

# 基于变参递归网络和递归最小二乘的连续体机器人控制

张润宁<sup>1</sup> 余鹏<sup>1</sup> 谭宁<sup>1,2</sup>

**摘要** 连续体机器人通常由柔性材料制成,能够承受大幅度形变,在各领域具有广阔的应用前景.然而,其软体结构和非传统的驱动机制也带来了诸多非线性因素,使得其状态和运动难以被精确建模.因此,为连续体机器人设计了一种无模型控制方案.该方案一方面通过变参递归神经网络(Varying parameter-recursive neural network, VP-RNN)求解连续体机器人的逆运动学,以实现高精度运动控制,另一方面使用递归最小二乘法(Recursive least square, RLS)基于实时数据估计和更新机器人雅可比矩阵伪逆,以避免机器人的解析建模.最后,通过仿真模拟和实物实验验证了所提出控制方案的可行性、精确性和鲁棒性,并通过一系列对比实验突出了所提出方法的优势.该方法率先研究基于递归最小二乘法的连续体机器人雅可比矩阵伪逆估计,对未来的连续体机器人研究具有一定的启示作用.

**关键词** 连续体机器人, 无模型控制, 变参递归神经网络, 递归最小二乘法

**引用格式** 张润宁, 余鹏, 谭宁. 基于变参递归网络和递归最小二乘的连续体机器人控制. 自动化学报, 2025, 51(1): 90-103

**DOI** 10.16383/j.aas.c240469 **CSTR** 32138.14.j.aas.c240469

## Continuum Robot Control Based on Varying Parameter Recursive Network and Recursive Least Square

ZHANG Run-Ning<sup>1</sup> YU Peng<sup>1</sup> TAN Ning<sup>1,2</sup>

**Abstract** Continuum robots are usually made of soft materials and can withstand significant deformation, making them promising for applications in various fields. However, their soft structures and non-traditional actuation mechanisms also bring many nonlinear factors, leading to difficulties in modeling their states and motions precisely. Therefore, this work designs a model-free control scheme for continuum robots. On the one hand, the scheme solves the inverse kinematics of continuum robots through a varying parameter-recursive neural network (VP-RNN) to achieve high-precision motion control. On the other hand, it uses the recursive least square (RLS) method to estimate and update the pseudo-inverse of Jacobian matrix based on real-time data, for the sake of avoiding analytical modeling of robots. Finally, simulations and physical experiments are performed to verify the feasibility, accuracy and robustness of the proposed scheme, and the merits of the proposed method are revealed through a series of comparative experiments. This work pioneers the study of Jacobian matrix pseudo-inverse estimation for continuum robots based on the recursive least square method, which could inspire the future research on continuum robots.

**Key words** Continuum robots, model-free control, varying parameter recursive neural network, recursive least square

**Citation** Zhang Run-Ning, Yu Peng, Tan Ning. Continuum robot control based on varying parameter recursive network and recursive least square. *Acta Automatica Sinica*, 2025, 51(1): 90-103

传统的刚性机器人由各关节上的电机驱动,通过给定的机器人参数和关节角度就能确定末端执行器的位姿,然而其在受限和不确定环境中的表现欠

佳<sup>[1]</sup>. 相较于刚性机器人,连续体机器人采用柔性材料制成,能够产生较大的形变<sup>[2]</sup>,在受限环境中运动更加灵活<sup>[3]</sup>,被广泛应用于可穿戴设备<sup>[4]</sup>、外科手术辅助<sup>[5]</sup>等场景.然而,这种软体结构和非传统的驱动方法也带来了许多非线性因素,使得对连续体机器人的精确建模变得十分困难<sup>[6-9]</sup>.近年来,国内外学者在连续体机器人运动控制上做了诸多有益探索,所涉及的控制方法大致可分为两类:基于模型的控制方法和基于数据驱动的控制方法.

基于模型的控制方法通过对连续体机器人的物理结构进行简化,以函数的形式拟合近似其特征,从而建立驱动空间与任务空间的映射关系.例如, Qiu 等<sup>[10]</sup>使用分段常曲率(Piecewise constant cur-

收稿日期 2024-07-02 录用日期 2024-11-06

Manuscript received July 2, 2024; accepted November 6, 2024

国家自然科学基金(62173352),广东省杰出青年基金(2024B1515020104)资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62173352) and Guangdong Basic and Applied Basic Research Foundation (2024B1515020104)

本文责任编辑 李永明

Recommended by Associate Editor LI Yong-Ming

1. 中山大学计算机学院 广州 510006 2. 机器智能与先进计算教育部重点实验室 广州 510006

1. School of Computer Science and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006 2. Key Laboratory of Machine Intelligence and Advanced Computing, Ministry of Education, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006

vature, PCC) 模型, 将连续体机器人几何建模为多段具有恒定曲率的圆弧, 提出了一种高效的多解求解器, 通过多轮迭代搜索解决机器人的逆运动学问题. Thamo 等<sup>[11]</sup>采用 Cosserat 杆理论模型, 将机器人主干看作多段具有无限自由度的小旋转体, 提出了 Cosserat 杆方程的非线性求解器, 快速估计 Cosserat 杆方程的解, 从而显著提高连续体机器人模型的计算效率. 与 Cosserat 杆理论模型要求的机器人细长结构、分段常曲率模型的机器人弯曲运动建模不同, 有限元模型将机器人分割成有限数量的微小元素, 无需显式的几何模型, 善于处理软流体驱动器加压下的大形变, 能预测各种输入下的表现性能, 并帮助研究者更好地理解局部应变对全局性能的影响<sup>[12]</sup>. 为了尽可能减少计算复杂度, 基于模型的控制方法通常将机器人动力学简化, 并忽略机器人的非线性行为, 造成模型准确性的降低.

基于数据驱动的控制方法通过非参数建模, 旨在从大量的训练数据中学习连续体机器人的正逆运动学模型, 例如, 使用高斯混合模型<sup>[13]</sup>、高斯过程回归<sup>[14]</sup>、K 近邻回归<sup>[15]</sup>、前馈神经网络<sup>[16-17]</sup>、递归神经网络 (Recursive neural network, RNN)<sup>[18-19]</sup>、强化学习<sup>[20]</sup>等. 这类控制方法通常采用机器学习策略, 建立回归模型, 从大量数据中学习逆运动学模型, 在冗余机器人上的性能仍然有待提升<sup>[3]</sup>. 而且现有的大多数数据驱动方法需要提前采集大量数据进行预训练, 这会快速缩短连续体机器人设备的使用寿命. 此外, 当需要把这些方法应用到不同的机器人平台时, 往往需要重新采集数据进行训练, 十分耗时费力.

为了避免对机器人数学解析建模的复杂性, 同时使模型具备在线学习的能力, Zhang 等<sup>[21]</sup>提出了一种新的 RNN 模型并命名为零化神经网络 (Zeroing neural network, ZNN). ZNN 基于微分方程设计其变量, 参数及权重由使用者定义, 无需显式的训练过程, 在机器人控制中得到广泛应用. 早期主要使用定参 RNN (Fixed parameter-recursive neural network, FP-RNN), 例如, Zhang 等<sup>[22]</sup>使用 FP-RNN 求解具有时变系数矩阵的 Sylvester 方程, Chen 等<sup>[23]</sup>使用 FP-RNN 求解未知参数并联机器人的跟踪控制问题. 为提高 ZNN 的控制精度, 研究者提出了变参 RNN (Varying parameter-recursive neural network, VP-RNN), 其参数是时变的. Zhang 等<sup>[24]</sup>将冗余机器人的控制表示为时变凸二次规划问题, 并提出 VP-CDNN 有效求解. 为在噪声下求得精确解, Tan 等<sup>[25]</sup>受控制理论启发, 在 ZNN 的设计公式上添加积分项, 用于求解时变满秩矩阵的 Moore-Penrose 逆, 验证了其噪声抑制能力, 并将其应

用于机器人轨迹跟踪上.

机器人雅可比矩阵用于描述关节速度与末端笛卡尔速度之间的关系, 求解机器人逆运动学方程通常需要计算雅可比矩阵的伪逆 (即, Moore-Penrose 逆). 现有的许多机器人控制方法<sup>[24, 26-27]</sup>采用增量法, 分别给机器人状态参数矩阵的每个元素一个微小的增量, 测量末端传感器的位移增量, 从而依次计算出雅可比矩阵的每一列, 再通过奇异值分解 (Singular value decomposition, SVD) 计算其伪逆, 考虑到雅可比矩阵通常是高维的, 在 RNN 每个时间步都直接计算伪逆无疑是十分耗时的. 一种解决方法<sup>[23, 28]</sup>是双模型法, 通过设置两个 ZNN, 其中一个用于计算每个时间步的逆运动学解 (即, 关节状态参数), 另一个则用于在线估计雅可比矩阵的逆阵, 从而避免每个时间步对雅可比矩阵伪逆的数学运算求解. 递归最小二乘法 (Recursive least square, RLS) 是一种在线的时变参数估计方法, 通过采用“遗忘”策略, 对较旧的数据赋予较低的权重, 对较新的数据赋予较高的权重, 从而实现参数的在线更新. Hu 等<sup>[29]</sup>采用 RLS 算法实现锂离子电池实时荷电状态 (State-of-charge, SOC) 参数在线校准. Ho 等<sup>[30]</sup>在微型飞行器的实时光流控制中采用 RLS 算法估计矩阵伪逆, 证明了 RLS 算法能够有效减少 SVD 计算伪逆的误差和耗时.

本文设计了“变参递归神经网络 (VP-RNN)+递归最小二乘法 (RLS)”的数据驱动控制方案, 如图 1 所示, 该方案不需要进行预训练, 以在线的方式估计连续体机器人的模型信息, 实现连续体机器人末端运动轨迹控制. 本文的主要贡献如下:

1) 基于现有的变参递归神经网络 (VP-RNN) 模型, 提出一种改进的递归神经网络模型, 在其设计公式中增加对误差的积分项, 调整激活函数向量公式, 增加部分参数以控制幅值范围, 并将其应用于连续体机器人的逆运动学求解. 该模型能根据误差的大小选择合适的参数, 有效减小轨迹跟踪误差, 同时, 能有效抑制噪声, 使误差在有限时间内收敛

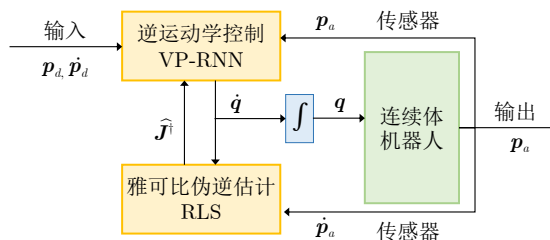


图 1 连续体机器人轨迹跟踪控制方案

Fig. 1 The trajectory tracking control scheme of continuum robots

到 0.

