



## 面向机动目标的设定时间多约束协同制导律

李鹤宇 王建斌 张锐 宋峰

### Predefined-time Multi-constraints Cooperative Guidance Law for Maneuvering Target

LI He-Yu, WANG Jian-Bin, ZHANG Rui, SONG Feng

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.16383/j.aas.c240099>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### 切换拓扑下动态事件触发多智能体系统固定时间一致性

Dynamic Event-triggered Fixed-time Consensus Control of Multi-agent Systems Under Switching Topologies

自动化学报. 2023, 49(6): 1295–1305 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c211123>

### 一致性约束下末制导系统最大可容许模式决策延迟

Maximal Admissible Mode Decision Delay Under Consistency Constraint in Terminal Guidance System

自动化学报. 2022, 48(6): 1448–1456 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c200717>

### 基于事件触发二阶多智能体系统的固定时间比例一致性

Distributed Event-triggered Fixed-time Scaled Consensus Control for Second-order Multi-agent Systems

自动化学报. 2022, 48(1): 261–270 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c190128>

### 非匹配扰动下的多智能体系统固定时间一致跟踪

Fixed-time Consensus Tracking of Multi-agent Systems Under Unmatched Disturbances

自动化学报. 2021, 47(6): 1368–1376 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c190339>

### SGCMGs驱动的挠性航天器有限时间自适应鲁棒控制

Finite-time Adaptive Robust Control for SGCMGs-based Flexible Spacecraft

自动化学报. 2021, 47(3): 641–651 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c180446>

### 航天器任务调度模型、算法与通用求解技术综述

Survey on Models, Algorithms and General Techniques for Spacecraft Mission Scheduling

自动化学报. 2021, 47(12): 2715–2741 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c190656>

# 面向机动目标的设定时间多约束协同制导律

李鹤宇<sup>1</sup> 王建斌<sup>1</sup> 张锐<sup>1</sup> 宋峰<sup>1</sup>

**摘要** 针对三维空间中多航天器协同捕获机动目标问题, 提出一种具有终端角度约束和时间一致性约束的设定时间协同制导律, 将视线角误差和齐射攻击的收敛时间作为一个可提前设定的参数, 实现对收敛时间进行设置. 构建三维场景航天器-目标运动学模型, 在沿视线 (Line-of-sight, LOS) 方向将同时攻击问题转化为一致性问题, 提出一种分布式协同制导律, 设定时间内使得多个航天器剩余飞行时间相等; 在垂直视线方向利用滑模控制方法对制导律进行设计, 使得每个航天器的视线角在设定时间内达到期望值. 上述制导律中, 设计了一种设定时间扩展状态观测器对未知的目标加速度进行估计. 数值仿真结果验证了方法的有效性.

**关键词** 航天器, 协同制导律, 设定时间收敛, 状态估计, 时间一致性

**引用格式** 李鹤宇, 王建斌, 张锐, 宋峰. 面向机动目标的设定时间多约束协同制导律. 自动化学报, 2025, 51(1): 1-13

**DOI** 10.16383/j.aas.c240099 **CSTR** 32138.14.j.aas.c240099

## Predefined-time Multi-constraints Cooperative Guidance Law for Maneuvering Target

LI He-Yu<sup>1</sup> WANG Jian-Bin<sup>1</sup> ZHANG Rui<sup>1</sup> SONG Feng<sup>1</sup>

**Abstract** Aiming at the problem of multi-spacecraft cooperatively capturing the maneuvering target in 3D, a predefined-time cooperative guidance law with terminal angle constraint and time consistency constraint is proposed. The convergence time of line-of-sight (LOS) angle error and salvo attack can be treated as predefined parameters to achieve the setting of the convergence time. Construct a 3D scene spacecraft-target kinematics model. The simultaneous attack problem can be regarded as a consensus problem along the LOS direction, where a distributed cooperative guidance law is presented to make the time-to-go of all spacecrafts equal within the predefined-time. A guidance law is also designed using sliding mode control in the normal direction of the LOS to achieve the desired LOS angles for each spacecraft within the predefined-time. In the above guidance law, a predefined-time extended state observer (PTESO) is developed to estimate the unknown target acceleration. The effectiveness of this method is verified by numerical simulation results.

**Key words** Spacecraft, cooperative guidance law, predefined-time convergence, state estimation, time consistency

**Citation** Li He-Yu, Wang Jian-Bin, Zhang Rui, Song Feng. Predefined-time multi-constraints cooperative guidance law for maneuvering target. *Acta Automatica Sinica*, 2025, 51(1): 1-13

随着自动化技术的快速发展, 目标航天器机动能力不断提升, 对国防安全产生严重威胁<sup>[1]</sup>. 传统方式采用一个追踪航天器对目标进行捕获, 由于在制导性能方面存在局限性, 无法满足现代防御系统的要求<sup>[2]</sup>. 随着先进控制理论的提出和多智能体协同技术的发展, 采用多个航天器协同制导得到广泛关注, 该方法能够在降低对自身性能要求的同时, 有效提升捕获概率<sup>[3]</sup>. 因而, 近年来多航天器协同制导问题得到了深入的研究.

协同制导策略主要分为两类: 1) 具有时间维度

协同的撞击时间控制制导 (Impact time control guidance, ITCG)<sup>[4]</sup>, 即控制多个航天器的剩余飞行时间, 实现同时撞击目标; 2) 具有空间维度协同的攻击角度控制制导 (Impact angle control guidance, IACG)<sup>[5]</sup>, 即对各航天器的攻击角度进行控制, 实现从不同方向飞向目标. 早期的协同制导对每个航天器的制导律单独进行设计, 以实现时间的一致性. 文献 [6] 对 ITCG 进行改进, 提出一种针对静止目标的时间约束协同制导律. 为克服小角度假设的限制, 文献 [7] 提出一种滑模控制方法, 该方法能够同时满足时间一致性约束和视线角约束. 文献 [6-7] 中各航天器剩余飞行时间由于与初始条件相关, 无法保证相同, 因此不能有效实现同时打击目标.

为克服文献 [6-7] 方法的不足, 文献 [8] 基于视线坐标系, 利用多智能体一致性理论设计沿视线

收稿日期 2024-02-28 录用日期 2024-07-23  
Manuscript received February 28, 2024; accepted July 23, 2024  
173 基础加强计划项目 (2020-JQCJ-ZD-064-00) 资助  
Supported by the 173 Basic Strengthening Program (2020-JQCJ-ZD-064-00)  
本文责任编辑 许斌  
Recommended by Associate Editor XU Bin  
1. 北京电子工程总体研究所 北京 100854  
1. Beijing Institute of Electronic System Engineering, Beijing 100854

(Line-of-sight, LOS) 方向和垂直视线方向制导律, 在二维场景下, 既实现了多个航天器剩余飞行时间相同, 又保证在各自期望的视线方向攻击目标. 文献 [9] 通过最小化控制变量的平均值, 提出一种针对阶跃机动目标的协同控制方法. 文献 [10] 考虑速度有限的约束, 利用一致性原理和修正比例导引, 提出一种具有终端角度约束和时间一致性约束的协同制导律. 文献 [11] 基于飞行器速度不可控约束, 分析速度变化与剩余飞行时间关系, 基于 IACG 保证零脱靶量和期望的攻击方向, 通过设计偏置项实现时间一致性约束和视场约束. 上述协同制导律均为有限时间收敛, 即算法能够收敛, 但收敛时间无法确定, 收敛时间取决于系统的初始状态<sup>[12]</sup>. 文献 [12] 提出一种固定时间收敛相对误差动力学方法, 该方法在进行参数选择时只需要考虑相对收敛时间, 不需要针对不同场景和攻击时间重新选择参数. 文献 [13] 提出一种二阶系统滑模控制器, 该控制器能够使存在未知有界干扰的系统在固定时间内趋于稳定, 从而避免使用观测器, 有效降低系统的复杂性. 文献 [14] 利用常指数系数和变指数系数控制方法实现一阶系统的全局鲁棒固定时间稳定, 基于滑模控制将该控制方法推广至带有干扰的非线性二阶系统, 实现全局鲁棒固定时间稳定. 文献 [15] 基于固定时间收敛理论提出一种攻击时间可控的制导方法, 并使用领-从结构同时实现时间约束和终端角度约束. 文献 [16] 针对飞行器速度大小恒定的情况, 当飞行器初始速度与视线夹角为锐角时, 实现剩余飞行误差在固定时间内收敛. 文献 [17] 建立三维场景下的协同制导模型, 提出一种固定时间收敛的协同制导算法, 设计固定时间收敛观测器对目标状态进行估计, 并对制导指令进行补偿, 提升系统稳定性. 文献 [18] 基于固定时间微分器和双极限同质性理论提出一种协同制导方法, 该方法不需要测量沿视线方向速度, 可以保证多个航天器剩余飞行时间相等. 固定时间方法中, 收敛时间可以用解析式表达, 但取决于制导参数, 无法提前预定.

预定时间方法将收敛时间作为一个可提前设定的参数, 能够对收敛时间进行更直观的规定<sup>[19-21]</sup>. 文献 [22] 建立航天器姿态运动学方程, 基于设计一种姿态跟踪方法, 确保四元数和角速度表示的误差在预定时间收敛. 文献 [23] 首次提出预定时间收敛的协同制导方法, 但该方法仅适用于二维场景. 文献 [24] 针对三维场景, 提出一种预定时间收敛的具有攻击时间和视线角约束的协同制导律, 但该方法使用的观测器是固定时间收敛的. 预定时间控制方法的实际收敛时间取决于李雅普诺夫函数的初值,

针对该问题文献 [25] 提出一种控制结构, 能够直观地设置系统收敛时间.

