



## 基于正系统分析的不确定非线性系统性能驱动控制方法

郭宗易 韩永麟 郭建国 胡冠杰

### Performance-driven Control Approach for Uncertain Nonlinear Systems Based on Positive System Analysis

GUO Zong-Yi, HAN Yong-Lin, GUO Jian-Guo, HU Guan-Jie

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.16383/j.aas.c230752>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### 时延非线性系统无模型预设性能控制

Model-free Prescribed Performance Control of Time-delay Nonlinear Systems

自动化学报. 2024, 50(5): 937-946 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c230701>

### 一类 $p$ 规范型非线性系统预设性能有限时间 $H_\infty$ 跟踪控制

Prescribed Performance Finite-time  $H_\infty$  Tracking Control for a Class of  $p$ -normal Form Nonlinear Systems

自动化学报. 2021, 47(12): 2870-2880 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c190116>

### 基于性能指标约束的一类输入死区非线性系统最优控制

Adaptive Optimal Control for a Class of Nonlinear Systems With Dead Zone Input and Prescribed Performance

自动化学报. 2019, 45(11): 2128-2136 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c190414>

### 高超声速变外形飞行器建模与固定时间预设性能控制

Modeling and Fixed-time Prescribed Performance Control for Hypersonic Morphing Vehicle

自动化学报. 2024, 50(3): 486-504 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c230240>

### 具有指定性能和全状态约束的多智能体系统事件触发控制

Event-Triggered Control for Multi-Agent Systems With Prescribed Performance and Full State Constraints

自动化学报. 2019, 45(8): 1527-1535 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c190252>

### 未建模动态增量补偿驱动的非线性PID控制及应用

Un-modeled Dynamics Increment Compensation Driven Nonlinear PID Control and Its Application

自动化学报. 2020, 46(6): 1145-1153 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c190146>

# 基于正系统分析的不确定非线性系统性能驱动控制方法

郭宗易<sup>1</sup> 韩永麟<sup>1</sup> 郭建国<sup>1</sup> 胡冠杰<sup>1</sup>

**摘要** 针对一类不确定非线性系统, 提出一种保证系统状态满足预设边界性能函数的新型性能驱动控制 (Performance-driven control, PDC) 方法. 不同于传统预设性能控制 (Prescribed performance control, PPC) 方法中对误差与边界性能函数的比值进行非线性变换的思路, 本文基于保证状态量与上下边界的两个误差量均始终非负这一思想, 引入基于 Metzler 矩阵的正系统分析理论, 并结合切换控制技术, 以最终保证系统状态始终在预设性能函数之内. 系统的稳定性取决于边界性能函数的选取, 而不改变控制器的形式. 给出针对一类不确定非线性系统的控制设计、稳定性分析和方法讨论, 数值仿真例子验证了所提出方法的有效性.

**关键词** 不确定非线性系统, 预设性能, 性能驱动控制, 稳定性, Metzler 矩阵

**引用格式** 郭宗易, 韩永麟, 郭建国, 胡冠杰. 基于正系统分析的不确定非线性系统性能驱动控制方法. 自动化学报, 2024, 50(12): 1–11

**DOI** 10.16383/j.aas.c230752 **CSTR** 32138.14.j.aas.c230752

## Performance-driven Control Approach for Uncertain Nonlinear Systems Based on Positive System Analysis

GUO Zong-Yi<sup>1</sup> HAN Yong-Lin<sup>1</sup> GUO Jian-Guo<sup>1</sup> HU Guan-Jie<sup>1</sup>

**Abstract** A performance-driven control (PDC) approach with guaranteeing prescribed performance for a class of uncertain nonlinear systems is proposed. Different from the idea of nonlinear transformation of the ratio of the error to the boundary performance function in the traditional prescribed performance control (PPC) method, the paper introduces the theory of positive system analysis based on Metzler matrix and combines it with the switching control technique based on the idea of guaranteeing that the state quantities and the upper and lower boundaries are always nonnegative to ensure that the system state is always within the preset performance function. Consequently, the stability of the closed-loop system depends on the selected performance boundary function, which results in a unified framework. The design procedure, stability analysis and discussion for a class of uncertain nonlinear systems are provided in the paper, and numerical simulations verify the effectiveness of the proposed method.

**Key words** Uncertain nonlinear systems, prescribed performance, performance-driven control (PDC), stability, Metzler matrix

**Citation** Guo Zong-Yi, Han Yong-Lin, Guo Jian-Guo, Hu Guan-Jie. Performance-driven control approach for uncertain nonlinear systems based on positive system analysis. *Acta Automatica Sinica*, 2024, 50(12): 1–11

预设性能控制 (Prescribed performance control, PPC) 是近些年提出的一种约束控制方法<sup>[1–3]</sup>, 该控制方法在保证系统状态既满足稳定性要求又始终处于预设的性能函数之内的同时, 还可通过人为设定已知的边界函数刻画系统的动态性能, 从

而解决实际中存在的状态约束及过程动态性能优化问题.

常用的预设性能控制方法由 Bechlioulis 等<sup>[4–5]</sup>提出, 其核心在于对于误差变量的非线性变换, 即通过双曲正切函数等手段将受约束状态转换映射为无约束形式, 然后采用常规的状态反馈、反步法等方法开展控制系统设计, 由于其易于与其他方法结合, 因此在近些年获得大量的关注. 在理论研究方面, 已用于解决有限时间控制问题<sup>[6]</sup>、固定时间控制问题<sup>[7]</sup>、控制方向未知问题<sup>[8]</sup> 以及容错控制问题<sup>[9]</sup> 等; 在实际应用方面, 已开始研究应用于高超声速飞行器姿态控制问题<sup>[10–11]</sup>、卫星姿态控制问题<sup>[12]</sup>、工业机电系统<sup>[13]</sup> 等. 预设性能控制方法存在的问题在于其边界函数选取有限制, 要求单调递减且终值不

收稿日期 2023-12-18 录用日期 2024-06-28  
Manuscript received December 18, 2023; accepted June 28, 2024

国家自然科学基金 (52272404, 92271109), 中央高校基本科研业务费, 西北工业大学硕士研究生实践创新基金 (PF2024042) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (52272404, 92271109), Fundamental Research Funds for the Central Universities, and Practice and Innovation Funds for Graduate Students of Northwestern Polytechnical University (PF2024042)

本文责任编辑 王卓

Recommended by Associate Editor WANG Zhuo

1. 西北工业大学精确制导与控制研究所 西安 710072

1. Institute of Precision Guidance and Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072

能为零. 而且, 不同的稳定性需求下预设性能控制需要重新设计, 方法也不同, 缺乏统一的设计框架.

通道控制<sup>[14]</sup>通过将状态与边界性能函数差的倒数作为控制增益, 同样可满足预设边界. 目前, 该方法已扩展到任意阶系统, 并实现了有界和渐近稳定性. 比如, 针对任意相对阶的不确定非线性多输入多输出系统的跟踪控制问题, 文献 [15] 提出一种低复杂度的无模型控制器, 实现跟踪误差在预设性能漏斗通道内演化. 由于非最小相位不确定线性系统的零动态可能存在不稳定部分, 文献 [16] 中的通道控制方法通过增加相对度来完全消除内部动力学中不稳定部分, 实现有界稳定性. 除此之外, 近年来以控制障碍函数<sup>[17]</sup>和障碍李雅普诺夫函数<sup>[18]</sup>为代表的控制方法, 通过将系统状态限制在安全区域内来保证系统在满足约束的同时趋于稳定, 其也能够实现预设性能的效果. 但上述文献的方法同样难以通过同一种控制方法实现不同的稳定性需求.

因此, 本文受预设性能控制与通道控制的启发, 针对一类不确定非线性系统提出一种性能驱动控制 (Performance-driven control, PDC). 不同于传统预设性能控制与通道控制以系统稳定为目标, 该方法通过基于 Metzler 矩阵的正系统理论和切换控制保证状态量与边界性能函数误差始终为正, 从而保证状态量始终在预设的性能函数范围内. 该方法的特色是: 1) 系统的状态始终保证在预设的边界性能函数范围内. 2) 系统稳定性由边界性能函数决定, 在不同的边界性能函数下通过同一种控制框架实现有界和渐近多种稳定性. 3) 该方法采用的是系统状态与边界性能函数的差, 而非传统预设性能控制与通道控制中采用的系统状态与边界性能函数的商. 一方面放宽边界性能函数的选取范围, 允许边界终值为零; 另一方面保证系统状态在受突发扰动穿越边界后仍能返回预设的边界性能函数内. 由于系统稳态、动态等性能完全由边界性能函数决定, 因此称本文方法为“性能驱动控制”. 本文方法通过将状态量约束在预设性能函数之内, 可以有效实现期望的系统动态性能, 而且面对突发扰动可保证良好的鲁棒性, 对于航天器、飞行器等性能需求较高的实际物理对象控制系统设计具有较好的参考与应用价值.

