



切换拓扑下动态事件触发多智能体系统固定时间一致性

孙梦薇 任璐 刘剑 孙长银

Dynamic Event-triggered Fixed-time Consensus Control of Multi-agent Systems Under Switching Topologies

SUN Meng-Wei, REN Lu, LIU Jian, SUN Chang-Yin

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.16383/j.aas.c211123>

您可能感兴趣的其他文章

具有时延和切换拓扑的高阶离散时间多智能体系统鲁棒保性能一致性

Robust Guaranteed Cost Consensus for High-order Discrete-time Multi-agent Systems With Switching Topologies and Time Delays

自动化学报. 2019, 45(2): 360–373 <https://doi.org/10.16383/j.aas.2017.c160758>

基于事件触发的拓扑切换异构多智能体协同输出调节

Event-triggered Cooperative Output Regulation of Heterogeneous Multi-agent Systems with Switching Topology

自动化学报. 2017, 43(3): 472–477 <https://doi.org/10.16383/j.aas.2017.c160304>

组合连通拓扑下基于事件触发的多智能体快速一致性算法

Event-triggered Fast Consensus Algorithm for Multi-agent Systems Under Jointly-connected Topology

自动化学报. 2018, 44(12): 2269–2277 <https://doi.org/10.16383/j.aas.2018.c160839>

基于事件触发的三阶离散多智能体系统一致性分析

Event-triggered Consensus of Third-order Discrete-time Multi-agent Systems

自动化学报. 2019, 45(7): 1366–1372 <https://doi.org/10.16383/j.aas.2017.c170406>

非匹配扰动下的多智能体系统固定时间一致跟踪

Fixed-time Consensus Tracking of Multi-agent Systems Under Unmatched Disturbances

自动化学报. 2021, 47(6): 1368–1376 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c190339>

具有指定性能和全状态约束的多智能体系统事件触发控制

Event-Triggered Control for Multi-Agent Systems With Prescribed Performance and Full State Constraints

自动化学报. 2019, 45(8): 1527–1535 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c190252>

切换拓扑下动态事件触发多智能体系统固定时间一致性

孙梦薇¹ 任璐² 刘剑³ 孙长银³

摘要 针对有扰动的一阶非线性多智能体系统在切换拓扑下的实际固定时间平均一致性问题, 提出了基于动态事件触发机制的固定时间一致性协议. 该一致性协议在节约更多资源的情况下, 使多智能体系统以更快的速度达到一致. 相对于有限时间一致性控制算法, 固定时间一致性控制算法的收敛时间不依赖于初始状态, 并且可以通过选择合适的控制器参数设定相应的收敛时间上界. 通过设计一个包含双曲正切函数的测量误差, 证明系统不存在 Zeno 行为. 由于内部动态变量的引入, 大量不必要的触发被取消, 从而节省能量损耗. 最后, 通过仿真实验验证算法的可行性和有效性.

关键词 多智能体系统, 固定时间一致性, 动态事件触发控制, 切换拓扑

引用格式 孙梦薇, 任璐, 刘剑, 孙长银. 切换拓扑下动态事件触发多智能体系统固定时间一致性. 自动化学报, 2023, 49(6): 1295-1305

DOI 10.16383/j.aas.c211123

Dynamic Event-triggered Fixed-time Consensus Control of Multi-agent Systems Under Switching Topologies

SUN Meng-Wei¹ REN Lu² LIU Jian³ SUN Chang-Yin³

Abstract This paper proposes a dynamic event-triggered fixed-time consensus protocol to address the practical fixed-time average consensus problems of first-order nonlinear multi-agent systems with external disturbances under switching topologies. This consensus protocol enables the multi-agent systems to reach consensus faster with limited resources. Compared with the finite-time consensus algorithm, the convergence time of the fixed-time consensus algorithm is independent of the initial conditions; and the upper bound of the convergence time can be specified by choosing appropriate controller parameters. By designing a measurement error involving hyperbolic tangent, we can prove that there is no Zeno behavior. Because of the introduction of an internal dynamic variable, massive unnecessary triggering instants are avoided to reduce energy consumption. Finally, simulation examples are provided to illustrate the feasibility and effectiveness of the theoretical results.

Key words Multi-agent systems, fixed-time consensus, dynamic event-triggered control, switching topologies

Citation Sun Meng-Wei, Ren Lu, Liu Jian, Sun Chang-Yin. Dynamic event-triggered fixed-time consensus control of multi-agent systems under switching topologies. *Acta Automatica Sinica*, 2023, 49(6): 1295-1305

近年来, 多智能体系统协同控制问题吸引了大量的关注, 其在机器人编队^[1-2]、航天器姿态同步^[3-4]、智能电网^[5]等实际系统中都有广泛的应用. 一致性问题作为协同控制问题的基础, 得到了深度的探讨. 多智能体系统的一致性问题的主要任务是设计控制器,

通常称为一致性协议, 使系统中所有的智能体趋于一个相同的状态. 类似地, 平均一致性问题是通过设计一致性协议使所有智能体的状态趋于它们初始状态的平均值.

收敛速度是衡量一个控制器性能的重要标准, 过去针对多智能体系统一致性控制问题的研究多数是建立在渐近一致的基础上的^[6-11], 即收敛时间是无穷大的. 文献 [10] 研究高阶非线性多智能体系统的一致性追踪问题, 设计了一个鲁棒的最小复杂度控制率. 文献 [11] 针对高阶严格反馈形式的异构多智能体系统, 提出了一个新的分布式输出反馈控制算法, 在减少通讯负担和简化算法的情况下, 使系统在预设的稳态和瞬态性能下实现一致. 在实际应用中, 无限的收敛时间往往不能满足要求. 因此, 研究者们提出了有限时间一致性^[12-15]. 在文献 [12] 中, 作者首次研究了一阶多智能体系统的有限时间一致性问题.

收稿日期 2021-11-27 录用日期 2022-03-01

Manuscript received November 27, 2021; accepted March 1, 2022

国家自然科学基金 (61921004, 62103099, 62003044), 江苏省前沿引领技术基础研究专项 (BK20202006) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61921004, 62103099, 62003044) and Natural Science Foundation of Jiangsu Province of China (BK20202006)

本文责任编辑 李鸿一

Recommended by Associate Editor LI Hong-Yi

1. 安徽大学物质科学与信息技术研究院 合肥 230601 2. 安徽大学人工智能学院 合肥 230601 3. 东南大学自动化学院 南京 210018

1. Institutes of Physical Science and Information Technology, Anhui University, Hefei 230601 2. School of Artificial Intelligence, Anhui University, Hefei 230601 3. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210018

文献 [13] 通过使用符号函数和分数阶函数对一阶积分器系统设计了一个分布式的有限时间控制器. 文献 [14] 通过非奇异终端滑模控制, 针对扰动有界的二阶多智能体系统设计了能在有限时间内收敛的一致性跟踪算法. 文献 [15] 针对时变的通讯拓扑, 设计了分布式一致性协议.

尽管如此, 上述有限时间一致性算法对收敛时间上界的估计依赖初始条件, 多智能体间的初始状态相差越大, 收敛时间越长. 并且, 对于实际系统, 往往不能在运行前获得它的初始状态. 因此, 研究者们又提出了固定时间一致性^[16-21]. 固定时间一致性的收敛时间不依赖于初始状态, 在实际的应用中有更加现实的意义. 文献 [16-17] 设计了针对固定拓扑下的一阶多智能体系统的分布式一致性协议. 文献 [18] 解决了一阶非线性多智能体系统的固定时间一致性追踪问题. 文献 [19] 针对切换拓扑下的固定时间平均一致性问题展开了研究. 切换拓扑是指多智能体系统的通讯网络是变化的. 在实际应用中, 由于智能体位置的变化、传感器传输距离限制、信号干扰和人为设定等原因, 智能体间的通讯时断时连. 例如, 在几个搭载着最大传输距离为 5 m 的传感器的智能小车系统中, 最远的两辆小车距离 6 m, 无法通讯, 但随着一致性协议的采用, 这两辆小车间的距离缩短到 5 m, 通讯连接建立. 文献 [20] 通过设计固定时间扰动观测器和引入正弦补偿函数, 解决了含非匹配扰动的二阶多智能体系统的固定时间一致性追踪问题. 文献 [21] 通过设计固定时间分布式观测器完成高阶积分器多智能体系统的固定时间一致性追踪.

