

基于观测器和指定性能的非线性系统事件触发跟踪控制

游星星¹ 杨道文^{1,2} 郭斌¹ 刘凯¹ 佘松宜¹ 朱雨琪¹

摘要 针对一类具有外部扰动的非线性系统, 提出了一种自适应模糊跟踪控制方法. 首先, 利用模糊逻辑系统逼近系统未知的非线性函数, 并设计了一个模糊状态观测器来估计系统的不可测状态. 其次, 通过指定性能函数, 使系统的跟踪误差能够约束在指定范围内. 然后, 利用 Backstepping 方法结合包含对数函数的 Lyapunov 泛函, 设计了一个基于事件触发条件的自适应模糊控制器. 基于 Lyapunov 稳定性理论和 tanh 函数的性质证明了所提出的控制策略能够保证闭环系统中所有信号是半全局一致最终有界的. 最后, 通过一个数值仿真例子验证了所提出方法的有效性.

关键词 自适应控制, 指定性能, 事件触发, 模糊逻辑系统, 模糊观测器

引用格式 游星星, 杨道文, 郭斌, 刘凯, 佘松宜, 朱雨琪. 基于观测器和指定性能的非线性系统事件触发跟踪控制. 自动化学报, 2024, 50(9): 1747–1760

DOI 10.16383/j.aas.c210387

Event-triggered Tracking Control for a Class of Nonlinear Systems With Observer and Prescribed Performance

YOU Xing-Xing¹ YANG Dao-Wen^{1,2} GUO Bin¹ LIU Kai¹ DIAN Song-Yi¹ ZHU Yu-Qi¹

Abstract This paper investigates an adaptive fuzzy tracking control method for a class of nonlinear systems with external disturbances. Firstly, fuzzy logic systems and the fuzzy state observer are implemented to approximate unknown nonlinear functions and estimate the unmeasured states of systems, respectively. Then, the tracking error can be constrained within the specified range by means of the performance function. Furthermore, an event-triggered adaptive fuzzy controller is designed by employing the Backstepping method and Lyapunov functional with logarithm function. The proposed control strategy can ensure that all the signals of the closed-loop system are semiglobally uniformly ultimately bounded based on the Lyapunov stability theory and the properties of tanh function. Finally, a numerical simulation example is provided to verify the effectiveness of proposed method.

Key words Adaptive control, prescribed performance, event-triggered, fuzzy logic system, fuzzy observer

Citation You Xing-Xing, Yang Dao-Wen, Guo Bin, Liu Kai, Dian Song-Yi, Zhu Yu-Qi. Event-triggered tracking control for a class of nonlinear systems with observer and prescribed performance. *Acta Automatica Sinica*, 2024, 50(9): 1747–1760

近几十年来, 网络控制系统由于其控制成本低、性能好和效率高等优点已广泛地应用于实际工业生

产中^[1-2]. 在信号传输过程中, 网络带宽往往是有限的, 大量信号传输会使得通信网络拥挤导致信息丢包、传输延迟等问题, 进而降低系统性能, 甚至有可能引起系统不稳定^[3]. 如何节约网络通信资源、提高系统信号的传输效率一直是控制领域的研究热点.

20 世纪 90 年代, 针对工业生产中控制系统信号传输时网络带宽受限和网络通信利用率不高等问题, 一些学者提出基于事件触发的控制策略. 相比于传统时间触发控制 (即以固定周期采样, 再以同样的周期更新控制信号来实施控制任务), 事件触发控制以变周期采样执行控制信号的更新策略^[4]. 设计者可以根据实际需要对系统某些性能指标施加一定的阈值条件, 当系统指定状态超出该阈值条件时, 系统间才传递传感器信号来更新控制信号^[5]. 此外, 在现代化高集成度的嵌入式控制系统中, 各个控制模块间相互独立采取电池作为能量供应, 控制环节