本文后续内容安排如下: 第 1 节详细阐述问题及基本假设; 第 2 节给出性能驱动控制方法的主要理论结果并进一步开展方法讨论; 第 3 节仿真验证了方法有效性; 第 4 节是结束语.

## 1 问题阐述

本文考虑一类如下形式的非线性不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = F(x, t) + B(x, t)u(t) + d(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中状态  $x_1(t), x_2(t) \in \mathbf{R}^m$ , 控制输入  $u(t) \in \mathbf{R}^m$ , 不确定性  $d(t) \in \mathbf{R}^m$ . 非线性时变函数  $F(x, t): \mathbf{R}^{2m} \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^m$  和  $B(x, t): \mathbf{R}^{2m} \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^{m \times m}$  在状态  $x$  上满足局部 Lipschitz 条件, 在时间  $t$  上是时变的分段连续有界函数. 本文中考虑  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  是可测的, 且  $F(x, t)$  和  $B(x, t)$  为已知.

首先给出如下的性能函数定义.

**定义 1.** 考虑函数  $\rho(t) = [\rho_1(t), \dots, \rho_m(t)]^T \in \mathbf{R}^m$  满足如下性质: 1)  $\rho(t)$  是光滑的连续有界函数; 2)  $\lim_{t \rightarrow 0} \rho_i(t) = \rho_{i,0}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_i(t) = \rho_{i,\infty}$ , 其中  $\rho_{i,0} > \rho_{i,\infty} \geq 0$  是常数, 分别表示函数的初值与终值. 那么,  $\rho(t)$  称为性能函数.

定义 1 中,  $\rho_{i,0}$ 、 $\rho_{i,\infty}$  是影响性能函数特性的关键参数, 在后文详细介绍. 另外, 注意定义 1 与经典文献 [4] 定义是不同的, 其不要求终值  $\rho_{i,\infty}$  必须为正, 非负也可. 这个区别使文献 [4] 中的预设性能控制方法不再适用. 其次, 对文中将出现的部分符号进行定义.

**定义 2.** 对于任意向量, 定义符号  $\succ$ 、 $\prec$ 、 $\succeq$ 、 $\preceq$  表示向量中所有元素均大于、小于、不小于和不大.

针对上述系统 (1), 本文控制目标是设计控制律  $u(t)$  使  $\underline{\rho}(t) \preceq x_1(t) \preceq \bar{\rho}(t)$  成立, 即保证状态  $x_1(t)$  中每一个元素满足预设的性能约束, 其中函数  $\bar{\rho}(t)$ ,  $\underline{\rho}(t) \in \mathbf{R}^m$  是边界性能函数.

**假设 1.** 边界性能函数  $\bar{\rho}(t)$  和  $\underline{\rho}(t)$  满足关系:  $\bar{\rho}(t) = -\underline{\rho}(t) = \rho(t)$ , 其中  $\rho(t) = [\rho_1(t), \dots, \rho_m(t)]^T \in \mathbf{R}^m$  是给定的性能函数.

一般也可将函数  $\bar{\rho}(t)$ ,  $\underline{\rho}(t)$  称为边界函数, 表明其约束状态  $x_1(t)$  的运动边界. 假设 1 表明本文主要考虑的是对称边界来约束系统的动态性能, 而这也是预设性能控制中常用的假设条件.

本文的控制目标并未明显提及系统的稳定性, 这与经典预设性能控制不同. 本文希望通过以上对状态的约束, 由性能函数决定系统稳定性. 比如说, 如果性能函数  $\rho(t)$  有界, 那么状态  $x_1(t)$  也是有界稳定的; 如果性能函数  $\rho(t)$  渐近收敛, 那么状态  $x_1(t)$  也是渐近稳定的. 这是本文提出的控制方法的巧妙之处, 也是与预设性能控制的最大区别之处.

**假设 2.**  $B(x, t)$  在任意时刻和状态保持非奇异.

**假设 3.** 不确定性  $d(t) = [d_1, \dots, d_m]^T$  是有界的, 即满足  $0 \leq |d_i| \leq D_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , 其中  $D_i$  是已知正常数, 表示不确定性的上界.

**注 1.** 控制系数  $B(x, t)$  是方阵且非奇异实际已

保证非线性系统 (1) 是完全能控的. 假设 2 在机器人领域、航天器和飞行器等工程系统控制中广泛适用, 与文献 [19] 中的全驱概念是一致的, 具体介绍可参看文献 [19]. 假设 3 认为系统受到的不确定性是有界且匹配的, 这也是一个鲁棒控制中常用的假设条件.

## 2 性能驱动控制

### 2.1 控制器设计及稳定性分析

首先给出一些必要的定义和引理.

**定义 3.** 若方阵  $S \in \mathbf{R}^{k \times k}$  中任意非对角元素为非负数, 即  $S_{i,j} \geq 0, i \neq j \in [1, k]$ , 则该矩阵为 Metzler 矩阵<sup>[20]</sup>.

**引理 1.** 考虑非齐次线性系统  $\dot{z}(t) = Sz(t) + \theta(t)$ , 其中状态向量  $z(t) \in \mathbf{R}^k, \theta(t): \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+^k$ . 系统满足性质: 1) 方阵  $S$  为 Metzler 矩阵; 2) 系统初始状态  $z(t_0) \geq 0$  时, 方程的解满足  $z(t) \geq 0, \forall t \geq t_0$ <sup>[21]</sup>.

引理 1 给出正系统性质, 即系统状态始终为非负. 注意正系统并不一定要求系统是稳定的, 因此矩阵  $S$  不一定是 Hurwitz 的. 然后, 给出本文提出控制器的具体形式. 定义  $\bar{e}_1(t)$  和  $e_1(t)$  分别为状态  $x_1(t)$  与上边界性能函数和下边界性能函数的误差, 即

$$\bar{e}_1(t) = \bar{\rho}(t) - x_1(t) \quad (2)$$

$$e_1(t) = x_1(t) - \underline{\rho}(t) \quad (3)$$

根据以上定义, 本文的控制目标可以转变为  $\bar{e}_1(t), e_1(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ . 进一步, 定义变量

$$\xi(t) = x_2(t) - K_1 x_1(t) \quad (4)$$

其中  $K_1 = \text{diag}\{K_{1,i}\} \in \mathbf{R}^{m \times m} (i = 1, \dots, m)$  是对角阵. 系统 (1) 的相对阶为 2, 通过式 (4) 中对  $\xi$  的定义, 使得  $u$  可直接作用到  $\xi$  的动态中, 从而实现系统的降阶. 为方便起见, 下文中省略时间  $t$  和状态  $x$  在函数中的显式表达. 定义如下的新误差变量

$$\bar{e}_2 = \dot{\bar{e}}_1 - K_1 \bar{e}_1 \quad (5)$$

对变量  $\bar{e}_2$  求导并代入式 (1) 可得

$$\dot{\bar{e}}_2 = \bar{h} + K_1 x_2 - F - Bu - d \quad (6)$$

其中函数  $\bar{h}$  表达式为  $\bar{h} = \dot{\bar{\rho}} - K_1 \dot{\rho}$ .

同样地, 针对误差  $e_1(t)$  定义如下新变量

$$e_2 = \dot{e}_1 - K_1 e_1 \quad (7)$$

对  $e_2$  求导并代入式 (1) 得到

$$\dot{e}_2 = -\underline{h} - K_1 x_2 + F + Bu + d \quad (8)$$

其中函数  $\underline{h} = \dot{\underline{\rho}} - K_1 \dot{\rho}$ . 可以发现, 如果定义函数  $h = \dot{\rho} - K_1 \dot{\rho}$ , 那么有关系  $\bar{h} = -\underline{h} = h$ .

根据式 (2) ~ (4), 误差变量  $\bar{e}_2$  和  $e_2$  可以写为

$$\bar{e}_2 = \bar{g} - \xi \quad (9)$$

$$e_2 = \xi - \underline{g} \quad (10)$$

其中函数  $\bar{g}, \underline{g}$  表达式为  $\bar{g} = -\underline{g} = \dot{\rho} - K_1 \rho$ . 可以看出, 式 (9) 和 (10) 与式 (2) 和 (3) 类似, 反映新变量  $\xi$  与新的性能边界函数  $\bar{g}, \underline{g}$  之间的距离. 基于以上定义, 本文提出如下的性能驱动控制 PDC 方法

$$u(t) = B^{-1}(x, t)(K_1 x_2(t) - F(x, t) + K_2 \xi(t) - K_2 \text{sgn}(\xi(t))g(\rho(t)) - \text{sgn}(\xi(t))D - \text{sgn}(\xi(t))\psi(t)) \quad (11)$$

其中常数矩阵  $K_2 = \text{diag}\{K_{2,i}\} \in \mathbf{R}^{m \times m} (i = 1, \dots, m)$  是对角阵; 向量  $D = [D_1, \dots, D_m]^T$ ;  $\psi(t)$  是需要设计的函数, 如下定理 1 的条件 1) 所示;  $\text{sgn}(\cdot)$  表示对角化的符号函数, 即对于任意向量  $y = [y_1, \dots, y_m]^T$ , 有  $\text{sgn}(y) = \text{diag}\{\text{sgn}(y_1), \dots, \text{sgn}(y_m)\} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ . 函数  $g(\rho(t))$  是显含性能函数  $\rho(t)$  的函数, 表达式为

$$g(\rho(t)) = \dot{\rho}(t) - K_1 \rho(t) \quad (12)$$

下面, 首先给出如下定理来分析性能驱动控制对预设性能的满足情况.