然而, 上述的控制算法需要控制器连续更新, 这是建立在有足够的计算资源的假设上的, 往往是不实际的, 特别是当智能体的数量庞大时. 为了解决这一问题, 事件触发机制引起了研究者的关注. 其原因是它可以在节省大量不必要的通讯和计算资源的同时保证多智能体系统实现一致^[22]. 与传统的时间触发机制^[23-24]相比, 事件触发机制下的触发取决于一个与系统测量量有关的触发条件, 而不是固定的采样时间. 只有当触发条件满足时, 才对当前的系统状态进行采样并更新控制器, 其他时刻的控制量与它最近一次的触发时刻相同. 文献 [25] 首先针对一阶系统设计了一个集中式的事件触发一致性协议使多智能体系统可以渐近获得平均一致性, 接着将它扩展到了分布式的控制. 文献 [26] 对一般线性系统设计一个分布式的事件触发渐近一致性控制协议. 文献 [27] 将事件触发机制运用到了有限时间稳定上. 文献 [28-37] 基于事件触发机制实现固定时间一致性. 在文献 [28] 中, 作者设计的控制器和

事件触发机制可以使一阶多智能体系统实现固定时间一致, 同时设计了一个可以避免连续通讯的触发函数. 文献 [29] 通过事件触发机制实现了符号图下一阶多智能体系统的固定时间二分一致性. 文献 [30] 则对二阶多智能体系统, 实现避免连续通讯的事件触发机制下的固定时间一致性. 文献 [31] 采用了反步法, 对多个子群组成的二阶多智能体系统设计固定时间事件触发一致性策略, 通过设置比例参数, 获得比例一致. 文献 [32] 针对有扰动的输入时延系统, 提出了一个固定时间事件触发一致性协议. 文献 [33] 针对带有输入时延的二阶多智能体系统, 通过反步法, 设计了一个令真实速度在固定时间内追踪到虚拟速度的控制器, 从而保证其在事件触发机制下实现实际固定时间一致. 文献 [34-35] 研究有领导者的情况下的事件触发固定时间一致性控制. 文献 [36] 解决了带有输入时延的线性多智能体系统的固定时间一致性问题. 针对更为宽松的拓扑条件, 文献 [37] 通过设计一个新的李雅普诺夫函数 (Lyapunov function), 证明了其提出的控制器和触发机制使切换拓扑下的多智能体系统实现固定时间平均一致.

最近, 又有研究者提出了动态事件触发机制^[38]. 不同于静态事件触发, 动态事件触发机制不仅取决于系统的状态, 还依赖于一个额外的内部动态变量 (Internal dynamic variable). 这个动态变量是时变的且导数具有可调的参数, 所以触发机制会随时间动态地改变, 从而减少触发次数. 文献 [39] 将动态事件触发机制拓展到了多智能体系统, 证明其可以使多智能体系统以指数形式实现平均一致性. 但是由于只能获得渐近一致, 收敛速度慢, 难以满足实际系统的需求. 因此, 文献 [40] 在固定时间一致性控制中加入了动态事件触发机制. 上述文献 [28-37] 中设计的基于事件触发机制的固定时间一致性控制均没有引入动态参数, 因此会引起多余的触发, 造成不必要的能源损耗. 在实际系统中, 由于智能体间的通讯常常会因自身或环境的因素发生改变, 切换拓扑更符合实际. 文献 [28-36, 39-40] 均没有考虑切换拓扑的情况, 通讯条件不具一般性.

针对这些问题, 本文为切换拓扑下含有界扰动的一阶非线性多智能体系统, 设计基于动态事件触发机制的固定时间平均一致性协议. 本文的创新点主要包含以下几点. 1) 本文提出了新的动态事件触发机制, 相比于静态的事件触发^[28-37], 它通过引入一个额外的动态变量来随时间调整触发机制, 减少事件触发的次数和能源的损耗. 2) 不同于针对固定拓扑的一致性问题分析^[28-36, 39-40], 本文解决了更具一般性的切换拓扑下的固定时间一致性问题. 由于李雅普诺夫函数不再与拉普拉斯矩阵有关, 通过李雅

普诺夫稳定性理论和代数图论, 首先证明多智能体系统在固定拓扑下可以实现实际固定时间平均一致, 再将结果扩展到切换拓扑下. 3) 在测量误差中用双曲正切函数取代符号函数, 利用其可导性证明不存在 Zeno 行为. 就作者所知, 目前研究切换拓扑下基于动态事件触发的非线性多智能体系统固定时间一致性的结果是极少的. 最后, 通过仿真实例验证所提供的控制器和触发机制在收敛时间和节约资源方面的优越性.

1 预备知识

1.1 代数图论

设无向图 $\mathcal{G}(A) = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ 为 m 个智能体之间的通讯拓扑, 其中 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 是图 \mathcal{G} 的节点集合, 每个节点 v_i 代表一个智能体, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 是边集, 其中边 $e_{ij} = (v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ 存在表示智能体 v_i 和 v_j 间可以互相通讯. 节点的索引 $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$, 集合 I 是一个有限的正整数集. 邻接矩阵 (Adjacency matrix) $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times m}$, 其元素定义为

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } (v_i, v_j) \in \mathcal{E}, i \neq j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

对于无向图, 邻接矩阵 A 是对称的. 在多智能体系统网络中, 用 $N_i = \{v_j \in \mathcal{V} | (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}$ 表示智能体 v_i 的邻居节点集合. 图 $\mathcal{G}(A)$ 的度矩阵 (Degree matrix) $\Delta = \text{diag}\{d_{ij}\} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 是一个由邻接矩阵 A 确定的对角矩阵, 其元素定义为

$$d_{ij} = \begin{cases} \sum_{l=1}^m a_{il}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

拉普拉斯矩阵 $L = \Delta - A$. 节点 v_i 和 v_j 间一个长度为 k 的路径是一条含不同节点 $v_{i_0} = v_i, \dots, v_{i_k} = v_j \in \mathcal{V}$ 的子图, 且边 $(v_{i_l}, v_{i_{l+1}}) \in \mathcal{E}, l = 0, \dots, k - 1$. 在无向图中, 如果任意两个节点间存在至少一条路径, 则称此无向图是连通的 (Connected).

1.2 相关引理

引理 1^[32]. 考虑如下动态系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

其中, $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in \mathbf{R}^m$, $f(x(t), t) : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^m$ 是非线性函数, 且 $f(0, t) = 0$. 设存在一个函数 $V(x) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, $V(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}^m$ 且 $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, 满足

$$\dot{V}(x(t)) \leq -aV^p(x(t)) - bV^q(x(t)) + \tau \quad (1)$$

其中, $a, b, \tau > 0, p \in (0, 1), q \in (1, +\infty)$, 则系统的原点是实际固定时间稳定的 (Practical fixed-time stable), 并且设定时间 T 满足

$$T \leq T_{\max} = \frac{1}{a\kappa(1-p)} + \frac{1}{b\kappa(q-1)} \quad (2)$$

其中, $0 < \kappa < 1$. 系统的剩余误差的集合 (Residual set) 为

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow T} x(t) | V(x(t)) \leq \min \left\{ a^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{\tau}{1-\kappa} \right)^{\frac{1}{p}}, b^{-\frac{1}{q}} \left(\frac{\tau}{1-\kappa} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \right\} \quad (3)$$

注 1. 式 (1) 中 τ 值越小, 收敛效果越好, 这在剩余误差集合 (式 (3)) 中体现. 设定时间的上界 T_{\max} 与剩余误差集合通过 κ 关联. τ 不变时, κ 越大, 剩余误差集合越大, 设定时间的上界 T_{\max} 越小.

引理 2^[30]. 一个连通的无向图 $\mathcal{G}(A)$ 的拉普拉斯矩阵 $L(A) \in \mathbf{R}^{m \times m}$, 记为 L , 是半正定的, 它的特征值从小到大为 $0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$. $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbf{R}^m$ 是与特征值 0 对应的特征向量, 如果 $\mathbf{1}^T x = 0, x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$, 则 $\lambda_2 x^T x \leq x^T L x \leq \lambda_m x^T x$, 其中, $x^T L x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} (x_i - x_j)^2$.

引理 3^[14]. 对于实数 $y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathbf{R}, 0 < p \leq 1, 1 < q < \infty$, 有

$$\begin{aligned} m^{1-p} \left(\sum_{i=1}^m |y_i| \right)^p &\geq \sum_{i=1}^m |y_i|^p \geq \left(\sum_{i=1}^m |y_i| \right)^p \\ m^{1-q} \left(\sum_{i=1}^m |y_i| \right)^q &\leq \sum_{i=1}^m |y_i|^q \leq \left(\sum_{i=1}^m |y_i| \right)^q \end{aligned}$$

引理 4^[36]. 对于任意实数 $y \in \mathbf{R}$, 有

$$0 \leq |y| - y \tanh(\beta y) \leq \frac{\iota}{\beta}$$

其中, $\beta \gg 1, \iota = 0.2785$.

1.3 问题描述

考虑如下—阶非线性多智能体系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = u_i(t) + f(x_i(t), t) + d_i(x_i(t), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4)$$

其中, $x_i \in \mathbf{R}^n, i = 1, 2, \dots, m$, 是智能体 i 的状态, $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $u_i(t) \in \mathbf{R}^n$ 是控制输入, $d_i(x_i(t), t) \in \mathbf{R}^n$ 是智能体 i 受到的未知的干扰, $f(x_i(t), t) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是非线性函数. 为了更清晰和简便地展示内容, 不失一般性, 我们取 $n = 1$, 对于多维 ($n \geq 2$) 的智能体系统, 可以通过采用克罗

内积积 (Kronecker product) 扩展到相应的情况.