2) 首次将递归最小二乘法运用于时变的机器人控制问题上, 估计连续体机器人的雅可比矩阵伪逆, 避免了控制方法对连续体机器人解析模型的依赖和矩阵的逆运算, 并将其与逆运动学求解方法结合, 得到一种数据驱动控制系统, 该系统能利用过去时间步的结果, 在线估计时变参数, 有效学习连续体机器人的运动学特征, 跟踪误差小, 控制能耗低.

3) 将多种递归神经网络模型运用到连续体机器人逆运动学求解问题上进行对比, 通过实验证明了所提出模型的跟踪误差始终比现有的其他零化神经网络更低, 抑制噪声的性能较好, 且控制能耗与其他模型接近.

4) 将递归最小二乘控制与增量法、双模型法等进行对比, 递归最小二乘法的控制能耗最小, 且误差相对较小, 验证了控制方案的可行性、精确性和鲁棒性.

5) 在长时间任务中, FP-RNN 的控制误差较大, 其余 VP-RNN 的控制轨迹发散, 而所提出的模型通过选择适当的参数, 能够在保持稳定的前提下有效减小跟踪误差, 控制能耗远小于任务总时长, 具备实时控制能力, 彰显了所提出模型的卓越性能.

## 1 模型分析与问题描述

本节基于 PCC 理论对连续体机器人的运动学模型进行初步分析. PCC 理论采用多段具有恒定曲率的圆弧简化表示连续体机器人<sup>[31]</sup>, 如图 2(a) 所示, 连续体机器人每段由具有恒定曲率的圆弧型驱动器来驱动, 在笔直状态时的长度 (初始弧长) 为  $l_0$ , 在  $m$  维任务空间中为第  $i$  段建立局部坐标系

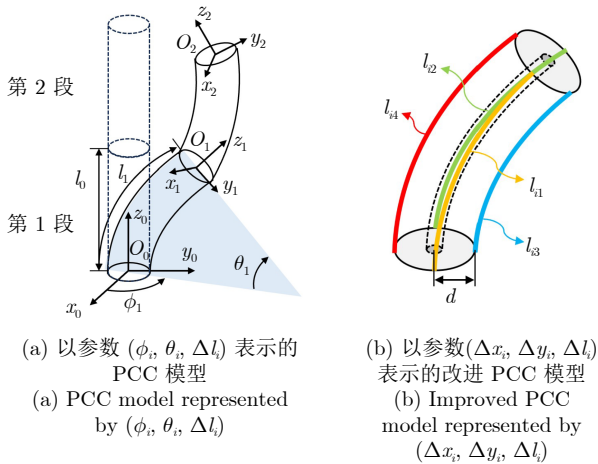


图 2 连续体机器人分段常曲率模型

Fig.2 Piecewise constant curvature model of continuum robots

$O_i$ , 该段的参数可由三元组  $(\phi_i, \theta_i, \Delta l_i)$  表示, 其中,  $\phi_i$  表示连续体机器人所在平面与  $xOz$  平面的转角,  $\theta_i$  表示圆弧的曲率角,  $\Delta l_i$  表示轴线弧长  $l_i$  与其初始弧长  $l_0$  的长度差. 当机器人处于笔直状态时,  $\phi_i$  可取任意值, 为了保持状态参数的唯一性, Della Santina 等<sup>[32]</sup> 对其做了改进, 如图 2(b) 所示, 连续体机器人第  $i$  段圆弧的中心轴线在笔直状态时的长度 (初始长度) 为  $l_0$ , 中心轴线所在平面与  $xOz$  平面的转角为  $\phi_i$ , 圆弧的曲率角为  $\theta_i$ , 中心轴线弧长  $l_i$  与其初始弧长  $l_0$  的长度差为  $\Delta l_i$ , 由四个具有恒定曲率的圆弧型驱动器来驱动, 每个驱动器与中心轴线的距离为  $d$ , 第  $i$  段的参数可由三元组  $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta l_i)$  表示, 第  $i$  段第  $j$  个驱动器的弧长为  $l_{ij}$ , 有:

$$\begin{cases} \Delta x_i = \frac{l_{i2} - l_{i1}}{2} = \theta_i d \cos \phi_i \\ \Delta y_i = \frac{l_{i4} - l_{i3}}{2} = \theta_i d \sin \phi_i \end{cases} \quad (1)$$

因此, 当在笔直状态时, 有唯一状态参数  $(0, 0, \Delta l_i)$ .

对于由  $n$  段具有恒定曲率的圆弧组成的连续体机器人, 状态参数可表示为  $\mathbf{q} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T$ , 其中第  $i$  段的状态参数  $\eta_i = [\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta l_i]$ , 第  $i-1$  段到第  $i$  段的齐次变换矩阵为  $\mathbf{T}_{i-1}^i$ , 末端执行器在局部坐标系  $O_n$  下的位置为  $\mathbf{p}_n \in \mathbf{R}^m$ , 其在基坐标系  $O_0$  下的位置  $\mathbf{p}_a \in \mathbf{R}^m$  可由式 (2) 计算得到.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_a \\ 1 \end{bmatrix} = \left( \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_{i-1}^i \right) \begin{bmatrix} \mathbf{p}_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

在  $t$  时刻, 给定驱动空间的输入 (即, 状态参数)  $\mathbf{q}(t) \in \mathbf{R}^{3n}$ , 任务空间的输出 (即, 末端执行器位置)  $\mathbf{p}_a(t) \in \mathbf{R}^m$  可由式 (3) 的位置级正运动学方程求解得到:

$$\mathbf{p}_a(t) = \mathcal{M}(\mathbf{q}(t)) \quad (3)$$

其中,  $\mathcal{M}(\cdot) : \mathbf{R}^{3n} \mapsto \mathbf{R}^m$  是由状态参数  $\mathbf{q}(t)$  确定的非线性映射. 为了简洁, 将对下文中的时变量进行简写, 例如将  $\mathbf{q}(t)$  简写为  $\mathbf{q}$ .

通过对式 (3) 求时间导数, 可得到以下速度级正运动学方程:

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathcal{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbf{R}^{m \times 3n}$  是连续体机器人的雅可比矩阵,  $\dot{\mathbf{p}}_a$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  分别是  $\mathbf{p}_a$ ,  $\mathbf{q}$  关于时间  $t$  的一阶导数. 对应的速度级逆运动学方程为:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \dot{\mathbf{p}}_a \quad (5)$$



其中,  $\mathbf{J}^\dagger \in \mathbf{R}^{3n \times m}$  是雅可比矩阵  $\mathbf{J}$  的伪逆.

本文聚焦于连续体机器人的跟踪控制问题, 即在给定期望的任务空间轨迹  $\mathbf{p}_d \in \mathbf{R}^m$  情况下, 求取合适的驱动信号  $\dot{\mathbf{q}}$  或者  $\mathbf{q}$ , 从而控制连续体机器人末端执行器沿期望轨迹运动. 若机器人的上述模型精确且参数已知, 则可根据位置级运动学方程 (3) 的逆映射或者速度级逆运动学方程 (5) 计算所需的驱动信号. 然而在实际中, 连续体机器人由于其柔性特点以及各种因素 (如自身重力、外界干扰和驱动耦合) 的影响, 往往会产生难以预测的形变, 从而难以精准建模, 进而导致基于解析建模的控制方法对于连续体机器人的适用性较低. 因此, 本文设计一种无模型控制方案来实现连续体机器人的运动控制.

## 2 控制方案设计

为实现连续体机器人的轨迹跟踪, 根据期望的笛卡尔轨迹  $\mathbf{p}_d \in \mathbf{R}^m$  生成对应的状态参数  $\mathbf{q}$ , 使得  $\mathcal{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}_a \rightarrow \mathbf{p}_d$ , 本文设计了如图 1 所示的控制方案. 该方案通过一种特殊的递归神经网络, 即零化神经网络<sup>[33]</sup> (ZNN), 求解逆运动学, 并使用递归最小二乘法更新雅可比矩阵伪逆估计值, 避免了每轮迭代中直接求解雅可比矩阵并计算其伪逆所造成的耗时<sup>[28]</sup>, 同时, 闭环控制也使得控制误差较小.

### 2.1 基于零化神经网络的逆运动学控制

首先, 为了记录机器人的实时轨迹跟踪控制过程, 将机器人末端执行器实际轨迹与期望轨迹的误差定义为以下向量值误差函数<sup>[34]</sup>:

$$\mathbf{e} = \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_a \quad (6)$$

为使  $\mathbf{e}$  全部元素  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 收敛至零, 可采用形如以下的零化神经网络设计公式<sup>[33]</sup>:

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = -\lambda\Phi(\mathbf{e}) \quad (7)$$

其中,  $\lambda > 0$  是收敛系数, 当其为常系数时, 称为定参 RNN (FP-RNN), 当其为时变系数时, 称为变参 RNN (VP-RNN).  $\Phi(\cdot) : \mathbf{R}^m \mapsto \mathbf{R}^m$  为待定义的激活函数向量. 将式 (6) 代入式 (7), 整理得:

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \dot{\mathbf{p}}_d + \lambda\Phi(\mathbf{e}) \quad (8)$$

其中,  $\dot{\mathbf{p}}_a$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_d$  分别是  $\mathbf{p}_a$ ,  $\mathbf{p}_d$  关于时间  $t$  的一阶导数. 将式 (8) 代入式 (5), 可求得:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger (\dot{\mathbf{p}}_d + \lambda\Phi(\mathbf{e})) \quad (9)$$

对于给定的轨迹  $\mathbf{p}_d$  及速度  $\dot{\mathbf{p}}_d$ , 结合传感器获取的末端执行器位置  $\mathbf{p}_a$ , 可求解微分方程 (即, 式 (9)) 得到对应位置的状态参数  $\mathbf{q}$ , 使连续体机器人

运动到指定位置.

