

基于多李雅普诺夫函数的一般非线性系统渐近镇定

杨可馨¹ 李永强¹ 侯忠生² 冯宇¹

摘要 针对离散时间非线性系统, 提出一种基于多李雅普诺夫 (Lyapunov) 函数的控制器设计方法. 该方法不仅能够保证闭环系统稳定性, 还能够扩大闭环吸引域 (Domain of attraction, DOA). 首先, 给出基于多 Lyapunov 函数下系统渐近稳定的充分条件. 结果表明, 由多个 Lyapunov 函数的负定不变集构成的并集是一个稳定的控制集合, 其从控制空间到状态空间的投影是闭环 DOA 的估计. 随后, 使用区间分析算法求解集合的内近似估计, 基于此算法可以求解多 Lyapunov 函数的负定不变集的近似值和闭环 DOA 的估计值, 并给出相应控制器的设计方法. 最后, 通过仿真算例验证了本文方法的有效性.

关键词 非线性系统, 多李雅普诺夫函数, 稳定性, 吸引域, 区间分析

引用格式 杨可馨, 李永强, 侯忠生, 冯宇. 基于多李雅普诺夫函数的一般非线性系统渐近镇定. 自动化学报, 2025, 51(1): 197-209

DOI 10.16383/j.aas.c240309

CSTR 32138.14.j.aas.c240309

Asymptotically Stabilization for General Nonlinear Systems Based on Multiple Lyapunov Functions

YANG Ke-Xin¹ LI Yong-Qiang¹ HOU Zhong-Sheng² FENG Yu¹

Abstract In this paper, a controller design method based on multiple Lyapunov functions is proposed for discrete-time nonlinear systems. The proposed method can not only ensure the stabilization of the closed-loop system, but also enlarge the closed-loop domain of attraction (DOA). Firstly, the sufficient conditions for the asymptotically stabilization of the system based on multiple Lyapunov functions are given. It is shown that the union of negative-definite-invariant sets of multiple Lyapunov functions is a stable control set, and its projection from the control space to the state space is an estimate of the closed-loop DOA. Then, the interval analysis algorithm is used to solve the inner approximate estimation of the set. Based on this algorithm, the negative-definite-invariant sets of multiple Lyapunov functions can be approximated and the closed-loop DOA can be estimated, the design method of the corresponding controller is also given. Finally, the simulation example is given to verify the effectiveness of the proposed method.

Key words Nonlinear systems, multiple Lyapunov functions, stabilization, domain of attraction (DOA), interval analysis

Citation Yang Ke-Xin, Li Yong-Qiang, Hou Zhong-Sheng, Feng Yu. Asymptotically stabilization for general nonlinear systems based on multiple Lyapunov functions. *Acta Automatica Sinica*, 2025, 51(1): 197-209

控制系统的稳定性是确保系统正常工作的基本前提之一. 然而, 在非线性系统中, 全局稳定性往往难以实现. 因此, 研究重点转向平衡点周围的局部稳定性, 以期找到平衡点的吸引域 (Domain of attraction, DOA), 能够使系统在该集合内的所有状态点都被“吸引”到平衡状态^[1-3].

在非线性系统分析和控制器设计中, DOA 的

角色至关重要. 在当前的研究中, 针对 DOA 的研究方法大致可分为两类^[4]: 一类是基于李雅普诺夫 (Lyapunov) 函数的求解方法^[5-8]; 另一类则包括占用度量^[9]和反转轨迹^[10]等方法 (这些方法不依赖于 Lyapunov 函数).

在综合研究中, 已经有一些关于设计控制器并同时估计闭环 DOA 的工作. 在多项式离散时间非线性系统方面, 文献 [11] 提出了一个基于反馈控制律的最优控制器, 旨在最大化闭环 DOA. 考虑仿射非线性系统, 文献 [12] 根据 Zubov 定理设计了一种控制器, 该控制器能够通过选择 Lyapunov 函数的适当系数来稳定并扩大闭环系统的 DOA. 对于非线性多项式系统, 文献 [13] 利用平方和 (SOS) 的广义 S-程序扩大闭环 DOA 的估计范围. 针对一般非

收稿日期 2024-05-31 录用日期 2024-09-02

Manuscript received May 31, 2024; accepted September 2, 2024

国家自然科学基金 (62073294, 62373206, U2341216) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62073294, 62373206, U2341216)

本文责任编辑 李鸿一

Recommended by Associate Editor LI Hong-Yi

1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310000 2. 青岛大学自动化学院 青岛 266071

1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310000 2. College of Automation, Qingdao University, Qingdao 266071

线性系统, 文献 [14] 设计了两个局部反馈控制器, 在保证局部性能的同时, 扩大了对控制系统 DOA 的估计. 文献 [15] 基于 Lyapunov 函数提出了一种闭环系统状态反馈控制器的设计方法. 在状态反馈控制器的设计中, 对于给定的正定函数, 状态-控制空间中所有使得时间差分为负定的点构成的集合被定义为负定集, 可以被视为非结构化镇定控制集. 这里的“非结构化”表示负定集为状态-控制空间的子集, 不依赖于任何给定的控制器结构. 将状态-控制空间的负定集投影到状态空间, 得到的不变子集可以作为闭环 DOA 的估计. 此外文献 [15] 还提出了一种启发式优化算法, 用于寻找合适的 Lyapunov 函数以扩大闭环 DOA. 然而, 文献 [15] 中存在一些不足: 1) 闭环 DOA 的不变性是基于 Lyapunov 函数的水平集, 但对于 Lyapunov 函数水平集的估计具有保守性; 2) 启发式优化算法的计算量过大.

本文针对一般非线性系统, 采用多 Lyapunov 函数负定集来扩大闭环 DOA, 且有效避免了启发式优化算法计算量过大的问题, 从而有效弥补了文献 [15] 的不足. 多 Lyapunov 函数负定集是指多个 Lyapunov 函数的负定集的并集. 通常情况下, 多 Lyapunov 函数的概念主要应用于混合系统或切换系统^[16-18], 这些系统不同于单一的普通系统, 是由多个子系统构成的, 因此针对不同的子系统可能需要不同的 Lyapunov 函数. 然而, 在一般非线性系统中, 采用多 Lyapunov 函数的方法并不常见. 因此, 本文将多 Lyapunov 函数的概念引入一般非线性系统的渐近镇定研究中, 旨在有效解决文献 [15] 中存在的不足.

首先, 本文给出多 Lyapunov 函数下系统渐近稳定的充分条件和闭环 DOA 的估计方法. 与单个 Lyapunov 函数的控制器不同, 本文将正定函数集 (即多 Lyapunov 函数) 中状态-控制空间的负定不变集视为非结构化镇定控制集. 这是因为不同的正定函数, 其负定集的不变子集不同, 因此引入了状态-控制空间负定不变集的概念. 此外, 负定不变集从控制空间到状态空间的投影被认为是闭环 DOA 的估计. 随后, 基于 SIVIA (Set inversion via interval analysis) 算法提出近似负定集的求解方法. SIVIA 算法作为区间分析方法中最基本的工具之一, 是一种根据需要精确地近似兴趣集的数值方法^[19]. 通过将 SIVIA 算法与多 Lyapunov 函数下系统渐近稳定的概念相结合, 给出求解正定函数集的近似负定集、负定不变集和闭环 DOA 估计值的详细步骤. 最后, 介绍控制器的设计方法, 并在仿真结果对比中强调本文所提方法在扩大闭环 DOA 和减少计算

量方面的优势.

本文其余部分安排如下: 第 1 节提出控制问题, 并简要介绍文献 [15] 中提到的负定集非线性系统镇定方法; 第 2 节提出多 Lyapunov 函数下系统渐近稳定的充分条件; 第 3 节将区间分析的方法与第 2 节的理论知识相结合, 以估计负定不变集和闭环 DOA, 并提出相关控制器的设计方法; 第 4 节呈现仿真结果; 结论部分在第 5 节.

符号说明: 对于一个向量 $x \in \mathbf{R}^n$, $x_{(j)}$ 表示 x 的第 j 个元素, $j = 1, 2, \dots, n$. 对于两个向量 $x \in \mathbf{R}^n$ 和 $u \in \mathbf{R}^m$, $\omega = (x; u)$ 表示 \mathbf{R}^{n+m} 中的一个新向量. $[\omega] \in \mathbf{R}^{n+m}$ 表示属于 \mathbf{R}^{n+m} 的一个 $n+m$ 维的区间向量, 也称为箱体^[20] (例如, 当 $n+m=2$ 时是一个矩形区域). $\mathbf{W} \subset \mathbf{R}^{n+m}$ 表示 \mathbf{R}^{n+m} 的任意一个紧子集. $\hat{\mathbf{W}}$ 表示 \mathbf{W} 的近似集通过一组箱体中非重叠箱体覆盖 \mathbf{W} . 对于一个集合 $\mathbf{W} \subset \mathbf{R}^{n+m}$, $proj(\mathbf{W}) \subset \mathbf{R}^n$ 表示 \mathbf{W} 从 \mathbf{R}^m 空间到 \mathbf{R}^n 空间的正交投影集合. $\bar{\mathbf{Z}}_+$ 表示正整数集合与整数 0 的并集.

1 问题描述和背景材料

1.1 问题描述

考虑非线性离散时间系统

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

其中, $x(k) \in \mathbf{R}^n$ 为状态; $u(k) \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入; 连续函数 $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ 满足 $\mathbf{0} = f(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, 并且其关于原点的线性化系统是可控的.

本文的控制目标是找到一个非线性反馈控制器 $\mu: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, 使得闭环系统 $x(k+1) = f(x(k), \mu(x(k)))$ 在 $x = \mathbf{0}$ 处是渐近稳定的, 且关于闭环 DOA 的估计值尽可能大.

1.2 负定集非线性系统镇定

本节简单介绍文献 [15] 提出的负定域非线性系统镇定方法. 对于离散时间非线性系统 (1), 省略时间标号 k , 用 \bar{x} , x , u 分别替代 $x(k+1)$, $x(k)$, $u(k)$. 系统 (1) 的动态可以表述为在 $2n+m$ 维空间中的一个超曲面 Ξ , 定义为

$$\Xi = \{(\bar{x}; u; x) \in \mathbf{R}^{2n+m} | \bar{x} = f(x, u)\} \quad (2)$$

对于给定的连续正定函数 $L: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 满足 $L(\mathbf{0}) = 0$, 且 $\forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $L(x) > 0$, 定义 Ξ 的子集

$$\Xi_L = \{(\bar{x}; u; x) \in \Xi | L(\bar{x}) - L(x) < 0\} \quad (3)$$

由上述定义可知, 任意点 $(\bar{x}; u; x) \in \Xi_L$ 使得正定函数 $L(x(k))$ 关于时间的差分是负定的, 即 $L(x(k+1)) < L(x(k))$.