**定理 1.** 针对符合假设 1 ~ 3 的非线性系统 (1), 设计性能驱动控制律 (11), 当系统满足以下条件时, 状态  $x_1$  满足  $\underline{\rho} \leq x_1 \leq \bar{\rho}$ .

- 1) 函数  $\psi \geq -h + H, \forall t \geq 0$ , 其中  $H = [H_1, \dots, H_m]^T \succ 0, H_i (i = 1, 2, \dots, m)$  为正常数;
- 2) 选取合适的矩阵  $K_1$  满足  $g \geq 0, \forall t \geq 0$ ;
- 3)  $\bar{e}_2(0) \geq 0, e_2(0) \geq 0, \bar{e}_1(0) \geq 0, e_1(0) \geq 0$ .

**证明.** 首先观察变量  $\xi$  的变化. 不失一般性, 认为变量初值  $\xi(0)$  由非负和负两种元素组成. 假设非负元素有  $l$  个, 那么负元素有  $m - l$  个. 定义如下变量

$$\begin{cases} \xi_s = [\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_l}, \dots, \xi_{s_l}]^T \in \mathbf{R}^l, \\ i = 1, \dots, l, s_i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ \xi_q = [\xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_j}, \dots, \xi_{q_{m-l}}]^T \in \mathbf{R}^{m-l}, \\ j = 1, \dots, m-l, q_j \in \{1, 2, \dots, m\} \end{cases} \quad (13)$$

其中标量  $0 \leq l \leq m$ . 因此向量初值  $\xi_s(0)$  和  $\xi_q(0)$  分别满足  $\xi_s(0) \geq 0, \xi_q(0) < 0$ .

可以看出, 通过定义  $\xi_s$  和  $\xi_q$  实现对变量  $\xi \in \mathbf{R}^m$  在  $t = 0$  时刻的划分. 对于系统 (1), 存在时刻  $t_1$  使得这种划分在  $t \in [0, t_1]$  保持不变. 因此引入

划分矩阵  $I_s \in \mathbf{R}^{l \times m}$  和  $I_q \in \mathbf{R}^{(m-l) \times m}$ , 表示对任意  $m$  维向量的划分, 其中矩阵  $I_s$  和  $I_q$  表示从单位矩阵  $I_{m \times m}$  中挑出对应于  $s_i$  和  $q_j$  的行向量组成的矩阵. 比如, 对于任意三维向量  $y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$ , 如果  $s_1 = 1, s_2 = 3$  和  $q_1 = 2$ , 则表示向量  $y$  划分为两个向量  $y_s = [y_1 \ y_3]^T$  和  $y_q = [y_2]$ , 此时划分矩阵  $I_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $I_q = [0 \ 1 \ 0]$ . 对于划分矩阵  $I_s$  和  $I_q$ , 容易验证如下性质:  $y_s = I_s y$ ,  $y_q = I_q y$ ,  $y = I_s^T y_s + I_q^T y_q$ . 本文后续所出现的所有划分矩阵  $I_s$  和  $I_q$  都是由变量  $\xi$  中元素的正负性所唯一决定的. 因此, 状态变量  $\xi$ , 函数  $g$ ,  $\psi$  和向量  $D$  可重新表示为

$$\xi = I_s^T \xi_s + I_q^T \xi_q \quad (14)$$

$$g = I_s^T g_s + I_q^T g_q \quad (15)$$

$$\psi = I_s^T \psi_s + I_q^T \psi_q \quad (16)$$

$$D = I_s^T D_s + I_q^T D_q \quad (17)$$

其中  $g_s \in \mathbf{R}^l$ ,  $g_q \in \mathbf{R}^{m-l}$ ,  $\psi_s \in \mathbf{R}^l$ ,  $\psi_q \in \mathbf{R}^{m-l}$  和  $D_s \in \mathbf{R}^l$ ,  $D_q \in \mathbf{R}^{m-l}$  分别是基于  $s$  和  $q$  对函数  $g$ ,  $\psi$  和向量  $D$  的划分.

考虑  $\text{sgn}(\cdot)$  函数的定义, 经计算可进一步得到

$$\text{sgn}(\xi) g = I_s^T g_s - I_q^T g_q \quad (18)$$

$$\text{sgn}(\xi) \psi = I_s^T \psi_s - I_q^T \psi_q \quad (19)$$

$$\text{sgn}(\xi) D = I_s^T D_s - I_q^T D_q \quad (20)$$

针对控制律 (11), 计算可得

$$\begin{aligned} I_s B u &= I_s K_2 I_s^T \xi_s + I_s K_2 I_q^T \xi_q - I_s K_2 I_s^T g_s + \\ & I_s K_2 I_q^T g_q - I_s I_s^T \psi_s + I_s I_q^T \psi_q - \\ & I_s (F - K_1 x_2) - I_s I_s^T D_s + I_s I_q^T D_q \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} I_q B u &= I_q K_2 I_s^T \xi_s + I_q K_2 I_q^T \xi_q - I_q K_2 I_s^T g_s + \\ & I_q K_2 I_q^T g_q - I_q I_s^T \psi_s + I_q I_q^T \psi_q - \\ & I_q (F - K_1 x_2) - I_q I_s^T D_s + I_q I_q^T D_q \end{aligned} \quad (22)$$

注意有  $I_s I_q^T = \mathbf{0}_{l \times (m-l)}$  和  $I_q I_s^T = \mathbf{0}_{(m-l) \times l}$ , 因此利用式 (16) 得到

$$I_s \psi = I_s I_s^T \psi_s + I_s I_q^T \psi_q = I_s I_s^T \psi_s \quad (23)$$

$$I_q \psi = I_q I_s^T \psi_s + I_q I_q^T \psi_q = I_q I_q^T \psi_q \quad (24)$$

由于  $K_2$  是对角矩阵, 可得  $I_s K_2 I_s^T = \mathbf{0}_{l \times (m-l)}$  和  $I_q K_2 I_s^T = \mathbf{0}_{(m-l) \times l}$ , 代入式 (21) 和 (22) 得

$$I_s B u = -I_s K_2 I_s^T \bar{e}_{2,s} - I_s (F - K_1 x_2 + \psi) - I_s D \quad (25)$$

$$I_q B u = I_q K_2 I_q^T \underline{e}_{2,q} - I_q (F - K_1 x_2 + \psi) + I_q D \quad (26)$$

其中向量  $\bar{e}_{2,s} = [\bar{e}_{2,s_1}, \dots, \bar{e}_{2,s_l}]^T$  和  $\underline{e}_{2,q} = [\underline{e}_{2,q_1}, \dots, \underline{e}_{2,q_{m-l}}]^T$  定义为

$$\bar{e}_{2,s} = g_s - \xi_s = \bar{g}_s - \xi_s \quad (27)$$

$$\underline{e}_{2,q} = \xi_q + g_q = \xi_q - \underline{g}_q \quad (28)$$

其中  $\bar{g}_s = -\underline{g}_s = g_s$ ,  $\bar{g}_q = -\underline{g}_q = g_q$ , 根据条件 2) 可知  $g_s \succeq 0$ ,  $g_q \succeq 0$ .

代入式 (6), (8), (25) 和 (26) 得到  $\dot{\bar{e}}_{2,s}$  和  $\dot{\underline{e}}_{2,q}$ , 并考虑  $\bar{h} = -\underline{h} = h$  可得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_{2,s} &= I_s \dot{\bar{e}}_2 = I_s K_2 I_s^T \bar{e}_{2,s} + I_s \psi + \\ & I_s h + I_s (D - d) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}}_{2,q} &= I_q \dot{\underline{e}}_2 = I_q K_2 I_q^T \underline{e}_{2,q} + I_q \psi + \\ & I_q h + I_q (D + d) \end{aligned} \quad (30)$$

因此, 系统方程可表示为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{e}}_{2,s} \\ \dot{\underline{e}}_{2,q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_s K_2 I_s^T & \mathbf{0}_{l \times (m-l)} \\ \mathbf{0}_{(m-l) \times l} & I_q K_2 I_q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_{2,s} \\ \underline{e}_{2,q} \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} v_s \\ v_q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

其中向量  $v_s$  和向量  $v_q$  表示为

$$v_s = I_s (\psi + h + D - d) \quad (32)$$

$$v_q = I_q (\psi + h + D + d) \quad (33)$$

根据假设 3 可知  $D_i - |d_i| \geq 0$ , 同时结合条件 1) 可得对  $\forall t \geq 0$  均满足

$$v_s = I_s (\psi + h + D - d) \succ 0 \quad (34)$$

$$v_q = I_q (\psi + h + D + d) \succ 0 \quad (35)$$

因为  $K_2 \in \mathbf{R}^{m \times m}$  为对角阵, 且满足 Metzler 矩阵性质, 由此矩阵  $\begin{bmatrix} I_s K_2 I_s^T & \mathbf{0}_{l \times (m-l)} \\ \mathbf{0}_{(m-l) \times l} & I_q K_2 I_q^T \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times m}$  也属于 Metzler 矩阵.