国内外学者在零化神经网络的设计公式上做了大量研究, 不同模型在稳定性、收敛性等方面差异显著. 例如, 原始零化神经网络 (Original-ZNN)<sup>[21]</sup> 是一种 FP-RNN, 设计公式简单, 但控制精度不高. VP-CDNN<sup>[24]</sup> 的设计参数以指数级增长, 但其收敛时间仍然是无穷的, 在受到加性噪声的干扰下不能保证稳态误差收敛到 0. FTC-ZNN<sup>[25]</sup> 和 CVP-RNN<sup>[35]</sup> 在设计公式上加入了积分项, 使其能在有限时间内收敛并具有抗噪能力. 值得注意的是, FTC-ZNN 的激活函数向量中,  $g(t, e)$  是满足  $\dot{g}(t, e) = c\text{sign}(|e|)$ ,  $c > 0$  的时变参数, 将随时间无限增大, 当时间  $t$  增长至较大数值后, 会造成不稳定. CVP-RNN 受控制理论启发, 针对这一问题进行改进, 在设计公式上加入了误差的积分项, 并采用时变的设计参数  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$ , 证明了其有限时间收敛和抑制噪声性能. Xiao 等<sup>[36]</sup> 将 VP-RNN 推广到复数域, 用于求解时变复值逆矩阵问题, 提出了动态变参数增强 ZNN (Dynamic varying parameter enhanced ZNN, DVPEZNN). 其设计思想为, 当误差较大时, 设计参数应相对较大; 当误差相对较小时, 设计参数也应相应减小. 这样既可以保证模型的收敛速度, 又可以避免不必要的大参数. 设计公式为:

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = -\lambda \exp((\beta^t + \beta) \|\mathbf{e}\|_2) P(\mathbf{e}) \quad (10)$$

其中,  $\beta > 1$  是设计参数, 误差  $\mathbf{e}$  的二范数  $\|\mathbf{e}\|_2 = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_m^2}$ ,  $P(\cdot)$  为分段符号指数激活函数向量, 对  $\mathbf{e}$  中每个分量  $e$  分别计算:

$$p(e) = \begin{cases} \zeta_1 \psi^{r_1}(e) + \zeta_2 e \exp(|e| + 1), & |e| \leq 1 \\ \zeta_1 \psi^{r_2}(e) + \zeta_2 e \exp(|e| + 1), & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

式中参数  $\zeta_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ),  $0 < r_1 < 1$ ,  $r_2 > 1$ .  $\psi^{r_1}(e)$  和  $\psi^{r_2}(e)$  定义为:

$$\psi^q(e) = \begin{cases} e^q, & e > 0 \\ 0, & e = 0 \\ -|e|^q, & e < 0 \end{cases} \quad (12)$$

各零化神经网络模型总结如表 1 所示.

DVPEZNN 的设计思想与控制实际十分契合, 能够根据误差  $\mathbf{e}$  的取值范围选择不同的激活函数参数, 是 VP-RNN 模型的创新之作. 但其收敛时间仍然是无穷的, 受加性噪声干扰时不能保证稳态误差收敛到 0.

为此, 本文在 DVPEZNN 的基础上做了改进提升, 提出了改进 DVPEZNN (Adapted-DVPEZNN), 其设计公式为:

表 1 不同 ZNN 模型设计公式及激活函数对比  
Table 1 Comparison of design formulas and activation functions of different ZNN models

模型	设计公式	激活函数
Original-ZNN <sup>[21]</sup>	$-\lambda\Phi(\mathbf{e})$	$\phi(e) = e$
VP-CDNN <sup>[24]</sup>	$-\lambda\exp(t)\Phi(\mathbf{e})$	$\phi(e) = e$
FTC-ZNN <sup>[25]</sup>	$-\lambda\left(P(\mathbf{e}) + \int_0^t Q(\mathbf{e}(\tau))d\tau\right)$	$\begin{cases} p(e) = (k_1g^{\frac{1}{2}}(t, e) e ^{\frac{1}{2}} + k_2g(t, e) e )\text{sign}(e) \\ q(e) = (k_3g(t, e) + k_4g^2(t, e) e )\text{sign}(e) \end{cases}$
CVP-RNN <sup>[35]</sup>	$-\lambda(t)P(\mathbf{e}(t)) - \int_0^t \mu(\tau)Q(\mathbf{e}(\tau))d\tau$	$\begin{cases} p(e) = \frac{1}{\sigma} \exp( e ^\sigma) \psi^{1-\sigma}(e) \\ q(e) = \frac{1}{\sigma} \exp(2 e ^\sigma) \left( \psi^{1-\sigma}(e) + \frac{1-\sigma}{\sigma} \psi^{1-2\sigma}(e) \right) \end{cases}$
DVPEZNN <sup>[36]</sup>	$-\lambda \exp((\beta^t + \beta) \ \mathbf{e}\ _2) P(\mathbf{e})$	$p(e) = \begin{cases} \zeta_1 \psi^{r_1}(e) + \zeta_2 e \exp( e  + 1), &  e  \leq 1 \\ \zeta_1 \psi^{r_2}(e) + \zeta_2 e \exp( e  + 1), & \text{其他} \end{cases}$
Adapted-DVPEZNN	$-\lambda\left(\exp(\xi_1\beta^t\ \mathbf{e}\ _2)P(\mathbf{e}) + \int_0^t \exp(\xi_2\tau + \xi_3)Q(\mathbf{e})d\tau\right)$	$\begin{cases} p(e) = \begin{cases} \zeta_1 \psi^{r_1}(e) + \zeta_2 e \exp(\zeta_3 e  + 1), &  e  \leq 1 \\ \zeta_1 \psi^{r_2}(e) + \zeta_2 e \exp(\zeta_3 e  + 1), & \text{其他} \end{cases} \\ q(e) = \begin{cases} \zeta_4 \psi^{r_1}(e), &  e  \leq 1 \\ \zeta_4 \psi^{r_2}(e), & \text{其他} \end{cases} \end{cases}$

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = -\lambda\left(\exp(\xi_1\beta^t\|\mathbf{e}\|_2)P(\mathbf{e}) + \int_0^t \exp(\xi_2\tau + \xi_3)Q(\mathbf{e})d\tau\right) \quad (13)$$

其中,  $\xi_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\beta > 1$ ,  $P(\cdot)$  和  $Q(\cdot)$  为激活函数向量, 对  $\mathbf{e}$  中每个分量  $e$  分别计算:

$$\begin{cases} p(e) = \begin{cases} \zeta_1 \psi^{r_1}(e) + \zeta_2 e \exp(\zeta_3|e| + 1), & |e| \leq 1 \\ \zeta_1 \psi^{r_2}(e) + \zeta_2 e \exp(\zeta_3|e| + 1), & \text{其他} \end{cases} \\ q(e) = \begin{cases} \zeta_4 \psi^{r_1}(e), & |e| \leq 1 \\ \zeta_4 \psi^{r_2}(e), & \text{其他} \end{cases} \end{cases} \quad (14)$$

$\zeta_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $0 < r_1 < 1$ ,  $r_2 > 1$  为设计参数,  $\psi^{r_1}(e)$  和  $\psi^{r_2}(e)$  的定义同式 (12).

将误差函数 (6) 代入设计公式 (13), 整理得:

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \dot{\mathbf{p}}_d + \lambda\left(\exp(\xi_1\beta^t\|\mathbf{e}\|_2)P(\mathbf{e}) + \int_0^t \exp(\xi_2\tau + \xi_3)Q(\mathbf{e})d\tau\right) \quad (15)$$

将其代入式 (5) 中, 可得逆运动学方程:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger\left(\dot{\mathbf{p}}_d + \lambda\left(\exp(\xi_1\beta^t\|\mathbf{e}\|_2)P(\mathbf{e}) + \int_0^t \exp(\xi_2\tau + \xi_3)Q(\mathbf{e})d\tau\right)\right) \quad (16)$$

Adapted-DVPEZNN 相比于 DVPEZNN, 主

要有四点改进: 1) 受 CVP-RNN<sup>[35]</sup> 启发, 在设计函数中增加对误差  $\mathbf{e}$  的积分项  $\int_0^t \exp(\xi_2\tau + \xi_3)Q(\mathbf{e})d\tau$ ; 2) 在激活函数向量中增加参数  $\zeta_3$ , 控制激活函数的幅值范围; 3) 积分项的激活函数向量  $Q(\mathbf{e})$  参照  $P(\mathbf{e})$  设置, 但不设置指数项, 避免积分项过大引发超调; 4) 考虑到 DVPEZNN 设计公式的  $\beta^t + \beta$  中,  $\beta^t$  项所起的作用显著高于  $\beta$  项, 为模型简化起见, 仅保留  $\beta^t$  项.

Adapted-DVPEZNN 的设计参数不随时间无限增长, 能始终保持模型长时间稳定, 同时, 误差积分项使得模型具备有限时间内收敛并有效抑制噪声的良好性能. 理论证明将在后文呈现.

## 2.2 基于递归最小二乘法的雅可比矩阵伪逆估计

由于式 (3) 中的机器人状态参数  $\mathbf{q}$  与末端执行器位置  $\mathbf{p}_a$  之间的非线性映射  $\mathcal{M}(\cdot)$  是未知的, 雅可比矩阵  $\mathbf{J}$  不能通过定义式  $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathcal{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$  求得. 因此, 需要设计一种方法来估计  $\mathbf{J}$  的值. 注意到逆运动学 (即, 式 (9)) 中涉及雅可比矩阵的伪逆  $\mathbf{J}^\dagger$ , 而在每个时间步均对  $\mathbf{J} \in \mathbf{R}^{m \times 3n}$  计算伪逆无疑是非常耗时的. 为此, 本文采用递归最小二乘法 (RLS), 直接对  $\mathbf{J}^\dagger$  计算估计值  $\hat{\mathbf{J}}^\dagger$ . 根据式 (5), 有关系式:

$$\dot{\mathbf{q}}^T = \dot{\mathbf{p}}_a^T \mathbf{J}^{\dagger T} \quad (17)$$

令  $\mathbf{X} = \mathbf{J}^{\dagger T}$ , 即有:

$$\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{X}^T \quad (18)$$

定义误差矢量  $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\mathbf{q}}^T - \dot{\mathbf{p}}_a^T \hat{\mathbf{X}}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{3n}]^T$ , 其中  $\hat{\mathbf{X}}$  表示  $\mathbf{X}$  的估计值. 为得到该估计值, 可设计以下优化问题:

$$\begin{aligned} \min f &= \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{3n} \varepsilon_i^2 = \\ & \left( \dot{\boldsymbol{q}}^T - \dot{\boldsymbol{p}}_a^T \hat{\boldsymbol{X}} \right)^T \left( \dot{\boldsymbol{q}}^T - \dot{\boldsymbol{p}}_a^T \hat{\boldsymbol{X}} \right) = \\ & \dot{\boldsymbol{q}} \dot{\boldsymbol{q}}^T - \hat{\boldsymbol{X}}^T \dot{\boldsymbol{p}}_a \dot{\boldsymbol{q}}^T - \dot{\boldsymbol{q}} \dot{\boldsymbol{p}}_a^T \hat{\boldsymbol{X}} + \hat{\boldsymbol{X}}^T \dot{\boldsymbol{p}}_a \dot{\boldsymbol{p}}_a^T \hat{\boldsymbol{X}} \\ \text{s.t. } \dot{\boldsymbol{q}} &= \hat{\boldsymbol{X}}^T (\dot{\boldsymbol{p}}_d + \lambda \Phi(\boldsymbol{e})) \end{aligned} \quad (19)$$