本文研究多航天器协同制导问题, 提出一种针对机动目标、具有终端角度约束和时间一致性约束的三维设定时间收敛协同制导算法 (3D predefined-time cooperative guidance law, 3DPCGL). 本文主要贡献如下:

1) 在沿 LOS 方向, 利用一致性原理提出一种设定时间收敛制导律, 能够在设置的时间内实现多个航天器剩余飞行时间相等, 优于现有有限时间、固定时间方法;

2) 在垂直 LOS 方向, 利用非奇异设定时间收敛滑模面, 设计了一种设定时间收敛制导律, 实现在设置的时间内视线角趋于期望值;

3) 针对目标加速度未知的问题, 提出一种设定时间收敛扩展状态观测器 (Predefined-time extended state observer, PTESO), 使得观测误差在设置的时间内收敛到 0;

4) 提出的控制方法能够对系统收敛时间进行直接设定, 而与其他因素无关.

## 1 问题描述与基础理论

### 1.1 问题描述

$n$  个航天器  $M_i, i = 1, \dots, n$ , 从不同方位攻击同一目标  $T$  的三维几何结构如图 1 所示.  $OXYZ$  为发射系,  $M_i X_L Y_L Z_L$  为航天器  $M_i$  和目标  $T$  之间的视线坐标系. 假设航天器和目标可以通过执行机构实现任意方向的加速度,  $\mathbf{a}_i, \mathbf{V}_i$  分别表示航天器  $i$  的加速度矢量和速度矢量,  $a_{r,i}, a_{\theta,i}, a_{\varphi,i}$  分别表示  $\mathbf{a}_i$  在视线坐标系  $M_i X_L Y_L Z_L$  中沿三个坐标轴的

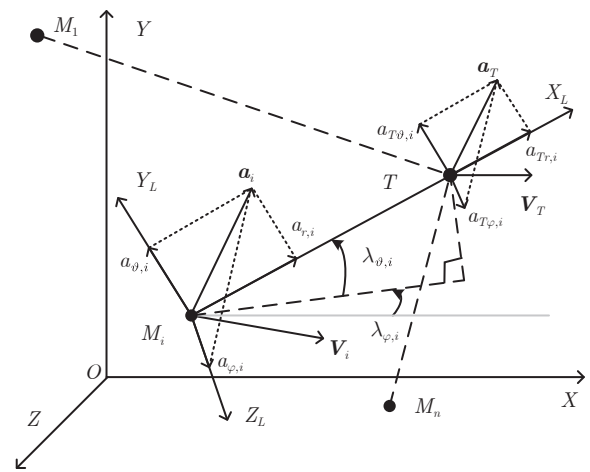


图 1 三维协同制导示意图

Fig. 1 3D cooperative guidance geometry

分量,  $\mathbf{a}_T$ ,  $\mathbf{V}_T$  分别表示目标的加速度矢量和速度矢量,  $a_{Tr, i}$ ,  $a_{T\vartheta, i}$ ,  $a_{T\varphi, i}$  分别表示  $\mathbf{a}_T$  在视线坐标系  $M_i X_L Y_L Z_L$  中沿三个坐标轴的分量. 航天器  $M_i$  和目标  $T$  之间的相对运动方程为

$$\ddot{r}_i = r_i \dot{\lambda}_{\vartheta, i}^2 + r_i \dot{\lambda}_{\varphi, i}^2 \cos^2 \lambda_{\vartheta, i} - a_{r, i} + a_{Tr, i} \quad (1)$$

$$\ddot{\lambda}_{\vartheta, i} = -\frac{2\dot{r}_i}{r_i} \dot{\lambda}_{\vartheta, i} - \dot{\lambda}_{\varphi, i}^2 \sin \lambda_{\vartheta, i} \cos \lambda_{\vartheta, i} - \frac{a_{\vartheta, i}}{r_i} + \frac{a_{T\vartheta, i}}{r_i} \quad (2)$$

$$\ddot{\lambda}_{\varphi, i} = -\frac{2\dot{r}_i}{r_i} \dot{\lambda}_{\varphi, i} + 2\dot{\lambda}_{\vartheta, i} \dot{\lambda}_{\varphi, i} \tan \lambda_{\vartheta, i} + \frac{a_{\varphi, i}}{r_i \cos \lambda_{\vartheta, i}} - \frac{a_{T\varphi, i}}{r_i \cos \lambda_{\vartheta, i}} \quad (3)$$

式中,  $r_i$  为第  $i$  个航天器和目标之间的距离,  $\lambda_{\vartheta, i}$  为第  $i$  个航天器和目标相对发射系的视线倾角,  $\lambda_{\varphi, i}$  为第  $i$  个航天器和目标相对发射系的视线偏角.

## 1.2 基础理论

### 1.2.1 通信拓扑

航天器之间的通信关系由通信拓扑图定义为  $\Omega(\nu, \varepsilon)$ ,  $\nu = \{1, \dots, n\}$  是通信拓扑中的节点, 代表航天器,  $\varepsilon = \nu \times \nu$  是通信拓扑中的边, 一条边  $(i, j)$  ( $i \neq j$ ) 表示第  $i$  个航天器能够向第  $j$  个航天器传递信息. 定义通信拓扑的连接矩阵  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 若  $(i, j) \in \varepsilon$ , 则  $a_{ij} = 1$ , 反之  $a_{ij} = 0$ . 定义通信拓扑的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L} = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 计算方法为

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}, & i = j \\ -a_{ij}, & i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

如果对于任意的  $(i, j) \in \varepsilon$ ,  $(j, i) \in \varepsilon$  成立, 则称通信拓扑是无向的; 如果通信拓扑中信息能够在任意两个节点间通信, 则称通信拓扑是连通的.

**引理 1**<sup>[26]</sup>. 如果无向图  $\Omega(\nu, \varepsilon)$  是连通的, 则具有以下性质:

1) 0 是  $\mathbf{L}$  的特征值, 其对应特征向量为  $\mathbf{1}_n = [1, \dots, 1]^T$ ;

2)  $\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j)^2$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ .

3)  $\lambda_2(\mathbf{L}) \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} \leq \lambda_N(\mathbf{L}) \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\lambda_2(\mathbf{L})$  和  $\lambda_N(\mathbf{L})$  表示除 0 外的  $\mathbf{L}$  最小和最大特征值.

**引理 2**<sup>[17]</sup>. 对于  $x_1, \dots, x_n > 0$ ,  $0 < p \leq 1$ ,  $q > 1$ , 则有

$$\sum_{i=1}^n x_i^p \geq \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^p \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^q \geq n^{1-q} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^q \quad (6)$$

### 1.2.2 设定时间收敛理论

设非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)), & \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $f$  为非线性连续方程, 且  $f(0) = 0$ .

**引理 3**<sup>[27]</sup>. 如果存在一个连续可微的径向无界函数  $V: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  使得:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\frac{\pi}{\eta T_c} \left( V^{\frac{2-\eta}{2}}(\mathbf{x}) + V^{\frac{2+\eta}{2}}(\mathbf{x}) \right) \quad (8)$$

式中,  $T_c \in \mathbf{R}^+$ ,  $0 < \eta < 1$ . 则系统是设定时间稳定的, 并且收敛时间不大于  $T_c$ .

**引理 4**<sup>[28-29]</sup>. 设非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = z_{i+1}(t), & i = 1, \dots, m+2, \\ z_i(t) \in \mathbf{R}^n \\ \dot{z}_{m+3}(t) = \omega(t) \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $|\omega| \leq L$ ,  $L \in \mathbf{N}^+$ . 构建如下观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_i(t) = G_i(t-t_0, T_s, z_1(t) - \hat{z}_1(t)) + \hat{z}_{i+1}(t), & i = 1, \dots, m+2 \\ \dot{\hat{z}}_{m+3}(t) = G_{m+3}(t-t_0, T_s, z_1(t) - \hat{z}_1(t)) \end{cases} \quad (10)$$

式中,  $t_0$  初始时刻,  $\{G_i(t-t_0, T_s, z_1 - \hat{z}_1)\}_{i=1}^{m+3}$  为

$$\begin{aligned} G_i(t-t_0, T_s, z_1 - \hat{z}_1) = \\ g_i(t-t_0, T_s) (z_1(t) - \hat{z}_1(t)) \end{aligned} \quad (11)$$

式中, 系数  $\{g_i(t-t_0, T_s)\}_{i=1}^{m+3}$  为

$$\begin{cases} g_i(t-t_0, T_s) = \left( \frac{m + \tilde{m} + i + 2}{T_s} \bar{p}_{i, 1} - \bar{p}_{i+1, 1} \right) \mu_1^i + \\ l_i - \sum_{j=1}^{i-1} g_j(t-t_0, T_s) \bar{p}_{i, j} \mu_1^{i-j}, \\ \\ g_{m+3}(t-t_0, T_s) = \frac{2m + \tilde{m} + 5}{T_s} \bar{p}_{m+3, 1} \mu_1^{m+3} - \\ \sum_{j=1}^{m+2} g_j(t-t_0, T_s) \bar{p}_{m+3, j} \mu_1^{m+3-j} + l_{m+3} \end{cases} \quad (12)$$

式中,  $\tilde{m} \in \mathbf{R}$ ,  $l_i \in \mathbf{R}^+$ ,  $\bar{p}_{i, j}$ ,  $\mu_1$  分别为





$$\text{diag}\{\mathbf{X}\} = \text{diag}\{x_1, \dots, x_N\} \quad (27)$$

$$\exp(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \exp(x_1) \\ \vdots \\ \exp(x_N) \end{bmatrix} \quad (28)$$

## 2 协同制导算法设计

根据式 (1) ~ (3) 构成三维相对运动模型可知, 相对距离  $r_i$  的大小受  $a_{r,i}$  影响, 视线倾角  $\lambda_{\theta,i}$  的大小受  $a_{\theta,i}$  影响, 视线偏角  $\lambda_{\varphi,i}$  的大小受  $a_{\varphi,i}$  影响. 因此, 对  $a_{r,i}$  进行设计, 以实现多航天器的时间一致性. 对  $a_{\theta,i}$  和  $a_{\varphi,i}$  进行设计, 以实现航天器终端视线角度约束. 本文所使用的终端视线角约束和文献 [31–32] 相同, 该约束一方面能够消除视线角误差, 保证视线角速率为 0; 另一方面能够实现控制航天器从期望的角度飞向目标, 具有现实意义.