1)) - $L(x(k)) < 0$. 因此, 超曲面 Ξ 的子集 $\Xi_L \subset \mathbf{R}^{2n+m}$ 称为系统 (1) 关于 L 的负定集. 为了设计控制器, 将 Ξ_L 从未来状态空间投影到状态-控制空间, 得到状态-控制空间的负定集 Θ_L , 定义为

$$\Theta_L = \{(x; u) \in \mathbf{R}^{n+m} | L(f(x, u)) - L(x) < 0\} \quad (4)$$

很明显, 负定集 Θ_L 是一个开集, Θ_L 的边界 $\{(x; u) | L(f(x, u)) - L(x) = 0\}$ 不是 Θ_L 的子集. 因为状态-控制空间中的原点 $(\mathbf{0}; \mathbf{0}) \in \mathbf{R}^{n+m}$ 在 Θ_L 的边界上, 且函数 f 和正定函数 L 是连续的, 所以负定集 Θ_L 不包含原点, 但包含原点邻域的一个子集. 将 Θ_L 由控制空间投影到状态空间, 得到状态空间的负定集 \mathbf{X}_L , 定义为

$$\mathbf{X}_L = \{x \in \mathbf{R}^n | \exists u \in \mathbf{R}^m, L(f(x, u)) - L(x) < 0\} \quad (5)$$

状态空间的负定集 \mathbf{X}_L 不包含原点 $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$, 但是包含原点的邻域.

由式 (4) 可知, 如果控制器 μ 满足 $\forall x \in \mathbf{X}_L, (x; \mu(x)) \in \Theta_L$, 那么对于所有属于 $\mathbf{X}_L \subset \mathbf{R}^n$ 的状态, 正定函数 $L(x(k))$ 的时间差分为负定. 但是这个结论并不能保证闭环系统关于原点是渐近稳定的, 因为无法保证在 $k+1$ 时刻, 状态依旧在 \mathbf{X}_L 中. 一旦状态在 \mathbf{X}_L 的外界, $L(x(k))$ 的时间差分为负定的条件就不再满足.

文献 [15] 通过寻找状态空间中负定集 \mathbf{X}_L 的一个不变子集 $\mathbf{X}_{L, \gamma}$ 来解决该问题. 具有常数 $\gamma > 0$ 的正定函数 L 的水平子集 $\mathbf{X}_{L, \gamma}$ 是一个不变集, 它的性质是: 如果当前状态在 $\mathbf{X}_{L, \gamma}$ 中, 那么下一时间步的状态也在 $\mathbf{X}_{L, \gamma}$ 中, 且任意水平集 $\mathbf{X}_{L, \gamma} \subset \mathbf{X}_L \cup \mathbf{0}$ 是闭环 DOA 的估计值.

引理 1. 对于系统 (1), 如果存在正定函数 $L: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 常数 $\gamma \in \mathbf{R}_+$ 和一个状态反馈控制器 $\mu(x): \mathbf{X}_L \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{U}_L(x) \subset \mathbf{R}^m$, 满足

$$\mu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, (x; \mu(x)) \in \Theta_L, \forall x \in \mathbf{X}_L \quad (6)$$

$$\mathbf{X}_{L, \gamma} = \{x \in \mathbf{R}^n | L(x) \leq \gamma\} \subset \mathbf{X}_L \quad (7)$$

其中, 对 $x \in \mathbf{X}_L$

$$\mathbf{U}_L(x) = \{u \in \mathbf{R}^m | L(f(x, u)) - L(x) < 0\} \quad (8)$$

则 $\forall x_0 \in \mathbf{X}_{L, \gamma}$, 闭环系统 $x(k+1) = f_c(x(k)) = f(x(k), \mu(x(k)))$ 的解 $\phi(x_0, k)$ 满足

$$\forall k \in \bar{\mathbf{Z}}_+, \phi(x_0, k) \in \mathbf{X}_{L, \gamma}, \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_0, k) = \mathbf{0}$$

引理 1 的证明可见文献 [15] 中引理 2 的证明过程.

由引理 1 可知, 如果一个给定的正定函数 L 满足式 (7), 那么对于满足式 (6) 的反馈控制器 $\mu(x)$,

可以使得 $L(x(k))$ 的时间差分在闭环条件下严格负定, 即使闭环系统渐近稳定. 此外, 满足式 (6) 的水平集 $\mathbf{X}_{L, \gamma}$ 可以作为闭环 DOA 的估计值, 例 1 中对上述内容有详细的介绍. 因此, 如果得到负定集 Θ_L 和 \mathbf{X}_L , 就很容易找到状态反馈控制器和闭环 DOA 的估计, 闭环 DOA 估计值的不变性受 L 函数水平集 $\mathbf{X}_{L, \gamma}$ 的影响, 但通常得到的水平集是保守的. 文献 [15] 为了解决水平集保守的问题, 引入了启发式优化方法以寻找适当的 Lyapunov 函数, 获得最大化的水平集. 然而, 该方法的缺点在于计算量过大. 因此, 在第 2 节中, 本文提出一种新方法, 即利用多个 Lyapunov 函数的负定集取并集. 这不仅能够扩大闭环 DOA 的估计范围, 减少单个 Lyapunov 函数水平集的保守性, 而且有效避免了启发式优化算法带来的计算量过大的问题.

例 1. 考虑系统

$$x(k+1) = -\sin(2x(k)) - x(k)u(k) - 0.2x(k) - u^2(k) + u(k) \quad (9)$$

其中, $x(k) \in \mathbf{R}$, $u(k) \in \mathbf{R}$. 图 1(a) 中紫色渐变网格曲面部分展示了式 (2) 中定义的集合 $\Xi \subset \mathbf{R}^3$. 考虑正定函数 $L(x) = 0.8598x^2 + 1.2548x^3 + 0.6352x^4$, 图 1(a) 中蓝色曲面部分表示负定集 $\Xi_L \subset \mathbf{R}^3$, 其定义见式 (3). 图 1(b) 中蓝色填充区域表示状态-控制空间负定集 $\Theta_L \subset \mathbf{R}^2$, 其定义见式 (4), 而在状态空间的负定集 $\mathbf{X}_L \subset \mathbf{R}$ 由蓝色线段表示. 图 1(b) 中红色线段表示原点周围的邻域为 $[-0.0234, 0.0234]$, 绿色线段表示水平集 $\mathbf{X}_{L, \gamma}$ 为 $[-0.2031, 0.1563]$, 也是闭环 DOA 的估计值. 此外, 图 1(b) 中黑色曲线表示满足式 (6) 的一个反馈控制器 $\mu(x)$, 其中由红色“x”及红色线段所组成的部分为原点邻域的线性控制器. 图 1(c) 展示了控制器 $\mu(x)$ 的收敛轨迹. 图 1(d) 展示了非结构化控制器集合 $x \in \mathbf{X}_{L, \gamma}$, $\mathbf{U}(x) = \{u \in \mathbf{R} | (x; u) \in \Theta_L\}$ 的收敛轨迹.

2 多 Lyapunov 函数下系统渐近稳定的充分条件

文献 [15] 通过启发式优化方法来寻找一个合适的 Lyapunov 函数以最大化闭环 DOA. 该方法存在两个问题: 第一, 启发式优化方法计算量巨大; 第二, 单个 Lyapunov 函数给出的状态-控制空间负定集过于保守. 本文使用多 Lyapunov 函数负定集, 即多个 Lyapunov 函数负定集的并集, 来解决上述两个问题. 本节给出多 Lyapunov 函数负定集的相关理论结果. 首先, 提出多 Lyapunov 函数负定集和负定不变集的概念; 随后, 基于多 Lyapunov 函

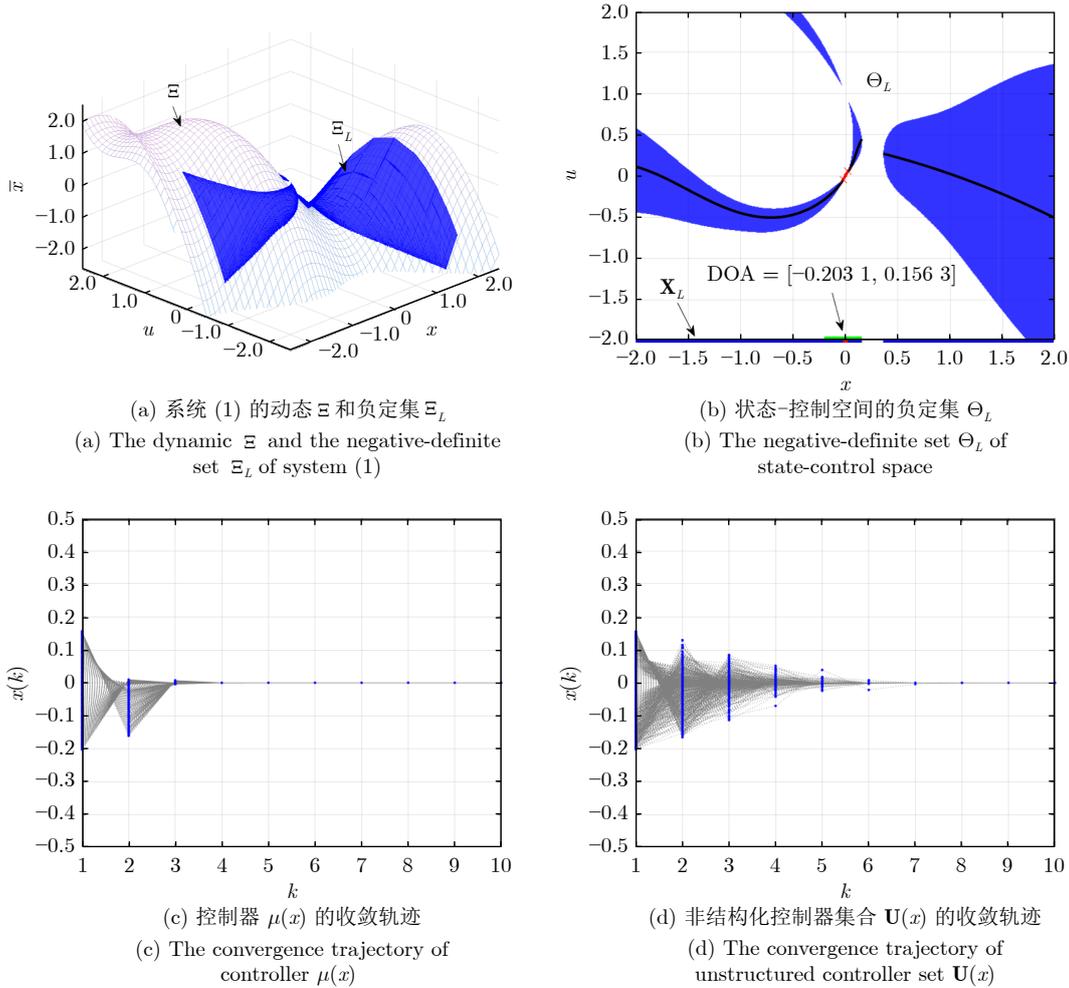


图 1 引理 1 渐近稳定的说明

Fig.1 The illumination of asymptotically stabilization of lemma 1

数负定不变集, 给出闭环系统渐近稳定的充分条件.