代价函数  $f$  的最小值在其极值点处取得, 令  $\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{X}}} = 0$ , 可解得:

$$\hat{\boldsymbol{X}} = (\dot{\boldsymbol{p}}_a \dot{\boldsymbol{p}}_a^T)^{-1} \dot{\boldsymbol{p}}_a \dot{\boldsymbol{q}}^T \quad (20)$$

注意到  $\hat{\boldsymbol{X}}$  的变化是连续的过程, 时间步  $k$  的  $\hat{\boldsymbol{X}}_k$  可能与前面时间步的计算结果  $\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}, \dots, \hat{\boldsymbol{X}}_1$  有关, 且借助前面时间步的计算结果来推算当前时间步的  $\hat{\boldsymbol{X}}_k$  能更接近连续体机器人模型本身. 因此, 可将式 (20) 推广为:

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k = \left( \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k}^T \right)^{-1} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{Q}}_k^T \quad (21)$$

其中,  $\dot{\boldsymbol{P}}_{a,k} = [\sqrt{\gamma} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1} \quad \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k}]$ ,  $\dot{\boldsymbol{Q}}_k = [\sqrt{\gamma} \dot{\boldsymbol{Q}}_{k-1} \quad \dot{\boldsymbol{q}}_k]$  是时间步  $k$  及其之前的值组成的向量,  $\gamma \in (0, 1]$  是遗忘因子, 代表前一时间步的向量在当前时间步的权重. 则有:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k}^T &= [\sqrt{\gamma} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1} \quad \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k}] \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1}^T \\ \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k}^T \end{bmatrix} = \\ & \gamma \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1}^T + \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k}^T \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{Q}}_k^T &= [\sqrt{\gamma} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1} \quad \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k}] \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma} \dot{\boldsymbol{Q}}_{k-1}^T \\ \dot{\boldsymbol{q}}_k^T \end{bmatrix} = \\ & \gamma \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1} \dot{\boldsymbol{Q}}_{k-1}^T + \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{q}}_k^T \end{aligned} \quad (23)$$

将式 (22) 和 (23) 代入式 (21), 并令  $\boldsymbol{K}_k = (\dot{\boldsymbol{P}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k}^T)^{-1}$ , 可得:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{X}}_k &= \left( \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k}^T \right)^{-1} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{Q}}_k^T = \\ & \left( \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k}^T \right)^{-1} \left( \gamma \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1} \dot{\boldsymbol{Q}}_{k-1}^T + \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{q}}_k^T \right) = \\ & \left( \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k}^T \right)^{-1} \left( \left( \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k}^T - \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k}^T \right) \times \right. \\ & \left. \hat{\boldsymbol{X}}_{k-1} + \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{q}}_k^T \right) = \\ & \hat{\boldsymbol{X}}_{k-1} + \boldsymbol{K}_k \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k} \left( \dot{\boldsymbol{q}}_k^T - \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k}^T \hat{\boldsymbol{X}}_{k-1} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

上式表明, 当前时间步的  $\hat{\boldsymbol{X}}_k$  可由上一时间步的  $\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}$  递归求得.

式 (21) 中仍然存在  $\dot{\boldsymbol{P}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k}^T$  的矩阵求逆, 根据 Sherman-Morrison-Woodbury 公式<sup>[37]</sup>, 可得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_k &= \left( \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k}^T \right)^{-1} = \\ & \left( \gamma \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1}^T + \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k}^T \right)^{-1} = \\ & \left( \gamma \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1}^T \right)^{-1} - \left( \gamma \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1}^T \right)^{-1} \times \\ & \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k} \left( \boldsymbol{I} + \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k}^T \left( \gamma \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1}^T \right)^{-1} \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k} \right)^{-1} \times \\ & \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k}^T \left( \gamma \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1} \dot{\boldsymbol{P}}_{a,k-1}^T \right)^{-1} = \\ & \frac{1}{\gamma} \left( \boldsymbol{K}_{k-1} - \frac{\boldsymbol{K}_{k-1} \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k} \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k}^T \boldsymbol{K}_{k-1}}{\gamma + \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k}^T \boldsymbol{K}_{k-1} \dot{\boldsymbol{p}}_{a,k}} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

结合式 (24)、(25), 可计算得到  $\boldsymbol{J}^\dagger$  的估计值  $\hat{\boldsymbol{X}}$ , 并结合逆运动学 (即, 式 (9)) 实现连续体机器人的轨迹跟踪.

### 2.3 理论证明

首先证明 Adapted-DVPEZNN 模型设计公式 (13) 的收敛性.

**定理 1.** 对于式 (9) 所描述连续体机器人运动学控制问题, Adapted-DVPEZNN 模型是全局渐近稳定的, 且能在有限时间  $t_f$  收敛到 0, 收敛时间:

$$t_f \leq \frac{1}{2\lambda \left( m_P + \frac{m_Q C}{\xi_2} \right)} \ln \left( \frac{2V(\boldsymbol{e}(0))}{\epsilon^2} \right) \quad (26)$$

其中,  $V(\cdot)$  是李雅普诺夫函数,  $m_P, m_Q > 0$ ,  $C$  为满足  $\exp(\xi_2 t + \xi_3) \leq C$  的常数.

**证明.** 定义李雅普诺夫函数:

$$V(\boldsymbol{e}) = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{e}\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 \quad (27)$$

显然有  $V(\boldsymbol{e}) \geq 0$ , 当且仅当  $\boldsymbol{e} = 0$  时,  $V(\boldsymbol{e}) = 0$ . 其对时间  $t$  的导数为:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\boldsymbol{e})}{dt} &= \sum_i e_i \frac{de_i}{dt} = \\ & -\lambda \left( \exp(\xi_1 \beta^t \|\boldsymbol{e}\|_2) \sum_i e_i P(e_i) + \right. \\ & \left. \sum_i e_i \int_0^t \exp(\xi_2 \tau + \xi_3) Q(e_i) d\tau \right) \end{aligned} \quad (28)$$

根据激活函数  $P(\cdot)$  和  $Q(\cdot)$  的定义, 显然均为奇函数, 有:

$$e_i P(e_i) \geq 0, \quad e_i Q(e_i) \geq 0 \quad (29)$$

$e_i \neq 0$  时,  $e_i P(e_i) > 0, e_i Q(e_i) > 0$ , 有:

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} < 0 \quad (30)$$

因此, 系统是全局渐近稳定的.

令  $m_P, m_Q > 0$ , 假定:

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} \leq -\lambda \left( m_P \exp(\xi_1 \beta^t \|\mathbf{e}\|_2) \|\mathbf{e}\|_2^2 + m_Q \int_0^t \exp(\xi_2 \tau + \xi_3) d\tau \|\mathbf{e}\|_2^2 \right) \quad (31)$$

注意到对于任意的  $t \geq 0$ ,  $\exp(\xi_1 \beta^t \|\mathbf{e}\|_2) \geq 1$  成立. 对于积分项, 有不等式:

$$\int_0^t \exp(\xi_2 \tau + \xi_3) d\tau \leq \frac{\exp(\xi_2 t + \xi_3) - \exp(\xi_3)}{\xi_2} \leq \frac{\exp(\xi_2 t + \xi_3)}{\xi_2} \quad (32)$$

代入式 (31) 中, 有:

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} \leq -\lambda \|\mathbf{e}\|_2^2 \left( m_P + m_Q \frac{\exp(\xi_2 t + \xi_3)}{\xi_2} \right) \quad (33)$$

设  $\exp(\xi_2 t + \xi_3) \leq C$ , 那么:

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} \leq -\lambda \|\mathbf{e}\|_2^2 \left( m_P + \frac{m_Q C}{\xi_2} \right) = -2\lambda \left( m_P + \frac{m_Q C}{\xi_2} \right) V(\mathbf{e}) \quad (34)$$

求解该微分不等式, 可得:

$$V(\mathbf{e}(t)) \leq V(\mathbf{e}(0)) \exp \left( -2\lambda \left( m_P + \frac{m_Q C}{\xi_2} \right) t \right) \quad (35)$$

对于所有  $t \geq t_f$ ,  $\frac{dV}{dt}$  收敛, 有  $\|\mathbf{e}(t)\|_2 \leq \epsilon$ , 其中  $\epsilon > 0$  是一个小的阈值. 此时  $V(\mathbf{e}(t)) \leq \epsilon^2/2$ . 要满足该条件, 应当有:

$$\exp \left( -2\lambda \left( m_P + \frac{m_Q C}{\xi_2} \right) t_f \right) \leq \frac{\epsilon^2}{2V(\mathbf{e}(0))} \quad (36)$$

因此, 收敛时间:

$$t_f \leq \frac{1}{2\lambda \left( m_P + \frac{m_Q C}{\xi_2} \right)} \ln \left( \frac{2V(\mathbf{e}(0))}{\epsilon^2} \right) \quad (37)$$

□

下面给出递归最小二乘法 (式 (24)、(25)) 的收敛性证明.

**定理 2.** 在真实值  $\mathbf{X}_k$  的变化足够缓慢的情况下,  $\|\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_k\|$  被控制在某个小范围内, 递归最小二乘法 (24)、(25) 是稳定的. 当时间步  $k \geq \frac{\ln(V_0/\epsilon)}{\eta}$  时, 系统达到稳定状态. 其中  $\eta \ll 1$  是李雅普诺夫函数  $V_k$  的变化率.

**证明.** 定义估计误差为:

$$\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{X}}_k - \mathbf{X}_k \quad (38)$$

可构造李雅普诺夫函数  $V_k$  为:

$$V_k = \mathbf{e}_k^T \mathbf{K}_k^{-1} \mathbf{e}_k \quad (39)$$

在合理的初始化下, 可保证  $\mathbf{K}_k$  是正定矩阵, 有  $V_k \geq 0$ .

