

# 高超声速飞行器指定时间时变高增益反馈跟踪控制

张康康<sup>1</sup> 周彬<sup>1</sup> 蔡光斌<sup>2</sup> 侯明哲<sup>1</sup>

**摘要** 研究了高超声速飞行器控制通道存在未知环境干扰时的指定时间跟踪控制问题. 基于高超声速飞行器的输入输出线性化模型, 借助参量 Lyapunov 方程的一些性质, 设计一种光滑、有界的时变高增益控制律. 相比于现有的高超声速飞行器有限/固定时间控制方法, 该算法不会出现抖振现象, 同时收敛时间不依赖于初始状态且可以事先设定. 当高超声速飞行器存在未知的有界环境匹配干扰时, 该控制器能使高度和速度在指定时间跟踪上参考信号. 仿真结果验证了方法的有效性.

**关键词** 高超声速飞行器, 指定时间控制, 时变反馈, 高增益反馈, 非线性控制

**引用格式** 张康康, 周彬, 蔡光斌, 侯明哲. 高超声速飞行器指定时间时变高增益反馈跟踪控制. 自动化学报, 2024, 50(6): 1151-1159

**DOI** 10.16383/j.aas.c210895

## Prescribed-time Tracking Control of Hypersonic Vehicles by Time-varying High-gain Feedback

ZHANG Kang-Kang<sup>1</sup> ZHOU Bin<sup>1</sup> CAI Guang-Bin<sup>2</sup> HOU Ming-Zhe<sup>1</sup>

**Abstract** The prescribed-time tracking control problem of hypersonic vehicles in the presence of unknown environmental disturbances in the control channel is studied. Based on the input-output linearization model of hypersonic vehicles and some properties of a parametric Lyapunov equation, a smooth and bounded time-varying high-gain controller is proposed. Compared with the existing finite/fixed time control methods for hypersonic vehicles, the chattering phenomenon does not appear in the algorithm, and the convergence time does not depend on the initial state and can be set in advance. When the hypersonic vehicle has unknown bounded environmental matched disturbance, the proposed controller can ensure that the altitude and velocity track the reference signals in the prescribed time. Finally, simulation results verify the effectiveness of the proposed method.

**Key words** Hypersonic vehicle, prescribed-time control, time-varying feedback, high-gain feedback, nonlinear control

**Citation** Zhang Kang-Kang, Zhou Bin, Cai Guang-Bin, Hou Ming-Zhe. Prescribed-time tracking control of hypersonic vehicles by time-varying high-gain feedback. *Acta Automatica Sinica*, 2024, 50(6): 1151-1159

高超声速飞行器一般是指飞行速度大于 5 马赫的飞行器. 由于高超声速飞行器在巡航侦察、远程快速通信、远程精确打击等领域具有独特的优势, 近年来在民用和军用领域得到相当多的关注, 并成为世界各国研究的热点<sup>[1-9]</sup>. 高超声速飞行器在飞行过程中具有快时变、强非线性、强耦合等特点, 且与

传统的飞行器相比, 还具有飞行环境复杂、飞行包线跨度大、气动特性变化剧烈等特点, 这使其控制系统的设计成为一项极具挑战的研究课题<sup>[2]</sup>. 在高超声速飞行器模型处理方面, 文献 [3] 针对高超声速飞行器的小扰动线性化模型, 基于模糊方法设计动态输出反馈控制器. 当高超声速飞行器进行大跨度机动飞行时, 飞行条件有可能发生改变, 这种小扰动的模型简化可能会导致控制系统性能变差甚至失效. 输入输出线性化方法由于放松了在平衡点附近这一约束, 受到大量学者的关注, 并与其他非线性控制方法如自适应滑模控制律<sup>[4]</sup>、鲁棒控制律<sup>[5]</sup>和高阶动态滑模控制律<sup>[6]</sup>相结合广泛应用于高超声速飞行器的控制系统设计.

与传统的渐近稳定控制相比, 有限时间控制因其具有高精度、对干扰的强鲁棒性和快速收敛等特性, 在高超声速飞行器控制方面受到广泛的关注<sup>[10-14]</sup>. 文献 [9] 研究存在外部干扰时高超声速飞行器的有

收稿日期 2021-01-15 录用日期 2022-03-01

Manuscript received January 15, 2021; accepted March 1, 2022

国家杰出青年科学基金 (62125303), 国家自然科学基金委基础科学中心项目 (62188101), 国家自然科学基金 (61773387, 62073096) 资助

Supported by National Science Fund for Distinguished Young Scholars (62125303), Science Center Program of National Natural Science Foundation of China (62188101), and National Natural Science Foundation of China (61773387, 62073096)

本文责任编辑 王飞跃

Recommended by Associate Editor WANG Fei-Yue

1. 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心 哈尔滨 150006  
2. 火箭军工程大学导弹工程学院 西安 710025

1. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150006 2. College of Missile Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025

限时间跟踪控制问题. 文献 [15] 研究高超声速飞行器纵向模型存在外界干扰和模型参数不确定情形下的有限时间跟踪问题. 文献 [16] 基于扰动观测器研究高超声速飞行器的固定时间控制问题. 在传统的有限时间控制中, 收敛时间是依赖于初始状态的, 即使是稍后提出的固定时间控制器, 其收敛时间也是依赖于初始状态的, 但其收敛时间具有一个不依赖初始条件的上界. 在实际工程中, 尤其高超声速飞行器飞行环境比较复杂, 初始条件无法事先获得也很难精确在线测量, 因此实际收敛时间难以得到. 近年来, 一种基于时变高增益的指定时间控制方法又重新受到学者们的重视. 此方法至少可以追溯到经典的最优控制方法<sup>[17-18]</sup>. 此后, 这种方法被经典的导弹比例制导所采用<sup>[19]</sup>. 文献 [20] 针对单输入非线性标准型系统, 基于状态变换提出一种系统性的指定时间控制器设计方法. 借助参量 Lyapunov 方程的一些性质, 文献 [21] 和文献 [22] 针对一般线性系统给出有限时间和指定时间设计方法, 并提出有界线性时变控制器.

在高超声速飞行器有限时间/固定时间控制中, 滑模控制和反步法是常用方法<sup>[9, 23-24]</sup>, 然而此类方法在控制设计过程中会带来一些缺陷. 在滑模控制中, 由于系统惯性, 状态在到达滑模面时, 仍有一定的速度, 因此会来回穿越滑模面, 从而形成高频抖振. 这会严重影响系统的控制性能. 目前针对抖振问题的研究有很多, 许多学者从不同的角度提出一些削弱抖振的方法, 如“边界层”<sup>[25]</sup>、趋近律<sup>[26]</sup>、高阶滑模<sup>[27]</sup>、扇形区域<sup>[28]</sup>、降低切换项增益<sup>[29]</sup>等方法. 但是这些方法只能削弱抖振, 并不能从根本上消除抖振. 反步法采用从上而下的递归设计思路, 设计思路简单, 但是对高超声速飞行器这样的高阶系统进行控制器设计时会出现多次求导, 造成“级数膨胀”, 增加计算复杂度. 为解决此问题, 一些学者通过在每一级设计过程中采用滤波以避免求导<sup>[1, 30]</sup>, 但是此类方法仍然比较复杂.

基于以上的分析, 本文采用高超声速飞行器纵向输入输出线性化模型进行控制系统的设计. 将高超声速飞行器输入位置的干扰转化为线性系统在匹配干扰下的控制器设计问题. 借助参量 Lyapunov 方程的性质, 设计一种光滑的指定时间时变高增益控制律. 相比于传统的有限时间/固定时间控制方法, 该算法不会出现抖振现象, 同时收敛时间不依赖于初始状态且可以事先设定. 该控制器可以使高度和速度在指定时间跟踪到参考信号.