由条件 3) 可知  $\bar{e}_2(0) \succeq 0$  和  $\underline{e}_2(0) \succeq 0$ , 由引理 1 可得

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_{2,s} \\ \underline{e}_{2,q} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (36)$$

注意上式仅保证  $\xi_s \preceq \bar{g}_s$  和  $\xi_q \succeq \underline{g}_q$ , 因此需要

将其扩展到  $g \preceq \xi \preceq \bar{g}$ .

如果定义  $e_{2,s} = \xi_s - \underline{g}_s$  和  $\bar{e}_{2,q} = \bar{g}_q - \xi_q$ , 那么有  $\bar{e}_{2,s} - \underline{e}_{2,s} = -2\xi_s$  和  $\bar{e}_{2,q} - \underline{e}_{2,q} = -2\xi_q$ , 变换得到  $\underline{e}_{2,s} = \bar{e}_{2,s} + 2\xi_s$  和  $\bar{e}_{2,q} = \underline{e}_{2,q} - 2\xi_q$ . 注意根据  $s$  和  $q$  的划分可得  $\xi_s \geq 0, \xi_q < 0, t \in [0, t_1]$ , 其中时刻  $t_1$  表示  $s$  和  $q$  的划分发生改变的时刻, 此时首次  $\xi_s$  有元素小于 0 或  $\xi_q$  有元素大于 0. 那么, 由式 (36) 可得  $\underline{e}_{2,s} \geq 0, \bar{e}_{2,q} \geq 0$ , 进而有  $\bar{e}_2 \geq 0, \underline{e}_2 \geq 0$ , 对于  $t \in [0, t_1]$ . 在时刻  $t_1$  后, 假设状态变量  $\xi$  按照  $\bar{s}$  和  $\bar{q}$  划分, 即非负向量和负向量被重新分组为  $\xi_{\bar{s}} \in \mathbf{R}^{\bar{l}}$ ,  $\xi_{\bar{q}} \in \mathbf{R}^{m-\bar{l}}$ , 其中  $0 \leq \bar{l} \leq m$ . 此时依据与上面过程类似的推导, 可得  $\bar{e}_2 \geq 0, \underline{e}_2 \geq 0$ , 对于  $t \in (t_1, t_2]$ , 其中  $t_2$  是下一次  $\bar{s}$  和  $\bar{q}$  划分发生改变的时刻. 以此类推, 我们可得

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_2 \\ \underline{e}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (37)$$

因此可得  $g \preceq \xi \preceq \bar{g}, \forall t \geq 0$ . 根据式 (5) 和 (7) 可得

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_2 \\ \underline{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{e}}_1 \\ \dot{\underline{e}}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \underline{e}_1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

因为  $K_1$  为对角阵, 且满足 Metzler 矩阵性质, 由此矩阵  $\begin{bmatrix} K_1 & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & K_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2m \times 2m}$  也属于 Metzler 矩阵. 根据引理 1 可得, 当初值满足  $\bar{e}_1(0) \geq 0, \underline{e}_1(0) \geq 0$  时, 下式成立

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \underline{e}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (39)$$

即  $\forall t \geq 0$ , 有  $\bar{e}_1 = \bar{\rho} - x_1 \geq 0$  和  $\underline{e}_1 = x_1 - \underline{\rho} \geq 0$  均成立, 那么  $\underline{\rho} \preceq x_1 \preceq \bar{\rho}, \forall t \geq 0$  成立.  $\square$

以上定理保证状态始终在预设的边界性能函数中, 下面分析整个系统的稳定性. 通过适当选择性能函数  $\rho$ , 本文所提出的 PDC 控制律可以使系统具有不同稳定性. 考虑到 PPC 控制常用到如下性能函数

$$\rho_i(t) = (\rho_{i,0} - \rho_{i,\infty})e^{-l_i t} + \rho_{i,\infty} \quad (40)$$

其中  $\rho_{i,0} > \rho_{i,\infty} \geq 0, l_i > 0$ , 标准的幂次函数.  $\rho_{i,\infty} > 0$  时, 性能函数  $\rho$  最后趋近  $\rho_{i,\infty}$ ;  $\rho_{i,\infty} = 0$  时, 性能函数  $\rho$  最后趋近零. 基于性能函数这一特点. 分析所提出的控制方法所实现的稳定性, 如下所述:

**定理 2.** 针对符合假设 1 ~ 3 的非线性系统 (1), 采用提出的性能驱动控制律 (11), 且满足定理 1 中的 3 个条件, 那么有如下结论:

1)  $K_{2,i} < 0 (i = 1, \dots, m)$  时, 状态  $x_1$  的稳定性由如式 (40) 的性能函数  $\rho$  决定, 即如果  $\rho_{i,\infty} >$

0, 那么状态  $x_1$  是李雅普诺夫意义下稳定的; 如果  $\rho_{i,\infty} = 0$ , 那么状态  $x_1$  是渐近稳定的.

2)  $K_{2,i} > 0 (i = 1, \dots, m)$  时, 如果选取  $K_1$  使得  $h_i \leq 0$ , 那么不论  $\rho_{i,\infty} > 0$  或  $\rho_{i,\infty} = 0$ , 状态  $x_1$  必然是渐近稳定的.

**证明.** 由于闭环系统包含符号函数, 是非光滑的, 因此需要首先分析闭环系统的解的存在性. 首先, 引入 Filippov 解的概念<sup>[22]</sup>, 其允许在不连续点定义系统的解. 然后结合文献 [23] 中的命题 3, 可分析得到系统存在一个绝对连续的 Filippov 解. 同时, 由于  $F(x, t), B(x, t)$  连续且在状态  $x$  上满足局部 Lipschitz 条件, 根据文献 [24] 可知, 该解是唯一的.

注意  $K_1$  是对角阵, 那么根据定理 1 中的条件 2), 可知  $g \geq 0$ , 进一步结合函数  $g$  的定义 (12), 可得  $K_{1,i} \leq \dot{\rho}_i(t)/\rho_i(t), \forall t \geq 0$ . 由式 (40) 可知,  $K_{1,i}$  应该取负值, 即  $K_{1,i} < 0 (i = 1, \dots, m)$ . 基于以上分析, 下面将分别对定理 2 的结论 1) 和 2) 进行证明.

1)  $K_{2,i} < 0 (i = 1, \dots, m)$

如果边界性能函数  $\bar{\rho} = -\underline{\rho} = \rho$  的终值  $\rho_{i,\infty} > 0$ , 那么对于任意常数  $\delta$  使得: 当  $|\rho(0)| \leq \delta$  时, 存在常数  $\gamma$  使得函数  $\rho$  满足  $|\rho| \leq \gamma$ . 考虑到定理 1 的结论  $\underline{\rho} \preceq x_1 \preceq \bar{\rho}, \forall t \geq 0$  成立, 那么也有: 当  $|x_1(0)| \leq \delta$  时, 存在常数  $\gamma$  使得状态  $x$  满足  $|x_1| \leq \gamma$ , 因此状态  $x_1$  是李雅普诺夫意义下稳定的. 同样, 根据渐近稳定性的定义, 也可得到: 如果性能函数  $\rho$  的终值  $\rho_{i,\infty} = 0$ , 那么状态  $x_1$  是渐近稳定的.