### 2.1 沿视线方向加速度设计

对沿视线方向加速度进行设计, 使得每个航天器的剩余飞行时间相等, 从而实现时间一致性约束. 航天器  $i$  的剩余飞行时间  $t_{go,i}$  为

$$t_{go,i} = -\frac{r_i}{\dot{r}_i} \quad (29)$$

对式 (29) 求导, 并结合式 (1) 可得:

$$\dot{t}_{go,i} = \frac{r_i^2 \dot{\lambda}_{\theta,i}^2}{\dot{r}_i^2} + \frac{r_i^2 \dot{\lambda}_{\varphi,i}^2 \cos^2 \lambda_{\theta,i}}{\dot{r}_i^2} - \frac{r_i}{\dot{r}_i^2} a_{r,i} + \frac{r_i}{\dot{r}_i^2} a_{Tr,i} - 1 \quad (30)$$

根据假设 2, 目标加速度  $a_{Tr,i}$  满足:

$$\left| a_{Tr,i}^{[m]} \right| \leq L_{r,i}, \quad L_{r,i} \in \mathbf{R}^+, \quad m \in \mathbf{N}^+ \quad (31)$$

由于  $a_{Tr,i}$  未知, 根据引理 4 和引理 5, 设计的 PTESO 沿视线方向分量如下, 用于表示  $a_{Tr,i}$ :

1) 当  $t \in [t_0, T_s)$

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,r,i} = z_{2,r,i} + G_1(t-t_0, T_s, r_i - z_{1,r,i}) \\ \dot{z}_{2,r,i} = z_{3,r,i} + r_i \dot{\lambda}_{\theta,i}^2 + r_i \dot{\lambda}_{\varphi,i}^2 \cos^2 \lambda_{\theta,i} - a_{r,i} + G_2(t-t_0, T_s, r_i - z_{1,r,i}) \\ \dot{z}_{3,r,i} = z_{4,r,i} + G_3(t-t_0, T_s, r_i - z_{1,r,i}) \\ \dot{z}_{4,r,i} = G_4(t-t_0, T_s, r_i - z_{1,r,i}) \end{cases} \quad (32)$$

式中,  $z_{1,r,i} = \hat{r}_i$ ;  $z_{2,r,i} = \hat{\dot{r}}_i$ ;  $z_{3,r,i} = \hat{a}_{Tr,i}$ ;  $z_{4,r,i} = \hat{\ddot{a}}_{Tr,i}$ ;  $\hat{r}_i, \hat{\dot{r}}_i, \hat{a}_{Tr,i}, \hat{\ddot{a}}_{Tr,i}$  为对应变量的观测值. 计算  $G_k, k = 1, \dots, 4$ , 所使用的  $g_k(t-t_0, T_s)$  为

$$\begin{cases} g_1 = \left( \frac{\tilde{m}_r + 4}{T_s} - \bar{p}_{2,1} \right) \mu_1 + l_1 \\ g_2 = \left( \frac{\tilde{m}_r + 5}{T_s} \bar{p}_{2,1} - \bar{p}_{3,1} \right) \mu_1^2 + l_2 - g_1 \bar{p}_{2,1} \mu_1 \\ g_3 = \left( \frac{\tilde{m}_r + 6}{T_s} \bar{p}_{3,1} - \bar{p}_{4,1} \right) \mu_1^3 + l_3 - g_1 \bar{p}_{3,1} \mu_1^2 - g_2 \bar{p}_{3,1} 2\mu_1 \\ g_4 = l_4 + \frac{\tilde{m}_r + 7}{T} \bar{p}_{4,1} \mu_1^4 - g_1 \bar{p}_{4,1} \mu_1^3 - g_2 \bar{p}_{4,1} 2\mu_1^2 - g_3 \bar{p}_{4,1} 3\mu_1 \end{cases} \quad (33)$$

式中,  $\tilde{m}_r, \mu_1, l_i, \bar{p}_{i,j}, i, j = 1, \dots, 4$ , 根据引理 4 确定.

2) 当  $t \in [T_s, \infty)$

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,r,i} = z_{2,r,i} - \kappa_{1,r} [z_{1,r,i} - r_i]^{\zeta_{1,r}} - \bar{\kappa}_{1,r} [z_{1,r,i} - r_i]^{\bar{\zeta}_{1,r}} \\ \dot{z}_{2,r,i} = z_{3,r,i} + r_i \dot{\lambda}_{\theta,i}^2 + r_i \dot{\lambda}_{\varphi,i}^2 \cos^2 \lambda_{\theta,i} - a_{r,i} - \kappa_{2,r} [z_{1,r,i} - r_i]^{\zeta_{2,r}} - \bar{\kappa}_{2,r} [z_{1,r,i} - r_i]^{\bar{\zeta}_{2,r}} \\ \dot{z}_{3,r,i} = z_{4,r,i} - \kappa_{3,r} [z_{1,r,i} - r_i]^{\zeta_{3,r}} - \bar{\kappa}_{3,r} [z_{1,r,i} - r_i]^{\bar{\zeta}_{3,r}} \\ \dot{z}_{4,r,i} = -\kappa_{4,r} [z_{1,r,i} - r_i]^{\zeta_{4,r}} - \bar{\kappa}_{4,r} [z_{1,r,i} - r_i]^{\bar{\zeta}_{4,r}} - \zeta_r [z_{1,r,i} - r_i] \end{cases} \quad (34)$$

式中,  $\kappa_{k,r}, \bar{\kappa}_{k,r}, \zeta_{k,r}, \bar{\zeta}_{k,r}, \zeta_r, k = 1, \dots, 4$ , 根据引理 5 确定.

定义变量:

$$\tilde{a}_{r,i} = \frac{r_i^2 \dot{\lambda}_{\theta,i}^2}{\dot{r}_i^2} + \frac{r_i^2 \dot{\lambda}_{\varphi,i}^2 \cos^2 \lambda_{\theta,i}}{\dot{r}_i^2} - \frac{r_i}{\dot{r}_i^2} a_{r,i} \quad (35)$$

将式 (35) 代入式 (30), 得:

$$\dot{t}_{go,i} = \tilde{a}_{r,i} + \frac{r_i}{\dot{r}_i^2} a_{Tr,i} - 1 \quad (36)$$

定义捕获时间  $t_{F,i}$ :

$$t_{F,i} = t_{go,i} + t \quad (37)$$

根据式 (32)、式 (34) 的观测器和式 (36), 3DP-CGL 沿视线方向控制方法设计为

$$\tilde{a}_{r,i} = \begin{cases} \left( 1 + \frac{c_r - 1}{\exp(V_r)} \right) \eta_r \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij}(t_{F,j} - t_{F,i}) \right]^{-1} \\ (T_{fr} - t)^{\eta_r - 1} - \frac{r_i}{z_{2,r,i}^2} z_{3,r,i}, & t < T_{fr} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}(t_{F,j} - t_{F,i}) - \frac{r_i}{z_{2,r,i}^2} z_{3,r,i}, & t \geq T_{fr} \end{cases} \quad (38)$$

式中,  $V_r = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (t_{F,j} - t_{F,i})^2$ ;  $\eta_r \in \mathbf{R}^+$ ;  $c_r$  根据式 (19) 确定;  $T_{fr} \in \mathbf{R}^+$  为设定的时间.

**定理 2.** 如果加速度指令被设计为式 (38) 的形式, 观测器被设计为式 (32)、式 (34) 的形式, 则由式 (36) 构成的系统是关于原点设定时间收敛的.

**证明.** 选用式 (38) 中定义的  $V_r$  为李雅普诺夫函数, 证明分两步:

1) 在区间  $[t_0, T_{fr}]$  对  $V_r$  求导:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_r(t_{F,i})}{\partial t_{F,i}} \dot{t}_{F,i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_r(t_{F,i})}{\partial t_{F,i}} \left( \tilde{a}_r + \frac{r_i}{\dot{r}_i^2} a_{Tr,i} \right) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (t_{F,j} - t_{F,i}) \left( \tilde{a}_r + \frac{r_i}{\dot{r}_i^2} a_{Tr,i} \right) \right) \end{aligned} \quad (39)$$

将式 (38) 代入式 (39), 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (t_{F,j} - t_{F,i}) \left( \left( 1 + \frac{c_r - 1}{\exp(V_r)} \right) \times \right. \right. \\ &= \left. \left. \eta_r (T_{fr} - t)^{\eta_r - 1} \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} (t_{F,j} - t_{F,i}) \right]^{-1} - \right. \right. \\ &= \left. \left. \frac{r_i}{z_{2,r,i}} z_{3,r,i} + \frac{r_i}{\dot{r}_i^2} a_{Tr,i} \right) \right) \end{aligned} \quad (40)$$

通过参数设置, 使得 PTESO 设定的收敛时间  $T_s$  快于  $T_{fr}$ . 因此,  $\frac{r_i}{\dot{r}_i^2} a_{Tr,i} - \frac{r_i}{z_{2,r,i}} z_{3,r,i} = 0, \forall t > T_s$ , 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (t_{F,j} - t_{F,i}) \left( \left( 1 + \frac{c_r - 1}{\exp(V_r)} \right) \times \right. \right. \\ &= \left. \left. \eta_r (T_{fr} - t)^{\eta_r - 1} \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} (t_{F,j} - t_{F,i}) \right]^{-1} \right) \right) \leq \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (t_{F,j} - t_{F,i}) \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} (t_{F,j} - t_{F,i}) \right]^{-1} \right) \times \\ &= \left( -\eta_r \left( 1 + \frac{c_r - 1}{\exp(V_r)} \right) (T_{fr} - t)^{\eta_r - 1} \right) \leq \\ &= -\eta_r \left( 1 + \frac{c_r - 1}{\exp(V_r)} \right) (T_{fr} - t)^{\eta_r - 1} \sum_{i=1}^n (1) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\eta_r \left( 1 + \frac{c_r - 1}{\exp(V_r)} \right) (T_{fr} - t)^{\eta_r - 1} n \leq \\ &= -\eta_r \left( 1 + \frac{c_r - 1}{\exp(V_r)} \right) (T_{fr} - t)^{\eta_r - 1} \end{aligned} \quad (41)$$

根据定理 1 可知,  $V_r$  在设定时间内收敛, 各个航天器的  $t_{F,i}$  达到相同值.