## 1 数学模型和问题描述

美国国家航空航天局兰利研究中心提出了如下

的高超声速飞行器纵向运动模型<sup>[4-5]</sup>

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{F \cos(\alpha) - D}{m} - \frac{\mu \sin(\eta)}{r^2} \\ \dot{\eta} = \frac{L + F \sin(\alpha)}{mv} - \frac{(\mu - v^2 r) \cos(\eta)}{vr^2} \\ \dot{h} = v \sin(\eta) \\ \dot{\alpha} = q - \dot{\eta} \\ \dot{q} = \frac{M_{yy}}{I_{yy}} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $L = \bar{q}SC_L$ ,  $D = \bar{q}SC_D$ ,  $F = \bar{q}SC_T$ ,  $M_{yy} = \bar{q}S\bar{c}[C_M(\alpha) + C_M(\delta_E) + C_M(q)]$ ,  $r = h + R_e$ ,  $C_L = 0.6203\alpha$ ,  $C_D = 0.6450\alpha^2 + 0.0043378\alpha + 0.003772$ ,

$$C_T = \begin{cases} 0.02576\beta, & \beta \leq 1 \\ 0.0224 + 0.00336\beta, & \beta > 1 \end{cases}$$

$C_M(\alpha) = -0.035\alpha^2 + 0.036617\alpha + 5.3261 \times 10^{-6}$ ,  $C_M(q) = q(-6.796\alpha^2 + 0.3015\alpha^2 - 0.2289)\bar{c}/(2v)$ ,  $C_M(\delta_E) = c_e(\delta_E + d_2(t) - \alpha)$ , 这里  $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho v^2$  是动压,  $v, \eta, h, \alpha$  和  $q$  分别是高超声速飞行器的速度、飞行航迹角、高度、攻角和俯仰角速率.  $F, D, L, M_{yy}, \delta_E$  和  $\beta$  分别是发动机推力、阻力、升力、俯仰力矩、升降舵偏角和发动机节流阀开度,  $m, \rho, I_{yy}, S, \mu, R_e, \bar{c}, c_e, d_2(t)$  分别表示高超声速飞行器的质量、空气密度、绕  $y$  轴的转动惯量、参考面积、重力常数、地球半径、平均气动弦长、升降副翼弦长和有界匹配扰动.

发动机动力学方程可以表示为如下二阶微分方程的形式

$$\ddot{\beta} = -2\xi\omega_n\dot{\beta} - \omega_n^2\beta + \omega_n^2\beta_c + \bar{d}_1(t)$$

其中,  $\beta_c$  表示发动机节流阀开度指令,  $\omega_n$  表示发动机动力学的无阻尼自然频率,  $\xi$  为阻尼比,  $\bar{d}_1(t)$  表示有界外部扰动. 由于  $\omega_n \neq 0$ , 因此发动机动力学方程可进一步写成如下形式<sup>[4]</sup>

$$\ddot{\beta} = -2\xi\omega_n\dot{\beta} - \omega_n^2\beta + \omega_n^2(\beta_c + d_1(t)) \quad (2)$$

其中,  $d_1(t) = \bar{d}_1(t)/\omega_n^2$  表示有界匹配扰动.

**注 1.** 本文参考了文献 [4, 7, 9], 研究的高超声速飞行器气动外形是锥形体, 锥形体冲压发动机对攻角不敏感, 即  $C_T$  不包含  $\alpha$ . 同时考虑到升降舵面积比较小, 因而升降舵偏转产生的升力可以忽略不计, 即  $C_L$  只包含  $\alpha$ .

### 1.1 输入输出线性化模型

通过对速度求三次导、对高度求四次导可以使控制输入出现在输出量的导数中, 因此系统 (1) 和 (2) 的相对阶是  $3 + 4 = 7$ , 这恰好等于系统 (1)

和 (2) 的阶数. 因此可以利用反馈线性化方法来对系统 (1) 和 (2) 进行控制器设计. 具体过程如下<sup>[4]</sup>. 设

$$\dot{v} = f_1(\mathbf{x}), \ddot{v} = \frac{\boldsymbol{\omega}_1 \dot{\mathbf{x}}}{m}, \ddot{\eta} = \frac{\boldsymbol{\omega}_1 \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\omega}_2 \dot{\mathbf{x}}}{m}$$

以及

$$\begin{aligned} h^{(1)} &= v \sin(\eta) \\ h^{(2)} &= \dot{v} \sin(\eta) + v \dot{\eta} \cos(\eta) \\ h^{(3)} &= \ddot{v} \sin(\eta) + 2\dot{v} \dot{\eta} \cos(\eta) - v \dot{\eta}^2 \sin(\eta) + \\ &\quad v \ddot{\eta} \cos(\eta) \\ h^{(4)} &= \ddot{\eta} \sin(\eta) + 3\dot{v} \ddot{\eta} \cos(\eta) - 3v \dot{\eta}^2 \sin(\eta) + \\ &\quad 3v \ddot{\eta} \cos(\eta) - 3v \dot{\eta} \ddot{\eta} \sin(\eta) - \\ &\quad v \dot{\eta}^3 \cos(\eta) + v \ddot{\eta} \cos(\eta) \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{x} = [v, \eta, \alpha, \beta, h]^T$ ,  $\boldsymbol{\omega}_1 = m \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \mathbf{x}}$ .  
 $\boldsymbol{\varphi}_1 = \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial \mathbf{x}}$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_2(\mathbf{x}) \\ \ddot{\eta} &= \boldsymbol{\varphi}_1 \dot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\eta} &= \boldsymbol{\varphi}_1 \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\varphi}_2 \dot{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

通过对  $\alpha$  和  $\beta$  求二阶导, 有

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \ddot{\alpha}_0 + \frac{c_e \rho v^2 S \bar{c}}{2I_{yy}} (\delta_E + d_2(t)) \\ \ddot{\beta} &= \ddot{\beta}_0 + \omega_n^2 (\beta_c + d_1(t)) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_0 &= \frac{1}{2I_{yy}} \rho v^2 S \bar{c} (C_M(\alpha) + C_M(q) - c_e \alpha) - \ddot{\eta} \\ \ddot{\beta}_0 &= -2\xi \omega_n \dot{\beta} - \omega_n^2 \beta \end{aligned}$$