为了分析李雅普诺夫函数  $V_k$  的变化, 计算其在第  $k$  步的增量:

$$\Delta V_k = V_k - V_{k-1} = \mathbf{e}_k^T \mathbf{K}_k^{-1} \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k-1}^T \mathbf{K}_{k-1}^{-1} \mathbf{e}_{k-1} \quad (40)$$

利用更新公式 (24), 有:

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k-1} - \mathbf{K}_k \dot{\mathbf{p}}_{a,k} \boldsymbol{\varepsilon}_k + (\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_k) \quad (41)$$

其中,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \dot{\mathbf{q}}_k^T - \dot{\mathbf{p}}_{a,k}^T \hat{\mathbf{X}}_k \quad (42)$$

将误差更新代入, 得:

$$\Delta V_k = (\mathbf{e}_{k-1} - \mathbf{K}_k \dot{\mathbf{p}}_{a,k} \boldsymbol{\varepsilon}_k + (\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_k))^T \mathbf{K}_k^{-1} \times (\mathbf{e}_{k-1} - \mathbf{K}_k \dot{\mathbf{p}}_{a,k} \boldsymbol{\varepsilon}_k + (\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_k)) - \mathbf{e}_{k-1}^T \mathbf{K}_{k-1}^{-1} \mathbf{e}_{k-1} \quad (43)$$

上式展开可得:

$$\Delta V_k = \underbrace{-\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \frac{\dot{\mathbf{p}}_{a,k}^T \mathbf{K}_k \dot{\mathbf{p}}_{a,k}}{\gamma + \dot{\mathbf{p}}_{a,k}^T \mathbf{K}_{k-1} \dot{\mathbf{p}}_{a,k}} + 2(\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_k)^T \mathbf{K}_k^{-1} \mathbf{e}_{k-1}}_B + \underbrace{(\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_k)^T \mathbf{K}_k^{-1} (\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_k)}_C \quad (44)$$

其中, 项  $A \leq 0$  恒成立, 表示观测误差减小的贡献; 项  $B$  反映参数变化引起的误差变化; 项  $C$  反映参数变化对系统稳定性的直接影响.

假设系统的参数变化是有界的, 即有:

$$\|\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_k\| \leq \delta \quad (45)$$

使得:

$$|B| + |C| \leq |A| \quad (46)$$

则可以保证  $\Delta V_k \leq 0$ , 使系统稳定. 其中  $\delta > 0$  是很小的常数, 表示参数的变化速率较慢.

假设  $\Delta V_k \leq -\eta V_k$ , 其中  $\eta$  是李雅普诺夫函数  $V_k$  的变化率, 其决定收敛的速度. 即有:

$$V_{k+1} \leq (1 - \eta) V_k \quad (47)$$

迭代应用上式, 从初始时间步 0 开始, 到时间

步  $k$ , 有:

$$V_k \leq (1 - \eta)^k V_0 \quad (48)$$

达到稳定状态时, 存在  $\epsilon > 0$ , 使得  $V_k \leq \epsilon$ , 可以得到如下不等式:

$$(1 - \eta)^k V_0 \leq \epsilon \quad (49)$$

整理得:

$$k \geq \frac{\ln(\epsilon/V_0)}{\ln(1 - \eta)} \quad (50)$$

当  $\eta \ll 1$  时,  $\ln(1 - \eta) \approx -\eta$ , 可以近似得到:

$$k \geq \frac{\ln(\epsilon/V_0)}{-\eta} = \frac{\ln(V_0/\epsilon)}{\eta} \quad (51)$$

即, 当时间步  $k \geq \frac{\ln(V_0/\epsilon)}{\eta}$  时, 系统达到稳定状态.  $\square$

### 3 结果与分析

本节分别在仿真环境和实体样机上对所提出的控制方案进行验证.

#### 3.1 仿真验证

首先给定控制方案的参数值. 任务总时长  $T_d = 4$  s. 收敛系数  $\lambda = 50$ , 三段连续体机器人的初始状态参数  $\mathbf{q}(0) = [12, 0, 0, -12, 0, 0, 12, 0, 0]^T$  mm. Adapted-DVPEZNN 模型的参数是经过多轮实验确定的较优参数, 参数为  $\beta = 2$ ,  $\xi_1 = 10$ ,  $\xi_2 = 1$ ,  $\xi_3 = 5$ ,  $\zeta_1 = 1$ ,  $\zeta_2 = 1$ ,  $\zeta_3 = 1$ ,  $\zeta_4 = 0.1$ ,  $r_1 = 0.8$ ,  $r_2 = 3$ . 其余模型的参数是其论文的实验参数, Original-ZNN<sup>[21]</sup>、VP-CDNN<sup>[24]</sup> 无参数, FTC-ZNN<sup>[25]</sup> 的参数  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $k_3 = 2$ ,  $k_4 = 5$ ,  $g(t, e) = t$ . CVP-RNN<sup>[35]</sup> 的参数  $\sigma = 0.5$ , DVPEZNN<sup>[36]</sup> 的参数与 Adapted-DVPEZNN 的相同. 式 (24) 中矩阵  $\mathbf{K}$  初

始化为单位矩阵.  $\hat{\mathbf{X}}$  矩阵的初始化采用增量法, 通过给  $\mathbf{q}(0)$  向量的第  $i$  个元素一个微小的增量  $\Delta q$ , 测量末端传感器的位移增量  $\Delta \mathbf{p}_i$ , 可估计雅可比矩阵  $\mathbf{J}$  的第  $i$  列为  $\mathbf{J}_i(0) = \frac{\Delta \mathbf{p}_i}{\Delta q}$ , 再对  $\mathbf{J}$  计算伪逆并赋初值  $\hat{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{J}^\dagger(0)$ . 对于公式中涉及的积分项, 本文采用显式欧拉法对其离散化求解, 离散时间取一个微小的值  $\Delta t = 10^{-4}$  s, 使相邻时间步的数据缓慢变化, 保持系统的稳定状态. 本文的连续体机器人任务空间为三维笛卡尔空间, 期望轨迹定义为  $\mathbf{p}_d = \mathbf{p} + \mathbf{p}_d(0)$ , 其中  $\mathbf{p}$  定义为:

$$\alpha \begin{bmatrix} \cos\left(4\pi \sin^2\left(\frac{\pi t}{2T_d}\right)\right) \cos\left(2\pi \sin^2\left(\frac{\pi t}{2T_d}\right)\right) - 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(4\pi \sin^2\left(\frac{\pi t}{2T_d}\right)\right) \sin\left(2\pi \sin^2\left(\frac{\pi t}{2T_d}\right)\right) \\ \frac{1}{2} \cos\left(4\pi \sin^2\left(\frac{\pi t}{2T_d}\right)\right) \sin\left(2\pi \sin^2\left(\frac{\pi t}{2T_d}\right)\right) \end{bmatrix} \quad (52)$$

其中, 缩放因子  $\alpha = 120$  mm, 用于对期望轨迹的大小进行缩放, 确保连续体机器人的关节状态参数  $\mathbf{q}$  处于合理的范围区间.  $\mathbf{p}_d(0) = [p_x, p_y, p_z]^T$  表示末端执行器初始位置.

利用所提出的控制方案, 基于 Adapted-DVP-EZNN 模型的仿真结果如图 3 所示. 图 3(a) 中, 连续体机器人末端执行器的实际轨迹与给定的期望轨迹基本重合. 图 3(b) 展示了三个坐标轴方向上的跟踪误差变化, 在轨迹跟踪任务过程中, 跟踪误差出现少许波动, 但最终仍然能收敛至零. 跟踪误差出现尖锐波动的原因在于设计公式的积分项出现超调, 在轨迹的拐点处最为明显, 但其最大误差不超过 0.1 mm, 在跟踪任务中是可以接受的. 跟踪误差, 即均方根误差 (Root mean square error, RMSE)

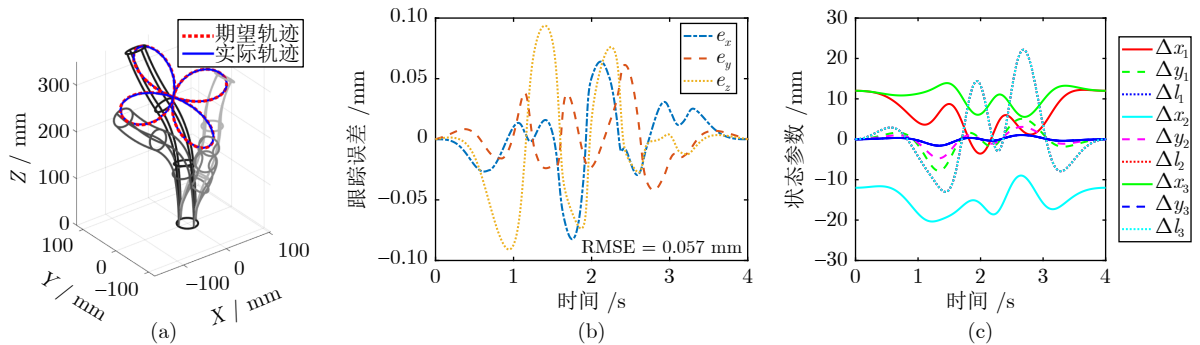


图 3 仿真跟踪结果 ((a) 采用三段连续体机器人, 利用所提出的基于改进动态变参数增强零化神经网络的控制方案仿真得到的轨迹; (b) 跟踪误差变化  $\mathbf{e} = [e_x, e_y, e_z]^T$ ; (c) 状态参数  $\mathbf{q}$  的变化过程)

Fig.3 Simulation tracking results ((a) Trajectory of the three-segment continuum robot using the proposed control scheme based on Adapted-DVPEZNN; (b) Tracking error  $\mathbf{e} = [e_x, e_y, e_z]^T$ ; (c) The change of state parameter  $\mathbf{q}$ )



$\|e\|_2$  为 0.057 mm. 其中,  $\|e\|_2 = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}$ ,  $e_x, e_y, e_z$  分别是末端执行器的实际位置与期望轨迹在  $x, y, z$  三轴上的误差. 图 3(c) 记录了状态参数  $q$  的变化过程. 以上仿真结果验证了所提出的控制方案的可行性.

为了体现所提出的 Adapted-DVPEZNN 模型的优势, 本文采用上述提到的多种 ZNN 模型进行仿真实验, 结果如图 4 所示, 并将结果量化统计如表 2 所示. 从图 4 来看, Original-ZNN 模型的跟踪误差最大, 其余的零化神经网络模型均能够有效减少连续体机器人的轨迹跟踪误差, 且 Adapted-DVPEZNN 模型的跟踪误差始终比其余模型的更低. 从表 2 来看, 各模型的控制能耗相差不大, 且本文所改进的 Adapted-DVPEZNN 模型在跟踪误差量化指标上具有最优的结果, 体现了所提出方法的精确性.