收稿日期 2021-05-06 录用日期 2021-11-02

Manuscript received May 6, 2021; accepted November 2, 2021

国家资助博士后研究人员计划 (GZC20231783), 国家重点研发计划 (2018YFB1307401), 国家自然科学基金 (62403340, 62303339, 61906023), 四川省自然科学基金 (2023NSFSC0475, 2021YJ0092), 重庆市自然科学基金 (cstc2019jcyj-msxmX0722, cstc2019jcyj-msxmX0710) 资助

Supported by the Postdoctoral Fellowship Program of CPSF (GZC20231783), National Key Research and Development Program of China (2018YFB1307401), National Natural Science Foundation of China (62403340, 62303339, 61906023), Natural Science Foundation of Sichuan Province (2023NSFSC0475, 2021YJ0092), and Natural Science Foundation of Chongqing Municipality of China (cstc2019jcyj-msxmX0722, cstc2019jcyj-msxmX0710)

本文责任编辑 王卓

Recommended by Associate Editor WANG Zhuo

1. 四川大学电气工程学院 成都 610065 2. 四川大学 & 瀚维智能机器人感知与控制联合实验室 成都 610065

1. College of Electrical Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065 2. Robot Perception and Control Joint Laboratory, Sichuan University & Aisono, Chengdu 610065

共用一个信号传输通道或数字控制器. 如何合理利用系统能量, 有效提高传输通道容量逐渐成为设计控制方案的重要考量. 与时间控制驱动相比, 事件触发控制在减少网络通信约束和控制能量消耗方面具有独特优势. 近年来, 许多学者致力于基于事件触发驱动的控制方法研究, 得到了许多有价值的研究成果^[5-9]. 文献 [5] 针对一类包含未知参数的非线性系统, 在采取触发条件为固定阈值策略、相对阈值策略的基础上, 作者还提出了一个包含固定阈值和相对阈值的切换阈值策略来设计自适应控制器, 得到了确保闭环系统所有信号一致最终有界的充分性条件. 通过实施不同的事件触发控制策略, 文献 [6-9] 结合自适应控制理论, 分别对非线性严格反馈系统、不确定严格反馈非线性系统、不确定随机非线性系统和离散多输入多输出系统进行分析. 结果表明, 控制系统利用事件触发机制, 在一定程度上会降低控制过程的能耗和成本, 提高系统信号的传输效率.

值得注意的是, 在实际物理系统中, 通常需要控制器具备良好的控制性能且系统的跟踪误差能够收敛于任意小的残差集^[10-14]. 然而, 实际应用中由于受到物理器件和运行条件限制, 残差界限往往是不易获取的. 对系统状态指定性能约束是解决这类问题的有效方法. 该控制方法保证了非线性动态系统的跟踪误差任意时刻都能保持在指定边界范围内, 且该性能边界的大小可以任意指定. 目前, 已经有许多关于包含指定性能约束的研究成果. 文献 [10-13] 通过指定性能函数, 将系统的跟踪误差收敛界限用一个等价的坐标变换形式进行替换, 在保证系统稳定运行的同时, 使系统输出和参考信号的跟踪误差可以收敛到预先定义的残差集内且收敛速度不会超过某个预定值, 最大超调量小于重新分配水平. 文献 [14] 在已有结果基础上, 考虑了一个有限时间指定性能约束策略, 提出一个新的误差变换形式, 保证系统的跟踪误差能够在有限时间内收敛到指定界限. 因此, 在考虑设计系统控制器时, 对系统误差状态采取指定性能约束具有实际的应用价值.

在过去几十年中, 自适应技术得到了快速发展, 一套系统的理论已经逐渐形成并广泛运用于解决工业领域的控制问题^[15-19]. 众所周知, 大多数系统状态参数并不完全是已知的, 通常包含了非结构化的不确定性, 如系统的模型误差、未建模特性、未知的系统参数以及测量误差和外部干扰等. 控制系统的设计必须考虑这样的问题, 否则无法实现系统的稳定性, 达到期望的性能指标. 神经网络或模糊逻辑系统的逼近特性为处理该问题提供了一个不错的解决

方案^[20-30]. 文献 [20-22] 利用径向基函数神经网络, 解决了纯反馈结构的非线性系统、严格反馈结构的随机非线性系统和具有执行器故障的非线性系统自适应控制问题. 文献 [23-30] 利用模糊逻辑系统研究了几类非线性系统的自适应跟踪控制问题. 因此, 利用神经网络或模糊逻辑系统方法处理未知的非线性函数, 对非线性系统实施自适应控制具有重要意义.