定义  $\boldsymbol{\varpi} = [\ddot{v}, \ddot{\eta}, \ddot{\alpha}_0, \ddot{\beta}_0, \ddot{h}]^T$ , 则  $v^{(3)}$  和  $h^{(4)}$  可以写成如下形式

$$\begin{bmatrix} v^{(3)} \\ h^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0^{(3)} \\ h_0^{(4)} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \beta_c(t) \\ \delta_E(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$v_0^{(3)} = \frac{\boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\varpi} + \dot{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\omega}_2 \dot{\mathbf{x}}}{m}$$

$$\begin{aligned} h_0^{(4)} &= 3\ddot{v} \dot{\eta} \cos(\eta) - 3v \dot{\eta}^2 \sin(\eta) + 3v \ddot{\eta} \cos(\eta) - \\ &\quad 3v \dot{\eta} \ddot{\eta} \sin(\eta) - v \dot{\eta}^2 \cos(\eta) + \\ &\quad \frac{(\boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\varpi} + \dot{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\omega}_2 \dot{\mathbf{x}}) \sin(\eta)}{m} + \\ &\quad v \cos(\eta) (\boldsymbol{\varphi}_1 \boldsymbol{\varpi} + \dot{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\omega}_2 \dot{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\rho v^2 S c_\beta \omega_n^2}{2m} \cos \alpha \\ b_{12} &= -\frac{\rho v^2 S c_e \bar{c}}{2m I_{yy}} (F \sin \alpha + D_\alpha) \\ b_{21} &= \frac{\rho v^2 S c_\beta \omega_n^2}{2m} \sin(\alpha + \eta) \\ b_{22} &= \frac{\rho v^2 S \bar{c} c_e}{2m I_{yy}} (F \cos(\alpha + \eta) + L_\alpha \cos(\eta) - \\ &\quad D_\alpha \sin(\eta)) \\ D_\alpha &= \frac{\partial D}{\partial \alpha} \\ L_\alpha &= \frac{\partial L}{\partial \alpha} \\ c_\beta &= \frac{\partial C_T}{\partial \beta} = \begin{cases} 0.02576, & \beta \leq 1 \\ 0.00336, & \beta > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

由于在巡航过程中飞行航迹角  $\eta$  比较小, 因此这里可以假设矩阵  $\mathbf{B}$  是可逆的<sup>[4-5, 9]</sup>.

## 1.2 指定时间稳定性理论

考虑非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), t \geq 0 \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  是状态向量,  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) : \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  关于  $\mathbf{x}$  是连续的、关于  $t$  是分段连续的函数, 并且  $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \forall t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ .

**定义 1**<sup>[22]</sup>. 考虑非线性系统 (4), 假设: 1) 系统是一般意义下稳定的, 即对任意的常数  $\varepsilon > 0$ , 存在一个常数  $\delta(\varepsilon)$ , 使得  $\|\mathbf{x}(0)\| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq \varepsilon, \forall t > 0$ ; 2) 原点是有限时间吸引的, 即存在一个常数  $d > 0$ , 使得对于任意的  $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{B}_d = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}(t)\| \leq d\}$ , 存在一个时间常数  $T > 0$ , 使得当时间  $t$  从左边趋于  $T$  时,  $\|\mathbf{x}(t)\|$  趋于零, 记为  $\lim_{t \uparrow T} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$  (后文极限记号与此同义). 则称系统 (4) 是局部  $T$  有限时间稳定的 (Locally finite-time stable with convergence time  $T$ , 局部  $T$ -FTS), 并且  $\mathbf{B}_d$  称作系统 (4) 的吸引域. 进一步地, 如果  $d \rightarrow \infty$ , 则称系统 (4) 是全局  $T$  有限时间稳定的 (全局  $T$ -FTS).

考虑如下标量线性时变系统<sup>[22, 31]</sup>

$$\dot{y}(t) = \mu(t) y(t), t \in [0, T] \quad (5)$$

其中,  $\mu(t) : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$  是连续函数.

**定义 2**<sup>[22]</sup>. 给定正常数  $T$ , 1) 如果连续函数  $\rho(t) : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$  满足  $\lim_{s \uparrow T} \rho(t) = \infty$ , 则称  $\rho(t)$  是  $T$  有限时间逃逸 ( $T$ -finite-time escaping,  $T$ -FTE) 函数; 2) 如果对应的标量线性时变系统 (5) 在定义 1 意义下是  $T$ -FTS 的, 则称连续函数  $\mu(t) : [0, T] \rightarrow$

$\mathbf{R}$  是  $T$ -FTS 函数, 或等价于

$$\rho(t) = - \int_0^t \mu(\tau) d\tau$$

是  $T$ -FTE 函数.

**引理 1**<sup>[22]</sup>. 给定正常数  $T$ , 假设存在两个函数  $v_1, v_2 \in \mathcal{K}$ , 连续函数  $\mu(t) : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ , 常数  $\kappa_0 > 0$ , 连续函数  $\kappa(t) : [0, T] \rightarrow [\kappa_0, \infty)$ , 函数  $V(t, \mathbf{x}) : [0, T] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ , 使得下述不等式成立:

$$\kappa(t) v_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \forall t \in [0, T]$$

$$V(0, \mathbf{x}) \leq v_2(\|\mathbf{x}\|), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$$

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq \mu(t) V(t, \mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \forall t \in [0, T]$$

定义  $\rho(t) : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$

$$\rho(t) = \ln \kappa(t) - \int_0^t \mu(\tau) d\tau$$

如果  $\rho(t)$  是定义 2 下的  $T$ -FTE 函数, 则非线性系统 (4) 是全局  $T$ -FTS. 进一步地, 有

$$v_1(\|\mathbf{x}(t)\|) \leq \frac{\exp\left(\int_0^t \mu(\tau) d\tau\right)}{\kappa(t)} v_2(\|\mathbf{x}(0)\|)$$

根据以上预备性知识, 本文将需解决的问题描述如下.

指定正常数  $T$ , 期望速度  $v_d(t)$  和期望高度  $h_d(t)$ , 且  $v_d^{(1)}(t), v_d^{(2)}(t), v_d^{(3)}(t), h_d^{(1)}(t), h_d^{(2)}(t), h_d^{(3)}(t), h_d^{(4)}(t)$  对于所有  $t \geq 0$  有界, 并且  $v_d^{(3)}(t)$  和  $h_d^{(4)}(t)$  是时间  $t$  的分段连续函数, 设计控制律  $\beta_c = \beta_c(t), \delta_E = \delta_E(t)$ , 使得系统速度  $v(t)$  和高度  $h(t)$  在指定时间  $T$  跟踪到期望速度  $v_d(t)$  和期望高度  $h_d(t)$ .

定义速度误差  $e_v(t) = v(t) - v_d(t)$ , 高度误差  $e_h(t) = h(t) - h_d(t)$ ,  $\mathbf{x}_1(t) = [e_v(t), \dot{e}_v(t), \ddot{e}_v(t)]^T$ ,  $\mathbf{x}_2(t) = [e_h(t), \dot{e}_h(t), \ddot{e}_h(t)]^T$ , 则可以将高超声速飞行器速度  $v(t)$  和高度  $h(t)$  的跟踪控制问题转化为状态  $\mathbf{x}_1(t)$  和  $\mathbf{x}_2(t)$  的镇定问题.

## 2 控制器设计

定义  $n \times n$  矩阵  $\mathbf{A}_n$  和  $n \times 1$  向量  $\mathbf{b}_n$  如下

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

设  $\mathbf{P}_n(\gamma) > 0$  为参量 Lyapunov 方程<sup>[22]</sup>

$$\mathbf{A}_n^T \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_n \mathbf{A}_n - \mathbf{P}_n \mathbf{b}_n \mathbf{b}_n^T \mathbf{P}_n = -\gamma \mathbf{P}_n \quad (6)$$