2)  $K_{2,i} > 0 (i = 1, \dots, m)$

对变量  $\xi(t)$  求导并代入控制律 (11) 可得

$$\dot{\xi} = K_2 \xi - K_2 \text{sgn}(\xi)g - \text{sgn}(\xi)D - \text{sgn}(\xi)\psi + d \quad (41)$$

考虑 Lyapunov 函数  $V_\xi = (1/2)\xi^T \xi$ , 对其求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_\xi &= \xi^T K_2 \xi - \xi^T K_2 \text{sgn}(\xi)g - \xi^T \text{sgn}(\xi)D - \\ &\quad \xi^T \text{sgn}(\xi)\psi + \xi^T d \end{aligned} \quad (42)$$

注意到  $K_2$  是对角阵

$$\begin{aligned} \dot{V}_\xi &= \sum_{i=1}^m K_{2,i} |\xi_i| (|\xi_i| - g_i) - \sum_{i=1}^m |\xi_i| (D_i - \text{sgn}(\xi_i)d_i) - \\ &\quad \sum_{i=1}^m |\xi_i| \psi_i = \sum_{i=1}^m K_{2,i} |\xi_i| (|\xi_i| - g_i) - \\ &\quad \sum_{i=1}^m |\xi_i| (\varepsilon_i + |d_i| - \text{sgn}(\xi_i)d_i) - \sum_{i=1}^m |\xi_i| \psi_i \end{aligned} \quad (43)$$

其中  $\varepsilon_i = D_i - |d_i| \geq 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ . 考虑到  $g \preceq \xi \preceq \bar{g}$ , 那么有  $|\xi_i| \leq g_i$ . 而且,  $|d_i| \geq \text{sgn}(\xi_i)d_i$  必然成立. 注意此时  $K_{2,i} > 0$ , 因此

$$\begin{aligned} \dot{V}_\xi &\leq -\sum_{i=1}^m |\xi_i| \varepsilon_i - \sum_{i=1}^m |\xi_i| \psi_i \leq -\sum_{i=1}^m |\xi_i| \psi_i \leq \\ &\sum_{i=1}^m |\xi_i| (h_i - H_i) \leq -\sum_{i=1}^m |\xi_i| H_i \leq -H_{\min} \sqrt{2V_\xi} \end{aligned} \quad (44)$$

其中  $H_{\min} = \min\{H_1, \dots, H_m\} > 0$ . 因此, 由文献 [25] 可知, 状态  $\xi$  是有限时间收敛到 0. 考虑到  $\xi = x_2 - K_1 x_1 = \dot{x}_1 - K_1 x_1$  以及  $K_1, i < 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), 那么状态  $x_1$  是渐近收敛的.  $\square$

**注 2.** 如式 (40) 所示, 当  $\rho_{i, \infty} > 0$  时,  $\rho_i$  的运动与李雅普诺夫稳定中系统状态的运动形式是一致的 [26]. 而当  $\rho_{i, \infty} = 0$  时,  $\rho_i$  的运动与渐近稳定中系统状态的运动形式是一致的. 因此从定理 2 的证明可知, 性能函数  $\rho$  决定系统的稳定性, 通过选取不同的  $\rho$  可实现不同的稳定性.

**注 3.** 传统预设性能控制和通道控制方法中采用系统状态与边界性能函数的商和  $\ln$  函数等形式, 导致突发受扰时如果系统状态等于边界时必然引发系统发散. 而如式 (2)、(3)、(9)、(10) 所示, PDC 方法的设计是基于系统状态与边界性能函数的差, 因此当  $K_{2, i} < 0$  时, 由于突发受扰导致系统状态穿越边界性能函数并不会引起系统发散, 且能保证系统状态最终返回到预设边界性能函数内. 限于篇幅, 给出简略分析. 假设  $\hat{t}_1$  时刻, 突发扰动导致  $\xi$  穿越边界函数  $\bar{g}$ , 即  $\bar{e}_{2, s}(\hat{t}_1) \leq 0$ . 由式 (31) 可得  $\dot{e}_{2, s}(t) \geq I_s K_2 I_s^T \bar{e}_{2, s}(t) + C$ , 其中常数向量  $C \succ 0$  为向量  $v_s$  的下界. 进而可得

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2, s}(t) &\geq e^{I_s K_2 I_s^T (t - \hat{t}_1)} \int_{\hat{t}_1}^t e^{-I_s K_2 I_s^T \tau} C d\tau + \\ &e^{I_s K_2 I_s^T (t - \hat{t}_1)} \bar{e}_{2, s}(\hat{t}_1) = \sigma_1 + \sigma_2 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= e^{I_s K_2 I_s^T (t - \hat{t}_1)} (\bar{e}_{2, s}(\hat{t}_1) + \\ &e^{-I_s K_2 I_s^T \hat{t}_1} (I_s K_2 I_s^T)^{-1} C) \\ \sigma_2 &= -e^{-I_s K_2 I_s^T \hat{t}_1} (I_s K_2 I_s^T)^{-1} C \end{aligned}$$

由于  $I_s \geq 0$ ,  $K_2 \leq 0$ ,  $C \succ 0$ , 因此  $\sigma_2 \geq 0$ . 而由指数函数性质可知, 随着  $t$  增大  $\sigma_1$  将趋近于零, 所以一定存在  $\hat{t}_2 > \hat{t}_1$ , 使得  $\bar{e}_{2, s}(\hat{t}_2) \geq 0$ , 此时便又回到定理 1 所描述的情况. 类似上述分析可知 PDC 方法允许短时间内出现  $\bar{e}_1, \underline{e}_1, \bar{e}_2, \underline{e}_2 \leq 0$ , 即系统状态穿越性能函数. 因此, 这也是 PDC 方法相比于传统预设性能和通道控制的优势之一, 后续的仿真结果也验证了这一结论.

**注 4.** 从定理 2 的结论 2) 部分证明可以看出,

本文提出的 PDC 方法在  $K_{2, i} > 0$  时蜕化为一种时变增益滑模控制. 后文仿真部分的情况 3, 控制输入  $u$  出现的抖振现象也符合滑模控制的特点. 但本文方法在  $K_{2, i} < 0$  时与滑模控制并无关系. 这说明本文方法既涵盖滑模控制, 又能保证边界性能函数的满足.

## 2.2 性能驱动控制中的“驱动”的含义解释

下面对本文所提出的性能驱动控制中的“驱动”的含义进行解释与讨论. PDC 方法控制的是误差  $\bar{e}_2, \underline{e}_2$  和  $\bar{e}_1, \underline{e}_1$ , 因此在控制状态  $x_1$  时, 通过保证  $\bar{e}_2, \underline{e}_2 \geq 0$  和  $\bar{e}_1, \underline{e}_1 \geq 0$  使得系统被驱动压缩到零. 下面的图 1 更为形象地展示了这种性能驱动的含义.

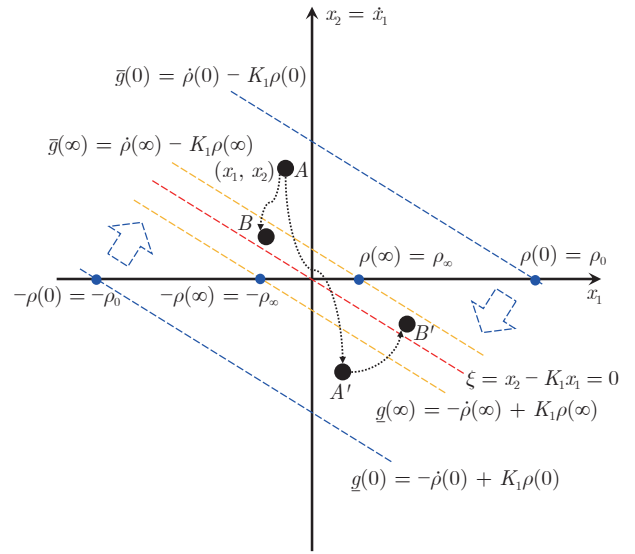


图 1 性能驱动控制方法示意图

Fig. 1 Schematic diagram of performance-driven control

控制目标是设计控制器将  $x_1$  约束在区间  $[-\rho, \rho]$  并驱使其收敛到零. 图 1 中,  $\bar{g}(0)$  和  $\underline{g}(0)$  与横轴相交于  $\rho_0$  和  $-\rho_0$ , 而  $\bar{g}(\infty)$  和  $\underline{g}(\infty)$  与横轴相交于  $\rho_\infty$  和  $-\rho_\infty$ . 如果终值  $\rho_\infty$  设置为零, 那么  $\bar{g}(\infty)$  和  $\underline{g}(\infty)$  最后重合在红色虚线  $x_2 - K_1 x_1 = 0$ . 首先选取  $A$  点的初值  $(x_1, x_2)$  进行分析. 首先,  $A$  点一定在区域  $\bar{g}(0)$  和  $\underline{g}(0)$  之间, 意味着  $\bar{e}_2 \geq 0$  和  $\underline{e}_2(0) \geq 0$  成立. 然后, 随着边界函数的减小, 区域逐渐被压缩, 而  $A$  点保持在此区域内.  $A$  点可能最终运动到  $B$  点, 也可能随着  $\xi$  的变号移动到  $A'$  点. 但系统仍会从  $A'$  点运动到  $B'$  点, 即最终状态必然在  $\bar{g}(\infty)$  和  $\underline{g}(\infty)$  区域内. 因此, 整个过程中状态  $x_1$  始终在  $[-\rho, \rho]$  内. 上图清晰地展现了状态是通过控制器被驱动压缩到区间内, 稳定性取决于边界性能函数. 传统 PPC 方法的稳定性依赖于经过非线性变换后采用的不同控制设计方法, 与选取的边界函数无直接关系, 而这也是本文方法与传统 PPC 的主要不同.