基于以上分析, 本文研究了一类具有外部扰动的非线性系统跟踪问题, 通过对跟踪误差进行指定性能变换, 结合模糊状态观测器和事件触发机制, 提出一种自适应模糊跟踪控制方法. 本文的工作可总结如下: 首次将指定性能函数、包含对数函数的 Lyapunov 泛函以及事件触发机制相结合, 基于观测器和反步法设计了一个自适应模糊事件触发跟踪策略. 相比于文献 [6-7, 20, 22-23, 27-28] 中的结果, 该方法不仅能确保系统的跟踪误差收敛到预先指定范围, 而且系统的控制信号也不需要频繁更新, 进一步节约了网络资源.

1 预备知识与问题描述

1.1 系统模型

本文考虑文献 [23] 中一类具有外部扰动的非线性系统模型如下:

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = z_{i+1}(t) + f_i(\mathbf{z}_i(t)) + d_i(t) \\ \dot{z}_n = u(t) + f_n(\mathbf{z}(t)) + d_n(t) \\ y = z_1, \quad i = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{z}_i = [z_1, z_2, \dots, z_i]^T \in \mathbf{R}^i$, $\mathbf{z} = \mathbf{z}_n = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 表示系统的状态向量, $u(t) \in \mathbf{R}$ 和 $y \in \mathbf{R}$ 分别表示系统的控制输入和输出, $f_i(\mathbf{z}_i) : \mathbf{R}^i \rightarrow \mathbf{R}$ 表示未知光滑的非线性函数且满足 $f_i(\mathbf{0}) = 0$, $d_i(t)$ 表示系统的外部扰动.

本文的控制目标是基于事件触发机制和观测器设计系统 (1) 的自适应模糊跟踪控制器, 使得系统实现: 1) 由观测器的状态反馈构成闭环系统的所有信号都是有界的; 2) 系统的输出 y 能够跟踪给定的参考信号 y_d ; 3) 系统的跟踪误差能够满足指定性能.

为了实现上述控制目标, 针对该非线性系统 (1), 本文将使用如下假设:

假设 1^[30]. 设 Ω_i 为 \mathbf{R}^i 上的紧致集, 系统 (1) 中未知光滑的非线性函数 $f_i : \Omega_i \rightarrow \mathbf{R}$ 满足 Lipschitz 条件, 即对 $\forall \mathbf{z}_i, \hat{\mathbf{z}}_i \in \Omega_i$, 有

$$|f_i(\mathbf{z}_i) - f_i(\hat{\mathbf{z}}_i)| \leq \Gamma_i \|\mathbf{z}_i - \hat{\mathbf{z}}_i\|$$

其中, $\Gamma_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ 为已知常数, $|\cdot|$ 表示

绝对值, $\|\cdot\|$ 表示向量的欧氏范数.

假设 2. 存在未知的正常数 \bar{d}_i , 使得系统外部扰动 $d_i(t)$ 满足 $|d_i(t)| \leq \bar{d}_i$.

假设 3. 系统的参考信号 y_d 及其 n 阶导数是已知、连续且有界的.