的解, 其中  $\gamma > 0$  为待设计的 (时变) 标量. 考虑控制器

$$\begin{bmatrix} \beta_c(t) \\ \delta_E(t) \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} v_d^{(3)} - v_0^{(3)} - p_1 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3(\gamma_1(t)) \mathbf{x}_1(t) \\ h_d^{(4)} - h_0^{(4)} - p_2 \mathbf{b}_4^T \mathbf{P}_4(\gamma_2(t)) \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中,  $p_1 = \frac{1}{2} + \lambda_1 b_{11}^2 + \lambda_2 b_{12}^2$ ,  $p_2 = \frac{1}{2} + \lambda_3 b_{21}^2 + \lambda_4 b_{22}^2$  是两个与飞行参数相关的函数,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0$  是 4 个可调节的常数,

$$\gamma_1(t) = \frac{T\gamma_{0,1}}{T-t} \quad (8)$$

$$\gamma_2(t) = \frac{T\gamma_{0,2}}{T-t} \quad (9)$$

是两个单调递增的  $T$ -FTE 函数, 其中的参数如下所示

$$\gamma_{0,1} = \frac{3 + \delta_{c,1}}{3(1-s_1)T}, \quad \gamma_{0,2} = \frac{4 + \delta_{c,2}}{4(1-s_2)T}$$

$$\delta_{c,1} = 3(1 + \lambda_{\max}(\mathbf{E}_3 + \mathbf{P}_3(1) \mathbf{E}_3 \mathbf{P}_3^{-1}(1)))$$

$$\delta_{c,2} = 4(1 + \lambda_{\max}(\mathbf{E}_4 + \mathbf{P}_4(1) \mathbf{E}_4 \mathbf{P}_4^{-1}(1)))$$

$\mathbf{E}_3 = \text{diag}\{2, 1, 0\}$ ,  $\mathbf{E}_4 = \text{diag}\{3, 2, 1, 0\}$ ,  $0 < s_1 < 1$ ,  $0 < s_2 < 1$ ,  $\mathbf{P}_3(\gamma_1)$  和  $\mathbf{P}_4(\gamma_2)$  是参量 Lyapunov 方程 (6) 的唯一正定解.

将控制器 (7) 代入系统 (3) 得到闭环系统

$$\begin{bmatrix} v^{(3)} \\ h^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_d^{(3)} \\ h_d^{(4)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_1 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3(\gamma_1(t)) \mathbf{x}_1(t) \\ -p_2 \mathbf{b}_4^T \mathbf{P}_4(\gamma_2(t)) \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}d_1(t) + b_{12}d_2(t) \\ b_{21}d_1(t) + b_{22}d_2(t) \end{bmatrix}$$

根据速度误差  $e_v(t)$  和高度误差  $e_h(t)$  定义, 可得

$$e_v^{(3)}(t) = -p_1 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3(\gamma_1) \mathbf{x}_1(t) + b_{11}d_1(t) + b_{12}d_2(t) \quad (10)$$

$$e_h^{(4)}(t) = -p_2 \mathbf{b}_4^T \mathbf{P}_4(\gamma_2) \mathbf{x}_2(t) + b_{21}d_1(t) + b_{22}d_2(t) \quad (11)$$

式 (10) 和式 (11) 可以进一步写成如下形式

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}_3(u_3(t) + g_1(t))$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_4 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_4(u_4(t) + g_2(t))$$

其中,  $g_1(t) = b_{11}d_1(t) + b_{12}d_2(t)$ ,  $g_2(t) = b_{21}d_1(t) + b_{22}d_2(t)$  是两个与飞行参数和扰动相关的函数, 且

$$u_3(t) = -p_1 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3(\gamma_1(t)) \mathbf{x}_1(t)$$

$$u_4(t) = -p_2 \mathbf{b}_4^T \mathbf{P}_4(\gamma_2(t)) \mathbf{x}_2(t)$$

**定理 1.** 当  $d_1(t) \neq 0$  或  $d_2(t) \neq 0$  时, 系统 (10) 和 (11) 是指定时间吸引的, 即  $\lim_{t \uparrow T} \|\mathbf{x}_1(t)\| = 0$  和  $\lim_{t \uparrow T} \|\mathbf{x}_2(t)\| = 0$ ; 当  $d_1(t) = 0$  且  $d_2(t) = 0$  时, 系

统 (10) 和 (11) 是  $T$ -FTS 的.

**证明.** 定义 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1(t, \mathbf{x}_1) = 3\gamma_1 \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3(\gamma_1) \mathbf{x}_1 \\ V_2 &= V_2(t, \mathbf{x}_2) = 4\gamma_2 \mathbf{x}_2^T \mathbf{P}_4(\gamma_2) \mathbf{x}_2 \\ V &= V(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = V_1(t, \mathbf{x}_1) + V_2(t, \mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

为表达简便, 在不特别指出的情况下, 以下省略变量的自变量, 如用  $\mathbf{P}_3$  和  $\mathbf{P}_4$  分别表示  $\mathbf{P}_3(\gamma_1)$  和  $\mathbf{P}_4(\gamma_2)$ .

对函数  $V_1$  求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 3\dot{\gamma}_1 \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3 \mathbf{x}_1 + \\ & 3\gamma_1 \mathbf{x}_1^T \left( \dot{\mathbf{P}}_3 + \mathbf{A}_3^T \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3 \mathbf{A}_3 - \mathbf{P}_3 \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3 \right) \mathbf{x}_1 + \\ & 6\gamma_1 \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3 \mathbf{b}_3 (b_{11} d_1(t) + b_{12} d_2(t)) - \\ & 6\gamma_1 (\lambda_1 b_{11}^2 + \lambda_2 b_{12}^2) \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3 \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

根据三角不等式可以得到

$$\begin{aligned} 6\mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3 \mathbf{b}_3 b_{11} d_1(t) &\leq 6\lambda_1 b_{11}^2 \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3 \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{x}_1 + 3 \frac{d_1^2(t)}{2\lambda_1} \\ 6\mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3 \mathbf{b}_3 b_{12} d_2(t) &\leq 6\lambda_2 b_{12}^2 \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3 \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{x}_1 + 3 \frac{d_2^2(t)}{2\lambda_2} \end{aligned}$$

根据上述两个不等式, 可以进一步将  $\dot{V}_1$  放缩为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq 3\dot{\gamma}_1 \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3 \mathbf{x}_1 + \\ & 3\gamma_1 \mathbf{x}_1^T \left( \dot{\mathbf{P}}_3 + \mathbf{A}_3^T \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3 \mathbf{A}_3 - \mathbf{P}_3 \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3 \right) \mathbf{x}_1 + \\ & 3\gamma_1 \frac{d_1^2(t)}{2\lambda_1} + 3\gamma_1 \frac{d_2^2(t)}{2\lambda_2} + \\ & 6\gamma_1 (\lambda_1 b_{11}^2 + \lambda_2 b_{12}^2) \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3 \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{x}_1 - \\ & 6\gamma_1 (\lambda_1 b_{11}^2 + \lambda_2 b_{12}^2) \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3 \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{x}_1 = \\ & 3\dot{\gamma}_1 \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3 \mathbf{x}_1 + \\ & 3\gamma_1 \mathbf{x}_1^T \left( \dot{\gamma}_1 \frac{d\mathbf{P}_3}{d\gamma_1} + \mathbf{A}_3^T \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3 \mathbf{A}_3 - \mathbf{P}_3 \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3 \right) \mathbf{x}_1 + \\ & 3\gamma_1 \frac{d_1^2(t)}{2\lambda_1} + 3\gamma_1 \frac{d_2^2(t)}{2\lambda_2} \end{aligned}$$