2) 当  $t \geq T_{fr}$ , 对  $V_r$  求导:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_r(t_{F,i})}{\partial t_{F,i}} \dot{t}_{F,i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_r(t_{F,i})}{\partial t_{F,i}} \left( \tilde{a}_r + \frac{r_i}{\dot{r}_i^2} a_{Tr,i} \right) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (t_{F,j} - t_{F,i}) \left( \tilde{a}_r + \frac{r_i}{\dot{r}_i^2} a_{Tr,i} \right) \right) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \left( \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (t_{F,j} - t_{F,i}) \right)^2 \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (42)$$

根据  $V_r$  的定义可知,  $V_r \geq 0$ . 因此, 当  $t \geq T_{fr}$ ,  $V_r = 0$ , 即各个航天器的  $t_{F,i}$  保持一致.  $\square$

根据式 (35), 可得:

$$a_r^{(i)} = r_i \dot{\lambda}_{\vartheta,i}^2 + r_i \dot{\lambda}_{\varphi,i}^2 \cos^2 \lambda_{\vartheta,i} - \frac{\dot{r}_i^2}{r_i} \tilde{a}_{r,i} \quad (43)$$

## 2.2 垂直观线方向加速度设计

对垂直观线方向加速度进行设计, 使得每个航天器的视线倾角  $\lambda_{\vartheta,i}$  和视线偏角  $\lambda_{\varphi,i}$  在设定时间之内达到期望值, 视线倾角速率  $\dot{\lambda}_{\vartheta,i}$  和视线偏角速率  $\dot{\lambda}_{\varphi,i}$  在视线角达到期望值后保持为 0, 从而实现终端角度约束.

对于第  $i$  个航天器, 定义如下变量:

$$\mathbf{x}_{1,i} = \begin{bmatrix} x_{1,\vartheta,i} \\ x_{1,\varphi,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{\vartheta,i} - \lambda_{\vartheta,d,i} \\ \lambda_{\varphi,i} - \lambda_{\varphi,d,i} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\mathbf{x}_{2,i} = \begin{bmatrix} x_{2,\vartheta,i} \\ x_{2,\varphi,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{\vartheta,i} \\ \dot{\lambda}_{\varphi,i} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{a}_{\lambda,i} = \begin{bmatrix} a_{\vartheta,i} \\ a_{\varphi,i} \end{bmatrix} \quad (46)$$

式中,  $\lambda_{\vartheta,d,i}$  为期望的视线倾角;  $\lambda_{\varphi,d,i}$  为期望的视线偏角. 由式 (2) 和式 (3) 可以构建如下的垂直观线方向运动方程:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{1,i} = \mathbf{x}_{2,i} \\ \dot{\mathbf{x}}_{2,i} = \mathbf{f}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{\lambda,i} - \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{T\lambda,i} \end{cases} \quad (47)$$

式中,  $\mathbf{f}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{a}_{T\lambda, i}$  分别为

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} f_{\vartheta, i} \\ f_{\varphi, i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\dot{r}_i}{r_i}\dot{\lambda}_{\vartheta, i} - \dot{\lambda}_{\varphi, i}^2 \sin \lambda_{\vartheta, i} \cos \lambda_{\vartheta, i} \\ -\frac{2\dot{r}_i}{r_i}\dot{\lambda}_{\varphi, i} + 2\dot{\lambda}_{\vartheta, i}\dot{\lambda}_{\varphi, i} \tan \lambda_{\vartheta, i} \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} B_{\vartheta, i} & 0 \\ 0 & B_{\varphi, i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_i \cos \lambda_{\vartheta, i}} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{a}_{T\lambda, i} = \begin{bmatrix} a_{T\vartheta, i} \\ a_{T\varphi, i} \end{bmatrix} \quad (50)$$

根据假设 2, 目标加速度分量  $a_{T\vartheta, i}$ ,  $a_{T\varphi, i}$  满足:

$$\left| a_{T\vartheta, i}^{[m]} \right| \leq L_{\vartheta, i}, \quad L_{\vartheta, i} \in \mathbf{R}^+ \quad (51)$$

$$\left| a_{T\varphi, i}^{[m]} \right| \leq L_{\varphi, i}, \quad L_{\varphi, i} \in \mathbf{R}^+ \quad (52)$$

为构建目标加速度分量  $a_{T\vartheta, i}$ ,  $a_{T\varphi, i}$  的观测器, 定义如下变量:

$$\mathbf{V}_{\lambda, i} = -\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{x}_{2, i} \quad (53)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_{\lambda, i} = \mathbf{g}_i - \mathbf{a}_{\lambda, i} + \mathbf{a}_{T\lambda, i} \quad (54)$$

式中,  $\mathbf{g}_i$  为

$$\mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} -\dot{r}_i \dot{\lambda}_{\vartheta, i} - r_i \dot{\lambda}_{\varphi, i}^2 \sin \lambda_{\vartheta, i} \cos \lambda_{\vartheta, i} \\ \dot{r}_i \dot{\lambda}_{\varphi, i} \cos \lambda_{\vartheta, i} - r_i \dot{\lambda}_{\vartheta, i} \dot{\lambda}_{\varphi, i} \sin \lambda_{\vartheta, i} \end{bmatrix} \quad (55)$$

由于  $\mathbf{a}_{T\lambda, i}$  未知, 根据引理 4 和引理 5, 设计的 PTESO 垂直视线方向分量如下, 用于表示  $\mathbf{a}_{T\lambda, i}$ :

1) 当  $t \in [t_0, T_s)$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_{1, \lambda, i} = \mathbf{z}_{2, \lambda, i} + G_1(t - t_0, T_s, \mathbf{z}_{1, \lambda, i} - \mathbf{V}_{\lambda, i}) + \mathbf{g}_i - \mathbf{a}_{\lambda, i} \\ \dot{\mathbf{z}}_{2, \lambda, i} = \mathbf{z}_{3, \lambda, i} + G_2(t - t_0, T_s, \mathbf{z}_{1, \lambda, i} - \mathbf{V}_{\lambda, i}) \\ \dot{\mathbf{z}}_{3, \lambda, i} = \mathbf{z}_{4, \lambda, i} + G_3(t - t_0, T_s, \mathbf{z}_{1, \lambda, i} - \mathbf{V}_{\lambda, i}) \\ \dot{\mathbf{z}}_{4, \lambda, i} = G_4(t - t_0, T_s, \mathbf{z}_{1, \lambda, i} - \mathbf{V}_{\lambda, i}) \end{cases} \quad (56)$$

式中,  $\mathbf{z}_{1, \lambda, i} = \hat{\mathbf{V}}_{\lambda, i}$ ;  $\mathbf{z}_{2, \lambda, i} = \hat{\mathbf{a}}_{T\lambda, i}$ ;  $\mathbf{z}_{3, \lambda, i} = \hat{\mathbf{a}}_{T\lambda, i}$ ;  $\mathbf{z}_{4, \lambda, i} = \hat{\mathbf{a}}_{T\lambda, i}$ ;  $\hat{\mathbf{V}}_{\lambda, i}$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_{T\lambda, i}$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_{T\lambda, i}$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_{T\lambda, i}$  为对应变量的观测值. 计算  $G_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , 所使用的  $g_k(t - t_0, T_s)$  根据式 (33) 确定.

2) 当  $t \in [T_s, \infty)$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_{1, \lambda, i} = \mathbf{z}_{2, \lambda, i} - \kappa_{1, \lambda} [\mathbf{z}_{1, \lambda, i} - \mathbf{V}_{\lambda, i}]^{\varsigma_{1, \lambda}} - \bar{\kappa}_{1, \lambda} [\mathbf{z}_{1, \lambda, i} - \mathbf{V}_{\lambda, i}]^{\bar{\varsigma}_{1, \lambda}} + \mathbf{g}_i - \mathbf{a}_{\lambda, i} \\ \dot{\mathbf{z}}_{2, \lambda, i} = \mathbf{z}_{3, \lambda, i} - \kappa_{2, \lambda} [\mathbf{z}_{1, \lambda, i} - \mathbf{V}_{\lambda, i}]^{\varsigma_{2, \lambda}} - \bar{\kappa}_{2, \lambda} [\mathbf{z}_{1, \lambda, i} - \mathbf{V}_{\lambda, i}]^{\bar{\varsigma}_{2, \lambda}} \\ \dot{\mathbf{z}}_{3, \lambda, i} = \mathbf{z}_{4, \lambda, i} - \kappa_{3, \lambda} [\mathbf{z}_{1, \lambda, i} - \mathbf{V}_{\lambda, i}]^{\varsigma_{3, \lambda}} - \bar{\kappa}_{3, \lambda} [\mathbf{z}_{1, \lambda, i} - \mathbf{V}_{\lambda, i}]^{\bar{\varsigma}_{3, \lambda}} \\ \dot{\mathbf{z}}_{4, \lambda, i} = -\kappa_{4, \lambda} [\mathbf{z}_{1, \lambda, i} - \mathbf{V}_{\lambda, i}]^{\varsigma_{4, \lambda}} - \bar{\kappa}_{4, \lambda} [\mathbf{z}_{1, \lambda, i} - \mathbf{V}_{\lambda, i}]^{\bar{\varsigma}_{4, \lambda}} - \xi_{\lambda} [\mathbf{z}_{1, \lambda, i} - \mathbf{V}_{\lambda, i}] \end{cases} \quad (57)$$

式中,  $\kappa_{k, \lambda}$ ,  $\bar{\kappa}_{k, \lambda}$ ,  $\varsigma_{k, \lambda}$ ,  $\bar{\varsigma}_{k, \lambda}$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , 根据引理 5 确定;  $\xi_{\lambda} = \text{diag} \{ \xi_{\vartheta}, \xi_{\varphi} \}$ ,  $\xi_{\vartheta} > \max_{i=1, \dots, n} L_{\vartheta}^{(i)}$ ,  $\xi_{\varphi} > \max_{i=1, \dots, n} L_{\varphi}^{(i)}$ .