1.2 模糊逻辑系统

由于非线性系统 (1) 包含了未知的非线性函数, 本文将采用如下结构的模糊逻辑系统来逼近 $f_i(z_i)$. 模糊逻辑系统由知识库、模糊化器、模糊推理机和解模糊器组成^[13]. 知识库由一系列模糊“IF-THEN”规则组成:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^l : & \text{IF } z_1 \text{ is } \varphi_1^l \text{ and } \cdots \text{ and } z_n \text{ is } \varphi_n^l \\ & \text{THEN } y \text{ is } \Xi^l, \quad l = 1, \dots, N \end{aligned}$$

其中, $z_j, j = 1, \dots, n$ 和 y 分别为该模糊逻辑系统的输入和输出. φ_j^l 和 Ξ^l 表示模糊集合, 它们的模糊隶属度函数分别为 $\mu_{\varphi_j^l}(z_j)$ 和 $\mu_{\Xi^l}(y)$, N 表示模糊规则数量. 对模糊系统进行单点模糊化、中心平均去模糊化, 有

$$y(z) = \frac{\sum_{l=1}^N \bar{y}_l \prod_{j=1}^n \mu_{\varphi_j^l}(z_j)}{\sum_{l=1}^N \left(\prod_{j=1}^n \mu_{\varphi_j^l}(z_j) \right)} \quad (2)$$

其中, $\bar{y}_l = \max_{y \in \mathbf{R}} \mu_{\Xi^l}(y)$.

定义以下模糊基函数

$$\phi_l(z) = \frac{\prod_{j=1}^n \mu_{\varphi_j^l}(z_j)}{\sum_{l=1}^N \left(\prod_{j=1}^n \mu_{\varphi_j^l}(z_j) \right)}$$

令 $\boldsymbol{\vartheta} = [\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_N]^T = [\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N]^T$, $\boldsymbol{\phi}(z) = [\phi_1(z), \phi_2(z), \dots, \phi_N(z)]^T$. 则模糊逻辑系统的输出可以表示为

$$y(z) = \boldsymbol{\vartheta}^T \boldsymbol{\phi}(z) \quad (3)$$

引理 1^[13]. 设 $f(z)$ 为定义在紧致集 Ω 上的连续函数, 对于任意正常数 ε , 该模糊逻辑系统满足

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z) - \boldsymbol{\vartheta}^T \boldsymbol{\phi}(z)| \leq \varepsilon \quad (4)$$

引理 2^[19]. 对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 以下不等式成立:

$$xy \leq \frac{\epsilon^p}{p} |x|^p + \frac{1}{q\epsilon^a} |y|^q \quad (5)$$

其中, $\epsilon > 0, p > 1, q > 1, (p-1)(q-1) = 1$.

引理 3. 对于任意 $x, y \in \mathbf{R}^n$, 以下不等式成立:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \frac{\epsilon^p}{p} \|\mathbf{x}\|^p + \frac{1}{q\epsilon^a} \|\mathbf{y}\|^q \quad (6)$$

其中, $\epsilon > 0, p > 1, q > 1, (p-1)(q-1) = 1$.

证明. 令 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$, 根据引理 2, 假设存在常数 $\epsilon > 0, p > 1, q > 1, (p-1)(q-1) = 1$, 对所有 x_i, y_i , 不等式 (6) 左边满足

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \leq \\ & \frac{\epsilon^p}{p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q\epsilon^a} \sum_{i=1}^n |y_i|^q \end{aligned} \quad (7)$$

不等式 (6) 右边可得以下等价形式

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^p}{p} \|\mathbf{x}\|^p + \frac{1}{q\epsilon^a} \|\mathbf{y}\|^q &= \\ \frac{\epsilon^p}{p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{q\epsilon^a} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{q}{2}} \end{aligned} \quad (8)$$

事实上, 如果式 (7) 和式 (8) 满足下列不等式

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n |y_i|^q \leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{q}{2}} \quad (10)$$

那么即可证得不等式 (6) 成立.

由于式 (9) 与式 (10) 类似, 我们仅给出其中一个不等式的证明.

1) 当 $(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} = 0$ 时,

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \quad (11)$$

不等式 (6) 的等式条件成立.