### 3 数值仿真

考虑卫星刚体姿态模型<sup>[27]</sup>

$$\begin{cases} \dot{\Omega}(t) = F_{\Omega}(t) + \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = F_{\omega}(t) + B(t)u(t) + d(t) \end{cases} \quad (45)$$

其中  $\Omega(t) = [\phi(t) \ \theta(t) \ \psi(t)]^T$ ,  $\phi(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\psi(t)$  表示滚动角、俯仰角和偏航角;  $\omega(t) = [\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)]^T$  表示角速度, 其中  $\omega_x(t)$ 、 $\omega_y(t)$ 、 $\omega_z(t)$  分别表示滚转、俯仰和偏航通道的角速度; 控制力矩  $u(t) = [u_x(t) \ u_y(t) \ u_z(t)]^T$ , 其中  $u_x(t)$ 、 $u_y(t)$ 、 $u_z(t)$  表示三通道的控制力矩;  $B$  为控制系数矩阵; 向量  $d(t)$  表示受到的干扰; 非线性函数  $F_{\Omega}(t) = [\omega_0 \psi(t) \ \omega_0 - \omega_0 \phi(t)]^T$ ,  $F_{\omega}(t) = [(1/J)_x(J_y - J_z) \ \omega_y \omega_z \ (1/J)_y(J_z - J_x) \omega_z \omega_x \ (1/J)_z(J_x - J_y) \omega_x \omega_y]^T$ ,  $\omega_0 = 0.0012$  rad/s 为轨道角速度. 定义  $x_1(t) = \Omega(t)$ ,  $x_2(t) = F_{\Omega}(t) + \omega(t)$ , 则卫星姿态系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = F(t) + Bu(t) + d \end{cases} \quad (46)$$

其中  $F(t) = \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + F_{\omega}(t)$ . 仿真中其他参数取值如下:

转动惯量矩阵  $J = B^{-1} = \text{diag}\{18.73, 20.77, 23.63\}$ , 初始姿态角  $\Omega(0) = [0.0112 \ -0.0445 \ 0.0235]^T$  rad, 初始姿态角速度  $\omega(0) = [-0.0416 \ 0.0484 \ -0.0556]^T$  rad/s, 干扰

$$d(t) = \begin{bmatrix} A_0(3 \cos(\omega_0 t) + 1) \\ A_0(3 \cos(\omega_0 t) + 1.5 \sin(\omega_0 t)) \\ A_0(3 \sin(\omega_0 t) + 1) \end{bmatrix}$$

其中  $A_0 = 1.5 \times 10^{-5}$  (N·m).

为验证提出的方法的有效性, 本文首先选择如下两种情况来分别验证有界收敛和渐近收敛.

**情况 1 (有界收敛).** 性能函数  $\rho(t) = (4 - 0.2)e^{-2t} + 0.2 = \bar{\rho}(t) - \underline{\rho}(t)$ .  $K_1 = \text{diag}\{-5, -5, -5\}$  和  $K_2 = \text{diag}\{-2.5, -2.5, -2.5\}$ .

**情况 2 (渐近收敛).** 性能函数  $\rho(t) = (4 - 0.02)e^{-2t}$ ,  $K_1 = \text{diag}\{-5, -5, -5\}$ ,  $K_2 = \text{diag}\{-2.5, -2.5, -2.5\}$ .

以上两种情况中, 根据定理 1 选择函数  $\psi(t) = -h(t) + [1 \times 10^{-5} \ 1 \times 10^{-5} \ 1 \times 10^{-5}]^T$ , 对  $\forall t \geq 0$  满足条件  $\psi(t) \succeq -h(t) + H$ . 情况 1 和情况 2 下的仿真结果分别如图 2 和图 3 所示. 可以看出, 状态