2.1 多 Lyapunov 函数下状态-控制空间中的负定集

关于系统 (1), 注意到对于不同的正定函数 L , 式 (4) 定义的状态-控制空间的负定集 Θ_L 各不相同. 将多个正定函数的负定集进行集合并操作, 得到的并集相比单个正定函数的负定集具有更大的范围. 考虑 p 个正定函数的集合

$$\mathcal{L} = \{L_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} | L_i \text{ 为正定函数}, i = 1, 2, 3, \dots, p\} \quad (10)$$

对于正定函数集合 \mathcal{L} , 状态-控制空间中的负定集 $\Theta_{\mathcal{L}}$ 定义为

$$\Theta_{\mathcal{L}} = \{(x; u) \in \mathbf{R}^{n+m} | \exists L_i \in \mathcal{L}, L_i(f(x, u)) - L_i(x) < 0\} = \bigcup_{i=1}^p \Theta_{L_i} \quad (11)$$

其中, 正定函数 $L_i \in \mathcal{L}$ 的负定集 Θ_{L_i} 如式 (4) 所定义.

给定正定函数集合 \mathcal{L} , 由负定集 $\Theta_{\mathcal{L}}$ 的定义 (11) 可知, 任意属于 $\Theta_{\mathcal{L}}$ 的状态反馈控制器 $u = \mu(x)$, 即 $(x; \mu(x)) \in \Theta_{\mathcal{L}}$, 都能够保证: 对于当前时刻的状态 $x(k)$, 至少存在一个正定函数 $L_i \in \mathcal{L}$, 其关于时间的差分是负定的, 即 $L_i(x(k+1)) - L_i(x(k)) < 0$, 其中, $x(k+1) = f(x(k), \mu(x(k)))$. 换言之, 负定集 $\Theta_{\mathcal{L}}$ 可以看作是一个非结构化的状态反馈控制器集合, 任意在其中的控制器都能保证当前时刻正定函数的时间差分是负定的.

2.2 多 Lyapunov 函数下状态-控制空间中的负定不变集

尽管任意属于负定集 $\Theta_{\mathcal{L}}$ 的控制器都能够保证: 在当前时刻, 至少存在一个正定函数, 其关于时间的差分是负定的, 但是闭环系统的渐近稳定性并不能得到保证. 原因在于, 无法保证下一时刻依旧满足正定函数时间差分的负定条件. 对于单个 Lyapunov

Lyapunov 函数, 文献 [15] 利用水平集是一个不变子集的性质来解决该问题. 即单个 Lyapunov 函数 L 的负定集 $\Theta_L \subset \mathbf{R}^{n+m}$ 看作是非结构化的镇定控制器集合, 同时将任意属于状态空间负定集 $\mathbf{X}_L \subset \mathbf{R}^n$ 的水平集 $\mathbf{X}_{L, \gamma}$ 作为闭环 DOA 的估计. 对于正定函数集合 \mathcal{L} (多个 Lyapunov 函数), 不能将多个正定函数负定集的并集直接看作是非结构化的镇定控制器集合. 因为, 对于不同的正定函数, 作为不变子集的水平集是不一样的, 如例 2 所示.

例 2. 考虑非线性系统 (9) 以及正定函数 $L_1(x) = 0.0205x^2 + 0.1672x^3 + 0.9007x^4$, $L_2(x) = 0.2935x^2 + 1.065x^3 + 1.09x^4$, 其中 $(x; u) = [-2, 2] \times [-2, 2] \in \mathbf{R}^2$. 在图 2 中, 蓝色填充区域表示正定函数 $L_1(x)$ 对应的负定集 $\Theta_{L_1} \subset \mathbf{R}^2$, 灰色填充区域表示正定函数 $L_2(x)$ 对应的负定集 $\Theta_{L_2} \subset \mathbf{R}^2$. 黑色线段表示在正定函数 L_1 和 L_2 负定集的并集中任意选择的一个控制器 $u = \mu(x)$, 蓝色线段表示正定函数 $L_1(x)$ 的不变集 $\mathbf{X}_{L_1, \gamma_1} = [-0.2542, 0.1719] \subset \mathbf{R}$, 灰色线段表示正定函数 $L_2(x)$ 的不变集 $\mathbf{X}_{L_2, \gamma_2} = [-2, 1.5139] \subset \mathbf{R}$. 不变集 $\mathbf{X}_{L_1, \gamma_1}$ 与不变集 $\mathbf{X}_{L_2, \gamma_2}$ 的并集为灰色线段表示的区域 $[-2, 1.5139]$, 玫红色的点 x_0 表示初始状态在不变集的并集 $[-2, 1.5139]$ 上的一个点.

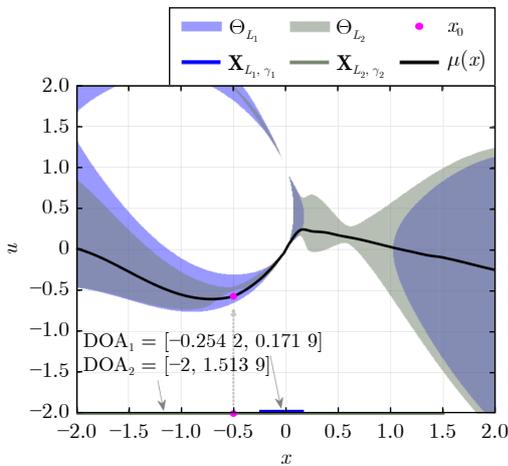


图 2 负定集取并集的说明

Fig.2 Description of the union set of negative-definite sets

为了能够将多个正定函数负定集子集的并集作为非结构化控制器集合, 本文引入状态-控制空间中的负定不变集. 基于不变集的概念, 状态-控制空间中的负定不变集 $\Theta_{L, NI}$ [21] 定义为

$$\Theta_{L, NI} = \{(x; u) \in \Theta_L \subset \mathbf{R}^{n+m} | L(f(x, u)) - L(x) < 0, f(x, u) \in proj_x(\Theta_{L, NI})\} \quad (12)$$

其中, $proj_x(\Theta_{L, NI})$ 是负定不变集从控制空间到状态空间的投影, $f(x, u) \in proj_x(\Theta_{L, NI})$ 是为了确保下一时刻的状态依旧属于负定不变集在状态空间的投影. 式 (12) 表示若当前时刻的 $(x(k); u(k)) \in \Theta_{L, NI}$, 且当前时刻 Lyapunov 函数 $L(x(k))$ 的差分是负定的, 同时对于下一时刻的状态 $x(k+1)$, 存在 $u(k+1)$, 有 $(x(k+1); u(k+1)) \in \Theta_{L, NI}$. 因此, 该负定不变集 $\Theta_{L, NI}$ 可以看作是非结构化镇定控制器集合. 由于式 (12) 对负定不变集 $\Theta_{L, NI}$ 的定义涉及其自身, 导致求解困难. 因此, 本文利用 Lyapunov 函数的水平集是不变子集的概念, 来求解状态-控制空间的负定不变集 $\Theta_{L, \gamma}$. 其中 $\Theta_{L, \gamma}$ 是集合 $\Theta_{L, NI}$ 的一个子集, 具备不变的性质, 但求解中不涉及其自身, 求解更简便.

对于给定的单个正定函数 L , 状态-控制空间中的负定不变集 $\Theta_{L, \gamma}$ 表示为

$$\Theta_{L, \gamma} = \{(x; u) \in \Theta_L \subset \mathbf{R}^{n+m} | L(f(x, u)) - L(x) < 0, L(x) \leq \gamma\} \quad (13)$$

对于给定的单个正定函数 L , 常数 γ 是优化问题的解

$$\max_{\gamma > 0} \gamma \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{X}_{L, \gamma} \subset \mathbf{X}_L \quad (14)$$

其中, 水平集 $\mathbf{X}_{L, \gamma}$ 和状态空间中负定集 \mathbf{X}_L 的定义见式 (7) 和式 (5).

关于式 (10) 定义的正定函数集合 \mathcal{L} , 状态-控制空间的负定不变集 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 定义为

$$\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma} = \{(x; u) \in \mathbf{R}^{n+m} | \exists L_i \in \mathcal{L}, L_i(f(x, u)) - L_i(x) < 0, L_i(x) \leq \gamma_i\} = \bigcup_{i=1}^p \Theta_{L_i, \gamma_i} \quad (15)$$

其中, $\Gamma = (\gamma_1; \gamma_2; \dots; \gamma_p) \in \mathbf{R}^p$, 对于正定函数 $L_i \in \mathcal{L}$, 常数 γ_i 是优化问题 (14) 的解. 将负定不变集由控制空间向状态空间投影, 状态空间的负定不变集定义为

$$\mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma} = \{x \in \mathbf{R}^n | \exists u \in \mathbf{R}^m, \exists L_i \in \mathcal{L}, L_i(f(x, u)) - L_i(x) < 0, L_i(x) \leq \gamma_i\} = \bigcup_{i=1}^p \mathbf{X}_{L_i, \gamma_i}$$

在给定的单个正定函数中, 负定不变集 $\Theta_{L, \gamma}$ 可以看成是负定集 Θ_L 的一个子集, 即 $\Theta_{L, \gamma} \subset \Theta_L$. 对于正定函数集 \mathcal{L} , 任意正定函数 $L_i \in \mathcal{L}$ 的负定集有 $\Theta_{L_i} \subset \Theta_{\mathcal{L}}$, 负定不变集有 $\Theta_{L_i, \gamma_i} \subset \Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$. 因此, 可以推导出 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma} \subset \Theta_{\mathcal{L}}$, 即正定函数集 \mathcal{L} 的负定不变集 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 是负定集 $\Theta_{\mathcal{L}}$ 的子集.