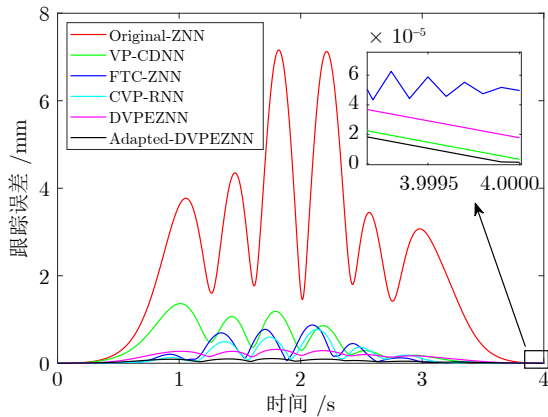


图 4 ZNN 模型在无噪声下的跟踪误差

Fig.4 Tracking errors of ZNN models without noise

在实际的控制过程中, 噪声通常是难以避免的, 而且可能对轨迹造成一定的影响, 使跟踪误差增大. 考虑噪声干扰时, 式 (9) 可进一步表示为:

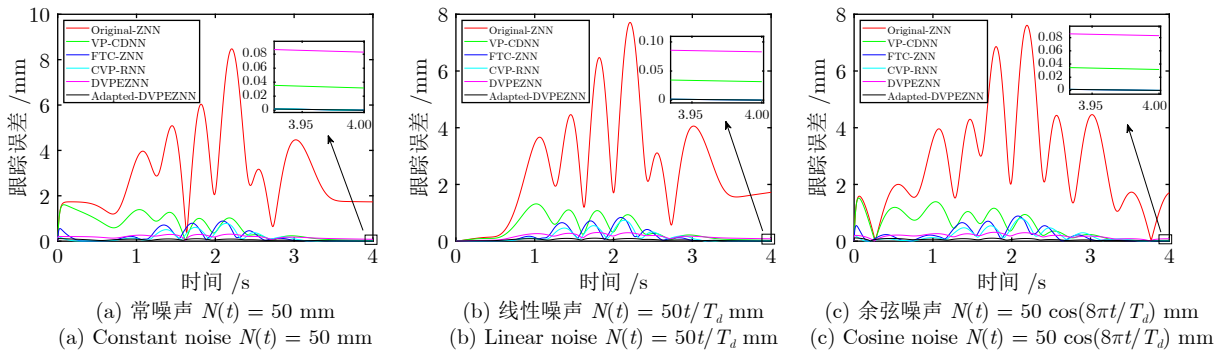


图 5 ZNN 模型受噪声影响时的跟踪误差

Fig.5 Tracking errors of ZNN models with noise

表 2 ZNN 模型在无噪声下的定量分析  
Table 2 Quantitative analysis of ZNN models without noise

模型	跟踪误差 (mm)	控制能耗 (s)
Original-ZNN <sup>[21]</sup>	2.970	7.290
VP-CDNN <sup>[24]</sup>	0.580	7.298
FTC-ZNN <sup>[25]</sup>	0.310	7.178
CVP-RNN <sup>[35]</sup>	0.259	7.677
DVPEZNN <sup>[36]</sup>	0.177	<b>7.141</b>
<b>Adapted-DVPEZNN</b>	<b>0.057</b>	7.382

$$\dot{q} = J^\dagger (\dot{p}_d + \lambda \Phi(e) + N) \quad (53)$$

其中,  $N$  是加性噪声, 本文对上述提到的多种 ZNN 模型加以常噪声  $N(t) = 50$  mm、线性噪声  $N(t) = 50t/T_d$  mm、余弦噪声  $N(t) = 50 \cos(8\pi t/T_d)$  mm, 分别进行仿真验证对比. 在噪声影响下, 各 ZNN 模型的测试结果如图 5 所示. 各 VP-RNN 的跟踪误差均小于 Original-ZNN, 且 Adapted-DVPEZNN 的跟踪误差最小. 此外, VP-CDNN 和 DVPEZNN 存在残余误差, 而 FTC-ZNN、CVP-RNN 和 Adapted-DVPEZNN 设计公式 (见表 1) 中的积分项能够有效减小累加误差, 所提出的 Adapted-DVPEZNN 能够使误差在有限时间内收敛到 0. 表 3 对此进行了定量比较, 可以看到, Adapted-DVPEZNN 在不同噪声的影响下, 跟踪误差均能比其余 VP-RNN 模型小一个量级, 在 DVPEZNN 的基础上有了显著的性能提高, 抑制噪声的性能较好, 体现了所提出方法的鲁棒性.

对于雅可比矩阵伪逆估计的参数更新, 本文将递归最小二乘法与增量法、双模型法进行了对比.  $\hat{X}$  矩阵的初始化采用了增量法, 上文已提及, 这里不再赘述. 双模型法为雅可比矩阵的逆阵参数更新设置了一个相同结构的 ZNN. 定义向量值误差函数:

表 3 ZNN 模型受噪声影响时的定量分析

Table 3 Quantitative analysis of ZNN models with noise

模型	常噪声 (mm)	线性噪声 (mm)	余弦噪声 (mm)
Original-ZNN <sup>[21]</sup>	3.448	3.137	3.313
VP-CDNN <sup>[24]</sup>	0.786	0.567	0.719
FTC-ZNN <sup>[25]</sup>	0.326	0.291	0.326
CVP-RNN <sup>[35]</sup>	0.265	0.243	0.274
DVPEZNN <sup>[36]</sup>	0.200	0.181	0.192
<b>Adapted-DVPEZNN</b>	<b>0.064</b>	<b>0.056</b>	<b>0.062</b>

$$\varepsilon = \dot{q} - \hat{X}\dot{p}_a \quad (54)$$

为使  $\varepsilon$  全部元素  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 收敛至零, 参照式 (7), 设计公式可表示为:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\lambda\Phi(\varepsilon) \quad (55)$$

其中,  $\lambda > 0$  是收敛系数, 激活函数向量  $\Phi(\cdot)$  与估计逆运动学解的 ZNN 形式相同. 将式 (54) 代入式 (55), 整理得:

$$\dot{\hat{X}} = \left( \ddot{q} - \hat{X}\ddot{p}_a + \lambda\Phi(\varepsilon) \right) \dot{p}_a^\dagger \quad (56)$$

其中,  $\ddot{p}_a$  是  $p_a$  关于时间  $t$  的二阶导数,  $\dot{p}_a^\dagger$  是  $p_a$  的伪逆. 可通过求解以上微分方程, 实现参数  $\hat{X}$  的在线更新.

使用上述三种雅可比矩阵伪逆估计的参数更新方法, 仿真实验结果如表 4 所示, 增量法的跟踪误差最小, 而双模型法和递归最小二乘法的跟踪误差接近, 递归最小二乘法的控制能耗最小, 这一点对于参数的在线估计尤为重要, 体现了系统良好的实时性.

表 4 参数更新方法的定量分析

Table 4 Quantitative analysis of parameter update methods

方法	跟踪误差 (mm)	控制能耗 (s)
增量法	<b>0.033</b>	33.658
双模型法	0.058	1 356.239
<b>递归最小二乘法</b>	0.057	<b>7.689</b>

控制系统中有参数  $\lambda$  和  $\gamma$ , 表 5 和表 6 展示了其对 Adapted-DVPEZNN 控制误差的影响. 随收敛系数  $\lambda$  的增大, 跟踪误差能显著减小, 但  $\lambda$  过大时会放大噪声引发超调, 可能使跟踪轨迹发散. 遗忘因子  $\gamma$  的增大能使递归最小二乘法保留更多以前时间步的特征, 从而减小估计误差, 但当  $\gamma$  值接近于 1 时, 以前时间步的特征在当前时间步所占的比重过大, 不能有效聚焦于当前时间步的特征, 也会使误差增大. 在离散状态下,  $\lambda$  和  $\gamma$  对于控制能耗

表 5 收敛系数  $\lambda$  定量分析Table 5 Quantitative analysis of convergence factor  $\lambda$ 

收敛系数 $\lambda$	跟踪误差 (mm)	控制能耗 (s)
1	0.150	7.872
3	0.122	7.786
5	0.110	7.830
10	0.093	7.607
30	0.068	7.426
50	0.057	7.382

表 6 遗忘因子  $\gamma$  定量分析Table 6 Quantitative analysis of forgetting factor  $\gamma$ 

遗忘因子 $\gamma$	跟踪误差 (mm)	控制能耗 (s)
0.1	$5.762 \times 10^{-2}$	7.454
0.3	$5.757 \times 10^{-2}$	7.508
0.5	$5.759 \times 10^{-2}$	7.408
0.7	$5.751 \times 10^{-2}$	7.368
0.9	$5.711 \times 10^{-2}$	7.382
1.0	$5.939 \times 10^{-2}$	7.779

的影响不大.

在实际的任务中, 任务总时长  $T_d$  通常较长, 且离散时间  $\Delta t$  受限于传感器系统的测量频率. 本文在仿真中模拟实际任务, 令  $T_d = 180$  s,  $\Delta t = 0.1$  s, 对上述提到的 ZNN 进行性能验证, 跟踪误差曲线如图 6 所示. Original-ZNN 的跟踪误差为 3.470 mm, 其余各变参 RNN 的设计参数随时间指数级增长, 在长时间的任务中无法保持稳定, 造成跟踪轨迹发散. 所提出的 Adapted-DVPEZNN, 通过选择合适的参数 (调整为  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1.01$ ,  $\xi_1 = 0.02$ ,  $\xi_2 = 0.01$ ,  $\xi_3 = 0.1$ ,  $\zeta_2 = 0.2$ ,  $\zeta_3 = 0.1$ ,  $r_2 = 2$ ), 能够很好地完成轨迹跟踪任务, 跟踪误差为 1.204 mm, 且控制能耗约为 0.505 s, 远小于任务总时长, 即模型具备实

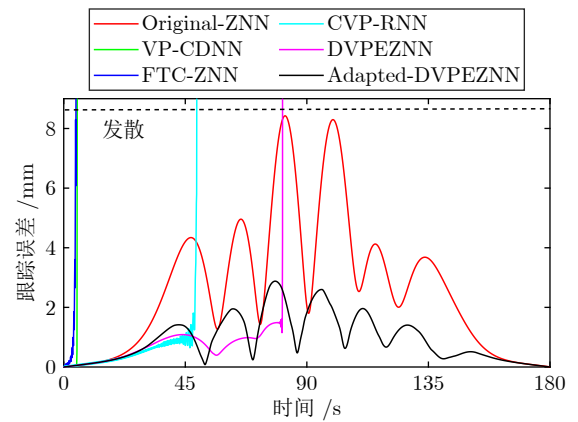


图 6 仿真长时间任务的跟踪误差

Fig. 6 Simulation of tracking errors in long-term task

时控制的能力, 彰显了所提出模型的卓越性能.

### 3.2 实验验证

实机实验采用绳驱连续体机器人样机对所提出的方法进行实验验证, 该机器人样机由 3 个关节状态参数 (电机旋转角度) 控制多个电机, 即  $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^3$ , 由于机器人硬件设备的限制, 采用单节连续体机器人对所提控制方案进行验证. 机器人样机驱动绳索间存在驱动耦合、传递误差 (如摩擦、迟滞) 等误差因素, 所提控制方案基于估计的模型实现控制, 将这些误差因素隐含在模型中, 从而可避免其对机器人控制的影响. 实机实验模拟实际的长时间任务, 任务总时长  $T_d = 180$  s, 所选择的参数值与对应的仿真实验参数值相同, 即,  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1.01$ ,  $\xi_1 = 0.02$ ,  $\xi_2 = 0.01$ ,  $\xi_3 = 0.1$ ,  $\zeta_1 = 1$ ,  $\zeta_2 = 0.2$ ,  $\zeta_3 = 0.1$ ,  $\zeta_4 = 0.1$ ,  $r_1 = 0.8$ ,  $r_2 = 2$ .