同时, 多智能体系统 (4) 满足下列两个假设.

假设 1. 存在已知常数 $\rho_1 \geq 0, \rho_2 > 0$, 满足

$$|f(x_i(t), t) - f(x_j(t), t)| \leq \rho_1 + \rho_2|x_i(t) - x_j(t)|$$

假设 2. 智能体 i 受到的干扰有界, 满足

$$|d_i(x_i(t), t)| \leq D, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

其中, $D > 0$ 是一个已知常数.

定义 1. 如果多智能体系统 (4) 存在一个设定时间 $T(x_0)$ 和一个足够小的常数 $\delta > 0$, 使得对于 $\forall i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$, $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} |x_i(t) - \bar{x}(t)| \leq \delta$ 满足, 其中 $\bar{x}(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k(t)$, 且 $|x_i(t) - \bar{x}(t)| \leq \delta, \forall t \geq T(x_0)$, 则可以实现实际有限时间平均一致性 (Practical finite-time average consensus). 如果存在 $T_{\max} > 0$ 满足 $T(x_0) \leq T_{\max}, \forall x_0 \in \mathbf{R}^m$, 则可以实现实际固定时间平均一致性 (Practical fixed-time average consensus).

2 基于动态事件触发机制的实际固定时间平均一致性

对于多智能体系统 (4), 定义智能体 i 的误差为

$$\xi_i(t) = x_i(t) - \bar{x}(t), \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (5)$$

对智能体 i 设计的固定时间一致性控制器为

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -c_1 \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_i(t_k^i) - x_j(t_k^i))^\mu - \\ & c_2 \sum_{j=1}^m a_{ij} \tanh(\beta(x_i(t_k^i) - x_j(t_k^i))) - \\ & c_3 \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_i(t_k^i) - x_j(t_k^i)), \quad t \in [t_k^i, t_{k+1}^i) \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $c_1, c_2, c_3 > 0, \mu > 1$ 是两个正的奇数的比值. t_k^i 是智能体 i 最新触发时刻. 在下个触发时刻 t_{k+1}^i 前, 智能体 i 的控制输入不变. 因为 u_i 是奇函数, 所以 $\sum_{i=1}^m u_i(t) = 0$. 定义智能体 i 测量误差

$$\begin{aligned} e_i(t) = & c_1 \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_i(t_k^i) - x_j(t_k^i))^\mu + \\ & c_2 \sum_{j=1}^m a_{ij} \tanh(\beta(x_i(t_k^i) - x_j(t_k^i))) + \\ & c_3 \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_i(t_k^i) - x_j(t_k^i)) - \\ & c_1 \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_i(t) - x_j(t))^\mu - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_2 \sum_{j=1}^m a_{ij} \tanh(\beta(x_i(t) - x_j(t))) - \\ & c_3 \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)) \end{aligned} \quad (7)$$

这样, 控制器 $u_i(t)$ 可以改写为 $u_i(t) = -e_i(t) - c_1 \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_i(t) - x_j(t))^\mu - c_2 \sum_{j=1}^m a_{ij} \tanh(\beta(x_i(t) - x_j(t))) - c_3 \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_i(t) - x_j(t))$. 然后设计智能体 i 的触发函数

$$\begin{aligned} g_i(t) = & \theta(|e_i(t)| - \epsilon c_1 \sum_{j=1}^m a_{ij}|x_i(t) - x_j(t)|^\mu - \\ & \epsilon c_2 m - \epsilon c_3 \sum_{j=1}^m a_{ij}|x_i(t) - x_j(t)|) \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $\theta > 0, 0 < \epsilon < 1$ 是设计参数.

设计内部动态变量 $\chi_i(t)$, 令它关于时间的导数满足下列微分方程

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_i(t) = & \delta|\xi_i(t)|(\epsilon c_1 \sum_{j=1}^m a_{ij}|\xi_i(t) - \xi_j(t)|^\mu + \epsilon c_2 m + \\ & \epsilon c_3 \sum_{j=1}^m a_{ij}|\xi_i(t) - \xi_j(t)| - |e_i(t)|) - \\ & c_4 \chi_i^{\frac{\mu+1}{2}}(t) - c_5 \chi_i^{\frac{1}{2}}(t) - c_6 \chi_i^2(t) \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\delta \in (0, 1), c_4, c_5, c_6 > 0, \chi_i(0) > 0$ 是设计参数. 在动态事件触发中, 当触发函数的值达到动态变量的值而不是一个固定的常数时, 事件触发, 即

$$t_{k+1}^i = \inf\{t|g_i(t) \geq \chi_i(t), t > t_k^i\}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10)$$

触发函数可以保证 $g_i(t) \leq \chi_i(t)$, 意味着 $|e_i(t)| \leq \frac{\chi_i(t)}{\theta} + \epsilon c_1 \sum_{j=1}^m a_{ij}|x_i(t) - x_j(t)|^\mu + \epsilon c_2 m + \epsilon c_3 \sum_{j=1}^m a_{ij}|x_i(t) - x_j(t)|$ 始终满足. 此外, 我们可以证明对于任意的 $t \geq 0$, 有 $\chi_i(t) > 0$. 由式 (9) 和式 (10), 可知 $\dot{\chi}_i(t) \geq -c_4 \chi_i^{\frac{\mu+1}{2}}(t) - c_5 \chi_i^{\frac{1}{2}}(t) - c_6 \chi_i^2(t) - \frac{\delta}{\theta} |\xi_i(t)| \chi_i(t)$. 因此, $\chi_i(t) \geq e^{\int_0^t v_i(s) ds} \chi_i(0) > 0$, 对于任意 $t \geq 0$, 其中 $v_i(t) = -c_4 \chi_i^{\frac{\mu-1}{2}}(t) - c_5 \chi_i^{-\frac{1}{2}}(t) - c_6 \chi_i(t) - \frac{\delta}{\theta} |\xi_i(t)|$.

2.1 固定拓扑下的控制策略

首先考虑固定拓扑下的多智能体系统, 切换拓扑下的结果可以由此延伸而来.

定理 1. 当下列条件满足时,

$$2\sqrt{\rho_2 c_6} = \frac{1 - \delta}{\theta} \quad (11)$$

$$c_3[\lambda_2(L) - \epsilon m^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\lambda_m(L_2)}] \geq 2\rho_2 \quad (12)$$

$$c_2 \sqrt{\lambda_2(L_2)} \geq \sqrt{2m}(\rho_1 + D + \epsilon c_2 m) \quad (13)$$

$$m^{1-\mu} \lambda_2^{\frac{\mu+1}{2}}(L_{\frac{2}{\mu+1}}) \geq \sqrt{2\epsilon} m^{\frac{3}{2}} \lambda_m^{\frac{\mu}{2}}(L_{\frac{2}{\mu}}) \quad (14)$$

利用控制器 (6) 和触发条件 (10), 多智能体系统 (4) 在固定拓扑下可以实现实际固定时间平均一致性.

证明. 考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \xi_i^2(t) + \sum_{i=1}^m \chi_i(t) \quad (15)$$

令 $V_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \xi_i^2(t)$, $V_2(t) = \sum_{i=1}^m \chi_i(t)$, 则 $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$. 对其求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^m \xi_i \dot{\xi}_i + \sum_{i=1}^m \dot{\chi}_i(t) \leq \\ &\sum_{i=1}^m \xi_i(t)(f(x_i(t), t) - f(\bar{x}(t), t) + f(\bar{x}(t), t) - \\ &\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(x_j(t), t) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m d_j(x_j(t), t)) + \\ &\sum_{i=1}^m \xi_i(t)(-e_i(t) - c_1 \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_i(t) - x_j(t))^\mu - \\ &c_2 \sum_{j=1}^m a_{ij} \tanh(\beta(x_i(t) - x_j(t))) - \\ &c_3 \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)) + d_i(x_i(t), t)) + \sum_{i=1}^m \dot{\chi}_i(t) \end{aligned}$$

由 $\sum_{i=1}^m \xi_i(t) = \sum_{i=1}^m (x_i(t) - \bar{x}(t)) = \sum_{i=1}^m x_i(t) - m\bar{x}(t) = 0$, 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m \xi_i(t)(f(\bar{x}(t), t) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(x_j(t), t) - \\ &\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m d_j(x_j(t), t)) = 0 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^m \xi_i(t)(f(x_i(t), t) - f(\bar{x}(t), t)) - \\ &\frac{1}{2} c_1 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} (\xi_i(t) - \xi_j(t)) (\xi_i(t) - \xi_j(t))^\mu - \\ &\frac{1}{2} c_2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} (\xi_i(t) - \xi_j(t)) \times \\ &\tanh(\beta(\xi_i(t) - \xi_j(t))) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} c_3 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} (\xi_i(t) - \xi_j(t)) (\xi_i(t) - \xi_j(t)) + \\ &\sum_{i=1}^m |\xi_i(t)| |e_i(t)| + D \sum_{i=1}^m |\xi_i(t)| - \\ &c_4 \sum_{i=1}^m \chi_i^{\frac{\mu+1}{2}}(t) - c_5 \sum_{i=1}^m \chi_i^{\frac{1}{2}}(t) - c_6 \sum_{i=1}^m \chi_i^2(t) + \\ &\sum_{i=1}^m \delta |\xi_i(t)| (\epsilon c_1 \sum_{j=1}^m a_{ij} |\xi_i(t) - \xi_j(t)|^\mu + \\ &\epsilon c_2 m + \epsilon c_3 \sum_{j=1}^m a_{ij} |\xi_i(t) - \xi_j(t)| - |e_i(t)|) \end{aligned}$$