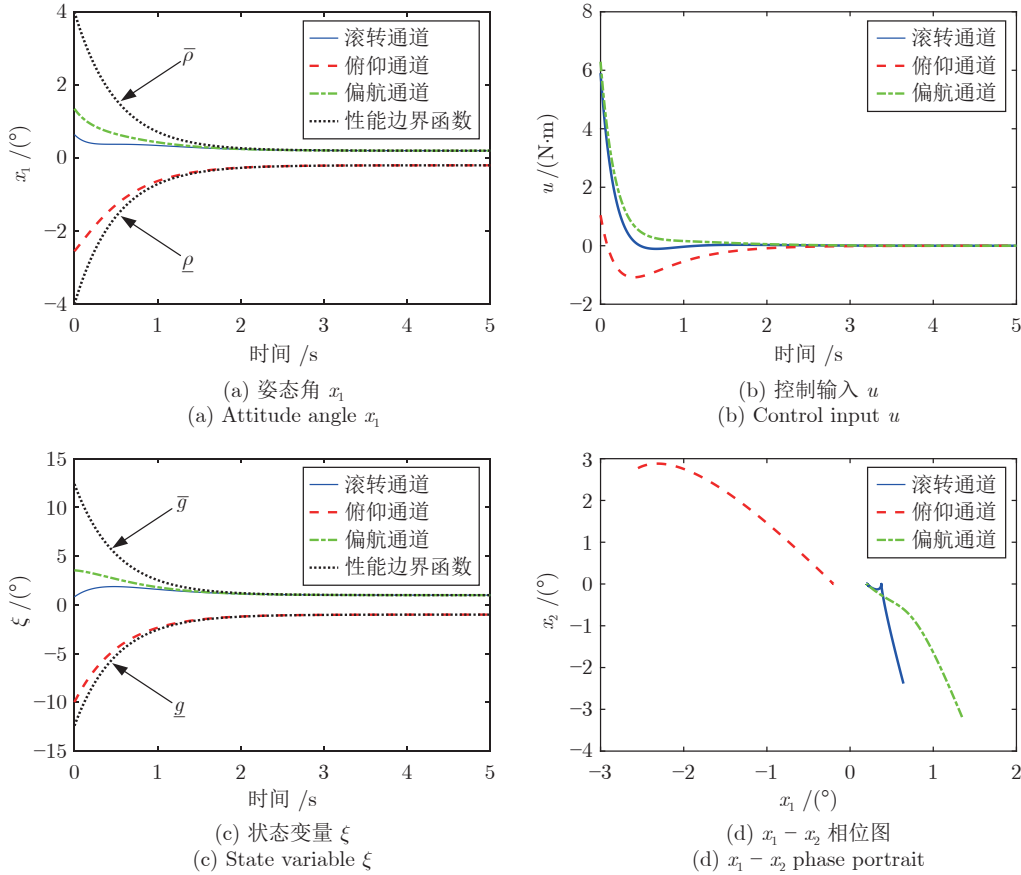


图 2 情况 1 下系统响应曲线

Fig.2 System response curves in case 1



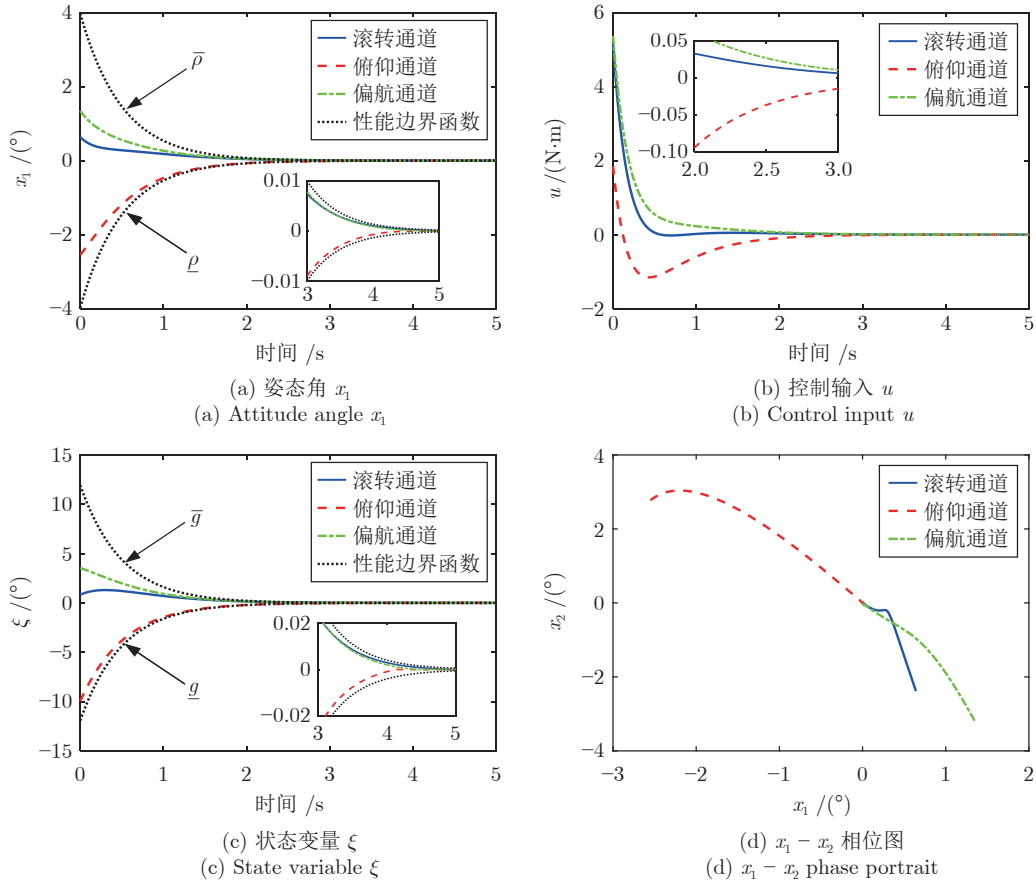


图 3 情况 2 下系统响应曲线

Fig.3 System response curves in case 2

$x_1(t)$ , 也就是俯仰偏航和滚转三个姿态角被成功地约束到规定的区域  $[\underline{\rho}(t), \bar{\rho}(t)]$ ; 而且, 注意  $K_{2,i} < 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 系统稳定性与所选取边界性能函数一致, 从而验证了所提出控制方案的有效性. 图 2(b) 和图 3(b) 中控制输入  $u(t)$  效果平滑. 同时, 从图 2(c) 和图 3(c) 中可以看出, 变量  $\xi(t)$  也在边界驱动下有界收敛或渐近收敛至零. 图 2(d) 和图 3(d) 给出系统相平面的变化, 其所展示出的系统稳定性也与上文中所描述的一致.

设置以下情况分析  $K_{2,i} > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的情形, 进而讨论验证定理 2 所阐述的参数对稳定性的影响.

**情况 3.** 性能函数  $\rho(t) = (4 - 0.2)e^{-2t} = \bar{\rho}(t) = -\underline{\rho}(t)$ ,  $K_1 = \text{diag}\{-5, -5, -5\}$ ,  $K_2 = \text{diag}\{2.5, 2.5, 2.5\}$ .

仿真结果如图 4 所示. 图 4(a) 显示出三个通道的姿态角均渐近收敛到零, 符合定理 2 中的结论. 通过图 4(b) 观察到, 控制信号  $u(t)$  产生抖动, 原因在于矩阵  $K_2$  此时是非 Hurwitz 的, 而在情况 1 中

则是符合 Hurwitz 条件的. 当矩阵  $K_2$  是非 Hurwitz 时, 系统 (46) 是发散的, 因此通过频繁的切换从而将系统驱动压缩到零. 这种现象与滑模控制有些类似, 从图 4(d) 上能更为清晰地看出. 在变量  $\xi(t)$  收敛至零后, 状态  $x(t)$  沿  $x_2(t) - K_1 x_1(t) = 0$  “滑动”至零.

除上述情况外, 为分析本文的性能驱动控制方法相对于现有传统控制方法的优势, 下面以滚转通道为例, 将本文方法与通道控制<sup>[15]</sup>以及传统预设性能控制<sup>[28]</sup>进行对比, 以进一步验证本文方法的有效性.

**情况 4.** 性能函数  $\rho(t) = (4 - 0.02)e^{-2t} + 0.02$ ,  $K_1 = \text{diag}\{-5, -5, -5\}$ ,  $K_2 = \text{diag}\{-2.5, -2.5, -2.5\}$  与预设性能控制方法以及通道控制方法进行对比. 首先, 给出预设性能控制方法的控制律设计:  $u_{PPC}(t) = B^{-1}(x, t)(K_{p2}(x_2 - x_{2c}) + \dot{x}_{2c} - F(x, t))$ , 其中  $x_{2c} = K_{p1}\varepsilon'(t) - (\underline{\rho}(t)\dot{\bar{\rho}}(t) - \dot{\underline{\rho}}(t)\bar{\rho}(t) - x_1(\dot{\bar{\rho}}(t) - \dot{\underline{\rho}}(t)))/(\bar{\rho}(t) - \underline{\rho}(t))$ ,  $\varepsilon'(t) = \ln(\vartheta(t)/(1 - \vartheta(t)))$ ,  $\vartheta(t) = (x_1 - \underline{\rho}(t))/(\bar{\rho}(t) - \underline{\rho}(t))$ ,  $K_{p1} = K_{p2} =$

$\text{diag}\{-0.8, -0.8, -0.8\}$ . 其次, 给出通道控制方法的控制律设计:  $u_{FC}(t) = -\alpha(\varphi(t)\|e(t)\|)e(t)$ , 其中  $\alpha(s) = 1/(1-s^2)$ ,  $\varphi(t) = 1/g(t)$ ,  $e(t) = \xi(t)$ . 除此之外, 为探究三种方法在突加扰动下的鲁棒性, 突出本文提出方法的优势, 将该情况滚转通道的干扰在

$t \in (3, 3.5)$  s 时设置为  $d_1(t) = 0.25 \cos(\omega_0 t) + 0.5$ .

由图 5 可知, 在突加扰动情况下, 由于预设性能控制和通道控制均采用误差与性能函数的比值, 因此导致其在触碰到性能函数边界时, 系统很快就会发散, 控制输入  $u_x$  也发散. 此时, 性能驱动

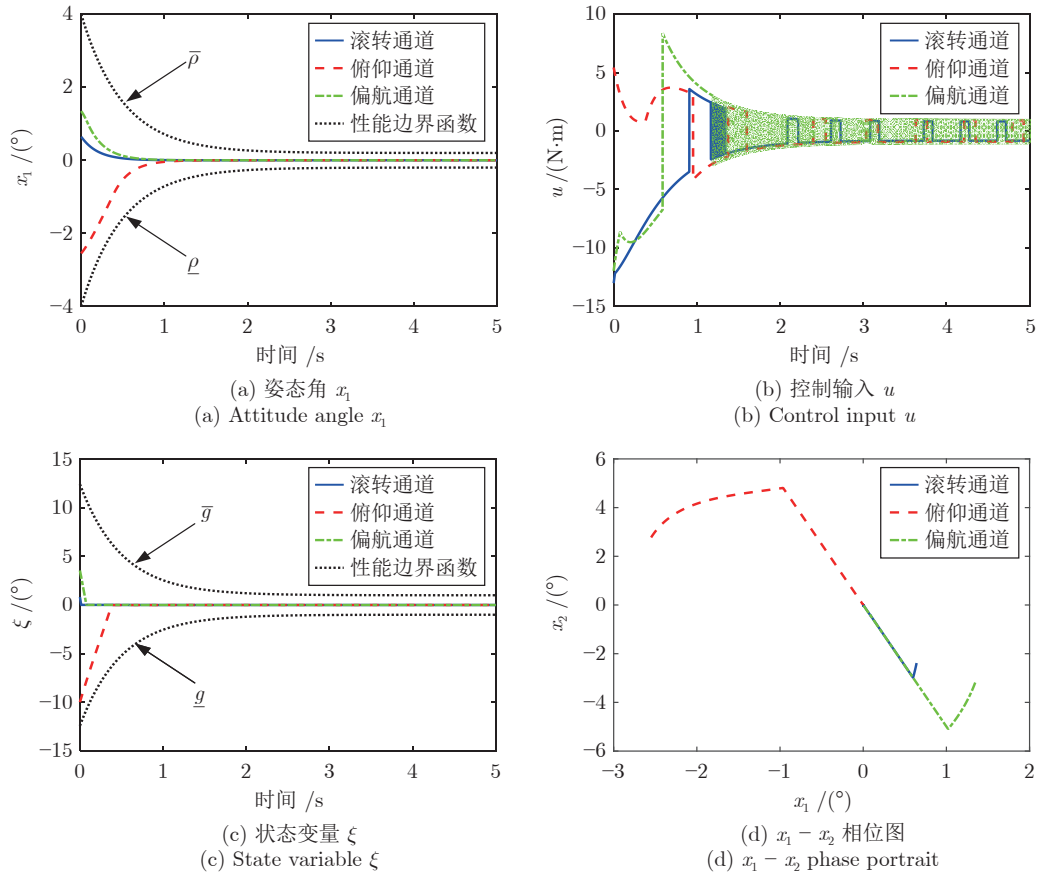


图 4 情况 3 下系统响应曲线

Fig.4 System response curves in case 3

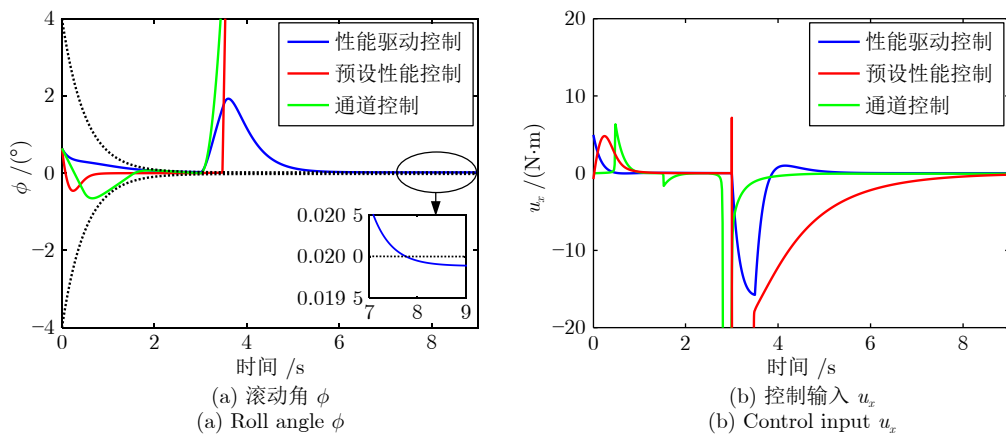


图 5 情况 4 下系统响应曲线

Fig.5 System response curves in case 4

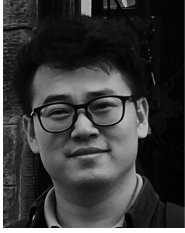
控制方法用系统状态与边界性能函数做差的优势便体现出来. 如图 5(a) 的子图所示, 由于  $K_{2,i} < 0$  时是 Hurwitz 的, 所以系统在扰动结束后会趋向于收敛, 当系统状态重新返回到边界性能函数之内后, 便又回到定理 1 和定理 2 所证明的情况中.