根据式 (6)、式 (8) 以及附录 A 中的性质 1 和性质 2, 可以将  $\dot{V}_1$  进一步写为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq \left( \frac{\dot{\gamma}_1}{\gamma_1} - \gamma_1 \right) V_1 + \frac{\delta_{c,1} \dot{\gamma}_1}{3\gamma_1} V_1 + \\ & 3\gamma_1 \frac{d_1^2(t)}{2\lambda_1} + 3\gamma_1 \frac{d_2^2(t)}{2\lambda_2} = \\ & \frac{(3 + \delta_{c,1}) \left( \dot{\gamma}_1 - \frac{3}{3 + \delta_{c,1}} \gamma_1^2 \right)}{3\gamma_1} V_1 + \\ & 3\gamma_1 \frac{d_1^2(t)}{2\lambda_1} + 3\gamma_1 \frac{d_2^2(t)}{2\lambda_2} = -s_1 \gamma_1 V_1 + \end{aligned}$$

$$3\gamma_1 \frac{d_1^2(t)}{2\lambda_1} + 3\gamma_1 \frac{d_2^2(t)}{2\lambda_2}, \quad \forall t \in [0, T]$$

同理, 可以得到

$$\dot{V}_2 \leq -s_2 \gamma_2 V_2 + 4\gamma_2 \frac{d_1^2(t)}{2\lambda_3} + 4\gamma_2 \frac{d_2^2(t)}{2\lambda_4}, \quad \forall t \in [0, T]$$

从而有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -s_1 \gamma_1 V_1 - s_2 \gamma_2 V_2 + 3\gamma_1 \frac{d_1^2(t)}{2\lambda_1} + 3\gamma_1 \frac{d_2^2(t)}{2\lambda_2} + \\ & 4\gamma_2 \frac{d_1^2(t)}{2\lambda_3} + 4\gamma_2 \frac{d_2^2(t)}{2\lambda_4}, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

选择  $s_1 = s_2 = s$ , 根据式 (8) 和式 (9), 有  $\gamma_1 \leq \gamma_2$ , 则

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq -s\gamma_1(t) V(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \gamma_1(t) q(t) \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned} q(t) &= 3 \frac{d_1^2(t)}{2\lambda_1} + 3 \frac{d_2^2(t)}{2\lambda_2} + \frac{3(4 + \delta_{c,2}) d_1^2(t)}{2(3 + \delta_{c,1}) \lambda_3} + \\ & \frac{3(4 + \delta_{c,2}) d_2^2(t)}{2(3 + \delta_{c,1}) \lambda_4} \end{aligned}$$

根据比较引理<sup>[32]</sup>, 式 (12) 的解满足

$$\begin{aligned} V(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &\leq \\ & \exp\left(-s \int_0^t \gamma_1(\sigma) d\sigma\right) V(0, \mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0)) + \\ & \int_0^t \exp\left(-s \int_\tau^t \gamma_1(\sigma) d\sigma\right) \gamma_1(\tau) q(\tau) d\tau \leq \\ & \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{s\gamma_{0,1}T} V(0, \mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0)) + \\ & q_{\max} \int_0^t \exp\left(-s \int_\tau^t \gamma_1(\sigma) d\sigma\right) \gamma_1(\tau) d\tau = \\ & \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{s\gamma_{0,1}T} V(0, \mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0)) + \\ & \frac{q_{\max}}{s} \left(1 - \frac{(T-t)^{s\gamma_{0,1}T}}{T^{s\gamma_{0,1}T}}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned} q_{\max} &= \left( \frac{3}{2\lambda_1} + \frac{3(4 + \delta_{c,2})}{2(3 + \delta_{c,1}) \lambda_3} \right) \max_{t \in [0, T]} \{d_1^2(t)\} + \\ & \left( \frac{3}{2\lambda_2} + \frac{3(4 + \delta_{c,2})}{2(3 + \delta_{c,1}) \lambda_4} \right) \max_{t \in [0, T]} \{d_2^2(t)\} \end{aligned}$$

根据附录 A 中的性质 1, 可以得到

$$\begin{aligned} V(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &\geq \\ & 3\gamma_1^2(t) \lambda_{\min}(\mathbf{L}_3(\gamma_{0,1}) \mathbf{P}_3(1) \mathbf{L}_3(\gamma_{0,1})) \|\mathbf{x}_1(t)\|^2 + \\ & 4\gamma_2^2(t) \lambda_{\min}(\mathbf{L}_4(\gamma_{0,2}) \mathbf{P}_4(1) \mathbf{L}_4(\gamma_{0,2})) \|\mathbf{x}_2(t)\|^2 = \\ & \gamma_1^2(t) \left( k_1 \|\mathbf{x}_1(t)\|^2 + k_2 \|\mathbf{x}_2(t)\|^2 \right) \end{aligned}$$

其中

$$k_1 = 3\lambda_{\min}(\mathbf{L}_3(\gamma_{0,1})\mathbf{P}_3(1)\mathbf{L}_3(\gamma_{0,1}))$$

$$k_2 = \frac{9(4 + \delta_{c,2})^2}{4(3 + \delta_{c,1})^2} \lambda_{\min}(\mathbf{L}_4(\gamma_{0,2})\mathbf{P}_4(1)\mathbf{L}_4(\gamma_{0,2}))$$

其中,  $\lambda_{\min}(\mathbf{L}_3(\gamma_{0,1})\mathbf{P}_3(1)\mathbf{L}_3(\gamma_{0,1}))$  表示  $\mathbf{L}_3(\gamma_{0,1}) \times \mathbf{P}_3(1)\mathbf{L}_3(\gamma_{0,1})$  的最小特征值,  $\lambda_{\min}(\mathbf{L}_4(\gamma_{0,2})\mathbf{P}_4(1)\mathbf{L}_4(\gamma_{0,2}))$  表示  $\mathbf{L}_4(\gamma_{0,2})\mathbf{P}_4(1)\mathbf{L}_4(\gamma_{0,2})$  的最小特征值, 则

$$k_1 \|\mathbf{x}_1(t)\|^2 + k_2 \|\mathbf{x}_2(t)\|^2 \leq$$

$$\frac{1}{\gamma_1^2(t)} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{s\gamma_{0,1}T} V(0, \mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0)) +$$

$$\frac{1}{s\gamma_1^2(t)} q_{\max} \left(1 - \frac{(T-t)^{s\gamma_{0,1}T}}{T^{s\gamma_{0,1}T}}\right)$$

即  $\lim_{t \uparrow T} \|\mathbf{x}_1(t)\| = 0$ ,  $\lim_{t \uparrow T} \|\mathbf{x}_2(t)\| = 0$ . 当  $d_1(t) = 0$  且  $d_2(t) = 0$  时, 根据引理 1, 系统 (10) 和 (11) 是  $T$ -FTS 的.

接下来证明控制器 (7) 是有界的. 为此只需要证明高增益项  $\mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3(\gamma_1(t))\mathbf{x}_1(t)$  和  $\mathbf{b}_4^T \mathbf{P}_4(\gamma_2(t))\mathbf{x}_2(t)$  是有界的. 由附录 A 中参量 Lyapunov 方程的性质 3 和式 (13), 可知

$$|\mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{x}_1|^2 = \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3 \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{x}_1 \leq$$

$$\mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_3^{\frac{1}{2}} \text{tr} \left( \mathbf{P}_3^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3^T \mathbf{P}_3^{\frac{1}{2}} \right) \mathbf{P}_3^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_1 =$$

$$V_1(t, \mathbf{x}_1(t)) \leq$$

$$V(t, \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) \leq$$

$$\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{s\gamma_{0,1}T} V(0, \mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0)) +$$

$$\frac{q_{\max}}{s} \left(1 - \frac{(T-t)^{s\gamma_{0,1}T}}{T^{s\gamma_{0,1}T}}\right) \quad (14)$$