2) 当 $(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \neq 0$ 时, 由于 $p > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^p} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right)^p = \\ & \sum_{i=1}^n \varsigma_i^p \leq \sum_{i=1}^n \varsigma_i = 1 \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $0 < \varsigma_i = |x_i| / (\sum_{j=1}^n |x_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1$. 根据式 (7), (11) 和 (12), 可以得出下列结果

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{y} &\leq \frac{\epsilon^p}{p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q\epsilon^a} \sum_{i=1}^n |y_i|^q \leq \\ &\frac{\epsilon^p}{p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{q\epsilon^a} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{q}{2}} = \\ &\frac{\epsilon^p}{p} \|\mathbf{x}\|^p + \frac{1}{q\epsilon^a} \|\mathbf{y}\|^q \end{aligned} \quad (13)$$

□

注 1. 尽管有许多文献使用了引理 3, 但是其来源是文献 [19] 中内容, 具体形式为引理 2. 但引理 2 仅给出了 Young's 不等式的实数形式, 而本文给出了该不等式向量形式的证明. 此外, 对于定义的其他类型的范数, 如 1-范数等都可以得出类似结果.

引理 4^[15]. 定义 $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T \in \mathbf{R}^n$, 则下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 &\geq \sum_{i=1}^n \ln(\cosh(\xi_i)) \geq \frac{1}{2} \tanh^2(\|\boldsymbol{\xi}\|) \\ \|\boldsymbol{\xi}\| &\geq \|\mathbf{Tanh}(\boldsymbol{\xi})\| \\ \|\mathbf{Tanh}(\boldsymbol{\xi})\|^2 &\geq \tanh^2(\|\boldsymbol{\xi}\|) \\ \frac{\|\boldsymbol{\xi}\|}{\tanh(\|\boldsymbol{\xi}\|)} &\leq \|\boldsymbol{\xi}\| + 1 \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{Tanh}(\boldsymbol{\xi}) = [\tanh(\xi_1), \dots, \tanh(\xi_n)]^T$.

引理 5^[22]. 对 $\forall \varsigma > 0, x \in \mathbf{R}$, 双曲正切函数 $\tanh(\cdot)$ 满足以下性质:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |x| - x \tanh\left(\frac{x}{\varsigma}\right) \leq 0.2785\varsigma - \\ &x \tanh\left(\frac{x}{\varsigma}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

1.3 模糊状态观测器

由于非线性系统 (1) 的状态不全是可观测的, 因此本文设计了一类模糊状态观测器来估计不可测状态. 系统 (1) 可以描述为下列向量形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{z} + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i f_i(\mathbf{z}_i) + \mathbf{B}_n u(t) + \mathbf{d}(t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}^T \mathbf{z} \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & \mathbf{I}_{n-1} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$\mathbf{B}_i = \underbrace{[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]}_{i-1}^T, \quad \mathbf{B}_n = \underbrace{[0, 0, \dots, 0, 1]}_{n-1}^T$$

$$\mathbf{z}_i = [z_1, z_2, \dots, z_i]^T, \quad \mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$$

$$\mathbf{d}(t) = [d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t)]^T$$

根据引理 1, 模糊逻辑系统可以在紧致集上以任意精度逼近未知的连续函数. 因此, 系统 (14) 中的非线性函数 $f_i(\cdot)$ 可以近似为

$$f_i(\hat{\mathbf{z}}_i | \boldsymbol{\vartheta}_i) = \boldsymbol{\vartheta}_i^T \boldsymbol{\phi}_i(\hat{\mathbf{z}}_i) \quad (15)$$

其中, $\hat{\mathbf{z}}_i$ 是状态向量 \mathbf{z}_i 的估计值. 定义下列理想参数向量

$$\boldsymbol{\vartheta}_i^* = \arg \min_{\boldsymbol{\vartheta}_i \in \Theta_i} \left[\sup_{\hat{\mathbf{z}}_i \in \Omega_i} |f_i(\hat{\mathbf{z}}_i | \boldsymbol{\vartheta}_i) - f_i(\hat{\mathbf{z}}_i)| \right] \quad (16)$$