构建滑模面:

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{x}_{1, i} + \left[ \frac{\alpha T_d}{\pi} \mathbf{x}_{2, i} + [\mathbf{x}_{1, i}]^{\frac{2+\alpha}{2}} \right]^{\frac{2}{2-\alpha}} \quad (58)$$

式中,  $\alpha \in (0, 1)$ ;  $T_d$  为设定的收敛时间. 根据引理 3, 若滑模面如式 (58) 的结构, 当  $\mathbf{S}_i = 0$  时, 在  $T_d$  内,  $\mathbf{x}_{1, i}$ ,  $\mathbf{x}_{2, i}$  收敛至 0<sup>[33]</sup>.

基于式 (58) 的滑模结构, 3DPCGL 垂直视线方向控制方法设计为

$$\mathbf{a}_{\lambda, i} = \begin{cases} \mathbf{C}_i \left( \frac{\eta_{\lambda} \mathbf{S}_i}{\|\mathbf{S}_i\|} \left( 1 + \frac{c_{\lambda} - 1}{\exp(\|\mathbf{S}_i\|)} \right) (T_{f\lambda} - t)^{\eta_{\lambda} - 1} + \mathbf{\Xi}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{f}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \mathbf{z}_{2, \lambda, i} \right), & t < T_{f\lambda} \\ \mathbf{C}_i (K_{\lambda} \tanh(\mathbf{S}_i) + \mathbf{\Xi}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{f}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \mathbf{z}_{2, \lambda, i}), & t \geq T_{f\lambda} \end{cases} \quad (59)$$

式中,  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{\Xi}_i$ ,  $\mathbf{C}_i$  分别为

$$\mathbf{A}_i = \frac{2\alpha T_d}{(2-\alpha)\pi} \text{diag} \left\{ \left| \frac{\alpha T_d}{\pi} \mathbf{x}_{2, i} + [\mathbf{x}_{1, i}]^{\frac{2+\alpha}{2}} \right|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right\} \quad (60)$$

$$\mathbf{\Xi}_i = \mathbf{x}_{2, i} + \frac{2+\alpha}{2-\alpha} \text{diag} \left\{ \left| \frac{\alpha T_d}{\pi} \mathbf{x}_{2, i} + [\mathbf{x}_{1, i}]^{\frac{2+\alpha}{2}} \right|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right\} \text{diag} \left\{ |\mathbf{x}_{1, i}|^{\frac{\alpha}{2}} \right\} \mathbf{x}_{2, i} \quad (61)$$

$$\mathbf{C}_i = -(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i)^{-1} \quad (62)$$

式中,  $\eta_{\lambda}$ ,  $c_{\lambda}$  根据定理 1 确定:  $K_{\lambda} \in \mathbf{R}^+$ .

**定理 3.** 如果加速度指令被设计为式 (59) 的形式, 观测器被设计为式 (56) 和式 (57) 的形式, 则由式 (47) 构成的系统是关于原点设定时间收敛的.



证明. 构建李雅普诺夫函数:

$$V_\lambda = \|\mathbf{S}_i\| \quad (63)$$

1) 在区间  $[t_0, T_{f\lambda})$  对  $V_\lambda$  求导:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\lambda = & \left( \frac{2}{2-\alpha} \text{diag} \left\{ \left| \frac{\alpha T_d}{\pi} \mathbf{x}_{2,i} + [\mathbf{x}_{1,i}]^{\frac{2+\alpha}{2}} \right|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right\} \right. \\ & \left( \frac{\alpha T_d}{\pi} (\mathbf{f}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{\lambda,i} - \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{T\lambda,i}) + \right. \\ & \left. \left. \frac{2+\alpha}{2} \text{diag} \left\{ |\mathbf{x}_{1,i}|^{\frac{\alpha}{2}} \right\} \mathbf{x}_{2,i} \right) + \mathbf{x}_{2,i} \right) \frac{\mathbf{S}_i^T}{\|\mathbf{S}_i\|} = \\ & (\Xi_i + \mathbf{A}_i (\mathbf{f}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{\lambda,i} - \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{T\lambda,i})) \frac{\mathbf{S}_i^T}{\|\mathbf{S}_i\|} \end{aligned} \quad (64)$$

将式 (59) 代入式 (64), 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\lambda = & (\Xi_i + \mathbf{A}_i (\mathbf{f}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{\lambda,i} - \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{T\lambda,i})) \frac{\mathbf{S}_i^T}{\|\mathbf{S}_i\|} = \\ & \left( -\frac{\eta_\lambda \mathbf{S}_i}{\|\mathbf{S}_i\|} \left( 1 + \frac{c_\lambda - 1}{\exp(\|\mathbf{S}_i\|)} \right) (T_{f\lambda} - t)^{\eta_\lambda - 1} + \right. \\ & \left. \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \mathbf{z}_{2,\lambda,i} - \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{T\lambda,i} \right) \frac{\mathbf{S}_i^T}{\|\mathbf{S}_i\|} \end{aligned} \quad (65)$$

当  $t \geq T_s$  时,  $\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \mathbf{z}_{2,\lambda,i} - \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{T\lambda,i} = 0$ , 可得:

$$\dot{V}_\lambda \leq -\eta_\lambda \left( 1 + \frac{c_\lambda - 1}{\exp(\|\mathbf{S}_i\|)} \right) (T_{f\lambda} - t)^{\eta_\lambda - 1} \quad (66)$$

根据定理 1 可得, 滑模面  $\mathbf{S}_i$  在设定时间  $T_{f\lambda}$  内趋于 0.

2) 在区间  $[T_{f\lambda}, \infty)$  对  $V_\lambda$  求导, 并将式 (59) 代入式 (64), 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\lambda = & (\Xi_i + \mathbf{A}_i (\mathbf{f}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{\lambda,i} - \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{T\lambda,i})) \frac{\mathbf{S}_i^T}{\|\mathbf{S}_i\|} \leq \\ & -K_\lambda \tanh(\mathbf{S}_i) \frac{\mathbf{S}_i^T}{\|\mathbf{S}_i\|} \leq 0 \end{aligned} \quad (67)$$

在区间  $[T_{f\lambda}, \infty)$  中,  $\mathbf{S}_i = 0$ .

3) 根据式 (58) 可知, 在保持  $\mathbf{S}_i = 0$  后, 在设定时间  $T_d$  内,  $\mathbf{x}_{1,i}$ ,  $\mathbf{x}_{2,i}$  收敛至 0.

由式 (56)、式 (57)、式 (59) 和式 (47) 构成的系统实际收敛时间包括两部分: 滑模面收敛时间  $T_{f\lambda}$ , 滑模面中状态变量收敛时间  $T_d$ .  $\square$

### 3 仿真验证

本节设计 4 个航天器对抗 1 个机动目标的场景进行仿真, 以验证本文算法 3DPCGL 的先进性. 在仿真中, 航天器的总加速度的绝对值限幅  $200 \text{ m/s}^2$ , 当每个航天器与目标的距离小于  $20 \text{ m}$  时, 仿真终止.

4 个航天器的初始状态如表 1 所示, 航天器间

表 1 航天器初始状态

Table 1 Initial state of the spacecrafts

参数名称	参数初始值			
	序号 1	序号 2	序号 3	序号 4
相对距离 (km)	11	12	11	9
相对速率 (m/s)	-320	-400	-380	-350
视线倾角 ( $^\circ$ )	-60	-45	-30	-20
视线偏角 ( $^\circ$ )	10	30	40	60
视线倾角速率 ( $^\circ$ /s)	0.63	0.246	-0.355	-0.779
视线偏角速率 ( $^\circ$ /s)	1.404	0.67	-0.521	-0.882
期望视线倾角 ( $^\circ$ )	-30	-15	-60	-50
期望视线偏角 ( $^\circ$ )	30	50	20	40

的通信拓扑关系如图 2 所示. 通信拓扑的连接矩阵  $\mathbf{A}$  和拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}$  分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (69)$$

目标的初始位置在发射系的原点, 发射系中的初始速度为  $(0, 0, 100) \text{ m/s}$ , 加速度为

$$\begin{cases} a_{Tx} = 30 \cos(0.8t) \text{ m/s}^2 \\ a_{Ty} = 30 \sin\left(0.8t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ m/s}^2 \\ a_{Tz} = 5 \cos\left(0.8t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m/s}^2 \end{cases} \quad (70)$$

式中,  $a_{Tx}$ ,  $a_{Ty}$ ,  $a_{Tz}$  分别代表目标加速度沿发射坐标系三个轴的分量.