以及

$$|\mathbf{b}_4^T \mathbf{P}_4 \mathbf{x}_2|^2 = \mathbf{x}_2^T \mathbf{P}_4 \mathbf{b}_4 \mathbf{b}_4^T \mathbf{P}_4 \mathbf{x}_2 \leq$$

$$\mathbf{x}_2^T \mathbf{P}_4^{\frac{1}{2}} \text{tr} \left( \mathbf{P}_4^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_4 \mathbf{b}_4^T \mathbf{P}_4^{\frac{1}{2}} \right) \mathbf{P}_4^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_2 =$$

$$V_2(t, \mathbf{x}_2(t)) \leq$$

$$V(t, \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) \leq$$

$$\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{s\gamma_{0,1}T} V(0, \mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0)) +$$

$$\frac{q_{\max}}{s} \left(1 - \frac{(T-t)^{s\gamma_{0,1}T}}{T^{s\gamma_{0,1}T}}\right) \quad (15)$$

因此, 控制器 (7) 是有界的.  $\square$

**注 2.** 从式 (3) 可以看出, 矩阵  $\mathbf{B}$  的元素  $b_{11}$ ,

$b_{12}$ ,  $b_{21}$  和  $b_{22}$  是与飞行器速度  $v$ 、攻角  $\alpha$ 、飞行航迹角  $\eta$  和发动机节流阀开度  $\beta$  相关的非线性函数. 在飞行过程中, 飞行器速度  $v$ 、攻角  $\alpha$ 、飞行航迹角  $\eta$  和发动机节流阀开度  $\beta$  是时刻变化甚至是快速变化的, 因此在飞行过程中,  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{21}$  和  $b_{22}$  是快时变、强非线性和强耦合的, 从式 (7) 可知, 函数  $p_1$  和  $p_2$  也是快时变、强非线性和强耦合的. 当系统有匹配扰动  $d_1$  和  $d_2$  时, 从式 (10) 和式 (11) 可以发现此扰动对系统的影响是混合了系统的飞行状态信息的. 目前针对扰动的处理主要是自适应反步法<sup>[1]</sup> 和鲁棒滑模控制<sup>[4, 9]</sup>. 一方面, 自适应反步法设计复杂, 需要一步一步设计, 不利于系统设计; 另一方面, 鲁棒控制需要知道扰动的上界, 这对于飞行器来说可能难以获得, 且滑模控制固有的高频抖振易激发系统的结构动态特性, 影响系统的闭环性能甚至造成系统的不稳定. 在本定理中, 我们采用三角不等式将式 (10) 和式 (11) 中的扰动和飞行状态进行分离, 最后给出 Lyapunov 函数  $V(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  的上界, 即式 (13), 然后利用 Lyapunov 函数  $V(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  的特点保证闭环系统的指定时间收敛. 从控制器的形式 (7) 可以发现, 本文所提出的方法是一种光滑的控制方法, 且不依赖于扰动的信息.

**注 3.** 本文与文献 [22] 是不同的, 主要体现在以下两个方面: 1) 本文研究的是存在未知匹配扰动的非线性系统指定时间控制问题, 而文献 [22] 针对的是无扰动时一般线性系统的有限时间控制问题; 2) 本文给出的是一种全局的控制策略, 而文献 [22] 研究的是一种局部的控制策略.

**注 4.** 从  $\gamma_1(t)$  和  $\gamma_2(t)$  的表达式 (8) 和 (9) 可以看出, 当时间  $t$  趋近  $T$  时,  $\gamma_1(t)$  和  $\gamma_2(t)$  趋于无穷, 这在仿真中会出现数值计算问题. 对此可以采用文献 [21] 的截断方法进行处理, 即

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \frac{T\gamma_{0,1}}{T-t}, & t < T^* \\ \frac{T\gamma_{0,1}}{T-T^*}, & t \geq T^* \end{cases}$$

其中,  $T^* = T - \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  为一个充分小的正数.

### 3 数值仿真

本节将通过数值例子来验证本文所提出方法的有效性. 飞行器参数和飞行环境参数如表 1 所示<sup>[9]</sup>. 根据文献 [9, 23], 初始速度  $v(0) = 4\,590.288$  m/s, 初始高度  $h(0) = 33\,528$  m, 初始飞行航迹角  $\eta(0) = 0$  rad, 初始攻角  $\alpha(0) = 0.033\,4$  rad, 初始俯仰角速率  $q(0) = 0$  rad/s, 初始发动机节流阀开度  $\beta(0) = 0.1802$  和初始发动机节流阀开度导数  $\dot{\beta}(0) = 0$ , 期望速度  $v_d = 4\,620.768$  m/s, 期望高度  $h_d = 34\,137.6$  m,

显然,  $v_d^{(1)}, v_d^{(2)}, v_d^{(3)} = 0$  且  $h_d^{(1)}, h_d^{(2)}, h_d^{(3)}, h_d^{(4)} = 0$ . 我们设置指定时间  $T = 60$  s, 选择参数  $\lambda_1 = 1/(2 \times 10^5)$ ,  $\lambda_2 = 1/(2 \times 10^6)$ ,  $\lambda_3 = 1/(1 \times 10^6)$ ,  $\lambda_4 = 1/(6 \times 10^4)$ .

表 1 高超声速飞行器参数以及飞行环境参数

Table 1 The parameters of the hypersonic vehicle and the flight environment

模型参数	符号	值
质量	$m$	136 817.841 kg
地球半径	$R_e$	6 371 386.8 m
参考面积	$S$	334.729 653 m <sup>2</sup>
平均气动弦长	$\bar{c}$	80
升降副翼弦长	$c_c$	0.029 2
绕 $y$ 轴的转动惯量	$I_{yy}$	$9.4907 \times 10^6$ kg · m <sup>2</sup>
空气密度	$\rho$	0.0125 kg/m <sup>3</sup>
重力常数	$\mu$	$3.9360 \times 10^{14}$ m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup>

为说明所提方法的有效性, 本文研究了不同未知有界扰动下系统的变化曲线, 如图 1 ~ 5 所示, 其中, Case 1: 同文献 [23],  $d_1(t) = 0.0024 \sin(0.2t)$ ,  $d_2(t) = 0.012 \sin(0.2t)$ ; Case 2: 同文献 [33],  $d_1(t) = 0.003 \sin(0.2t)$ ,  $d_2(t) = 0.1 \cos(0.1t)$ ; Case 3:  $d_1(t) = 0.008 \sin(0.2t)$ ,  $d_2(t) = 0.2 \cos(0.1t) + 0.1 \sin(0.3t)$ . 由图 1、图 4 和图 5 可以看出, 本文提出的方法在不同未知有界扰动下均能使速度和高度在指定时间跟踪到期望速度和高度, 这说明了本文所提出的方法具有较好的鲁棒性; 同时, 从图 2 和图 3 可以看出, 在不同未知有界扰动下俯仰角速率、发动机节流阀

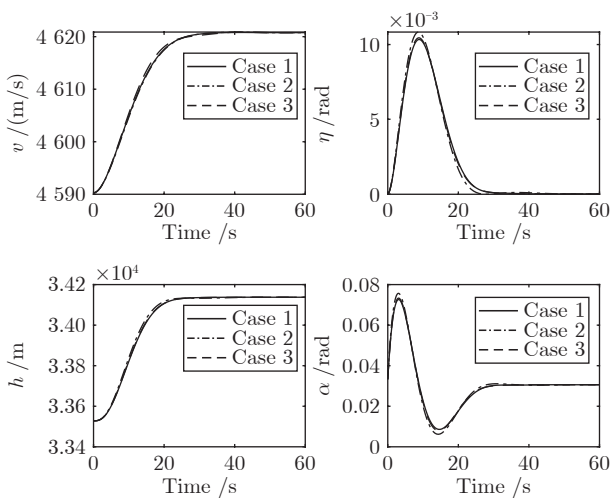


图 1 速度、飞行航迹角、高度和攻角变化曲线

Fig.1 The curves of changes in velocity, flight path angle, altitude and angle of attack