2.3 多 Lyapunov 函数下系统渐近稳定的充分条件

因 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma} \subset \Theta_{\mathcal{L}}$ 是负定的, 对于任意 $(x(k); u(k)) \in \Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$, 至少存在一个正定函数 $L_i \in \mathcal{L}$, 使得其在当前时刻的时间差分为负定. 又因为正定函数 L_i 的负定不变集 $\Theta_{L_i, \gamma_i} \subset \Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 是不变的, 对于任意 $(x(k); u(k)) \in \Theta_{L_i, \gamma_i}$, 下一时刻的状态 $x(k+1) = f(x(k), u(k))$ 属于 $\mathbf{X}_{L_i, \gamma_i}$. 这意味着对于 $x(k+1)$ 存在 $u(k+1)$ 满足正定函数 $L_i(k+1)$ 在下一时刻的时间差分为负定. 因此, 总结得出: $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 是非结构化的镇定控制器集合, 即, 如果任意控制器 μ 满足 $\forall x \in \mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma}, (x; \mu(x)) \in \Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$, 则所有属于 $\mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma} \subset \mathbf{R}^n$ 的初始状态都使得闭环系统渐近稳定. 具体的总结在定理 1 中展示.

定理 1. 对于系统 (1), 如果存在一个正定函数集 \mathcal{L} 和一个负定不变集 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma} \subset \mathbf{R}^{n+m}$, 对于任意控制器 $\mu: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 满足

$$\mu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, (x; \mu(x)) \in \Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}, \forall x \in \mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma} \quad (16)$$

对于任意属于 $\mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma} \subset \mathbf{R}^n$ 的初始状态, 闭环系统 $x(k+1) = f(x(k), \mu(x(k)))$ 是渐近稳定的.

证明. 对于任意 $x_0 \in \mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma}$, 至少存在一个正定函数 $L_i \in \mathcal{L}$ 的不变集 $\mathbf{X}_{L_i, \gamma_i} \subset \mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma}$, 使得 $x_0 \in \mathbf{X}_{L_i, \gamma_i}$.

结合式 (4)、式 (7)、式 (15)、式 (16), 对于该正定函数 $L_i \in \mathcal{L}$ 有

$$\forall x \in \mathbf{X}_{L_i, \gamma_i}, L_i(f(x, \mu(x))) - L_i(x) < 0 \quad (17)$$

令 $\phi(x_0, k)$ 表示闭环系统 $x(k+1) = f(x(k), \mu(x(k)))$ 在 k 时刻初始状态为 x_0 的解, 根据式 (17), 对于任意 $x_0 \in \mathbf{X}_{L_i, \gamma_i}$, 有

$$L_i(\phi(x_0, k+1)) < L_i(\phi(x_0, k)) \leq L_i(x_0) \leq \gamma_i \quad (18)$$

上述关系式表明, 起始于 $\mathbf{X}_{L_i, \gamma_i}$ 的解 $\phi(x_0, k)$ 将保持在 $\mathbf{X}_{L_i, \gamma_i}$ 中. 因为 $\mathbf{X}_{L_i, \gamma_i} \subset \mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma}$, 所以, 起始于 $\mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 的解 $\phi(x_0, k)$ 将保持在 $\mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 中. 换言之, $\mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 是闭环系统 $x(k+1) = f(x(k), \mu(x(k)))$ 的一个闭环 DOA.

根据式 (18), 对于任意 $x_0 \in \mathbf{X}_{L_i, \gamma_i}$, 随着时间步长 k 的增加, 函数 $L_i(\phi(x_0, k))$ 是单调递减的. 其次, L_i 是正定函数, 所以对于任意 $x_0 \in \mathbf{X}_{L_i, \gamma_i}$ 恒有 $L_i \geq 0$, 且当 $L_i(\phi(x_0, k)) = 0$ 时, 解 $\phi(x_0, k) = \mathbf{0}$ 恒成立. 因此, 对所有 $x_0 \in \mathbf{X}_{L_i, \gamma_i}$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} L_i(\phi(x_0, k)) = 0$, 可以推导出 $\forall x_0 \in \mathbf{X}_{L_i, \gamma_i}, \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_0, k) = \mathbf{0}$. 又因为 $\mathbf{X}_{L_i, \gamma_i} \subset \mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma}$, 可以得到

$$\forall k \in \bar{\mathbf{Z}}_+, \phi(x_0, k) \in \mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma}, \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_0, k) = \mathbf{0}$$

以上过程可以通过数学归纳法进行证明 (更多证明细节可以参考文献 [22] 的定理 13.2). \square

在定理 1 中, 如果能找到一个负定不变集 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma} \subset \mathbf{R}^{n+m}$, 其中 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 被视为非结构化控制器集合, 对于任意控制器 μ 满足 $(x; \mu(x)) \in \Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$, 闭环系统 (1) 是渐近稳定的. 此外, $\mathbf{X}_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 表示闭环 DOA 的估计值. 然而, 考虑到非线性系统的复杂性, 获得 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 的解析解十分困难. 因此, 在第 3 节中, 将介绍一种区间分析算法, 用于求解负定不变集的近似值 $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}$.

3 多 Lyapunov 函数下基于区间分析的渐近镇定控制

基于第 2 节的内容, 本节将通过区间分析的方法对多 Lyapunov 函数下的负定不变集 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 进行估计, 完成镇定控制器设计. 首先对区间分析方法及 SIVIA 算法进行简短的介绍. 随后利用 SIVIA 算法提出一种估计多 Lyapunov 函数下的负定集和负定不变集的方法. 最后给出控制器的设计方法, 以确保系统稳定性.

3.1 区间分析: SIVIA

区间分析是一种数值方法, 用于获取目标区间的近似值, 其中近似精度可以根据需要进行设置^[19]. SIVIA 算法是区间分析的基本工具之一. SIVIA 利用非重叠的区间集合来近似集合的逆, 表示为 $\mathbf{W} \subset \mathbf{R}^{n_1}$, 满足以下形式

$$\mathbf{W} = \{w \in \mathbf{R}^{n_1} | c(w) \in \mathbf{Y}\} = c^{-1}(\mathbf{Y}) \quad (19)$$

其中, 函数 $c: \mathbf{R}^{n_1} \rightarrow \mathbf{R}^{n_2}$, 集合 $\mathbf{Y} \subset \mathbf{R}^{n_2}$.

SIVIA 算法主要是由区间向量和包含函数构成. 下面简要介绍这些内容, 具体细节可以查阅文献 [21]. 一个区间向量 $[w]$ 是 \mathbf{R}^{n_1} 的子集, 定义为 $[w] = [w_{(1)}] \times [w_{(2)}] \times \cdots \times [w_{(n_1)}]$, 其中第 j 个区间 $[w_{(j)}] = [\underline{w}_{(j)}, \bar{w}_{(j)}]$, $j = 1, 2, \dots, n_1$ 是 \mathbf{R} 的一个相关子集, $\underline{w}_{(j)}$ 和 $\bar{w}_{(j)}$ 分别是区间 $[w_{(j)}]$ 的下边界和上边界, 上边界 $\bar{w}_{(j)}$ 和下边界 $\underline{w}_{(j)}$ 的差值称为 $[w_{(j)}]$ 的宽度. $[w] \in \mathbf{IR}^{n_1}$ 也称为箱体, 其中 \mathbf{IR}^{n_1} 表示所有 n_1 维箱体的集合. 考虑函数 $c: \mathbf{IR}^{n_1} \rightarrow \mathbf{IR}^{n_2}$, 如果对于所有 $[w] \in \mathbf{IR}^{n_1}$, 都有 $c([w]) \subset c([w])$, 则称区间函数 $[c]: \mathbf{IR}^{n_1} \rightarrow \mathbf{IR}^{n_2}$ 是关于 c 的包含函数. 如果对于所有 $[w] \in \mathbf{IR}^{n_1}$, 当 $d([w]) \rightarrow 0$ 时, 有 $\lim_{d([w]) \rightarrow 0} d([c]([w])) = \mathbf{0}$, $d([w]) = \max_{1 \leq j \leq n_1} (\bar{w}_{(j)} - \underline{w}_{(j)})$, 则包含函数 $[c]$ 是收敛的. 包含函数的收敛性可以保证 SIVIA 算法的收敛. 对于一个函数, 其收敛包含函数并非唯一, 例如有中心形式、自然形式、泰勒形式.

SIVIA 算法可以找到关于 \mathbf{W} 的内近似 $\hat{\mathbf{W}}_{in} \subset \mathbf{W}_{init} \subset \mathbf{R}^{n1}$, 其中 \mathbf{W}_{init} 是给定的初始搜索集. 如算法 1 所示, SIVIA 算法通过对给定的区间向量进行迭代搜索, 可能出现以下四种情况:

1) 内部测试集: 如果 $[c]([w])$ 完全包含在 \mathbf{Y} 中, 并且 $[w]$ 完全在 \mathbf{W} 中, 则将 \mathbf{W} 内部的区间箱体收集到集合 $\hat{\mathbf{W}}_{in}$ 中, 如算法 1 的第 7) ~ 8) 所示.

2) 外部测试集: 如果 $[c]([w])$ 与 \mathbf{Y} 有一个空交集, 并且 $[w]$ 不属于 \mathbf{W} , 则将 \mathbf{W} 外部的区间箱体收集到集合 $\hat{\mathbf{W}}_{out}$ 中, 如算法 1 的第 9) ~ 10) 所示.

3) 不确定边界集: 如果 $[c]([w])$ 与 \mathbf{Y} 有一个非空交集, 但不完全在 \mathbf{Y} 的内部, 并且 $[w]$ 包含 \mathbf{W} 的边界, 则将 $[w]$ 视为不确定的. 如果 $[w]$ 的宽度小于预先指定的参数 $\epsilon > 0$, 则被认为足够小, 将包含 \mathbf{W} 边界的区间箱体收集到集合 $\hat{\mathbf{W}}_{bou}$ 中, 如算法 1 的第 11) ~ 12) 所示.

4) 不确定划分集: 如果 $[w]$ 是不确定的, 且其宽度大于预先指定的参数 ϵ , 则将 $[w]$ 分为两部分, 生成两个新的区间箱体, 储存在集合 $\hat{\mathbf{W}}_{do}$ 中, 收集到的区间箱体需要进一步探索, 这里的探索通过递归实现, 直到集合 $\hat{\mathbf{W}}_{do}$ 为空集, 如算法 1 的第 13) ~ 16) 所示.

注 1. 1) 为了能够执行内部测试集和外部测试集, 集合 \mathbf{Y} 和 \mathbf{W}_{init} 应该分别通过集合 $\hat{\mathbf{Y}}$ 和 $\hat{\mathbf{W}}_{init}$ 进行近似表示. 这样做不会失去一般性, 因为任何紧集都可以由箱体的并集进行任意近似. 2) 存储箱体的集合非常重要, 例如 $\hat{\mathbf{Y}}$, $\hat{\mathbf{W}}_{init}$, $\hat{\mathbf{W}}_{in}$ 等. 一种常见的方法是将箱体形式的集合存储为列表形式, 但更有效的方法是将其二叉树的形式存储 (更多相关细节可以参考文献 [19, 23]).