由假设 1 可知, $|f(x_i(t), t) - f(\bar{x}(t), t)| \leq \rho_1 + \rho_2 |x_i(t) - \bar{x}(t)| = \rho_1 + \rho_2 |\xi_i(t)|$, 因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq (\rho_1 + D + \epsilon c_2 m) \sum_{i=1}^m |\xi_i(t)| + \rho_2 \sum_{i=1}^m |\xi_i(t)|^2 - \\ &\frac{1}{2} c_1 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} (\xi_i(t) - \xi_j(t))^{\mu+1} - \\ &\frac{1}{2} c_2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} |\xi_i(t) - \xi_j(t)| + \frac{c_2 t m^2}{2\beta} - \\ &\frac{1}{2} c_3 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} (\xi_i(t) - \xi_j(t))^2 - c_4 \sum_{i=1}^m \chi_i^{\frac{\mu+1}{2}}(t) - \\ &c_5 \sum_{i=1}^m \chi_i^{\frac{1}{2}}(t) - c_6 \sum_{i=1}^m \chi_i^2(t) + \frac{1-\delta}{\theta} \sum_{i=1}^m |\xi_i(t)| \chi_i(t) + \\ &\epsilon c_1 \sum_{i=1}^m |\xi_i(t)| \sum_{j=1}^m a_{ij} |\xi_i(t) - \xi_j(t)|^\mu + \\ &\epsilon c_3 \sum_{i=1}^m |\xi_i(t)| \sum_{j=1}^m a_{ij} |\xi_i(t) - \xi_j(t)| \leq \\ &(\rho_1 + D + \epsilon c_2 m) m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^m |\xi_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\rho_2 \sum_{i=1}^m |\xi_i(t)|^2 - \\ &\frac{1}{2} c_1 m^{1-\mu} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^{\frac{2}{\mu+1}} (\xi_i(t) - \xi_j(t))^2 \right)^{\frac{\mu+1}{2}} - \\ &\frac{1}{2} c_2 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 |\xi_i(t) - \xi_j(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{c_2 t m^2}{2\beta} - \\ &\frac{1}{2} c_3 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} (\xi_i(t) - \xi_j(t))^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & c_4 m^{\frac{1-\mu}{2}} \left(\sum_{i=1}^m \chi_i(t) \right)^{\frac{\mu+1}{2}} - c_5 \left(\sum_{i=1}^m \chi_i(t) \right)^{\frac{1}{2}} - \\
 & c_6 \sum_{i=1}^m \chi_i^2(t) + \frac{1-\delta}{\theta} \sum_{i=1}^m |\xi_i(t)| \chi_i(t) + \\
 & \epsilon c_1 m^{\frac{3}{2}} \left(\sum_{i=1}^m |\xi_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
 & \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^{\frac{2}{\mu}} |\xi_i(t) - \xi_j(t)|^2 \right)^{\frac{\mu}{2}} + \\
 & \epsilon c_3 m^{\frac{3}{2}} \left(\sum_{i=1}^m |\xi_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
 & \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 |\xi_i(t) - \xi_j(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

由于 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi_i(t) - \xi_j(t))^2 = 2\xi^T(t)L\xi(t)$, 其中, $\xi(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t)]^T$. 通过引理 2, 可知

$$\begin{aligned}
 4\lambda_2(L)V_1(t) & \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi_i(t) - \xi_j(t))^2 \leq \\
 4\lambda_m(L)V_1(t) & \quad (16)
 \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned}
 4\lambda_2(L_r)V_1(t) & \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^r(\xi_i(t) - \xi_j(t))^2 \leq \\
 4\lambda_m(L_r)V_1(t) & \quad (17)
 \end{aligned}$$

其中, $r \in \mathbf{R}$, L_r 是图 $\mathcal{G}(A_r)$ 的拉普拉斯矩阵, $A_r = [a_{ij}^r]$, 即 A_r 的元素是 A 中对应元素的 r 次方. 下面的证明将用到 $r = 1, 2, \frac{2}{\mu+1}, \frac{2}{\mu}$ 的情况. 又由条件 (11), 知 $\rho_2|\xi_i(t)|^2 + c_6\chi_i^2(t) - \frac{1-\delta}{\theta}|\xi_i(t)|\chi_i(t) = (\sqrt{\rho_2}|\xi_i(t)| - \sqrt{c_6}\chi_i(t))^2 \geq 0$, 则

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) & \leq (\rho_1 + D + \epsilon c_2 m)m^{\frac{1}{2}}(2V_1(t))^{\frac{1}{2}} + 4\rho_2 V_1(t) - \\
 & \frac{1}{2}c_1 m^{1-\mu}(4\lambda_2(L_{\frac{2}{\mu+1}})V_1(t))^{\frac{\mu+1}{2}} - \\
 & \frac{1}{2}c_2(4\lambda_2(L_2)V_1(t))^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}c_3(4\lambda_2(L)V_1(t)) - \\
 & c_4 m^{\frac{1-\mu}{2}}(V_2(t))^{\frac{\mu+1}{2}} - c_5(V_2(t))^{\frac{1}{2}} + \\
 & \epsilon c_1 m^{\frac{3}{2}}(2V_1(t))^{\frac{1}{2}}(4\lambda_m(L_{\frac{2}{\mu}})V_1(t))^{\frac{\mu}{2}} + \\
 & \epsilon c_3 m^{\frac{3}{2}}(2V_1(t))^{\frac{1}{2}}(4\lambda_m(L_2)V_1(t))^{\frac{1}{2}} + \frac{c_2 \mu m^2}{2\beta} \leq \\
 & - [c_2 \lambda_2^{\frac{1}{2}}(L_2) - \sqrt{2m}(\rho_1 + D + \epsilon c_2 m)]V_1^{\frac{1}{2}}(t) - \\
 & [2c_3 \lambda_2(L) - 4\rho_2 - 2\sqrt{2}\epsilon c_3 m^{\frac{3}{2}} \lambda_m^{\frac{1}{2}}(L_2)]V_1(t) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [2^\mu c_1 m^{1-\mu} \lambda_2^{\frac{\mu+1}{2}}(L_{\frac{2}{\mu+1}}) - \\
 & 2^{\mu+\frac{1}{2}} \epsilon c_1 m^{\frac{3}{2}} \lambda_m^{\frac{\mu}{2}}(L_{\frac{2}{\mu}})]V_1^{\frac{\mu+1}{2}}(t) - \\
 & c_4 m^{\frac{1-\mu}{2}} V_2^{\frac{\mu+1}{2}}(t) - c_5 V_2^{\frac{1}{2}}(t) + \frac{c_2 \mu m^2}{2\beta} \leq \\
 & - \alpha_1 (V_1^{\frac{1}{2}}(t) + V_2^{\frac{1}{2}}(t)) - \\
 & \alpha_2 (V_1^{\frac{\mu+1}{2}}(t) + V_2^{\frac{\mu+1}{2}}(t)) + \frac{c_2 \mu m^2}{2\beta} \leq \\
 & - \alpha_1 V^{\frac{1}{2}}(t) - \alpha_2 2^{\frac{1-\mu}{2}} V^{\frac{\mu+1}{2}}(t) + \frac{c_2 \mu m^2}{2\beta}
 \end{aligned}$$

其中, $\alpha_1 = \min\{c_2 \lambda_2^{\frac{1}{2}}(L_2) - \sqrt{2m}(\rho_1 + D + \epsilon c_2 m), c_5\}$, $\alpha_2 = \min\{2^\mu c_1 m^{1-\mu} \lambda_2^{\frac{\mu+1}{2}}(L_{\frac{2}{\mu+1}}) - 2^{\mu+\frac{1}{2}} \epsilon c_1 m^{\frac{3}{2}} \lambda_m^{\frac{\mu}{2}}(L_{\frac{2}{\mu}}), c_4 m^{\frac{1-\mu}{2}}\}$.

由此可得, 多智能体系统可以实现实际固定时间平均一致性, 剩余误差的集合为

$$\begin{aligned}
 \left\{ \lim_{t \rightarrow T} x(t) | V \leq \min \left\{ \left(\frac{c_2 \mu m^2}{2\alpha_1 \beta (1 - \kappa)} \right)^2, \right. \right. \\
 \left. \left. 2^{\frac{\mu-1}{\mu+1}} \left(\frac{c_2 \mu m^2}{2\alpha_2 \beta (1 - \kappa)} \right)^{\frac{2}{\mu+1}} \right\} \right\} \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中, $\kappa \in (0, 1)$, 其设定时间为

$$T(x_0) \leq T_{\max} = \frac{2}{\alpha_1 \kappa} + \frac{2m^{\frac{\mu-1}{2}}}{\alpha_2 \kappa (\mu - 1)} \quad (19)$$

在固定时间内, $V(t)$ 收敛到任意小的区域内. 由于 $\beta \gg 1$ 可以任选, $V(t)$ 收敛的区域可以任意小. \square

定理 2. 多智能体系统 (4) 在触发条件 (10) 下, 不存在 Zeno 行为.