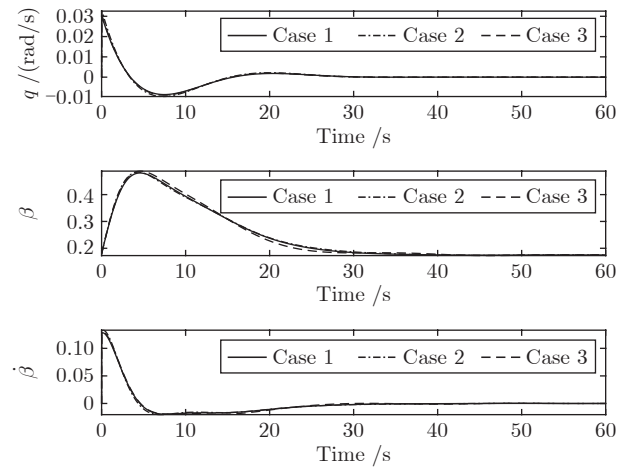


图 2 俯仰角速率、发动机节流阀开度及其导数变化曲线

Fig.2 The curves of changes in pitch rate, engine throttle setting and their time-derivative

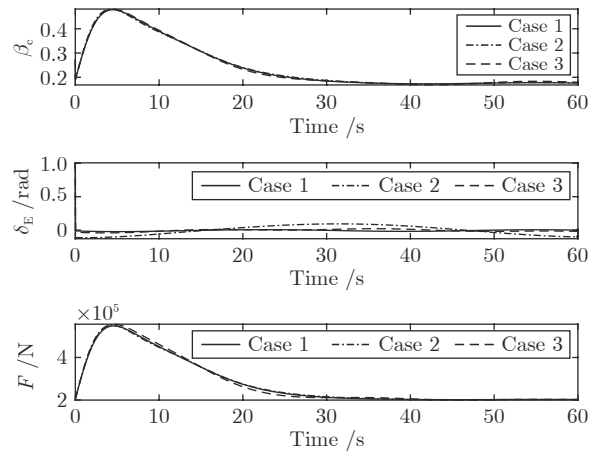


图 3 控制输入和推力变化曲线

Fig.3 The curves of changes in control input and thrust

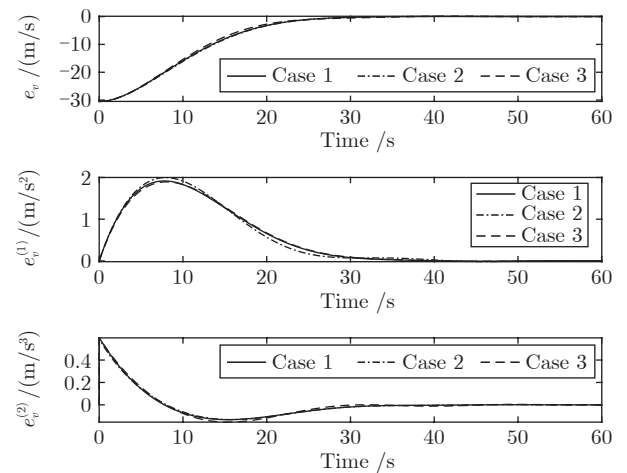


图 4 速度误差及其导数变化曲线

Fig.4 The curves of changes in velocity errors and their time-derivatives

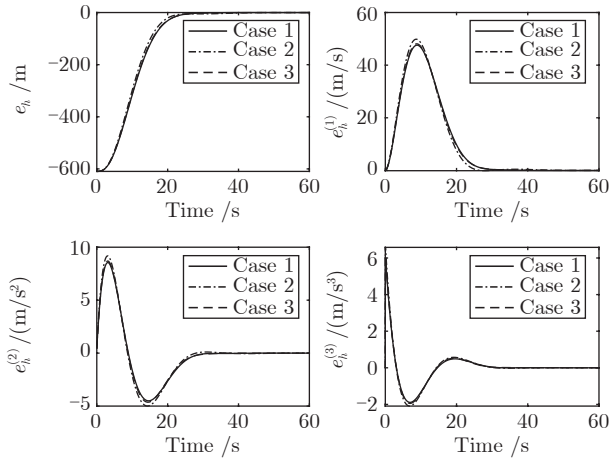


图 5 高度误差及其导数变化曲线

Fig. 5 The curves of changes in altitude errors and their time-derivatives

开度及其导数以及控制输入均在允许范围内<sup>[34]</sup>, 这是符合实际情况的. 仿真结果充分验证了本文所提方法的有效性.

#### 4 结束语

本文研究了高超声速飞行器的指定时间跟踪控制问题. 首先, 以高度和速度作为系统输出, 得到高超声速飞行器输入输出线性化模型. 然后, 针对高超声速飞行器匹配干扰问题, 借助参量 Lyapunov 方程的性质构造了相应的 Lyapunov 函数, 并设计了一种光滑、有界的控制器. 该控制律不依赖于扰动信号 (或其上界), 且能将高度和速度在指定时间跟踪到参考信号. 最后, 数值例子验证了所提方法的有效性.

#### 附录 A 参量 Lyapunov 方程的若干性质

参量 Lyapunov 方程 (6) 的一些性质<sup>[35]</sup> 如下.

**性质 1.** 参量 Lyapunov 方程 (6) 的解  $P_n(\gamma)$  可表示为

$$P_n(\gamma) = \gamma L_n P_n(1) L_n$$

其中,  $L_n = L_n(\gamma) = \text{diag}\{\gamma^{n-1}, \gamma^{n-2}, \dots, 1\}$ .

**性质 2.** 参量 Lyapunov 方程 (6) 的解  $P_n(\gamma)$  对  $\gamma$  的导数满足

$$\frac{P_n(\gamma)}{n\gamma} \leq \frac{dP_n(\gamma)}{d\gamma} \leq \frac{\delta_c P_n(\gamma)}{n\gamma}, \forall \gamma > 0$$