因为包含函数 $[c]$ 是收敛的, 随着参数 ϵ 趋近于 0, 内近似集合 $\hat{\mathbf{W}}_{in}$ 收敛于集合 \mathbf{W} . 这意味着 SIVIA 算法可以基于任意精度近似集合 \mathbf{W} . 包含函数 $[c]$ 收敛性表示 $\lim_{d([w]) \rightarrow 0} d([c]([w])) = \mathbf{0}$, 而 $[w]$ 的宽度 $d([w])$ 的大小取决于参数 ϵ . 因此, 当参数 ϵ 趋近于 0 时, $d([w])$ 会趋近于 0, 从而 $d([c]([w]))$ 也会趋近于 0. 随着 $[c]([w])$ 的宽度 $d([c]([w]))$ 越来越小, $[c]([w])$ 会越来越近似一个确定的值. 即在 SIVIA 算法中得到的内近似集合 $\hat{\mathbf{W}}_{in}$ 将会收敛于集合 \mathbf{W} (更详细的介绍和证明过程可以参考文献 [19] 中的定理 3.1 和文献 [24] 中的定理 1).

算法 1. SIVIA 算法

输入. 区间函数 c , 求逆集合 \mathbf{Y} , 初始区间向量 $\hat{\mathbf{W}}_{init}$, 精度 ϵ .

输出. $\hat{\mathbf{W}}_{in}$.

```

1) procedure SIVIA( $c, \mathbf{Y}, \hat{\mathbf{W}}_{init}, \epsilon$ )
2)   初始化  $\hat{\mathbf{W}}_{in} = \emptyset, \hat{\mathbf{W}}_{out} = \emptyset, \hat{\mathbf{W}}_{bou} = \emptyset;$ 
3)    $\hat{\mathbf{W}}_{do} = \hat{\mathbf{W}}_{init};$ 
4)   while  $\hat{\mathbf{W}}_{do} \neq \emptyset$  do
5)     从  $\hat{\mathbf{W}}_{do}$  得到区间向量  $[w];$ 
6)     将  $[w]$  从  $\hat{\mathbf{W}}_{do}$  移出;
7)     if  $[c]([w]) \subset \hat{\mathbf{Y}}$  then
8)       将  $[w]$  添加到集合  $\hat{\mathbf{W}}_{in};$ 
9)     else if  $[c]([w]) \cap \hat{\mathbf{Y}} = \emptyset$  then
10)      将  $[w]$  添加到集合  $\hat{\mathbf{W}}_{out};$ 
11)    else if  $d([w]) < \epsilon$  then
12)      将  $[w]$  添加到集合  $\hat{\mathbf{W}}_{bou};$ 
13)    else
14)      将  $[w]$  一分为二;
15)      新生成的两个区间向量添加到集合  $\hat{\mathbf{W}}_{do}$  中;
16)    end if
17)  end while
18)  return  $\hat{\mathbf{W}}_{in}$ .
19) end procedure

```

3.2 通过 SIVIA 算法估计负定不变集

在本节中, 基于 SIVIA 算法, 提出对给定正定函数集 \mathcal{L} 进行负定不变集 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 估计的算法.

给定一个正定函数 L , 关于系统 (1), 式 (4) 中定义的负定集 Θ_L 能够用 SIVIA 算法近似估计. 正定函数 L 的时间差分 $\Delta L(\omega) : \mathbf{R}^{n+m} \rightarrow \mathbf{R}$ 可以被定义为 $\Delta L(\omega) = L(f(\omega)) - L(x)$, 其中 $\omega = (x; u) \in \mathbf{R}^{n+m}$. 根据 ΔL , 可以将式 (4) 改写成

$$\Theta_L = \{\omega \in \mathbf{R}^{n+m} | \Delta L(\omega) \in (-\infty, 0)\} \quad (20)$$

在 SIVIA 算法中, $\Delta L(\omega) = 0$ 是在区间集合的边界 $\hat{\mathbf{W}}_{bou}$ 中. 结合式 (19) 和式 (20), 负定集 Θ_L 在初始区间 $[\omega_{init}]$ 的内近似集合 $\hat{\Theta}_L$ 可以通过下式获得 (如算法 2 的第 4) ~ 5))

$$\hat{\Theta}_L = \text{SIVIA}(\Delta L, \{(-\infty, 0)\}, [\omega_{init}], \epsilon) \quad (21)$$

根据式 (13), 负定不变集 $\Theta_{L, \gamma}$ 是负定集 Θ_L 的一个不变子集, 由式 (13) 和式 (20), 近似负定不变集 $\hat{\Theta}_{L, \gamma}$ 可以通过下式获得

$$\hat{\Theta}_{L, \gamma} = \{\omega \in \hat{\Theta}_L | \Delta L(\omega) \in (-\infty, 0), L(x) \leq \gamma\} \quad (22)$$

其中, γ 为如下优化问题的解 (如算法 2 的第 7) ~ 9))

$$\max_{\gamma > 0} \gamma \quad \text{s.t.} \quad \hat{\mathbf{X}}_{L, \gamma} \subset \hat{\mathbf{X}}_L$$

为了在实际应用中进行规范选择, 本文采用平方和 (SOS) 多项式^[25-26] 来定义单个正定函数

$$\{L \in \mathbf{R}_{n, 2d} | L(x) = z_d^T(x) P^T P z_d(x), x \in \mathbf{R}^n\} \quad (23)$$

其中, $\mathbf{R}_{n, 2d}$ 表示含有 n 个变量且次数小于或等于 $2d$ 的所有多项式的集合, $L \in \mathbf{R}_{n, 2d}$ 可以确保函数 L 是 SOS 形式, $P \in \mathbf{R}^{r \times r}$ 为满秩矩阵, $P^T P$ 是对称矩阵且为半正定形式, 函数 L 满足 $L: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $L(\mathbf{0}) = 0$. 在这里

$$z_d(x) = (x_{(1)}; \cdots; x_{(n)}; x_{(1)}x_{(2)}; \cdots; x_{(n)}^d) \in \mathbf{R}^r$$

$$r = C_{n+d}^d - 1$$

其中, C_{n+d}^d 为组合数公式. 因此, 正定函数集 (10) 可以改写为

$$\mathcal{L} = \{L_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} | z_d^T(x) P_i^T P_i z_d(x), i = 1, 2, \dots, p\}$$

其中, $P_i \in \mathbf{R}^{r \times r}$, $i = 1, 2, \dots, p$ 是随机生成的满秩矩阵.

给定一个正定函数集 \mathcal{L} , 其中负定集 $\Theta_{\mathcal{L}} = \bigcup_{i=1}^p \Theta_{L_i}$ 和负定不变集 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma} = \bigcup_{i=1}^p \Theta_{L_i, \gamma_i}$ 的解集可以分别看成是 p 个正定函数的负定集和负定不变集的并集. 在算法 2 中引入了一个循环, 每循环一次会生成一个正定函数 $L_i \in \mathcal{L}$ 的近似负定集和近似负定不变集, 分别记为 $\hat{\Theta}_1$ 和 $\hat{\Theta}_2$. 在每次循环后, 将 $\hat{\Theta}_1$ 和 $\hat{\Theta}_2$ 分别与正定函数集 \mathcal{L} 的近似负定集 $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}}$ 和近似负定不变集 $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 取并集后设为空集. 正定函数集 \mathcal{L} 的近似负定不变集 $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 从控制空间到状态空间的投影 $\hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{L}, \Gamma} = \text{proj}(\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma})$ 是闭环 DOA 的估计值. 具体步骤参考算法 2.

算法 2. 近似多 Lyapunov 函数负定不变集 $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}$

输入. 函数 f , 正定函数集 \mathcal{L} , 初始区间向量 $\hat{\mathbf{W}}_{init}$, 精度 ϵ .

输出. $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}}, \hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}, \hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{L}, \Gamma}$.

- 1) 初始化 $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}} = \emptyset, \hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma} = \emptyset, \hat{\Theta}_1 = \emptyset, \hat{\Theta}_2 = \emptyset$;
- 2) **for** $i = 1 : p$ **do**
- 3) $\Delta L_i(\omega) = L_i(f(\omega)) - L_i(x)$;
- 4) $\hat{\Theta}_1 = \text{SIVIA}(\Delta L_i, \{(-\infty, 0)\}, [\omega_{init}], \epsilon)$;
- 5) $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}} = \hat{\Theta}_1 \cup \hat{\Theta}_{\mathcal{L}}$;
- 6) $\hat{\mathbf{X}}_{L_i} = \text{proj}(\hat{\Theta}_1)$;
- 7) $\max_{\gamma_i > 0} \gamma_i$ s.t. $\hat{\mathbf{X}}_{L_i, \gamma_i} \subset \hat{\mathbf{X}}_{L_i}$
- 8) $\hat{\Theta}_2 = \{\omega \in \hat{\Theta}_1 | \Delta L_i(\omega) \in (-\infty, 0), L_i(x) \leq \gamma_i\}$;
- 9) $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma} = \hat{\Theta}_2 \cup \hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}$;
- 10) $\hat{\Theta}_1 = \emptyset, \hat{\Theta}_2 = \emptyset$;
- 11) **end for**
- 12) $\hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{L}, \Gamma} = \text{proj}(\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma})$;
- 13) **return** $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}}, \hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}, \hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{L}, \Gamma}$.

3.3 控制器的设计

在正定函数集 \mathcal{L} 中, 因为 $\forall L_i \in \mathcal{L}, L_i(f(\mathbf{0}, \mathbf{0})) - L_i(\mathbf{0}) = 0$, 原点 $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^{n+m}$ 处于负定不变集 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 的边界. 因此, 在 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 的内近似区间 $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 中不存在原点 $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^{n+m}$ 周围的区间向量, 所以 $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 在状态空间的投影 $\hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 不包含原点 $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ 的邻域 \mathbf{X}_0 . 邻域 \mathbf{X}_0 的大小取决于算法 2 的参数 ϵ . 假设系统 (1) 的线性化在原点是可控的, 那么一定存在一个线性控制器, 当 \mathbf{X}_0 足够小的时候, 它能够稳定 \mathbf{X}_0 中的所有状态. 总之, 闭环 DOA 的估计应该是由 $\hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{L}, \Gamma} \cup \mathbf{X}_0$ 构成的.