其中, Θ_i, Ω_i 为紧致集, $\boldsymbol{\vartheta}_i$ 是 $\boldsymbol{\vartheta}_i^*$ 的估计值. 定义模糊逼近误差为

$$\epsilon_i = f_i(\hat{\mathbf{z}}_i) - f_i(\hat{\mathbf{z}}_i | \boldsymbol{\vartheta}_i^*) \quad (17)$$

其中, ϵ_i 是有界的, 即存在正常数 $\bar{\epsilon}_i$, 使得 $|\epsilon_i| \leq \bar{\epsilon}_i$. 根据式 (14) ~ (17), 可得

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{z}_i) - f_i(\hat{\mathbf{z}}_i | \boldsymbol{\vartheta}_i) &= \\ f_i(\mathbf{z}_i) - f_i(\hat{\mathbf{z}}_i) + f_i(\hat{\mathbf{z}}_i) - f_i(\hat{\mathbf{z}}_i | \boldsymbol{\vartheta}_i^*) &+ \\ f_i(\hat{\mathbf{z}}_i | \boldsymbol{\vartheta}_i^*) - f_i(\hat{\mathbf{z}}_i | \boldsymbol{\vartheta}_i) &= \\ \Delta f_i + \epsilon_i + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i^T \boldsymbol{\phi}_i(\hat{\mathbf{z}}_i) & \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i = \boldsymbol{\vartheta}_i^* - \boldsymbol{\vartheta}_i$, $\Delta f_i = f_i(\mathbf{z}_i) - f_i(\hat{\mathbf{z}}_i)$, $\epsilon_i = f_i(\hat{\mathbf{z}}_i) - f_i(\hat{\mathbf{z}}_i | \boldsymbol{\vartheta}_i^*)$.

为了估计系统的不可测状态, 本文设计如下模糊状态观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_i = \hat{z}_{i+1} + f_i(\hat{\mathbf{z}}_i | \boldsymbol{\vartheta}_i) + k_i(y - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_n = u(t) + f_n(\hat{\mathbf{z}}_n | \boldsymbol{\vartheta}_n) + k_n(y - \hat{z}_1) \\ \hat{y} = \hat{z}_1, \quad i = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (19)$$

其向量形式为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{K} y + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i f_i(\hat{\mathbf{z}}_i | \boldsymbol{\vartheta}_i) + \mathbf{B}_n u(t) \\ \hat{y} = \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{z}} \end{cases} \quad (20)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k_1 & & & \\ -k_2 & \mathbf{I}_{n-1} & & \\ \vdots & & & \\ -k_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$\hat{\mathbf{z}} = [\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_n]^T$, $\mathbf{K} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T$. 通过选取合适的常数 k_i 使矩阵 \mathbf{A} 是 Hurwitz 矩阵. 此外,

给定一个正定对称矩阵 \mathbf{P} , 则存在一个正定对称矩阵 \mathbf{Q} , 使得 $\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} = -2\mathbf{P}$.

令 $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} = [\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n]^T$ 为系统的估计误差. 根据系统 (14)、式 (18) 以及模糊状态观测器 (20), 得到下列估计误差系统:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} = & \mathbf{A} \tilde{\mathbf{z}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \tilde{\vartheta}_i^T \phi_i(\hat{\mathbf{z}}_i) + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \Delta f_i + \\ & \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \epsilon_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i d_i(t) \end{aligned} \quad (21)$$

为了评估该状态观测器 (19) 的性能, 选择以下 Lyapunov 函数:

$$\mathcal{V}_0 = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{z}} \quad (22)$$

计算 \mathcal{V}_0 沿着误差系统 (21) 的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_0 = & \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{z}}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{z}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{Q} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \\ & \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{Q} \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \tilde{\vartheta}_i^T \phi_i(\hat{\mathbf{z}}_i) + \\ & \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{Q} \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \Delta f_i + \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{Q} \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \epsilon_i + \\ & \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{Q} \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i d_i(t) \end{aligned} \quad (23)$$