## 4 结束语

本文针对一类不确定非线性系统提出一种保证系统状态满足预设边界性能函数的新型性能驱动控制方法, 其优势在于通过设计控制器使得系统的稳定性取决于边界性能函数的选取, 而不改变控制设计. 同时, 卫星姿态系统的数值仿真例子验证了方法的有效性. 未来将尝试把提出方法扩展到控制矩阵非方阵的情况, 并进一步放宽不确定性的约束假设条件, 从而适用于更为一般性的不确定非线性系统.

## References

- Zhang Jin-Xi, Chai Tian-You, Wang Liang-Yong. Model-free prescribed performance control of time-delay nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(5): 937–946 (张晋熙, 柴天佑, 王良勇. 时延非线性系统无模型预设性能控制. 自动化学报, 2024, **50**(5): 937–946)
- Cao Cheng-Yu, Li Fan-Biao, Liao Yu-Xin, Yin Ze-Yang, Gui Wei-Hua. Modeling and fixed-time prescribed performance control for hypersonic morphing vehicle. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(3): 486–504 (曹承钰, 李繁飙, 廖宇新, 殷泽阳, 桂卫华. 高超声速变外形飞行器建模与固定时间预设性能控制. 自动化学报, 2024, **50**(3): 486–504)
- Gao Zhen-Yu, Sun Zhen-Chao, Guo Ge. Fixed-time global prescribed performance control for vehicular platoons with actuator nonlinearities. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(2): 320–333 (高振宇, 孙振超, 郭戈. 考虑执行器非线性固定时间全局预设性能车辆队列控制. 自动化学报, 2024, **50**(2): 320–333)
- Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(9): 2090–2099
- Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems. *Automatica*, 2009, **45**(2): 532–538
- Sun Z C, Gao Z Y, Guo G, Wen S X. Finite-time control of vehicular platoons with global prescribed performance and actuator nonlinearities. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 2024, **9**(1): 1768–1779
- Liang Z C, Wang Z N, Zhao J, Wong P K, Yang Z X, Ding Z T. Fixed-time prescribed performance path-following control for autonomous vehicle with complete unknown parameters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2023, **70**(8): 8426–8436
- Zhao K, Song Y D, Chen C L P, Chen L. Adaptive asymptotic tracking with global performance for nonlinear systems with unknown control directions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, **67**(3): 1566–1573
- Zhao K, Chen J W. Adaptive neural quantized control of MIMO nonlinear systems under actuation faults and time-varying output constraints. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, **31**(9): 3471–3481
- Bu X W, Jiang B X, Feng Y A. Hypersonic tracking control under actuator saturations via readjusting prescribed performance functions. *ISA Transactions*, 2023, **134**: 74–85
- Guo Z Y, Gu X Y, Han Y L, Guo J G, Berger T. Maneuvering tracking algorithm for reentry vehicles with guaranteed prescribed performance. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2024, **60**(3): 3012–3020
- Ren Y W, Geng Y H, Cao Q, Wu F. Finite-time prescribed performance control for approaching non-cooperative target's feature surface. *Nonlinear Dynamics*, 2024, **112**(11): 9179–9193
- Zhou X Y, Wang H P, Tian Y. Robust adaptive flexible prescribed performance tracking and vibration control for rigid-flexible coupled robotic systems with input quantization. *Nonlinear Dynamics*, 2024, **112**(3): 1951–1969
- Min X, Baldi S, Yu W W, Cao J D. Low-complexity control with funnel performance for uncertain nonlinear multiagent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, **69**(3): 1975–1982
- Berger T, Le H H, Reis T. Funnel control for nonlinear systems with known strict relative degree. *Automatica*, 2018, **87**: 345–357
- Berger T. Tracking with prescribed performance for linear non-minimum phase systems. *Automatica*, 2020, **115**: Article No. 108909
- Xiao W, Belta C. High order control barrier functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, **67**(7): 3655–3662
- Tee K P, Ge S S, Tay E H. Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems. *Automatica*, 2009, **45**(4): 918–927
- Duan Guang-Ren. High-order system approaches: I. Fully-actuated systems and parametric designs. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(7): 1333–1345 (段广仁. 高阶系统方法——I. 全驱系统与参数化设计. 自动化学报, 2020, **46**(7): 1333–1345)
- Narendra K S, Shorten R. Hurwitz stability of Metzler matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(6): 1484–1487
- Farina L, Rinaldi S. *Positive Linear Systems: Theory and Applications*. New York: Wiley & Sons, 2000.
- Filippov A F. *Differential Equations With Discontinuous Righthand Sides*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1988.
- Cortes J. Discontinuous dynamical systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 2008, **28**(3): 36–73
- Edwards C, Spurgeon S K. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. London: Crc Press, 1988.
- Yu S H, Yu X H, Shirinzadeh B J, Man Z H. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 2005, **41**(11): 1957–1964
- Polyakov A, Fridman L. Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2014, **351**(4): 1831–1865
- Jia Qing-Xian, Zhang Ying-Chun, Chen Xue-Qin, Li Hua-Yi. Observer design for fault reconstruction in satellite attitude control system. *Journal of Astronautics*, 2016, **37**(4): 442–450 (贾庆贤, 张迎春, 陈雪芹, 李化义. 卫星姿态控制系统故障重构观测器设计. 宇航学报, 2016, **37**(4): 442–450)
- Bu X W, He G J, Wei D Z. A new prescribed performance control approach for uncertain nonlinear dynamic systems via backstepping. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, **355**(17): 8510–8536



**郭宗易** 西北工业大学精确制导与控制研究所副研究员. 2017 年获得西北工业大学博士学位. 主要研究方向为鲁棒控制, 耦合控制和智能控制及其飞行器应用.

E-mail: [guozongyi@nwpu.edu.cn](mailto:guozongyi@nwpu.edu.cn)

(**GUO Zong-Yi** Associate research-

er at the Institute of Precision Guidance and Control, Northwestern Polytechnical University. He received his Ph.D. degree from Northwestern Polytechnical University in 2017. His research interest covers robust control, coupling control, and intelligent control with their applications to flight vehicles.)



**韩永麟** 西北工业大学精确制导与控制研究所硕士研究生. 2022 年获得长安大学学士学位. 主要研究方向为飞行器制导控制和预设性能控制.

E-mail: [hanyonglin@mail.nwpu.edu.cn](mailto:hanyonglin@mail.nwpu.edu.cn)

(**HAN Yong-Lin** Master student at

the Institute of Precision Guidance and Control, Northwestern Polytechnical University. He received his bachelor degree from Chang'an University in 2022. His research interest covers guidance and control for flight vehicles and prescribed performance control.)



**郭建国** 西北工业大学精确制导与控制研究所教授. 2005 年获得西北工业大学博士学位. 主要研究方向为飞行器制导控制技术. 本文通信作者.

E-mail: [guojianguo@nwpu.edu.cn](mailto:guojianguo@nwpu.edu.cn)

(**GUO Jian-Guo** Professor at the

Institute of Precision Guidance and Control, Northwestern Polytechnical University. He received his Ph.D. degree from Northwestern Polytechnical University in 2005. His research interest covers guidance and control techniques for flight vehicles. Corresponding author of this paper.)



**胡冠杰** 2024 年获得西北工业大学博士学位. 主要研究方向为飞行器制导控制技术.

E-mail: [huguanjie1996@mail.nwpu.edu.cn](mailto:huguanjie1996@mail.nwpu.edu.cn)

(**HU Guan-Jie** Received his Ph.D.

degree from Northwestern Polytechnical University in 2024. His research interest covers guidance and control techniques for flight vehicles.)