负定不变集的内近似区间 $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma} \subset \Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 是一个非结构化稳定控制器集合. 对于任何满足 $\forall x \in \hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{L}, \Gamma}, (x; \mu(x)) \in \hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 的控制器, 结合原点附近的线性控制器, 都能够使得闭环系统在原点处是渐近稳定的. 然而, 在实践中, 由于执行器的输出连续, 因此期望控制器也是连续的. 所以将结构化状态反馈控制器定义为

$$\mu(x) = \begin{cases} Kx, & x \in \mathbf{X}_0 \\ \tilde{\mu}(x), & x \in \hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{L}, \Gamma} \end{cases} \quad (24)$$

其中, $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 是根据系统 (1) 在原点线性化得到的, 这是由线性控制器的设计方法确定的. 为了构建非线性控制器, 可以采用多种方法, 如插值法、高斯过程回归等. 在本文研究中, 选择插值法来设计控制器 $\tilde{\mu}$. 首先, 构造一个训练数据集 $(x^l; \mu^l)$, 其中 $(x^l; \mu^l) \in \hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}$. 然后选择合适的插值方法 (如拉格朗日插值法、牛顿插值法等) 对训练集中的数据点进行处理, 得到一个趋势平滑且满足约束 $\tilde{\mu}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 的非线性控制器 $\tilde{\mu}$, 控制器 $\tilde{\mu}$ 可以保证 $\forall x \in \hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{L}, \Gamma}, (x; \tilde{\mu}) \in \hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}$.

4 仿真研究

考虑一阶非线性系统 (9), 其中状态 $x(k) \in \mathbf{R}$, 控制输入 $u(k) \in \mathbf{R}$. 函数 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 满足 $f(0, 0) = 0$. 在算法 2 中, 初始区间 $[\omega_{init}] = [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbf{R}^2$, 参数 ϵ 选择为 $\epsilon = 0.01$.

4.1 单个 Lyapunov 函数的负定集和负定不变集

随机生成一个 2 阶满秩矩阵 $P \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$, 使得 $PP^T = [0.8594, 0.6274; 0.6274, 0.6352]$. 对于 $L(x) = (x; x^2)^T P^T P (x; x^2)$, $x \in \mathbf{R}$, 得到正定函数 $L(x) = 0.8594x^2 + 1.2548x^3 + 0.6352x^4$.

图 3(a) 中, 蓝色矩形区域表示状态-控制空间负定集 Θ_L 的近似负定集 $\hat{\Theta}_L$, 蓝色线段表示状态空间的负定集 $\text{proj}(\hat{\Theta}_L) = \hat{\mathbf{X}}_L = [-2, -0.0234] \cup [0.0234,$

0.156 25] \cup [0.359 4, 2]. 图 3(b) 中, 蓝色矩形区域表示状态-控制空间负定不变集 $\Theta_{L, \gamma}$ 的近似集 $\hat{\Theta}_{L, \gamma}$, 蓝色线段表示状态空间不变集 $proj(\hat{\Theta}_{L, \gamma}) = \hat{\mathbf{X}}_{L, \gamma} = [-0.203 1, -0.023 4] \cup [0.023 4, 0.156 3]$. 此外, 绿色线段表示原点周围的邻域 $\mathbf{X}_{0_{L, \gamma}} = [-0.023 4, 0.023 4]$. 因此, 闭环 DOA 的估计值是 $proj(\hat{\Theta}_{L, \gamma}) \cup \mathbf{X}_{0_{L, \gamma}} = [-0.203 1, 0.156 3]$.

4.2 粒子群算法扩大闭环吸引域

根据文献 [15], 并结合本文算法 2, 使用启发式算法中的粒子群算法寻找最优 Lyapunov 函数, 以使系统 (1) 的闭环 DOA 尽可能大. 具体而言, 定义函数 $m: \mathbf{R}^{r \times r} \rightarrow \mathbf{R}_+$ 为 $\tilde{m}(P) = m(\hat{\mathbf{X}}_{L, \gamma})$, 其中 $L(x) = z_d^T(x)P^T P z_d(x)$ 且 $\hat{\mathbf{X}}_{L, \gamma}$ 可以通过算法 2 获得. 因此, 寻找最大闭环 DOA $\max_{L \in \mathbf{R}_{n, 2d}} m(\hat{\mathbf{X}}_{L, \gamma})$ 可以等价

地表示为 $\max_{P \in \mathbf{R}^{r \times r}} \tilde{m}(P)$, 即寻找最优矩阵 P 使得闭环 DOA 的估计值 $\hat{\mathbf{X}}_{L, \gamma}$ 最大.

针对上述优化问题, 选择 $P \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ 且满秩, 因此搜索空间维度为 4, 所有搜索位置的范围限定在 $[-1, 1]$, 本文设定粒子种群数为 10, 其余参数保持默认值. 粒子群算法经过 261 次迭代得到最优矩阵 $P_{so} = [0.503 5, 0.225 2; 0.777 5, 0.760 7]$, 对应的最优 Lyapunov 函数为 $L_{so}(x) = 0.304 3x^2 + 1.125 8x^3 + 1.183 2x^4$, 闭环 DOA 估计区间为 $[-2, 1.526 8]$. 在粒子群算法的优化过程中, 共研究了 $261 \times 10 = 2610$ 个 Lyapunov 函数的闭环 DOA, 最终获得了最优的 DOA, 整个优化过程耗时为 12 314.34 s.

图 4(a) 展示了粒子群算法寻求最大闭环 DOA 区间的迭代过程. 其中纵坐标表示每次迭代中闭环 DOA 的上界与下界之间的差值. 可以观察到最大

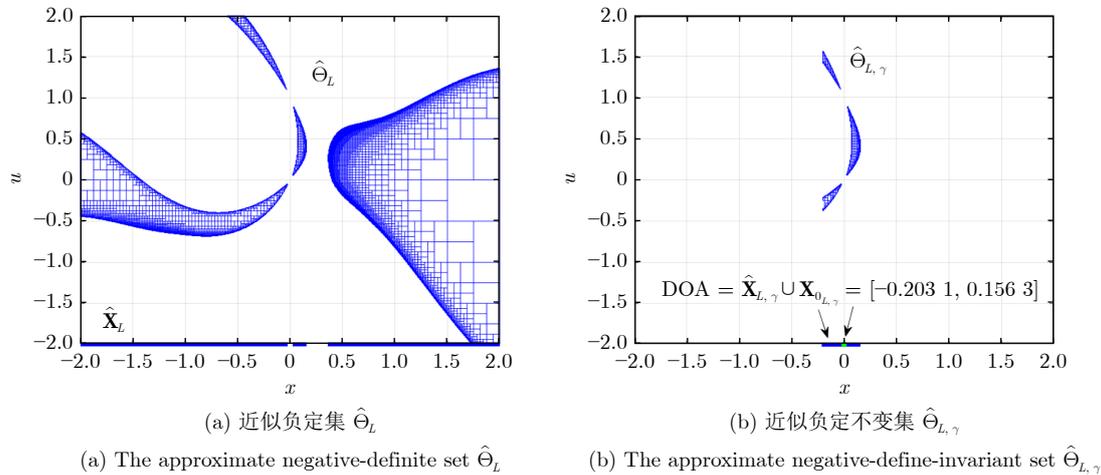


图 3 单个 Lyapunov 函数生成的近似负定集和负定不变集

Fig. 3 The approximate negative-definite set and negative-definite-invariant set for a given Lyapunov function

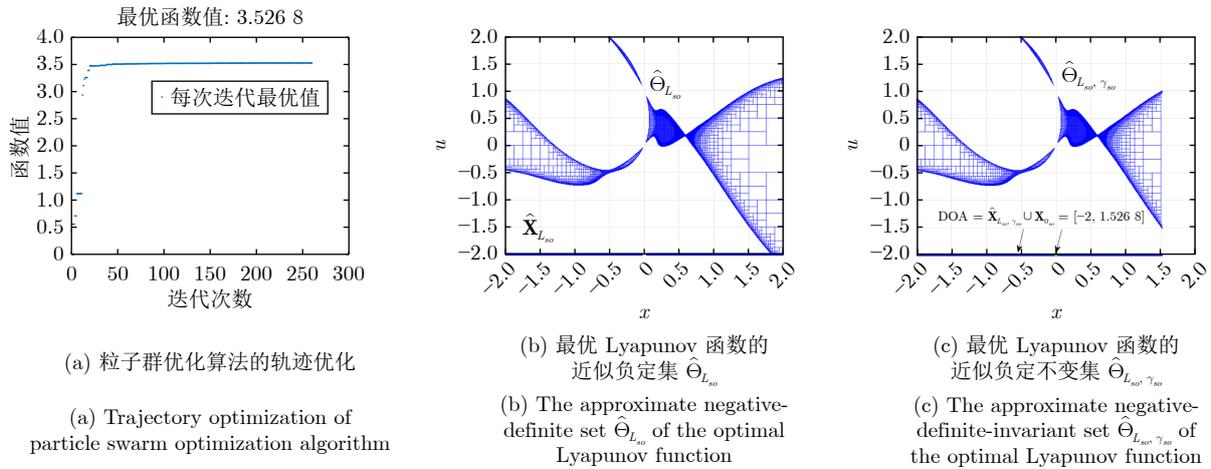


图 4 粒子群优化算法寻找最优 Lyapunov 函数

Fig. 4 Particle swarm optimization algorithm for finding the optimal Lyapunov function

差值为 3.5268, 从而得到闭环区间为 $[-2, 1.5268]$. 图 4(b) 的蓝色矩形区域表示最优 Lyapunov 函数 L_{s_0} 的近似负定集 $\hat{\Theta}_{L_{s_0}}$, 蓝色线段表示负定集在状态空间的投影 $\hat{\mathbf{X}}_{L_{s_0}}$. 图 4(c) 的蓝色矩形区域为最优 Lyapunov 函数 L_{s_0} 的近似负定不变集 $\hat{\Theta}_{L_{s_0}, \gamma_{s_0}}$, 蓝色线段为 $\hat{\Theta}_{L_{s_0}, \gamma_{s_0}}$ 在状态空间的投影 $\hat{\mathbf{X}}_{L_{s_0}, \gamma_{s_0}}$, 绿色线段表示原点周围的邻域 $\mathbf{X}_{0_{s_0}}$, 闭环 DOA 的区间为 $\hat{\mathbf{X}}_{L_{s_0}, \gamma_{s_0}} \cup \mathbf{X}_{0_{s_0}} = [-2, 1.5268]$.