利用所提出的控制方案, 基于 Adapted-DVP-EZNN 模型的实验结果如图 7 所示. 图 7(a) 展示了实验过程中的连续体机器人的末端轨迹. 图 7(b) 展示了三个坐标轴方向上的跟踪误差变化, 跟踪误差为 0.854 mm. 图 7(c) 记录了状态参数  $\mathbf{q}$  的变化过程. 实机实验的反馈控制来源于摄像机的视觉图像识别机械臂末端执行器中心点位置, 通过视觉检测得到末端位置  $\mathbf{p}_a$ , 并通过相邻两次检测的末端位置进行差分, 计算得到末端速度  $\dot{\mathbf{p}}_a$ , 二者分别作为 VP-RNN 逆运动学控制和 RLS 雅可比伪逆估计的控制输入量. 视觉传感器不可避免地存在噪声, 在轨迹拐点处跟踪误差会出现较尖锐波动, 模型的估计值因此产生偏差, 但最终 (约 150 s 后) 能够将误差显著降低.

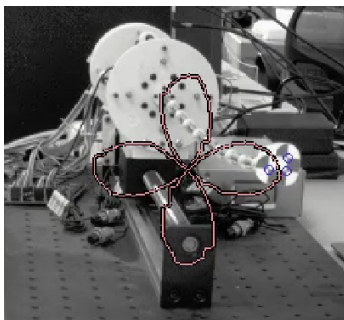
由于跟踪控制实验的采样时间间隔  $\Delta t = 0.1$  s, 而每一个时间间隔里, 算法执行的平均耗时约为

1.8 ms, 算法的计算耗时远小于采样时间间隔, 即, 算法能够在每个采样时间步内完成计算, 可以实现连续体机器人运动实时控制.

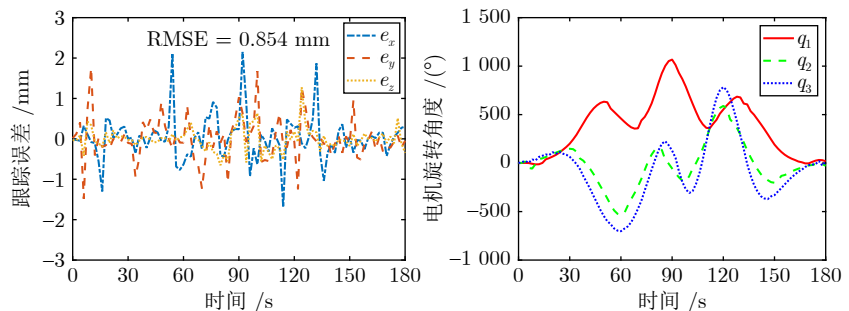
实验中的跟踪误差偏大, 这是由多种原因导致的. 首先, 实验中使用的传感器 (Micron tracker H3-60) 的测量精度有限, 对静态目标的位置测量误差为 0.2 mm; 其次, 受限于传感器系统的测量频率, 实验过程中的控制信号频率仅为 10 Hz, 这在一定程度上也限制了实验中跟踪精度; 最后, 连续体机器人样机因摩擦和迟滞等因素存在运动的精细度和平滑度上的欠缺. 考虑到上述因素, 本文方法在连续体机器人跟踪控制实验中取得的跟踪误差是合理且可接受的.

对上述提到的 ZNN 在实机上进行对比验证, 轨迹如图 8 所示, 并统计得到的跟踪误差如图 9. 图 8(a) 使用 Original-ZNN 得到轨迹的跟踪误差为 1.307 mm. 图 8(b) ~ 图 8(e) 各变参 RNN 的设计参数随时间指数级增长, 在长时间的任务中无法保持稳定, 造成跟踪轨迹发散. 图 8(f) 使用所提出的 Adapted-DVPEZNN, 跟踪误差为 0.854 mm, 在长时间任务中的轨迹跟踪效果较好.

实验还在不同场景下对所提控制方法进行了充分验证, 跟踪误差如表 7 所示. 无负载下的跟踪误差为 0.854 mm, 在连续体机器人上添加一个重量约为 13 g 的负载时, 跟踪误差增大到 0.986 mm, 而在添加两个相同的负载时, 跟踪误差增大至 1.206 mm, 与无负载的场景相比, 误差有一定程度增加. 这是由于机器人样机比较软, 负载会给机器人造成明显的形变, 如图 10 所示, 在一个负载时驱动绳索弯曲了  $5^\circ$ , 而在两个负载时驱动绳索弯曲达到  $13^\circ$ , 其运动过程受到影响, 因此添加负载时跟踪误差会增大. 如图 11, 在机器人的一侧设置圆柱



(a) 连续体机器人样机末端轨迹  
(a) End-effector trajectory of the continuum robot prototype



(b) 跟踪误差变化  $\mathbf{e} = [e_x, e_y, e_z]^T$   
(b) Tracking error  $\mathbf{e} = [e_x, e_y, e_z]^T$   
(c) 状态参数  $\mathbf{q}$  的变化过程  
(c) The change of state parameter  $\mathbf{q}$

图 7 实机跟踪结果

Fig. 7 Experimental robot tracking results

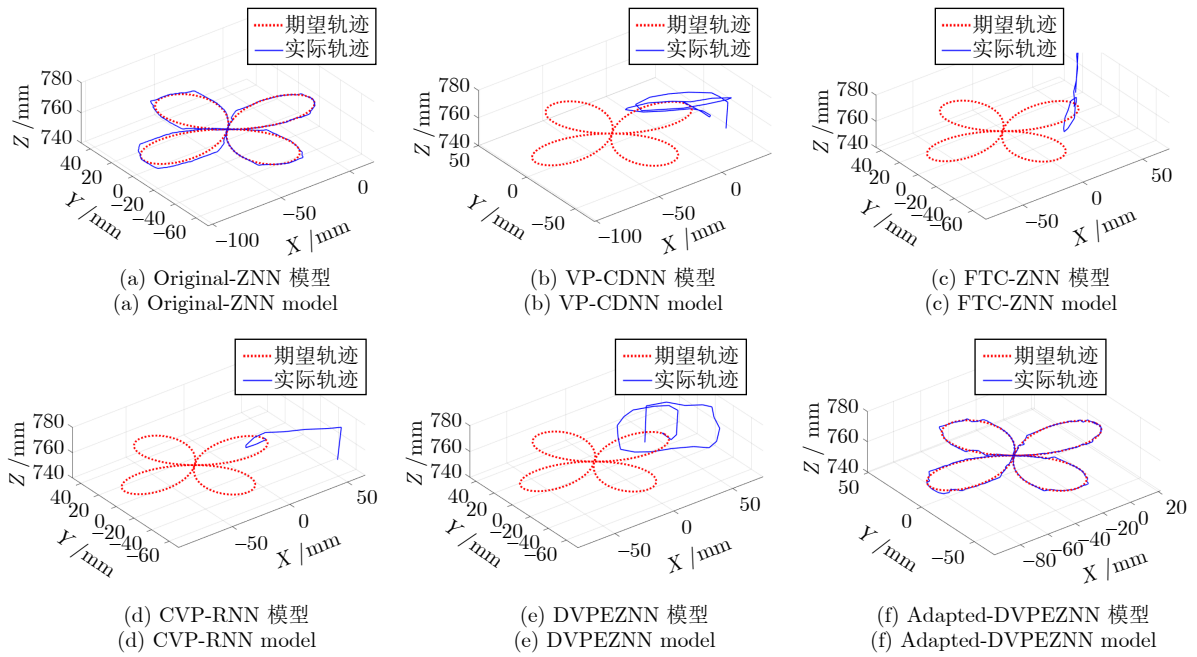


图 8 长时间任务结果

Fig.8 Long-term task results

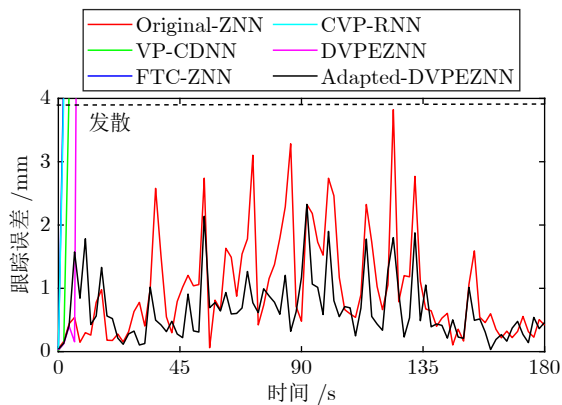


图 9 长时间任务的跟踪误差

Fig.9 Tracking error of long-term task

表 7 不同场景下的跟踪误差定量分析

Table 7 Quantitative analysis of tracking errors in different scenarios

场景设置	跟踪误差 (mm)
无负载无障碍物	0.854
1 个负载无障碍物	0.986
2 个负载无障碍物	1.208
无负载有障碍物	0.869

形障碍物, 其跟踪误差为 0.869 mm, 与无障碍物的场景相比影响不大, 验证了该控制方案在实际场景中通过反馈控制, 能有效减小障碍物对末端轨迹的影响。

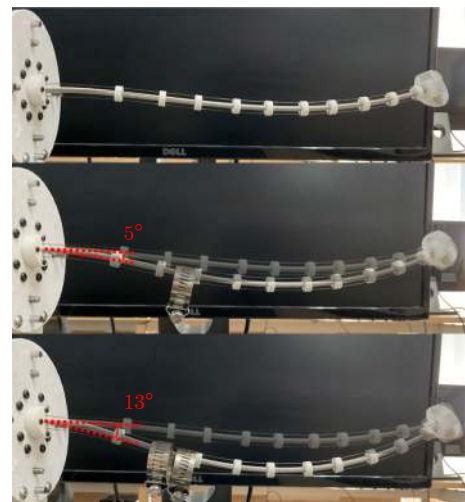


图 10 负载对连续体机器人造成形变

Fig.10 Load causes deformation to continuum robots

## 4 结论

本文为解决连续体机器人的轨迹跟踪问题, 设计了“变参递归神经网络+递归最小二乘法”控制方案, 将改进的 Adapted-DVPEZNN 应用到该问题上, 运用零化神经网络求解逆运动学, 实现连续体机器人末端运动轨迹控制. 同时, 所设计的控制方案首次将递归最小二乘法运用于时变的机器人控制问题上, 用于估计雅可比矩阵伪逆, 避免了控制方法对连续体机器人解析模型的依赖和矩阵的逆运



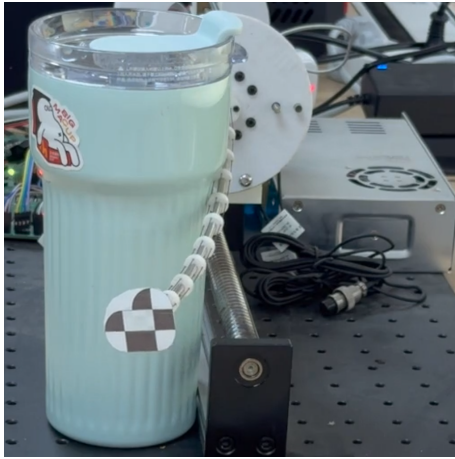


图 11 障碍物场景

Fig. 11 Obstacle scenario

算. 随后, 本文使用所提出的控制方案开展了仿真和实验验证, 结果表明, Adapted-DVPEZNN 能有效减小轨迹跟踪误差和抑制噪声, 使误差在有限时间内收敛到零, 且递归最小二乘控制相比其他方法的控制能耗更小. 同时, 在长时间任务中, 能够在保持稳定的前提下有效减小跟踪误差, 实现连续体机器人的实时在线运动控制.