证明. 在测量误差 (7) 下, 有

$$\begin{aligned}
 D^+ |e_i(t)| & \leq |\dot{e}_i(t)| = \\
 & \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} (c_1 \mu (x_i(t) - x_j(t))^{\mu-1} + \right. \\
 & c_2 \beta (1 - \tanh^2(\beta(x_i(t) - x_j(t)))) + c_3) \times \\
 & (u_i(t) - u_j(t) + f(x_i(t), t) - f(x_j(t), t) + \\
 & d_i(x_i(t), t) - d_j(x_j(t), t)) \left| \leq \right. \\
 & \sum_{j=1}^m a_{ij} (c_1 \mu |\xi_i(t) - \xi_j(t)|^{\mu-1} + c_2 \beta + c_3) \times \\
 & (|u_i(t) - u_j(t)| + \rho_1 + \rho_2 |x_i(t) - x_j(t)| + 2D) \leq \\
 & \rho_2 c_1 \mu \sum_{j=1}^m a_{ij} |\xi_i(t) - \xi_j(t)|^\mu +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_2(c_2\beta + c_3) \sum_{j=1}^m a_{ij} |\xi_i(t) - \xi_j(t)| + \\ & \sum_{j=1}^m a_{ij} (c_1\mu |\xi_i(t) - \xi_j(t)|^{\mu-1} + c_2\beta + c_3) \times \\ & \left(\sum_{j=1}^m |u_i(t) - u_j(t)| + \rho_1 + 2D \right) \leq \\ & \rho_2 c_1 \mu m \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^{\frac{2}{\mu}} (\xi_i(t) - \xi_j(t))^2 \right)^{\frac{\mu}{2}} + \\ & \rho_2 (c_2\beta + c_3) m \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 (\xi_i(t) - \xi_j(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & [m|u_i(t)| + \sum_{j=1}^m |u_j(t)| + \rho_1 + 2D] \times \\ & [c_1\mu m^2 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^{\frac{2}{\mu-1}} (\xi_i(t) - \xi_j(t))^2 \right)^{\frac{\mu-1}{2}} + \\ & m(c_2\beta + c_3)] \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_2 c_1 \mu m \left(4\lambda_m(L_{\frac{2}{\mu}}) V_1(0) \right)^{\frac{\mu}{2}} + \\ & \rho_2 (c_2\beta + c_3) m (4\lambda_m(L_2) V_1(0))^{\frac{1}{2}} + \\ & (m|u_i(t_k^i)| + \sum_{j=1}^m |u_j(t_{k'}^j)| + \rho_1 + 2D) \times \\ & (c_1\mu m^2 (4\lambda_m(L_{\frac{2}{\mu-1}}) V_1(0))^{\frac{\mu-1}{2}} + m(c_2\beta + c_3)) = \\ & \psi_0 + \psi_1(t_k^i) + \psi_2(t_{k'}^j) \end{aligned}$$

这里的 ψ_0 , $\psi_1(t_k^i)$ 和 $\psi_2(t_{k'}^j)$ 分别为

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \rho_2 c_1 \mu m (4\lambda_m(L_{\frac{2}{\mu}}) V_1(0))^{\frac{\mu}{2}} + \\ & \rho_2 (c_2\beta + c_3) m (4\lambda_m(L_2) V_1(0))^{\frac{1}{2}} + \\ & [c_1\mu m^2 (4\lambda_m(L_{\frac{2}{\mu-1}}) V_1(0))^{\frac{\mu-1}{2}} + \\ & m(c_2\beta + c_3)] \times (\rho_1 + 2D) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(t_k^i) &= m [c_1\mu m^2 (4\lambda_m(L_{\frac{2}{\mu-1}}) V_1(0))^{\frac{\mu-1}{2}} + \\ & m(c_2\beta + c_3)] |u_i(t_k^i)| \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(t_{k'}^j) &= [c_1\mu m^2 (4\lambda_m(L_{\frac{2}{\mu-1}}) V_1(0))^{\frac{\mu-1}{2}} + \\ & m(c_2\beta + c_3)] \sum_{j=1}^m |u_j(t_{k'}^j)| \end{aligned} \quad (22)$$

其中, $L_{\frac{2}{\mu-1}}$ 是图 $\mathcal{G}(A_{\frac{2}{\mu-1}})$ 的拉普拉斯矩阵, $t_{k'}^j$ 是智能体 j 的最近的触发时刻. 因为 $e_i(t_k^i) = 0$, 所以有

$$\begin{aligned} |e_i(t)| &\leq e_i(t_k^i) + \int_{t_k^i}^t |\dot{e}_i(s)| ds \leq \\ & \int_{t_k^i}^t (\psi_0 + \psi_1(t_k^i) + \psi_2(t_{k'}^j)) ds \end{aligned} \quad (23)$$

由触发条件 (10) 和 $|e_i(t)|$ 的上界 (23), 可知

$$\begin{aligned} |e_i(t_{k+1}^i)| &= \frac{\chi_i(t)}{\theta} + \epsilon c_1 \sum_{j=1}^m a_{ij} |x_i(t) - x_j(t)|^\mu + \\ & \epsilon c_2 m + \epsilon c_3 \sum_{j=1}^m a_{ij} |x_i(t) - x_j(t)| \leq \\ & \int_{t_k^i}^{t_{k+1}^i} (\psi_0 + \psi_1(t_k^i) + \psi_2(t_{k'}^j)) ds \leq \\ & (\psi_0 + \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2)(t_{k+1}^i - t_k^i) \end{aligned}$$

其中, $\hat{\psi}_1 = \max\{\psi_1(t_0^i), \psi_1(t_1^i), \dots\}$, $\hat{\psi}_2 = \max\{\psi_2(t_0^j), \psi_2(t_1^j), \dots\}$. 因此, $t_{k+1}^i - t_k^i \geq \frac{|e_i(t_{k+1}^i)|}{\psi_0 + \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2} \geq \frac{\epsilon c_2 m}{\psi_0 + \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2}$, 表明不存在 Zeno 行为. \square

2.2 切换拓扑下的控制策略

设无向图图集 $\mathcal{G}_s = \{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N\}$, 其中 $\mathcal{G}_l = \mathcal{G}(A^{(l)})$, $\forall l \in \Gamma = \{1, 2, \dots, N\}$, 表示多智能体系统所有可能的通讯拓扑图, Γ 是图集 \mathcal{G}_s 的索引集. 定义切换信号 $\eta(t) : [0, +\infty) \rightarrow \Gamma$, 表示 t 时刻的通讯图在图集 \mathcal{G}_s 里的索引, 即图 $\mathcal{G}_{\eta(t)} \in \mathcal{G}_s$ 是多智能体系统在时间 t 时的通讯拓扑. 假设在任意时刻 t , 图 $\mathcal{G}_{\eta(t)}$ 都是连通的.

定理 3. 在切换拓扑 $\mathcal{G}_{\eta(t)}$ 下, 当下列条件满足时,

$$2\sqrt{\rho_2 c_6} = \frac{1 - \delta}{\theta} \quad (24)$$

$$c_3 [\lambda_2^{\min}(L) - \sqrt{2\lambda_m^{\max}(L_2)} \epsilon m^{\frac{3}{2}}] \geq 2\rho_2 \quad (25)$$

$$c_2 \sqrt{\lambda_2^{\min}(L_2)} \geq \sqrt{2m}(\rho_1 + D + \epsilon c_2 m) \quad (26)$$

$$m^{1-\mu} (\lambda_2^{\min}(L_{\frac{2}{\mu+1}}))^{\frac{\mu+1}{2}} \geq \sqrt{2} \epsilon m^{\frac{3}{2}} (\lambda_m^{\max}(L_{\frac{2}{\mu}}))^{\frac{\mu}{2}} \quad (27)$$

多智能体系统 (4) 可以实现实际固定时间平均一致性. 其中,

$$\lambda_2^{\min}(L) = \min\{\lambda_2(L(t))\}$$

$$\lambda_m^{\max}(L_2) = \max\{\lambda_m(L_2(t))\}$$

$$\lambda_2^{\min}(L_2) = \min\{\lambda_2(L_2(t))\}$$

$$\lambda_2^{\min}(L_{\frac{2}{\mu+1}}) = \min\{\lambda_2(L_{\frac{2}{\mu+1}}(t))\}$$

$$\lambda_m^{\max}(L_{\frac{2}{\mu}}) = \max\{\lambda_m(L_{\frac{2}{\mu}}(t))\}$$