4.3 多 Lyapunov 函数的负定集和负定不变集

4.3.1 Lyapunov 函数数量选择

不同 Lyapunov 函数对应的闭环 DOA 不同. 为了对比不同数量 Lyapunov 函数负定不变集的并集对闭环 DOA 的影响. 现分别随机生成 50 个、150 个、500 个和 2000 个四组数量不同的 2 阶满秩矩阵集合 $\mathbf{P} = \{P_i \in \mathbf{R}^{2 \times 2}, i = 1, 2, \dots, p\}$, 其中 p 分别取值为 50、150、500、2000. 根据 $L_i(x) = z_d^T(x)P_i^T P_i z_d(x)$, $i = 1, 2, \dots, p$ 得到四组不同的正定函数集 $\mathcal{L}_{50}, \mathcal{L}_{150}, \mathcal{L}_{500}, \mathcal{L}_{2000}$.

对比图 5(a) ~ 图 5(d) 中的闭环 DOA, 可以看出图 5(b)、图 5(c)、图 5(d) 的闭环 DOA 的估计值相同, 均为 $[-2, 1.5234]$, 而图 5(a) 的闭环 DOA 明显更小. 图 5(b) 与图 5(c) 没有明显区别, 但图 5(d) 与图 5(b)、图 5(c) 相比, 图 5(d) 的控制区域更大. 然而, 本文主要关注闭环 DOA 的研究, 而不是控制区域的大小. 因此, 综合考虑, 本文选择 150 个 Lyapunov 函数作为多 Lyapunov 函数的研究数量.

4.3.2 多 Lyapunov 函数的负定集和负定不变集

随机生成 150 个 2 阶满秩矩阵 $\mathbf{P} = \{P_i \in \mathbf{R}^{2 \times 2}, i = 1, 2, \dots, 150\}$. 根据 $L_i(x) = z_d^T(x)P_i^T P_i z_d(x)$, $i = 1, 2, \dots, 150$ 得到包含 150 个正定函数的正定函数集 \mathcal{L} .

图 6(a) 中, 蓝色矩形区域表示正定函数集 \mathcal{L} 的负定集 $\Theta_{\mathcal{L}}$ 的近似负定集 $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}}$, x 轴上的蓝色线段表示 $\text{proj}(\hat{\Theta}_{\mathcal{L}}) = [-2, -0.0234] \cup [0.0156, 2]$. 图 6(b) 中, 蓝色矩形区域表示正定函数集 \mathcal{L} 的负定不变集 $\Theta_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 的近似不变集 $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}$, x 轴上的蓝色线段表示 $\text{proj}(\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}) = [-2, -0.0234] \cup [0.0156, 1.5234]$,

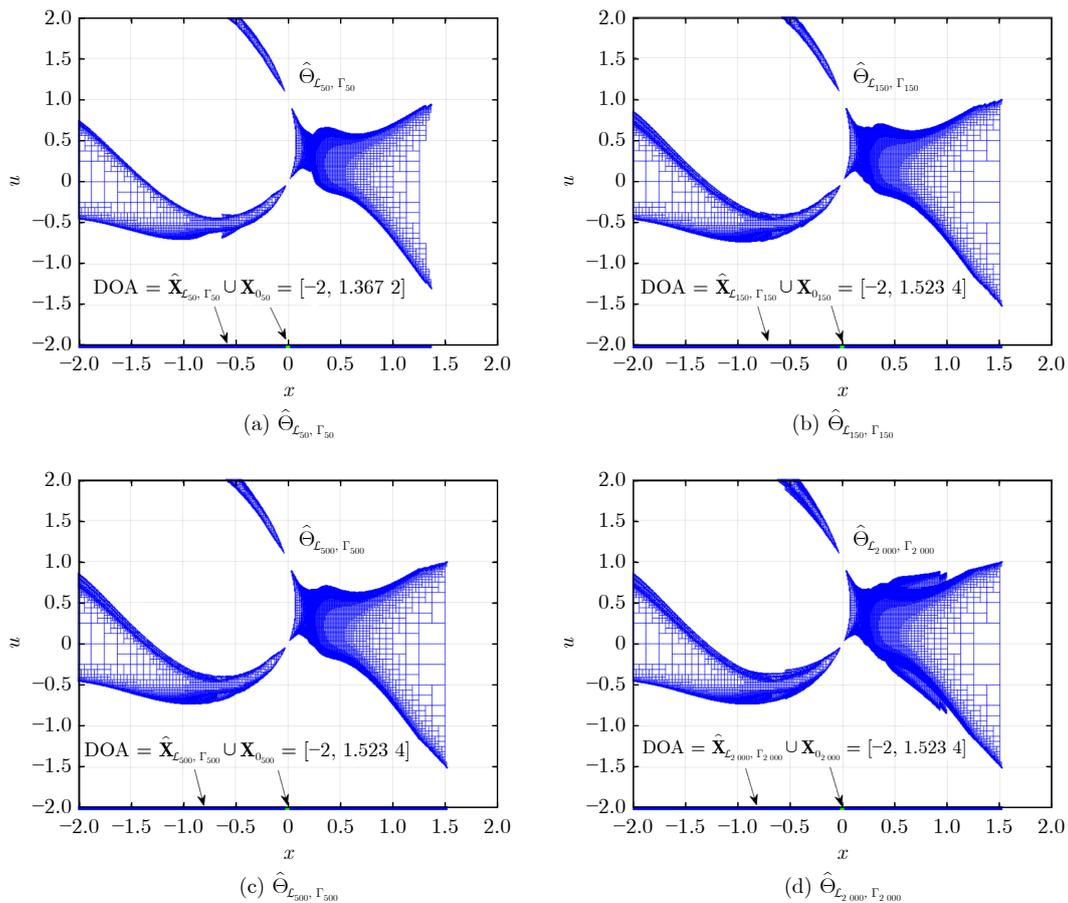


图 5 不同数量 Lyapunov 函数负定不变集和闭环 DOA 对比

Fig. 5 Comparison of negative-definite-invariant sets and closed-loop DOA for different numbers of Lyapunov functions

而绿色线段表示原点周围的邻域 $\mathbf{X}_0 = [-0.0234, 0.0156]$. 因此, 闭环 DOA 的估计值 $\hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{L}, \Gamma} \cup \mathbf{X}_0 = [-2, 1.5234]$. 需要指出的是, 多 Lyapunov 函数求解闭环 DOA 的过程是通过随机生成的 150 个正定函数逐一求解闭环 DOA, 并将结果取并集, 从而得到多 Lyapunov 函数的闭环 DOA. 整个过程共耗时 355.0414 s.

图 6(b) 中, 过原点的绿色直线为式 (24) 中的线性控制器 $u = 1.9957x$. 为了找到式 (24) 中的非线性控制器 $\tilde{\mu}$, 采用插值法对数据进行拟合, 在图 6(b) 中由红色曲线和黑色“x”表示. 基于控制器 $\mu(x)$, 图 6(c) 绘制了 2000 条初始状态 x 均匀分布在 $[-2, 1.5234]$ 上的闭环轨迹, 可以看到所有状态轨迹均收敛至原点.

为了证明是否属于 $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}$ 的所有控制器都能让系统渐近稳定, 图 6(d) 展示了 2000 条闭环状态轨

迹, 它们的初始状态 x 均匀分布在 $[-2, 1.5234]$ 区间内, 且所有轨迹均收敛至原点. 在此处, 线性控制器仍然为 $u = 1.9957x$, 而非线性控制器的输出来自于 $\mathbf{U}(x)$ 上的均匀分布. 对于给定的 $x \in \mathbf{R}$, $\mathbf{U}(x) = \{u \in \mathbf{R} | (x; u) \in \hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma}\}$ 是非结构化控制器集合. 图 6(c) 和图 6(d) 中的状态轨迹证明了 $\hat{\Theta}_{\mathcal{L}, \Gamma} \cup \{(x; u) | u = 1.9957x, x \in \mathbf{X}_0\}$ 是系统的负定不变集.

4.4 仿真结果对比

当对非线性系统 (9) 的闭环 DOA 进行求解时, 本文从单个 Lyapunov 函数、最优 Lyapunov 函数和多 Lyapunov 函数三个角度进行分析. 图 3(b) 中显示, 单个 Lyapunov 函数的闭环吸引域为 $[-0.2031, 0.1563]$, 相较于其他两种方法, 单个 Lyapunov 函数的求解结果更为保守. 另外, 在图 4(c) 和图 6(b) 中, 最优 Lyapunov 函数和多 Lyapunov 函数的闭

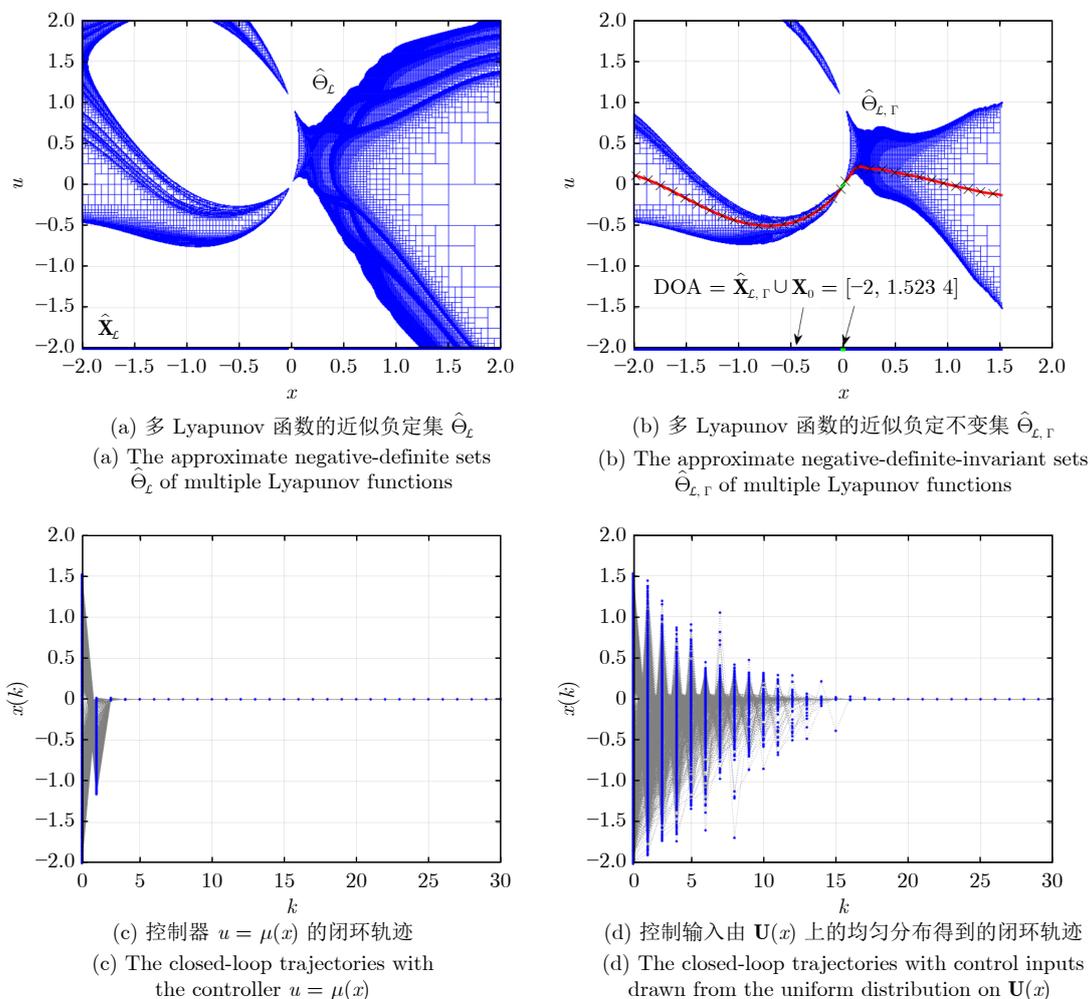


图 6 多 Lyapunov 函数的近似负定集和负定不变集以及收敛轨迹

Fig. 6 The approximate negative-definite sets and negative-definite-invariant sets of multiple Lyapunov functions and convergence trajectories