#### 3.1 本文协同制导方法仿真结果

观测器中,  $\tilde{m}_r \in \mathbf{R}$ , 使用包含  $\tilde{m}_r$  的阶乘运算

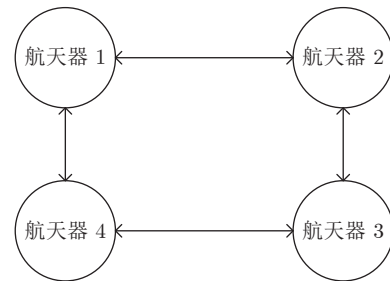


图 2 航天器通信拓扑关系

Fig. 2 Communication topological relationship of spacecrafts

计算  $\bar{p}_{i,j}, i, j = 1, \dots, 4$ , 为简化计算,  $\tilde{m}_r = 1; l_i, i = 1, \dots, 4$ , 为正实数, 并且其取值随着下角标的增加而增加. 制导律参数选取中,  $\eta_r \in \mathbf{R}^+, \eta_\lambda \in \mathbf{R}^+$ , 取值范围一般为  $(0.5, 3)$ , 取值越大, 过渡的初始阶段越平滑, 接近设定时间点曲线的斜率绝对值越大;  $\alpha$  取值范围为  $(0, 1)$ ; 观测器收敛时间  $T_d$  应小于沿视线方向制导律设定时间  $T_{fr}$  和垂直视线方向制导律设定时间  $T_{f\lambda}$ . 其他参数为观测器、制导律达到设定时间后算法所使用, 取值方法参考文献 [34]. 观测器 PTESO 中  $z_{1,r,i}$  初值为  $r_i, z_{2,r,i}$  初值为  $\dot{r}_i, z_{3,r,i}, z_{4,r,i}$  初值为 0, 矩阵  $z_{1,\lambda,i}, z_{2,\lambda,i}, z_{3,\lambda,i}, z_{4,\lambda,i}$  初始时刻元素全部为 0, 其他参数设计如下:

$$\begin{cases} \tilde{m}_r = 1, & T_s = 3 \\ l_1 = 0.1, & l_2 = 0.2, & l_3 = 0.3, & l_4 = 0.8 \\ \kappa_{1,*} = \bar{\kappa}_{1,*} = 30, & \kappa_{2,*} = \bar{\kappa}_{2,*} = 260 \\ \kappa_{3,*} = \bar{\kappa}_{3,*} = 1\ 100, & \kappa_{4,*} = \bar{\kappa}_{4,*} = 3\ 100 \\ \xi_\vartheta = 50, & \xi_\varphi = 50, & \varsigma_{0,*} = 0.8, & \bar{\varsigma}_{0,*} = 1.2 \end{cases} \quad (71)$$

式中, \* 代表  $r$  和  $\lambda$ .

制导律中的参数取值为

$$\begin{cases} \eta_r = 1.7, & T_{fr} = 10, & T_{f\lambda} = 15 \\ \alpha = 0.1, & T_d = 3, & \eta_\lambda = 0.7, & K_\lambda = 0.2 \end{cases} \quad (72)$$

仿真结果如图 3 ~ 图 9 所示.

图 3 给出本文算法航天器的飞行轨迹, 从图中可以看出 4 个航天器从不同的初始状态出发, 均能够命中目标. 图 4 为本文算法剩余飞行时间的变化曲线, 剩余飞行时间在设定时间之前收敛至一致, 达到设计目的. 图 5 和图 6 为本文算法视线倾角、视线偏角的变化曲线, 视线角在设定时间之前收敛至预期值, 达到设计目的.

图 7 为本文协同制导算法加速度指令沿视线方向分量的曲线, 在设定时间之后, 加速度指令保

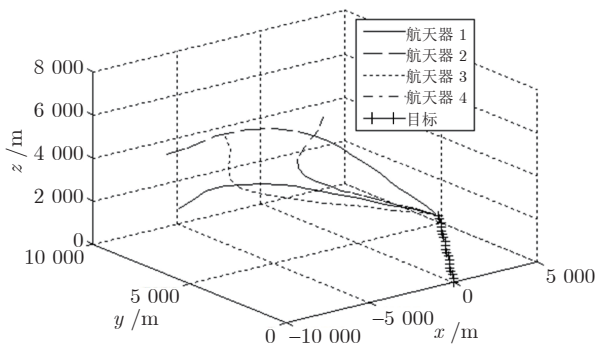


图 3 3DPCGL 算法的飞行轨迹  
Fig.3 Flight trajectories of the 3DPCGL

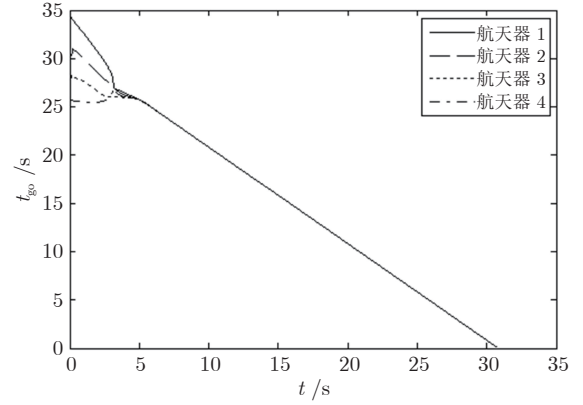


图 4 3DPCGL 算法的剩余飞行时间  
Fig.4 Time-to-go of the 3DPCGL

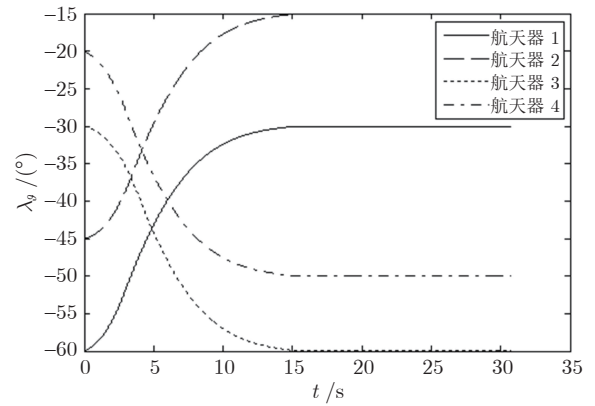


图 5 3DPCGL 算法的视线倾角  
Fig.5 LOS angles on the pitch direction of the 3DPCGL

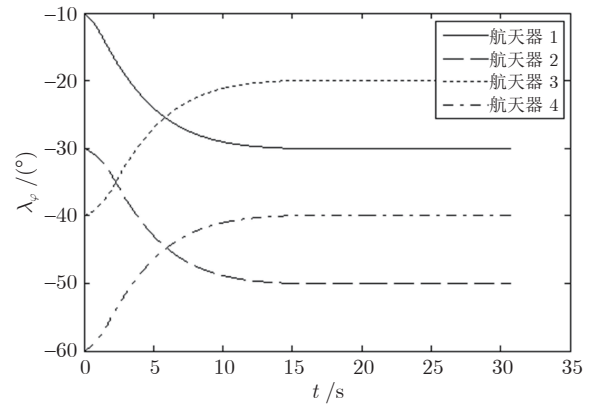


图 6 3DPCGL 算法的视线偏角  
Fig.6 LOS angles on the yaw direction of the 3DPCGL

持平滑. 图 8 和图 9 分别为本文协同制导算法加速度指令沿视线倾角方向的曲线和沿视线偏角方向的曲线, 当接近设定时间时, 由于式 (38) 中的  $[\sum_{j=1}^n a_{ij}(t_{F,j} - t_{F,i})]^{-1}$  趋近于 0, 使得沿视线方

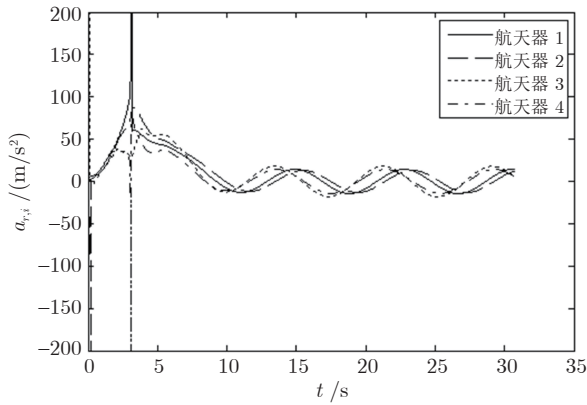


图 7 3DPCGL 算法的沿视线方向加速度  
Fig.7 Acceleration on the LOS direction of the 3DPCGL

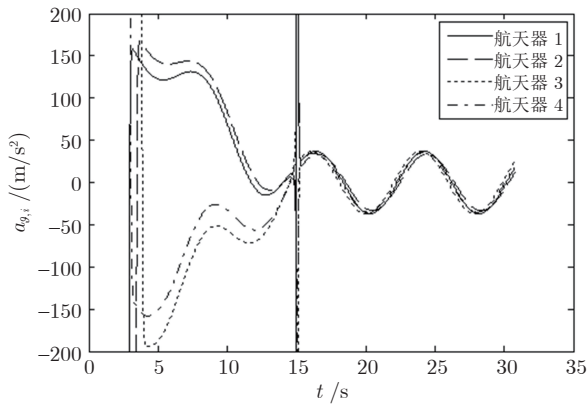


图 8 3DPCGL 算法的视线倾角方向加速度  
Fig.8 Acceleration on the pitch direction of the 3DPCGL

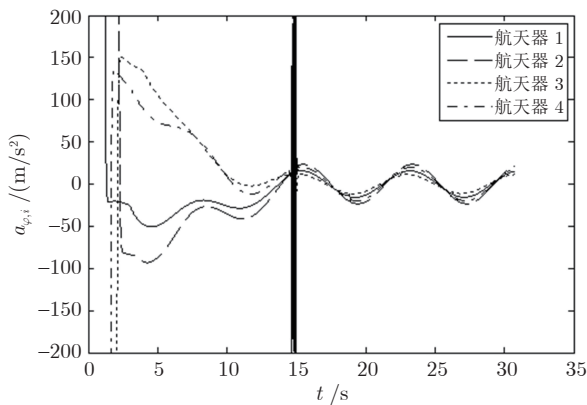


图 9 3DPCGL 算法的视线偏角方向加速度  
Fig.9 Acceleration on the yaw direction of the 3DPCGL

向加速度指令饱和, 由于式 (59) 分母中的  $\|S_i\|$  趋近于 0, 使得垂直视线方向加速度指令饱和, 因此出现图中达到限幅值的情况, 其他时刻保持平滑.

