: xiaoming1968@163.com

(**XIAO Ming** Ph.D. candidate at School of Electronics and Information Engineering, South China University of Technology, associate professor at Maoming College. His research interest covers blind source processing.)



谢胜利 华南理工大学电信学院教授, 主要研究方向为智能信息处理、数字家庭网络结构、RFID 理论与技术、盲信号分离和图象处理等. 本文通信作者.

E-mail: adshlxie@scut.edu.cn

(**XIE Sheng-Li** Professor at School of Electronics and Information Engineering, South China University of Technology. His research interest covers intelligent information processing, digital home networks, RFID theory and technology, blind signal processing, and image processing. Corresponding author of this paper.)



傅予力 华南理工大学电信学院教授. 2000 年于华中科技大学获工学博士学位. 主要研究方向为盲信号处理.

E-mail: fuyuli@scut.edu.cn

(**FU Yu-Li** Professor at School of Electronics and Information Engineering, South China University of Technology. He received his Ph.D. degree from Huazhong University of Science and Technology in 2000. His research interest covers blind signal processing.)