环 DOA 分别为 $[-2, 1.5268]$ 和 $[-2, 1.5234]$. 可以观察到, 在求解闭环 DOA 时, 最优 Lyapunov 函数和多 Lyapunov 函数两种方法的结果差距不大. 然而, 值得注意的是, 使用粒子群算法求解最优 Lyapunov 函数时, 通过对 2610 个不同 Lyapunov 函数的闭环 DOA 求解, 耗时 12 314.34 s 才得到最优闭环 DOA. 相比之下, 采用多 Lyapunov 函数的方法, 在对 150 个 Lyapunov 函数的闭环 DOA 分别求解后取并集, 得到多 Lyapunov 函数闭环 DOA 的过程, 仅耗时 355.041 4 s. 多 Lyapunov 函数的方法在求解闭环 DOA 的过程中, 不仅求解 Lyapunov 函数闭环 DOA 的次数更少, 而且计算时间更短, 效率更高. 此外, 通过对比图 4(c) 与图 6(b) 发现, 最优 Lyapunov 函数的负定不变集区域小于多 Lyapunov 函数的负定不变集区域. 从控制器角度来看, 多 Lyapunov 函数的负定不变集中拥有更大的非结构控制器集合范围.

综上所述, 针对非线性控制系统, 通过比较单个 Lyapunov 函数与粒子群算法寻找最优 Lyapunov 函数的方法, 多 Lyapunov 函数方法能够有效扩大闭环吸引域且计算量更小. 此外, 多 Lyapunov 函数方法还能够扩大非结构化控制器集合范围, 为控制器的设计提供更大的灵活性和可行性.

5 结论

针对一般非线性系统, 由于全局稳定难以实现, 因此需要对闭环 DOA 进行详细研究. 本文针对离散时间非线性系统, 提出了一种多 Lyapunov 函数估计闭环 DOA 的方法, 即通过取多个 Lyapunov 函数的负定不变集的并集来扩大闭环 DOA. 首先, 证明了在多 Lyapunov 函数下系统渐近稳定的充分条件, 这表明即使在多个 Lyapunov 函数的负定不变集的并集中, 系统仍能保持稳定状态. 其次, 利用区间分析中的 SIVIA 算法尽可能精确地找到集合的近似值, 并基于 SIVIA 算法得到了闭环 DOA 的估计值. 最后, 通过对同一非线性系统进行实际案例分析, 对比了单个 Lyapunov 函数、粒子群算法寻找最优 Lyapunov 函数以及多 Lyapunov 函数求解闭环 DOA 的三种方法, 进一步证明了本文方法的有效性.

References

- 1 Khalil H K. *Nonlinear Systems Third Edition*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002. 126–133
- 2 Monfared M N, Yazdanpanah M J. Optimal dynamic Lyapunov function and the largest estimation of domain of attraction. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, **50**: 2645–2650
- 3 Tibken B. Estimation of the domain of attraction for polynomial systems via LMIs. In: Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Cat.No.00CH37187). Sydney, Australia: IEEE, 2000. 3860–3864
- 4 Ali M M A, Jamali A, Asgharnia A, Ansari R, Mallipeddi R. Multi-objective Lyapunov-based controller design for nonlinear systems via genetic programming. *Neural Computing and Applications*, 2022, **34**: 1345–1357
- 5 Dabbaghi B, Hamidi F, Jerbi H, Aoun M. Estimating and enlarging the domain of attraction for a nonlinear system with input saturation. In: Proceedings of the IEEE International Workshop on Mechatronic Systems Supervision (IW_MSS). Hammamet, Tunisia: IEEE, 2023. 1–5
- 6 Binu K U, Mija S J, Cheriyan E P. Nonlinear analysis and estimation of the domain of attraction for a droop controlled microgrid system. *Electric Power Systems Research*, 2022, **204**: Article No. 107712
- 7 Saleme A, Tibken B, Warthenpfohl S, Selbach C. Estimation of the domain of attraction for non-polynomial systems: A novel method. *IFAC Proceedings*, 2011, **44**: 10976–10981
- 8 Wang S J, Lu J J, She Z K. Estimating the minimal domains of attraction of uncertain discrete-time switched systems under state-dependent switching. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2024, **54**: Article No. 101527
- 9 Majumdar A, Vasudevan R, Tobenkin M M, Tedrake R. Convex optimization of nonlinear feedback controllers via occupation measures. *The International Journal of Robotics Research*, 2014, **33**(9): 1209–1230
- 10 Najafi E, Lopes G A D, Babuska R. Balancing a legged robot using state-dependent Riccati equation control. *IFAC Proceedings*, 2014, **47**: 2177–2182
- 11 Bedoui S, Bacha A B B, Elloumi S, Braiek N B. Enlarging nonlinear discrete system's domain of attraction via linear control law. In: Proceedings of the 5th International Conference on Advanced Systems and Emergent Technologies (IC_ASET). Hammamet, Tunisia: IEEE, 2022. 489–493
- 12 Yadipour M, Hashemzadeh F, Baradarannia M. Controller design to enlarge the domain of attraction for a class of nonlinear systems. In: Proceedings of the International Conference on Research and Education in Mechatronics (REM). Wolfenbuettel, Germany: IEEE, 2017. 1–5
- 13 Meng F W, Wang D N, Yang P H, Xie G Z, Guo F. Application of sum-of-squares method in estimation of region of attraction for nonlinear polynomial systems. *IEEE Access*, 2020, **8**: 14234–14243
- 14 Davó M A, Prieur C, Fiacchini M, Nešić D. Enlarging the basin of attraction by a uniting output feedback controller. *Automatica*, 2018, **90**: 73–80
- 15 Li Y Q, Hou Z S. Data-driven asymptotic stabilization for discrete-time nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 2014, **64**: 79–85
- 16 Rossa M D, Jungers R M. Multiple Lyapunov functions and memory: A symbolic dynamics approach to systems and control. arXiv: 2307.13543, 2024.
- 17 Chen S Z, Ning C Y. Improved multiple Lyapunov functions of input-to-output stability and input-to-state stability for switched systems. *Journal of Advanced Transportation*, 2022, **606**: 47–62
- 18 Yang D, Zong G D, Liu Y J, Ahn C K. Adaptive neural network output tracking control of uncertain switched nonlinear systems: An improved multiple Lyapunov function method. *Information Sciences*, 2022, **606**: 380–396
- 19 Jaulin L, Kieffer M, Didrit O, Walter E. *Applied Interval Analysis: With Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- 20 Chen Hui, Deng Dong-Ming, Han Chong-Zhao. Sensor control based on interval box-particle multi-Bernoulli filter. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(6): 1428–1443
(陈辉, 邓东明, 韩崇昭. 基于区间箱粒子多伯努利滤波器的传感器

控制策略. 自动化学报, 2021, 47(6): 1428–1443)

- 21 Li Y Q, Lu C L, Li Y N, Hou Z S, Feng Y, Feng Y J. Stabilization with closed-loop DOA enlargement: An interval analysis approach. arXiv: 1912.11775, 2021.
- 22 Haddad W M, Chellaboina V. *Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-based Approach*. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- 23 Kieffer M, Braems I, Walter E, Jaulin L. *Guaranteed Set Computation With Subpavings*. Boston: Springer, 2001. 167–178
- 24 Jaulin L, Walter E. Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. *Automatica*, 1993, 29: 1053–1064
- 25 Topcu U, Packard A, Seiler P, Balas G. Help on SOS [Ask the experts]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2010, 30(4): 18–23
- 26 Powers V, Wörmann T. An algorithm for sums of squares of real polynomials. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1998, 127: 99–104



杨可馨 浙江工业大学信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为非线性控制.

E-mail: 211122030042@zjut.edu.cn

(**YANG Ke-Xin** Master student at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. Her main research interest is nonlinear control.)



李永强 浙江工业大学信息工程学院副教授. 2014 年获得北京交通大学控制理论与控制工程专业博士学位. 主要研究方向为非线性控制, 最优控制, 机器人控制和强化学习. 本文通信作者. E-mail: yqli@zjut.edu.cn

(**LI Yong-Qiang** Associate professor at the College of Information Engineering, Zhejiang

University of Technology. He received his Ph.D. degree in control theory and control engineering from Beijing Jiaotong University in 2014. His research interest covers nonlinear control, optimal control, robotic control, and reinforcement learning. Corresponding author of this paper.)



侯忠生 青岛大学自动化学院首席教授. 1994 年获得东北大学博士学位. 主要研究方向为无模型自适应控制, 数据驱动控制, 学习控制和智能交通系统. E-mail: zshou@qdu.edu.cn

(**HOU Zhong-Sheng** Chair professor at the College of Automation, Qingdao University. He received his Ph.D. degree from Northeastern University in 1994. His research interest covers model-free adaptive control, data-driven control, learning control, and intelligent traffic systems.)



冯宇 浙江工业大学信息工程学院教授. 2011 年获得法国南特矿业学院博士学位. 主要研究方向为网络化控制系统, 不确定系统的鲁棒分析与控制, 博弈论与机器学习在决策问题中的应用. E-mail: yfeng@zjut.edu.cn

(**FENG Yu** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. He received his Ph.D. degree from École nationale supérieure des mines de Nantes in 2011. His research interest covers networked control systems, robust analysis and control for uncertainty systems, and applications of game theory and machine learning in decision-making.)