### 3.2 不同设定时间的仿真结果对比

将观测器的收敛时间设置为  $T_s = 3$  s, 仿真结果如图 10 ~ 图 12 所示. 从图中可以看出, 沿视线方向、视线倾角方向、视线偏角方向, 本文提出的观测器均能在 3 s 内将观测误差降至 0. 将观测器的收敛时间设置为  $T_s = 2$  s, 仿真结果如图 13 ~ 图 15 所示, 从图中可以看出沿视线方向、视线倾角方向、视线偏角方向, 本文提出的观测器均能在 2 s 内将观测误差降至 0. 通过对比  $T_s$  设定为不同值时的仿真曲线, 表明实现了观测器的设定时间收敛.

将沿视线方向协同制导方法收敛时间设置为  $T_{fr} = 8$  s, 仿真结果如图 16 所示, 剩余飞行时间在设定时间之前收敛至一致, 并且收敛时间短于图 4 中  $T_{fr} = 10$  s 的结果, 表明协同制导方法达到设计目的.

将垂直视线方向协同制导方法收敛时间设置为  $T_{f\lambda} = 13$  s, 仿真结果如图 17 和图 18 所示, 视线倾

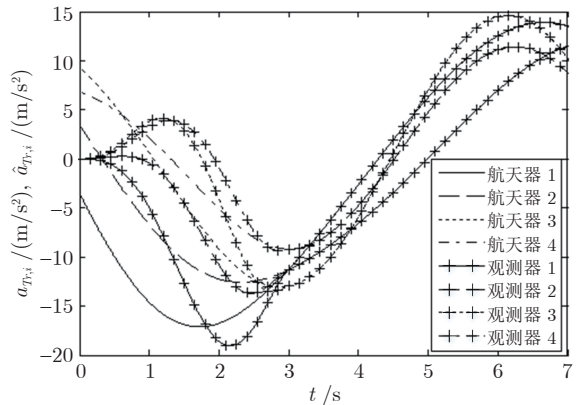


图 10  $T_s = 3$  s 沿视线方向目标加速度真值和观测值  
Fig.10 Actual values and observations of target acceleration on the LOS direction when  $T_s = 3$  s

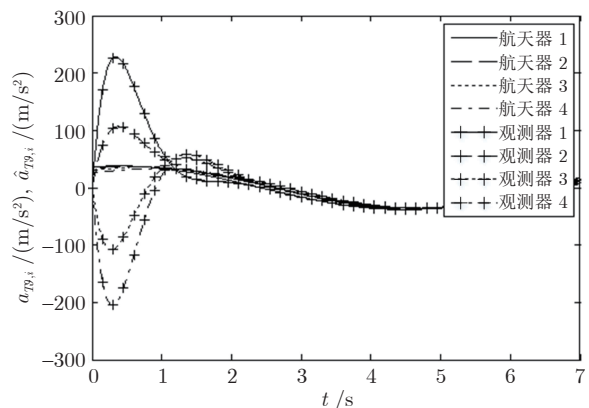


图 11  $T_s = 3$  s 视线倾角方向目标加速度真值和观测值  
Fig.11 Actual values and observations of target acceleration on the pitch direction when  $T_s = 3$  s

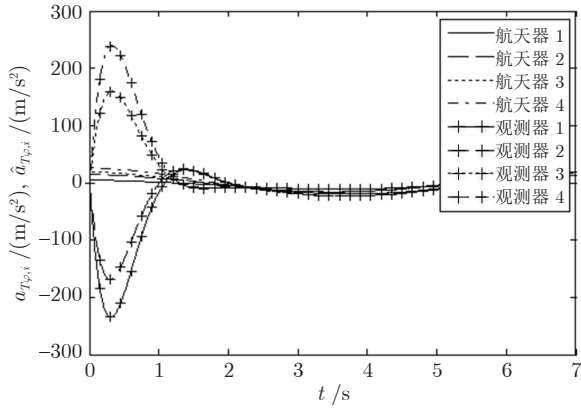


图 12  $T_s = 3$  s 视线偏角方向目标加速度真值和观测值  
Fig.12 Actual values and observations of target acceleration on the yaw direction when  $T_s = 3$  s

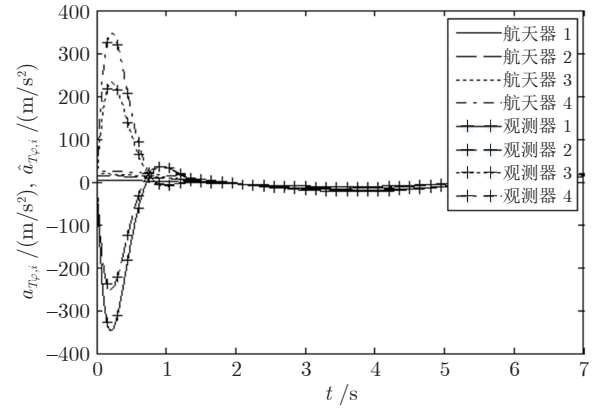


图 15  $T_s = 2$  s 视线偏角方向目标加速度真值和观测值  
Fig.15 Actual values and observations of target acceleration on the yaw direction when  $T_s = 2$  s

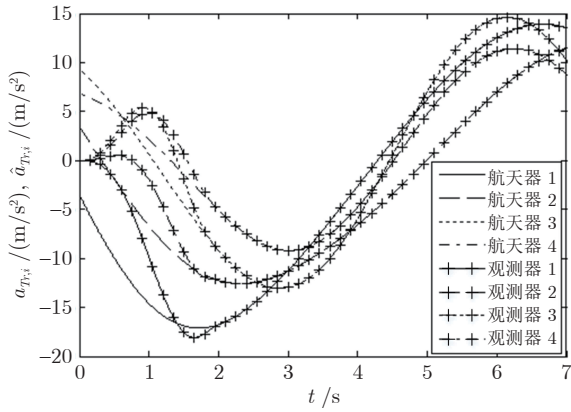


图 13  $T_s = 2$  s 沿视线方向目标加速度真值和观测值  
Fig.13 Actual values and observations of target acceleration on the LOS direction when  $T_s = 2$  s

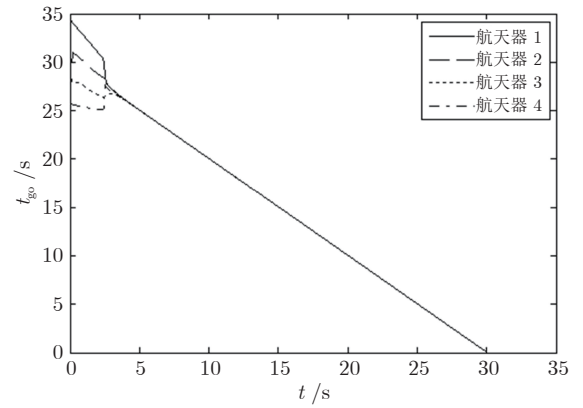


图 16  $T_{fr} = 8$  s 的航天器剩余飞行时间  
Fig.16 Time-to-go when  $T_{fr} = 8$  s

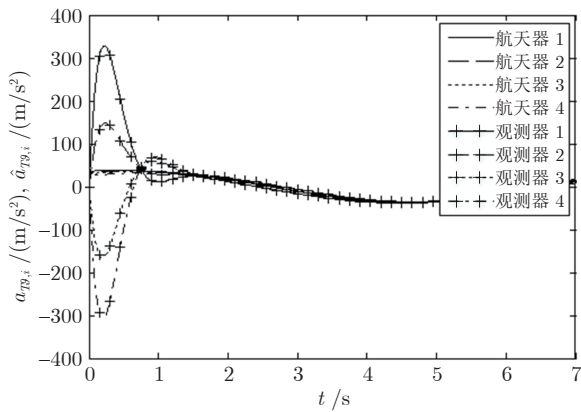


图 14  $T_s = 2$  s 视线倾角方向目标加速度真值和观测值  
Fig.14 Actual values and observations of target acceleration on the pitch direction when  $T_s = 2$  s

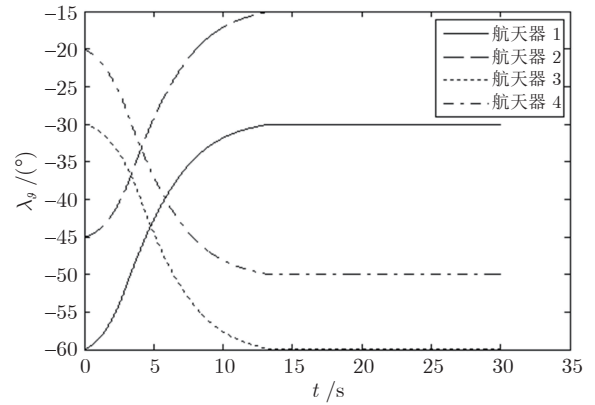


图 17  $T_{f\lambda} = 13$  s 的视线倾角  
Fig.17 LOS angles on the pitch direction when  $T_{f\lambda} = 13$  s