### References

- 1 Yip M C, Camarillo D B. Model-less hybrid position/force control: A minimalist approach for continuum manipulators in unknown, constrained environments. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2016, **1**(2): 844–851
- 2 Rus D, Tolley M T. Design, fabrication and control of soft robots. *Nature*, 2015, **521**(7553): 467–475
- 3 Fang G, Tian Y, Yang Z X, Geraedts J M, Wang C C. Efficient Jacobian-based inverse kinematics with sim-to-real transfer of soft robots by learning. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2022, **27**(6): 5296–5306
- 4 Polygerinos P, Wang Z, Galloway K C, Wood R J, Walsh C J. Soft robotic glove for combined assistance and at-home rehabilitation. *Robotics and Autonomous Systems*, 2015, **73**: 135–143
- 5 Ranzani T, Gerboni G, Cianchetti M, Menciassi A. A bio-inspired soft manipulator for minimally invasive surgery. *Bioinspiration & biomimetics*, 2015, **10**(3): Article No. 035008
- 6 El-Atab N, Mishra R B, Al-Modaf F, Joharji L, Alsharif A A, Alamoudi H, et al. Soft actuators for soft robotic applications: A review. *Advanced Intelligent Systems*, 2020, **2**(10): Article No. 2000128
- 7 Lee C, Kim M, Kim Y J, Hong N, Ryu S, Kim H J, et al. Soft robot review. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2017, **15**: 3–15
- 8 Kasaei M, Babarhamati K K, Li Z, Khadem M. Data-efficient non-parametric modelling and control of an extensible soft manipulator. In: Proceedings of 2023 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). London, UK: IEEE, 2023. 2641–2647
- 9 Xu Fan, Wang He-Sheng. Adaptive robust visual servoing control of a soft manipulator in underwater environment. *Acta Automatica Sinica*, 2023, **49**(4): 744–753 (徐璠, 王贺升. 软体机械臂水下自适应鲁棒视觉伺服. 自动化学报, 2023, **49**(4): 744–753)
- 10 Qiu K, Zhang J, Sun D, Xiong R, Lu H, Wang Y. An efficient multi-solution solver for the inverse kinematics of 3-section constant-curvature robots. In: Proceedings of Robotics: Science and Systems (RSS). Daegu, Republic of Korea: RSS Foundation, 2023
- 11 Thamo B, Dhaliwal K, Khadem M. Rapid solution of cosserat rod equations via a nonlinear partial observer. In: Proceedings of 2021 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Xi'an, China: IEEE, 2021. 9433–9438
- 12 Xavier M S, Fleming A J, Yong Y K. Finite element modeling of soft fluidic actuators: Overview and recent developments. *Advanced Intelligent Systems*, 2021, **3**(2): Article No. 2000187
- 13 Yu B, Fernández J d G, Tan T. Probabilistic kinematic model of a robotic catheter for 3D position control. *Soft Robotics*, 2019, **6**(2): 184–194
- 14 Jung J, Park M, Kim D, Park Y L. Optically sensorized elastomer air chamber for proprioceptive sensing of soft pneumatic actuators. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2020, **5**(2): 2333–2340
- 15 Ha X T, Wu D, Lai C F, Ourak M, Borghesan G, Menciassi A, et al. Contact localization of continuum and flexible robot using data-driven approach. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2022, **7**(3): 6910–6917
- 16 Bern J M, Schneider Y, Banzet P, Kumar N, Coros S. Soft robot control with a learned differentiable model. In: Proceedings of 2020 3rd IEEE International Conference on Soft Robotics (RoboSoft). New Haven, USA: IEEE, 2020. 417–423
- 17 Giorelli M, Renda F, Calisti M, Arienti A, Ferri G, Laschi C. Neural network and Jacobian method for solving the inverse statics of a cable-driven soft arm with nonconstant curvature. *IEEE Transactions on Robotics*, 2015, **31**(4): 823–834
- 18 Thuruthel T G, Falotico E, Manti M, Laschi C. Stable open loop control of soft robotic manipulators. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2018, **3**(2): 1292–1298
- 19 Thuruthel T G, Shih B, Laschi C, Tolley M T. Soft robot perception using embedded soft sensors and recurrent neural networks. *Science Robotics*, 2019, **4**(26): Article No. eaav1488
- 20 Jiang H, Wang Z, Jin Y, Chen X, Li P, Gan Y, et al. Hierarchical control of soft manipulators towards unstructured interactions. *The International Journal of Robotics Research*, 2021, **40**(1): 411–434
- 21 Zhang Y, Guo D. *Zhang Functions and Various Models*. Berlin: Springer-Verlag, 2015.
- 22 Zhang Y, Jiang D, Wang J. A recurrent neural network for solving Sylvester equation with time-varying coefficients. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2002, **13**(5): 1053–1063
- 23 Chen D, Zhang Y, Li S, Ling Y. Robust Zhang neural network for tracking control of parallel robot manipulators with unknown parameters. In: Proceedings of 2019 Chinese Control and Decision Conference (CCDC). Nanchang, China: IEEE, 2019. 3527–3532
- 24 Zhang Z, Yan Z. A varying parameter recurrent neural network for solving nonrepetitive motion problems of redundant robot manipulators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, **27**(6): 2680–2687
- 25 Tan Z, Li W, Xiao L, Hu Y. New varying-parameter ZNN models with finite-time convergence and noise suppression for time-varying matrix Moore-Penrose inversion. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, **31**(8): 2980–2992
- 26 Tan N, Yu P, Zhang X, Wang T. Model-free motion control of continuum robots based on a zeroing neurodynamic approach. *Neural Networks*, 2021, **133**: 21–31
- 27 Chen D, Zhang Y, Li S. Tracking control of robot manipulators with unknown models: A Jacobian-Matrix-Adaption method. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, **14**(7): 3044–3053
- 28 Tan N, Yu P, Ni F, Sun Z. Trajectory tracking of soft continuum robots with unknown models based on varying parameter recurrent neural networks. In: Proceedings of 2021 IEEE In-

- ternational Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC). Melbourne, Australia: IEEE, 2021. 1035–1041
- 29 Hu X, Sun F, Zou Y, Peng H. Online estimation of an electric vehicle Lithium-Ion battery using recursive least squares with forgetting. In: Proceedings of the 2011 American Control Conference. San Francisco, USA: IEEE, 2011. 935–940
- 30 Ho H W, Zhou Y. Incremental nonlinear dynamic inversion based optical flow control for flying robots: An efficient data-driven approach. In: Proceedings of Robotics: Science and Systems (RSS). Daegu, Republic of Korea: RSS Foundation, 2023
- 31 Webster III R J, Jones B A. Design and kinematic modeling of constant curvature continuum robots: A review. *The International Journal of Robotics Research*, 2010, **29**(13): 1661–1683
- 32 Della Santina C, Bicchi A, Rus D. On an improved state parametrization for soft robots with piecewise constant curvature and its use in model based control. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2020, **5**(2): 1001–1008
- 33 Zhang Y, Xiao L, Xiao Z, Mao M. *Zeroing Dynamics, Gradient Dynamics, and Newton Iterations*. Florida: CRC Press, 2016.
- 34 Liao B, Zhang Y. Different complex ZFs leading to different complex ZNN models for time-varying complex generalized inverse matrices. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2013, **25**(9): 1621–1631
- 35 Tan N, Yu P, Ni F. New varying-parameter recursive neural networks for model-free kinematic control of redundant manipulators with limited measurements. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2022, **71**: 1–14
- 36 Xiao L, Li X, Cao P, He Y, Tang W, Li J, et al. A dynamic-varying parameter enhanced ZNN model for solving time-varying complex-valued tensor inversion with its application to image encryption. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **35**(10): 13681–13690, 2023
- 37 Sherman J, Morrison W J. Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1950, **21**(1): 124–127



张润宁 中山大学计算机学院硕士研究生。2023 年获得中山大学智能工程学院学士学位。主要研究方向为深度学习、计算机视觉和机器人控制。

E-mail: [zhangrn9@mail2.sysu.edu.cn](mailto:zhangrn9@mail2.sysu.edu.cn)  
(ZHANG Run-Ning Master student at the School of Computer Sci-

ence and Engineering, Sun Yat-sen University. He received his bachelor degree from the School of Intelligent Systems Engineering, Sun Yat-sen University in 2023. His research interest covers deep learning, computer vision and robot control.)



余鹏 中山大学计算机学院博士研究生。2021 年和 2019 年分别获得中山大学计算机学院硕士和学士学位。主要研究方向为冗余机器人和数据驱动控制。

E-mail: [yupeng6@mail2.sysu.edu.cn](mailto:yupeng6@mail2.sysu.edu.cn)  
(YU Peng Ph.D. candidate at the

School of Computer Science and Engineering, Sun Yat-sen University. He received his master and bachelor degrees from Sun Yat-sen University in 2021 and 2019, respectively. His research interest covers redundant robots and data-driven control.)



谭宁 中山大学计算机学院副教授。2013 年获得法国 CNRS Femto-st 研究所博士学位。主要研究方向为各类机器人系统的建模、设计、仿真、优化、规划与控制, 内容涵盖基础研究和应用开发。本文通信作者。

E-mail: [tann5@mail.sysu.edu.cn](mailto:tann5@mail.sysu.edu.cn)

(TAN Ning Associate professor at the School of Computer Science and Engineering, Sun Yat-sen University. He received his Ph.D. degree from the CNRS Femto-st Institute in France in 2013. His research interest covers the modeling, design, simulation, optimization, planning, and control of various robotic systems, covering both fundamental research and application development. Corresponding author of this paper.)