$$E_n = \text{diag}\{n-1, n-2, \dots, 1, 0\}$$

$$\delta_c = n(1 + \lambda_{\max}(E_n + P_n(1)E_nP_n^{-1}(1)))$$

**性质 3.** 设  $P_n$  为参量 Lyapunov 方程 (6) 的解, 则

$$b_n^T P_n b_n = n\gamma$$

#### References

- Hu Q L, Meng Y, Wang C L, Zhang Y M. Adaptive backstepping control for air-breathing hypersonic vehicles with input nonlinearities. *Aerospace Science and Technology*, 2018, **73**: 289–299
- Sun Chang-Yin, Mu Chao-Xu, Yu Yao. Some control problems for near space hypersonic vehicles. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(11): 1901–1913  
(孙长银, 穆朝絮, 余瑶. 近空间高超声速飞行器控制的几个科学问题研究. *自动化学报*, 2013, **39**(11): 1901–1913)
- Hu X X, Wu L G, Hu C H, Gao H J. Fuzzy guaranteed cost tracking control for a flexible air-breathing hypersonic vehicle. *IET Control Theory and Applications*, 2012, **6**(9): 1238–1249
- Xu H J, Mirmirani M D, Ioannou P A. Adaptive sliding mode control design for a hypersonic flight vehicle. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, **27**(5): 829–838
- Wang Q, Stengel R F. Robust nonlinear control of a hypersonic aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, **23**(1): 15–26
- Zong Q, Wang J, Tao Y. Adaptive high-order dynamic sliding mode control for a flexible air-breathing hypersonic vehicle. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, **23**(15): 1718–1736
- Mu C X, Zong Q, Tian B L, Xu W. Continuous sliding mode controller with disturbance observer for hypersonic vehicles. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2015, **2**(1): 45–55
- Mu C X, Ni Z, Sun C Y, He H B. Air-breathing hypersonic vehicle tracking control based on adaptive dynamic programming. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, **28**(3): 584–598
- Sun H B, Li S H, Sun C Y. Finite time integral sliding mode control of hypersonic vehicles. *Nonlinear Dynamics*, 2013, **73**(1): 229–244
- Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, **38**(3): 751–766
- Ding Shi-Hong, Li Shi-Hua. A survey for finite-time control problems. *Control and Decision*, 2011, **26**(2): 161–169  
(丁世宏, 李世华. 有限时间控制问题综述. *控制与决策*, 2011, **26**(2): 161–169)
- Liu Yang, Jing Yuan-Wei, Liu Xiao-Ping, Li Xiao-Hua. Survey on finite-time control for nonlinear systems. *Control Theory and Applications*, 2020, **37**(1): 1–12  
(刘洋, 井元伟, 刘晓平, 李小花. 非线性系统有限时间控制研究综述. *控制理论与应用*, 2020, **37**(1): 1–12)
- Zhang Meng, Han Min. Finite-time synchronization between uncertain complex networks based on unidirectional coupling method. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(7): 1624–1632  
(张檬, 韩敏. 基于单向耦合的不确定复杂网络间有限时间同步. *自动化学报*, 2021, **47**(7): 1624–1632)
- Li Xiao-Hua, Hu Li-Yao. Prescribed performance finite-time  $H_\infty$  tracking control for a class of  $p$ -normal form nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(12): 2870–2880  
(李小花, 胡利耀. 一类  $p$  规范型非线性系统预设性能有限时间  $H_\infty$  跟踪控制. *自动化学报*, 2021, **47**(12): 2870–2880)
- Sun Jing-Guang, Song Shen-Min, Chen Hai-Tao, Li Xue-Hui. Finite-time tracking control of the hypersonic vehicle with input saturation. *Control Theory and Applications*, 2017, **34**(10): 1349–1360  
(孙经广, 宋申民, 陈海涛, 李学辉. 高超声速飞行器有限时间饱和跟踪控制. *控制理论与应用*, 2017, **34**(10): 1349–1360)
- Wang X, Guo J, Tang S J, Qi S. Fixed-time disturbance observ-



- er based fixed-time backstepping control for an air-breathing hypersonic vehicle. *ISA Transactions*, 2019, **88**: 233–245
- 17 Kwon W, Pearson A. A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, **22**(5): 838–842
  - 18 Rekasius Z. An alternate approach to the fixed terminal point regulator problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1964, **9**(3): 290–292
  - 19 Zarchan P. *Tactical and Strategic Missile Guidance*. Washington DC: AIAA Inc, 2012. 11–28
  - 20 Song Y D, Wang Y J, Holloway J, Krstic M. Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time. *Automatica*, 2017, **83**: 243–251
  - 21 Zhou B. Finite-time stabilization of linear systems by bounded linear time-varying feedback. *Automatica*, 2020, **113**: Article No. 108760
  - 22 Zhou B. Finite-time stability analysis and stabilization by bounded linear time-varying feedback. *Automatica*, 2020, **121**: Article No. 109191
  - 23 Sun J G, Xu S L, Song S M, Dong X J. Finite-time tracking control of hypersonic vehicle with input saturation. *Aerospace Science and Technology*, 2017, **71**: 272–284
  - 24 Yin X M, Wang B, Liu L, Wang Y J. Disturbance observer-based gain adaptation high-order sliding mode control of hypersonic vehicles. *Aerospace Science and Technology*, 2019, **89**: 19–30
  - 25 Slotine J J, Sastry S S. Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators. *International Journal of Control*, 1983, **38**(2): 465–492
  - 26 Gao Wei-Bing. *Theory and Design Method of Variable Structure Control*. Beijing: Science Press, 1996. 21–40 (高为炳. 变结构控制的理论及设计方法. 北京: 科学出版社, 1996. 21–40)
  - 27 Levant A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 1993, **58**(6): 1247–1263
  - 28 Xu J X, Lee T H, Wang M, Yu X H. Design of variable structure controllers with continuous switching control. *International Journal of Control*, 1996, **65**(3): 409–431
  - 29 Wong L K, Leung F H F, Tam P K S. A chattering elimination algorithm for sliding mode control of uncertain non-linear systems. *Mechatronics*, 1998, **8**(7): 765–775
  - 30 An H, Wu Q Q, Wang C H. Differentiator based full-envelope adaptive control of air-breathing hypersonic vehicles. *Aerospace Science and Technology*, 2018, **82**: 312–322
  - 31 Zhou B. On asymptotic stability of linear time-varying systems. *Automatica*, 2016, **68**: 266–276
  - 32 Khalil H K. *Nonlinear Systems (3rd ed.)*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 2002. 102–103
  - 33 Ding Y B, Wang X G, Bai Y L, Cui N G. Adaptive higher order super-twisting control algorithm for a flexible air-breathing hypersonic vehicle. *Acta Astronautica*, 2018, **152**: 275–288
  - 34 Parker J T, Serrani A, Yurkovich S, Bolender M A, Doman D B. Control-oriented modeling of an air-breathing hypersonic vehicle. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, **30**(3): 856–869
  - 35 Zhou B, Shi Y. Prescribed-time stabilization of a class of nonlinear systems by linear time-varying feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, **66**(12): 6123–6130



**张康康** 哈尔滨工业大学博士研究生. 主要研究方向为有限时间控制, 非线性控制和飞行器控制.

E-mail: kangkang\_kkz@163.com

(ZHANG Kang-Kang Ph.D. candidate at Harbin Institute of Technology. His research interest covers

finite-time control, nonlinear control, and aircraft control.)



**周彬** 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心教授. 主要研究方向为约束控制, 时滞系统, 时变系统, 非线性控制, 多智能体系统和飞行器控制. 本文通信作者.

E-mail: binzhou@hit.edu.cn

(ZHOU Bin Professor at the Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology. His research interest covers

constrained control, time-delay systems, time-varying systems, nonlinear control, multi-agent systems, and aircraft control. Corresponding author of this paper.)



**蔡光斌** 博士, 火箭军工程大学导弹工程学院副教授. 主要研究方向为新型飞行器制导与控制, 快速轨迹优化, 智能控制理论及应用.

E-mail: cgb0712@163.com

(CAI Guang-Bin Ph.D., associate professor at the College of Missile Engineering, Rocket Force University of Engineering. His research interest covers novel aircraft guidance and control, rapid trajectory optimization, and intelligent control theory and applications.)



**侯明哲** 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心教授. 2011年获哈尔滨工业大学控制科学与工程专业博士学位. 主要研究方向为非线性控制和飞行器控制.

E-mail: hithyt@hit.edu.cn

(HOU Ming-Zhe Professor at the Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology. He received his Ph.D. degree in control science and engineering from Harbin Institute of Technology in 2011. His research interest covers nonlinear control and aircraft control.)