角、视线偏角在设定时间之前收敛至预期值, 并且收敛时间短于图 5 和图 6 中  $T_{f\lambda} = 15$  s 的结果, 表明协同制导方法达到设计目的。

## 4 结束语

本文针对具有时间一致性约束和终端角度约束的协同制导问题, 提出一种面向机动目标的多约束

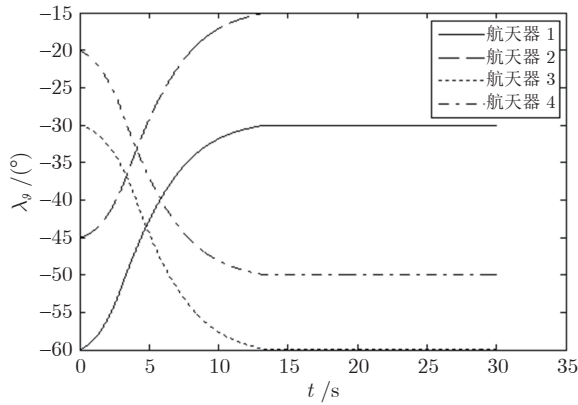


图 18  $T_{f\lambda} = 13$  s 的视线偏角

Fig. 18 LOS angles on the yaw direction when  $T_{f\lambda} = 13$  s

设定时间收敛协同制导律. 仿真结果表明, 本文提出的协同制导律能够在设定时间内实现终端角度约束和时间一致性约束, 即多个航天器从不同方向同时撞击目标.

## References

- Geng Yuan-Zhuo, Yuan Li, Huang Huang, Tang Liang. Terminal-guidance based reinforcement-learning for orbital pursuit-evasion game of the spacecraft. *Acta Automatica Sinica*, 2023, **49**(5): 974–984  
(耿远卓, 袁利, 黄煌, 汤亮. 基于终端诱导强化学习的航天器轨道追逃博弈. *自动化学报*, 2023, **49**(5): 974–984)
- Lu Yao. A method of output feedback control for non-affine hypersonic vehicles. *Acta Automatica Sinica*, 2022, **48**(6): 1530–1542  
(路遥. 一种非仿射高超声速飞行器输出反馈控制方法. *自动化学报*, 2022, **48**(6): 1530–1542)
- Clark D E. Stochastic multi-object guidance laws for interception and rendezvous problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, **67**(3): 1482–1489
- Jeon I S, Lee J I, Tahk M J. Impact-time-control guidance law for anti-ship missiles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, **14**(2): 260–266
- Chen Z, Chen W, Liu X, Cheng J. Three-dimensional fixed-time robust cooperative guidance law for simultaneous attack with impact angle constraint. *Aerospace Science and Technology*, 2021, **110**: Article No. 106523
- Cho N, Kim Y. Modified pure proportional navigation guidance law for impact time control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, **39**(4): 852–872
- Chen X, Wang J. Nonsingular sliding-mode control for field-of-view constrained impact time guidance. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2018, **41**(5): 1214–1222
- Lyu T, Guo Y N, Li C J, Ma G F, Zhang H B. Multiple missiles cooperative guidance with simultaneous attack requirement under directed topologies. *Aerospace Science and Technology*, 2019, **89**: 100–110
- Nikusokhan M, Nobahari H. Closed-form optimal cooperative guidance law against random step maneuver. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2016, **52**(1): 319–336
- Chen Y D, Wang J N, Shan J Y, Xin M. Cooperative guidance for multiple powered missiles with constrained impact and bounded speed. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2021, **44**(4): 825–841
- Dong W, Deng F, Wang C Y, Wang J N. Three-dimensional spatial-temporal cooperative guidance without active speed control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2023, **46**(10): 1981–1996
- Wang C Y, Dong W, Wang J N, Shan J Y, Xin M. Guidance law design with fixed-time convergent error dynamics. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2021, **44**(7): 1389–1398
- Moulay E, Léchappé V, Bernuau E, Defoort M, Plestan F. Fixed-time sliding mode control with mismatched disturbances. *Automatica*, 2022, **136**: Article No. 110009
- Moulay E, Léchappé V, Bernuau E, Defoort M, Plestan F. Robust fixed-time stability: Application to sliding-mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, **67**(2): 1061–1066
- You H, Chang X L, Zhao J F, Wang S H, Zhang Y H. Three-dimensional impact-angle-constrained fixed-time cooperative guidance algorithm with adjustable impact time. *Aerospace Science and Technology*, 2023, **141**: Article No. 108574
- Dong W, Wang C Y, Liu J H, Wang J N, Xin M. Three-dimensional vector guidance law with impact time and angle constraints. *Journal of the Franklin Institute*, 2023, **360**(2): 693–718
- Dong W, Wang C Y, Wang J N, Zuo Z Y, Shan J Y. Fixed-time terminal angle-constrained cooperative guidance law against maneuvering target. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, **58**(2): 1352–1366
- Zhang P, Zhang X Y. Multiple missiles fixed-time cooperative guidance without measuring radial velocity for maneuvering targets interception. *ISA Transactions*, 2022, **126**: 388–397
- Sánchez-Torres J D, Gómez-Gutiérrez D, López E, Loukianov A G. A class of predefined-time stable dynamical systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2018, **35**(Supplement\_1): i1–i29
- Munoz-Vazquez A J, Sánchez-Torres J D, Jimenez-Rodriguez E, Loukianov A G. Predefined-time robust stabilization of robotic manipulators. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2019, **24**(3): 1033–1040
- Sánchez-Torres J D, Defoort M, Muñoz-Vázquez A J. Predefined-time stabilisation of a class of nonholonomic systems. *International Journal of Control*, 2020, **93**(12): 2941–2948
- Wang F, Miao Y, Li C, et al. Attitude control of rigid spacecraft with predefined-time stability. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, **357**(7): 4212–4221
- Jing L, Wei C Z, Zhang L, Cui N G. Cooperative guidance law with predefined-time convergence for multimissile systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, **2021**: 1–13
- Chi Hai-Hong, Ding Xi-Hang, Zhang Guo-Liang. Three-dimensional cooperative guidance law for multiple missiles with predefined-time convergence. *Journal of Astronautics*, 2023, **44**(8): 1238–1250  
(池海红, 丁栖航, 张国良. 预定时间多导弹三维协同制导律. *宇航学报*, 2023, **44**(8): 1238–1250)
- Pal A K, Kamal S, Nagar S K, Bandyopadhyay B, Fridman L. Design of controllers with arbitrary convergence time. *Automatica*, 2020, **112**: Article No. 108710
- Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520–1533
- Zhang L, Jing L, Ye L H, Gao X. Predefined-time control for a horizontal takeoff and horizontal landing reusable launch vehicle. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 2021, **93**(6): 957–970
- Holloway J, Krstic M. Prescribed-time observers for linear systems in observer canonical form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, **64**(9): 3905–3912
- Ju X Z, Wei C Z, Xu H C, Wang F. Fractional-order sliding mode control with a predefined-time observer for VTVL re-



- usable launch vehicles under actuator faults and saturation constraints. *ISA Transactions*, 2022, **129**: 55–72
- 30 Zuo Z Y, Song J W, Tian B L, Basin M. Robust fixed-time stabilization control of generic linear systems with mismatched disturbances. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, **52**(2): 759–768
- 31 Wang X, Tan C P, Zhou D. Observer-based PIGC for missiles with impact angle constraint. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2018, **55**(5): 2226–2240
- 32 Hu Q L, Han T, Xin M. Three-dimensional guidance for various target motions with terminal angle constraints using twisting control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, **67**(2): 1242–1253
- 33 Zhang L, Li D Y, Jing L, Ju X Z, Cui N G. Appointed-time cooperative guidance law with line-of-sight angle constraint and time-to-go control. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, **59**(3): 3142–3155
- 34 Li He-Yu, Wang Jian-Bin, Zhang Rui, Song Feng, Yao Yu-Han, Lou Chao-Fei. Fixed-time cooperative guidance law with angle and remaining flight time constraints. *Journal of Astronautics*, 2024, **45**(3): 462–468  
(李鹤宇, 王建斌, 张锐, 宋峰, 姚雨晗, 楼朝飞. 具有角度和时间约束的固定时间协同制导律. 宇航学报, 2024, **45**(3): 462–468)

**李鹤宇** 北京电子工程总体研究所博士研究生. 主要研究方向为协同制导, 滑模控制.

E-mail: [liheyu93@163.com](mailto:liheyu93@163.com)

(**LI He-Yu** Ph.D. candidate at the Beijing Institute of Electronic System Engineering. His research interest covers cooperative guidance and sliding mode control.)

**王建斌** 北京电子工程总体研究所研究员. 主要研究方向为飞行器设计, 多学科优化. 本文通信作者.

E-mail: [wenxiaoni@sina.com](mailto:wenxiaoni@sina.com)

(**WANG Jian-Bin** Professor at the Beijing Institute of Electronic System Engineering. His research interest covers aircraft design and multiple disciplinary optimization. Corresponding author of this paper.)

**张锐** 北京电子工程总体研究所研究员. 主要研究方向为博弈理论, 飞行器仿真. E-mail: [llnwx@sina.com](mailto:llnwx@sina.com)

(**ZHANG Rui** Professor at the Beijing Institute of Electronic System Engineering. Her research interest covers game theory and aircraft simulation.)

**宋峰** 北京电子工程总体研究所研究员. 主要研究方向为高精度导航, 飞行器制导控制.

E-mail: [umaa930527@gmail.com](mailto:umaa930527@gmail.com)

(**SONG Feng** Professor at the Beijing Institute of Electronic System Engineering. His research interest covers high precision navigation and aircraft guidance and control.)