证明. 考虑 Lyapunov 函数 (15)

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \xi_i^2(t) + \sum_{i=1}^m \chi_i(t)$$

对其求导,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & (\rho_1 + D + \epsilon c_2 m) m^{\frac{1}{2}} (2V_1(t))^{\frac{1}{2}} - \rho_2 \sum_{i=1}^m |\xi_i(t)|^2 + \\ & 4\rho_2 V_1(t) - \frac{c_1}{2} m^{1-\mu} (4\lambda_2(L_{\frac{2}{\mu+1}}(t)) V_1(t))^{\frac{\mu+1}{2}} - \\ & \frac{1}{2} c_2 (4\lambda_2(L_2(t)) V_1(t))^{\frac{1}{2}} + \frac{c_2 \mu m^2}{2\beta} - \\ & \frac{1}{2} c_3 (4\lambda_2(L(t)) V_1(t)) - c_4 m^{\frac{1-\mu}{2}} (V_2(t))^{\frac{\mu+1}{2}} - \\ & c_5 (V_2(t))^{\frac{1}{2}} - c_6 \sum_{i=1}^m \chi_i^2(t) + \frac{1-\delta}{\theta} \sum_{i=1}^m |\xi_i(t)| \chi_i(t) + \\ & \epsilon c_1 m^{\frac{3}{2}} (2V_1(t))^{\frac{1}{2}} (4\lambda_m(L_{\frac{2}{\mu}}(t)) V_1(t))^{\frac{\mu}{2}} + \\ & \epsilon c_3 m^{\frac{3}{2}} (2V_1(t))^{\frac{1}{2}} (4\lambda_m(L_2(t)) V_1(t))^{\frac{1}{2}} \leq \\ & - [c_2 \sqrt{\lambda_2^{\min}(L_2)} - \sqrt{2m}(\rho_1 + D + \epsilon c_2 m)] V_1^{\frac{1}{2}}(t) - \\ & [2c_3 \lambda_2^{\min}(L) - 4\rho_2 - 2\sqrt{2\lambda_m^{\max}(L_2)} \epsilon c_3 m^{\frac{3}{2}}] V_1(t) - \\ & [2^\mu c_1 m^{1-\mu} (\lambda_2^{\min}(L_{\frac{2}{\mu+1}}))^{\frac{\mu+1}{2}} - \\ & 2^{\mu+\frac{1}{2}} \epsilon c_1 m^{\frac{3}{2}} (\lambda_m^{\max}(L_{\frac{2}{\mu}}))^{\frac{\mu}{2}}] V_1^{\frac{\mu+1}{2}}(t) - \\ & c_4 m^{\frac{1-\mu}{2}} V_2^{\frac{\mu+1}{2}}(t) - c_5 V_2^{\frac{1}{2}}(t) + \frac{c_2 \mu m^2}{2\beta} \leq \\ & - \hat{\alpha}_1 V^{\frac{1}{2}}(t) - \hat{\alpha}_2 m^{\frac{1-\mu}{2}} V^{\frac{\mu+1}{2}}(t) + \frac{c_2 \mu m^2}{2\beta} \end{aligned}$$

其中, $\hat{\alpha}_1 = \min\{c_2 \sqrt{\lambda_2^{\min}(L_2)} - \sqrt{2m}(\rho_1 + D + \epsilon c_2 m), c_5\}$, $\hat{\alpha}_2 = \min\{2^\mu c_1 m^{1-\mu} (\lambda_2^{\min}(L_{\frac{2}{\mu+1}}))^{\frac{\mu+1}{2}} - 2^{\mu+\frac{1}{2}} \times \epsilon c_1 m^{\frac{3}{2}} (\lambda_m^{\max}(L_{\frac{2}{\mu}}))^{\frac{\mu}{2}}, c_4 m^{\frac{1-\mu}{2}}\}$.

显而易见, 对于任意的 $\eta(t) \in \Gamma$, 上式成立. 因此, 多智能体系统在切换拓扑下利用控制器 (6) 和动态事件触发机制 (10) 可以实现实际固定时间平均一致性, 并且由引理 1 知当剩余误差集合为

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow T} x(t) | V \leq \min \left\{ \left(\frac{c_2 \mu m^2}{2\hat{\alpha}_1 \beta (1-\kappa)} \right)^2, 2^{\frac{\mu-1}{\mu+1}} \left(\frac{c_2 \mu m^2}{2\hat{\alpha}_2 \beta (1-\kappa)} \right)^{\frac{2}{\mu+1}} \right\} \right\} \quad (28)$$

时, 设定时间 $T(x_0)$ 满足

$$T(x_0) \leq T_{\max} = \frac{2}{\hat{\alpha}_1 \kappa} + \frac{2m^{\frac{\mu-1}{2}}}{\hat{\alpha}_2 \kappa (\mu-1)} \quad (29)$$

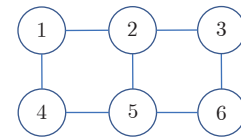
类似地, 可以证明不会出现 Zeno 行为. \square

注 2. 按定理 3 中剩余误差集合 (28) 和设定时间 (29) 调节参数, 可以预先设定最大收敛时间 T_{\max} 和最大误差. 由于 $2V(x(t)) \geq \xi_i^2(t) = (x_i(t) - \bar{x}(t))^2$, 可知当 $t \rightarrow T_{\max}$ 和 $t \geq T_{\max}$ 时,

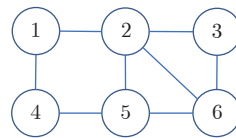
$$|x_i(t) - \bar{x}(t)| \leq \sqrt{2 \min \left\{ \left(\frac{c_2 \mu m^2}{2\hat{\alpha}_1 \beta (1-\kappa)} \right)^2, 2^{\frac{\mu-1}{\mu+1}} \left(\frac{c_2 \mu m^2}{2\hat{\alpha}_2 \beta (1-\kappa)} \right)^{\frac{2}{\mu+1}} \right\}} \quad (30)$$

3 仿真实例

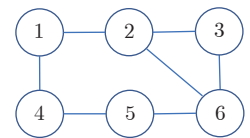
考虑如式 (4) 描述的 6 个智能体的多智能体系统, 1, 3, 5 号智能体的动力学方程为 $f(x_i(t), t) = 3 \times \cos(5x_i(t))$, 2, 4, 6 号智能体的动力学方程为 $f(x_i(t), t) = 5 \sin(3x_i(t))$, 智能体所受扰动 $d_i(x_i(t), t) = 0.1 \times \cos(x_i(t))$, 则 $D = 0.1$, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 \geq 9.55$ 可以是任意大于 9.55 的常数. 系统的初始状态为 $x_0 = [10, -8, 6, 2, -20, -7]^T$. 设图 1 描述了智能体之间的通讯拓扑, 当 $t < 0.05$ s, 通讯拓扑如图 1(a) 所示, 当 0.05 s $\leq t < 0.1$ s 时, 拓扑如图 1(b) 所示, 当 $t \geq 0.1$ s 时, 通讯拓扑如图 1(c) 所示, 则 $\lambda_2^{\min}(L) = \lambda_2^{\min}(L_2) = \lambda_2^{\min}(L_{\frac{2}{\mu+1}}) = 1$, $\lambda_m^{\max}(L_2) = \lambda_m^{\max}(L_{\frac{2}{\mu}}) = 5.28$.



(a) 拓扑图 G_1
(a) Topology graph G_1



(b) 拓扑图 G_2
(b) Topology graph G_2



(c) 拓扑图 G_3
(c) Topology graph G_3

图 1 多智能体系统的切换拓扑

Fig. 1 Switching topologies of the multi-agent system

在控制器 (6), 测量误差 (7), 触发函数 (8), 动态变量 (9) 和触发条件 (10) 下, 设计参数分别设置为 $c_1 = 3$, $c_2 = 6$, $c_3 = 29$, $c_4 = 1.8$, $c_5 = 2.5$, $c_6 = 0.9$, $\epsilon = 0.005$, $\mu = \frac{7}{5}$, $\theta = 0.08$, $\delta = 0.5$, $\beta = 10\ 000$ 和 $\chi_i(0) = 16, \forall i$. 可以验证这些参数满足定理 3 中的 4 个条件. 同时由定理 3 可知, 当 $\kappa = 0.9$ 时, 设定时间 $T \leq T_{\max} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{2}{\hat{\alpha}_1} + \frac{2m^{\frac{\mu-1}{2}}}{\hat{\alpha}_2(\mu-1)} \right) = \frac{6.62}{0.9} = 7.36$ s. 由式 (30) 得当 $t \geq T_{\max}$ 时, 误差 $|\xi_i(t)| = |x_i(t) - \bar{x}(t)| \leq 0.017$.

图 2 分别展示了多智能体系统在动态事件触发

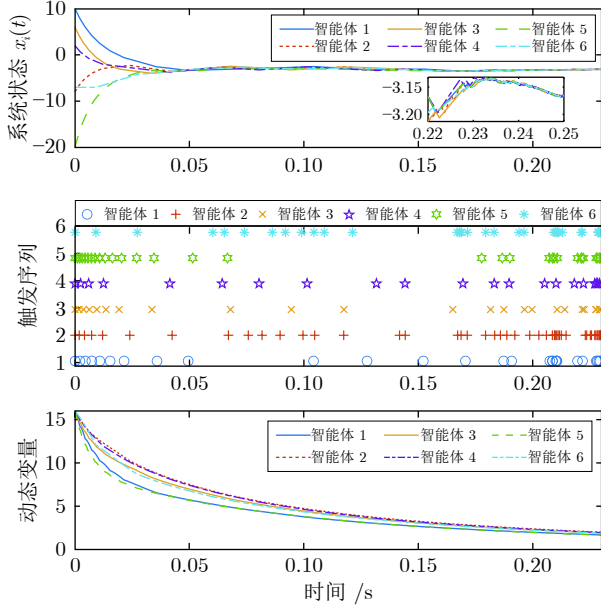


图2 多智能体系统动态事件触发下的系统状态变化、触发时刻、动态变量变化

Fig.2 State evolution, triggering instants, and changes of the dynamic variables under dynamic event-triggered mechanism

机制下状态的变化、触发的时刻和内部动态变量的变化. 图3刻画了每个智能体的误差, 在 $t = 0.23$ s内, 系统的误差收敛到精确度内, 设定时间 T_{\max} 是一个对上界保守的估计.

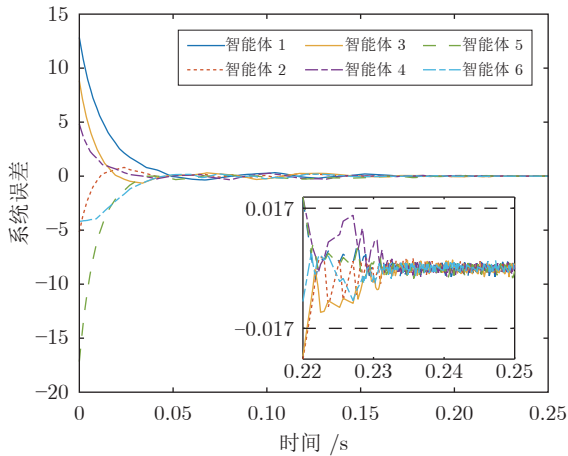


图3 多智能体系统动态事件触发机制下的误差变化

Fig.3 Error change under dynamic event-triggered mechanism

图4展示了在相同参数的情况下, 静态事件触发机制下的系统状态变化和触发时刻. 通过对比能够发现动态事件触发机制可以避免大量的触发.

不同的参数会引起系统收敛效果和触发次数的不同, 我们选取了几组不同的参数进行实验. 图5

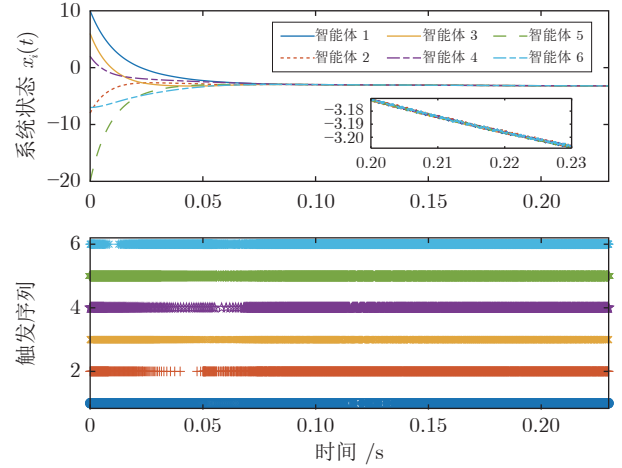


图4 多智能体系统静态事件触发下的系统状态变化和触发时刻

Fig.4 State evolution and triggering instants under static event-triggered mechanism

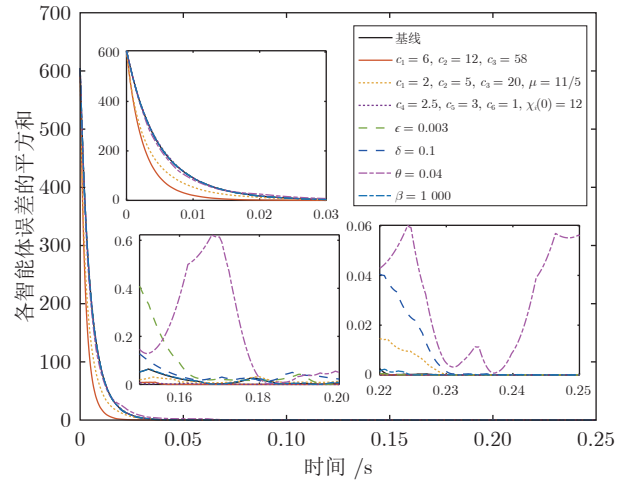


图5 不同参数下系统中各智能体误差的平方和

Fig.5 Sum of squares of the errors under different parameters

展示了在动态事件触发机制的不同参数下, 多智能体系统各个智能体的误差的平方和, 即 $2V_1(t)$, 它表现系统的收敛效果. 图6展示了在这些参数下触发次数的变化. 基线的参数为图2和图3中所用的参数, 图例中为与基线不同的参数, 其余参数值保持不变.

根据图5和图6以及第2节中的公式, 我们得出: 调大参数 $c_i, i = \{1, \dots, 6\}$, μ, θ, δ 并调小参数 $\chi_i(0), i = \{1, \dots, m\}$, ϵ 能够加快收敛速度; 调大参数 $\chi_i(0), i = \{1, \dots, m\}$, ϵ 并调小参数 $c_i, i = \{1, \dots, 6\}$, μ, θ, δ 能够减少触发的次数; 如果收敛后误差较大, 则尝试调大参数 β . 设计者根据实际系统的限制和需要, 可以依此结论进行参数的调节, 平衡收敛速度和触发次数. 由于各参数间存在关联, 实际调

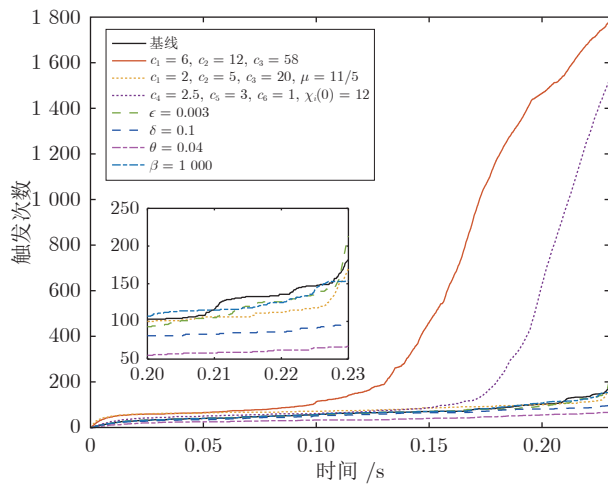


图 6 不同参数下多智能体系统触发次数的变化

Fig.6 Numbers of triggering instants under different parameters

参还需要结合具体的系统而定。

4 结束语

本文提出了一个可以在切换拓扑下实现多智能体系统实际固定时间平均一致性的基于动态事件触发机制的控制协议,并通过李雅普诺夫稳定性理论证明了它的有效性.同时,通过证明连续的两个触发时刻的时间差大于一个正数,说明不存在 Zeno 行为.未来的工作包括将固定时间动态事件触发机制拓展到高阶的多智能体系统中。

References

- 1 Yang Tian-Tian, Liu Zhi-Yuan, Chen Hong, Pei Run. Formation control and obstacle avoidance for multiple mobile robots. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(5): 588–592 (杨甜甜, 刘志远, 陈虹, 裴润. 多移动机器人避障编队控制. 自动化学报, 2008, **34**(5): 588–592)
- 2 Yin Zhao, He Wei, Zou Yao, Mu Xin-Xing, Sun Chang-Yin. Efficient formation of flapping-wing aerial vehicles based on wild geese queue effect. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(6): 1355–1367 (尹翌, 贺威, 邹尧, 穆新星, 孙长银. 基于“雁阵效应”的扑翼飞行器人高效集群编队研究. 自动化学报, 2021, **47**(6): 1355–1367)
- 3 Wang Shuai-Lei, Zhou Shao-Lei, Dai Fei-Yang, Liu Wei, Yan Shi. Distributed event-triggered group attitude coordinated control of multi-spacecraft. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2021, **47**(2): 323–332 (王帅磊, 周绍磊, 代飞扬, 刘伟, 闫实. 多航天器分布式事件触发分组姿态协同控制. 北京航空航天大学学报, 2021, **47**(2): 323–332)
- 4 Cai Guang-Bin, Yan Jie, Zhao Yu-Shan, Hu Chang-Hua. Attitude consensus of multi-spacecraft cooperative formation with stochastic multi-hop time-varying delay. *Control Theory and Applications*, 2018, **35**(10): 1415–1421 (蔡光斌, 闫杰, 赵玉山, 胡昌华. 具有随机多跳时变时延的多航天器协同编队姿态一致性. 控制理论与应用, 2018, **35**(10): 1415–1421)
- 5 Shobole A A, Wadi M. Multiagent systems application for the smart grid protection. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2021, **149**: Article No. 111352
- 6 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520–1533
- 7 Wang Xing-Ping, Song Yan-Rong, Cheng Zhao-Lin. Exponential synchronization of time-varying linear multi-agent systems with switching topology. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(8): 1528–1532 (王兴平, 宋艳荣, 程兆林. 切换网络下时变线性多智能体系统的指数同步. 自动化学报, 2015, **41**(8): 1528–1532)
- 8 Huang N, Duan Z S, Zhao Y. Consensus of multi-agent systems via delayed and intermittent communications. *IET Control Theory and Applications*, 2015, **9**(1): 62–73
- 9 Wen G X, Chen C L P, Liu Y J, Liu Z. Neural network-based adaptive leader-following consensus control for a class of nonlinear multiagent state-delay systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, **47**(8): 2151–2160
- 10 Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Decentralized robust synchronization of unknown high order nonlinear multi-agent systems with prescribed transient and steady state performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(1): 123–134
- 11 Zhang J X, Yang G H. Distributed fuzzy adaptive output-feedback control of unknown nonlinear multiagent systems in strict-feedback form. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, **52**(6): 5607–5617
- 12 Cortés J. Finite-time convergent gradient flows with applications to network consensus. *Automatica*, 2006, **42**(11): 1993–2000
- 13 Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(4): 950–955
- 14 Zhao L W, Hua C C. Finite-time consensus tracking of second-order multi-agent systems via nonsingular TSM. *Nonlinear Dynamics*, 2014, **75**(1–2): 311–318
- 15 Tong P, Chen S H, Wang L. Finite-time consensus of multi-agent systems with continuous time-varying interaction topology. *Neurocomputing*, 2018, **284**: 187–193
- 16 Zuo Z Y, Tie L. A new class of finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems. *International Journal of Control*, 2014, **87**(2): 363–370
- 17 Zhang B, Jia Y M. Fixed-time consensus protocols for multi-agent systems with linear and nonlinear state measurements. *Nonlinear Dynamics*, 2015, **82**(4): 1683–1690
- 18 Defoort M, Polyakov A, Demesure G, Djemai M, Veluvolu K. Leader-follower fixed-time consensus for multi-agent systems with unknown non-linear inherent dynamics. *IET Control Theory and Applications*, 2015, **9**(14): 2165–2170
- 19 Ning B D, Jin J, Zheng J C. Fixed-time consensus for multi-agent systems with discontinuous inherent dynamics over switching topology. *International Journal of Systems Science*, 2017, **48**(10): 2023–2032
- 20 Sun Xiao-Tong, Guo Ge, Zhang Peng-Fei. Fixed-time consensus tracking of multi-agent systems under unmatched disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(6): 1368–1376 (孙小童, 郭戈, 张鹏飞. 非匹配扰动下的多智能体系统固定时间一致跟踪. 自动化学报, 2021, **47**(6): 1368–1376)
- 21 Zuo Z Y, Tian B L, Defoort M, Ding Z T. Fixed-time consensus tracking for multiagent systems with high-order integrator dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, **63**(2): 563–570
- 22 Ding L, Han Q L, Ge X H, Zhang X M. An overview of recent advances in event-triggered consensus of multiagent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, **48**(4): 1110–1123
- 23 Yu W W, Zheng W X, Chen G R, Ren W, Cao J D. Second-order consensus in multi-agent dynamical systems with sampled position data. *Automatica*, 2011, **47**(7): 1496–1503

- 24 Wen G H, Duan Z S, Yu W W, Chen G R. Consensus of multi-agent systems with nonlinear dynamics and sampled-data information: A delayed-input approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, **23**(6): 602–619
- 25 Dimarogonas D V, Frazzoli E, Johansson K H. Distributed event-triggered control for multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(5): 1291–1297
- 26 Garcia E, Cao Y C, Casbeer D W. Decentralized event-triggered consensus with general linear dynamics. *Automatica*, 2014, **50**(10): 2633–2640
- 27 Zhang H P, Yue D, Yin X X, Hu S L, Dou C X. Finite-time distributed event-triggered consensus control for multi-agent systems. *Information Sciences*, 2016, **339**: 132–142
- 28 Liu J, Zhang Y L, Yu Y, Sun C Y. Fixed-time event-triggered consensus for nonlinear multiagent systems without continuous communications. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, **49**(11): 2221–2229
- 29 Sharifi A, Pourgholi M. Fixed-time bipartite consensus of nonlinear multi-agent systems using event-triggered control design. *Journal of the Franklin Institute*, 2021, **358**(17): 9178–9198
- 30 Zhou D, Zhang A, Yang P. Fixed-time event-triggered consensus of second-order multi-agent systems with fully continuous communication free. *IET Control Theory and Applications*, 2020, **14**(16): 2385–2394
- 31 Chen Shi-Ming, Shao Sai, Jiang Gen-Lan. Distributed event-triggered fixed-time scaled consensus control for second-order multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2022, **48**(1): 261–270
(陈世明, 邵赛, 姜根兰. 基于事件触发二阶多智能体系统的固定时间比例一致性. *自动化学报*, 2022, **48**(1): 261–270)
- 32 Liu J, Zhang Y L, Sun C Y, Yu Y. Fixed-time consensus of multi-agent systems with input delay and uncertain disturbances via event-triggered control. *Information Sciences*, 2019, **480**: 261–272
- 33 Ran G T, Liu J, Li C J, Chen L M, Li D Y. Event-based finite-time consensus control of second-order delayed multi-agent systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, **68**(1): 276–280
- 34 Liu J, Zhang Y L, Yu Y, Sun C Y. Fixed-time leader-follower consensus of networked nonlinear systems via event/self-triggered control. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, **31**(11): 5029–5037
- 35 Ni J K, Shi P, Zhao Y, Pan Q, Wang S Y. Fixed-time event-triggered output consensus tracking of high-order multiagent systems under directed interaction graphs. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, **52**(7): 6391–6405
- 36 Ai X L, Wang L. Distributed fixed-time event-triggered consensus of linear multi-agent systems with input delay. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, **31**(7): 2526–2545
- 37 Liu J, Yu Y, Xu Y, Zhang Y L, Sun C Y. Fixed-time average consensus of nonlinear delayed MASs under switching topologies: An event-based triggering approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, **52**(5): 2721–2733
- 38 Girard A. Dynamic triggering mechanisms for event-triggered control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(7): 1992–1997
- 39 Yi X L, Liu K, Dimarogonas D V, Johansson K H. Dynamic event-triggered and self-triggered control for multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, **64**(8): 3300–3307
- 40 Liu J, Ran G T, Wu Y B, Xue L, Sun C Y. Dynamic event-triggered practical fixed-time consensus for nonlinear multiagent systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, **69**(4): 2156–2160



孙梦薇 安徽大学物质科学与信息技术研究院博士研究生. 主要研究方向为多智能体系统, 固定时间控制和事件触发控制.

E-mail: q21101014@stu.ahu.edu.cn
(**SUN Meng-Wei** Ph.D. candidate at the Institutes of Physical Science and Information Technology, Anhui University. Her research interest covers multi-agent systems, fixed-time control, and event-triggered control.)



任璐 安徽大学人工智能学院讲师. 2021 年获得东南大学控制科学与工程博士学位. 主要研究方向为多智能体系统一致性控制, 复杂动态网络同步. 本文通信作者.

E-mail: penny_lu@ahu.edu.cn
(**REN Lu** Lecturer at the School of Artificial Intelligence, Anhui University. She received her Ph.D. degree in control science and engineering from Southeast University in 2021. Her research interest covers consensus control of multi-agent systems, and synchronization of complex dynamical networks. Corresponding author of this paper.)



刘剑 东南大学自动化学院副研究员. 分别于 2015 年, 2020 年获得北京科技大学学士和博士学位. 主要研究方向为多智能体系统, 非线性控制, 事件触发控制和固定时间控制.

E-mail: bkliujian@163.com
(**LIU Jian** Associate professor at the School of Automation, Southeast University. He received his bachelor and Ph.D. degrees from University of Science and Technology Beijing in 2015 and 2020, respectively. His research interest covers multi-agent systems, nonlinear control, event-triggered control, and fixed-time control.)



孙长银 东南大学自动化学院教授. 1996 年获得四川大学应用数学专业理学学士学位. 分别于 2001 年, 2004 年获得东南大学电子工程专业硕士和博士学位. 主要研究方向为智能控制, 飞行器控制, 模式识别和优化理论.

E-mail: cysun@seu.edu.cn
(**SUN Chang-Yin** Professor at the School of Automation, Southeast University. He received his bachelor degree in applied mathematics from Sichuan University in 1996, and his master and Ph.D. degrees in electrical engineering from Southeast University in 2001 and 2004, respectively. His research interest covers intelligent control, flight control, pattern recognition, and optimal theory.)