对任意给定的正常数 m , 利用引理 3、假设 1、假设 2 以及 $0 \leq \phi_i^T(\cdot) \phi_i(\cdot) \leq 1$, 则下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{Q} \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \tilde{\vartheta}_i^T \phi_i(\hat{\mathbf{z}}_i) \leq \\ \frac{m}{4} \|\mathbf{Q}\|^2 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\vartheta}_i^T \tilde{\vartheta}_i \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{Q} \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \Delta f_i \leq \\ \frac{1}{2} \|\mathbf{Q}\|^2 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Gamma_i^2 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{Q} \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i (\epsilon_i + d_i(t)) \leq \\ \|\mathbf{Q}\|^2 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{\epsilon}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i^2 \end{aligned} \quad (26)$$

将上述不等式 (24) ~ (26) 代入式 (23), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_0 \leq & \tilde{\mathbf{z}}^T (-\mathbf{P}) \tilde{\mathbf{z}} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\vartheta}_i^T \tilde{\vartheta}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{\epsilon}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i^2 + \\ & \left(\frac{m}{4} \|\mathbf{Q}\|^2 + \frac{3}{2} \|\mathbf{Q}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Gamma_i^2 \right) \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 \leq \\ & - \left(\lambda_{\min}(\mathbf{P}) - \frac{m}{4} \|\mathbf{Q}\|^2 - \frac{3}{2} \|\mathbf{Q}\|^2 - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Gamma_i^2 \right) \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\vartheta}_i^T \tilde{\vartheta}_i + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{\epsilon}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i^2 = \\ & - l_0 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\vartheta}_i^T \tilde{\vartheta}_i + \mathcal{C}_0 \end{aligned} \quad (27)$$

其中, $l_0 = \lambda_{\min}(\mathbf{P}) - (\frac{m}{4} + \frac{3}{2}) \|\mathbf{Q}\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Gamma_i^2$, $\mathcal{C}_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{\epsilon}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i^2$.

注 2. 由于参数 $\tilde{\vartheta}_i$ 不一定是有限界的, 因此不能从式 (27) 得出该估计误差系统 (21) 是 Lyapunov 意义稳定的结论, 即无法保证观测器的性能. 在下文中, 我们将基于事件触发条件, 构造包含对数函数的 Lyapunov 函数, 并结合反步法来设计有界并结合反步法来设计自适应模糊跟踪控制器证明参数 $\tilde{\vartheta}_i$ 的有界性

2 主要结果

2.1 基于事件触发的自适应模糊跟踪控制器设计

本文利用反步法设计了一个事件触发的自适应模糊跟踪控制策略使由模糊观测器状态反馈构成的闭环系统 (1) 实现以下控制目标: 1) 系统输出能对期望轨迹进行跟踪且满足指定性能; 2) 系统中所有信号都是有界的.

首先给出如下坐标变换:

$$\begin{cases} \bar{s}_1 = y - y_d \\ s_i = \hat{z}_i - \alpha_{i-1} - y_d^{(i-1)}, \quad i = 2, \dots, n \end{cases}$$

其中, \bar{s}_1 表示跟踪误差, s_i 为虚拟误差面, α_{i-1} 表示虚拟控制信号.

系统的指定性能可用以下不等式描述:

$$-\beta_{\min} \rho(t) < \bar{s}_1(t) < \beta_{\max} \rho(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (28)$$

其中, β_{\min} , β_{\max} 是可调节的正参数, $\rho(t)$ 是一个有界且严格单调递减的性能函数满足 $\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty) e^{-qt} + \rho_\infty$, $q > 0$, $\rho_0 = \rho(0)$, $\rho_\infty = \max_{t \rightarrow \infty} \rho(t)$, $\rho_0 > \rho_\infty > 0$. 此外, 对于 $\rho(0)$ 还满足 $-\beta_{\min} \rho(0) < \bar{s}_1(0) < \beta_{\max} \rho(0)$.

为了使系统的跟踪误差满足指定性能, 定义下列等效变换:

$$\bar{s}_1(t) = \rho(t)\Upsilon(\pi(t)) \quad (29)$$

其中, π 为变换误差, $\Upsilon(\pi) = \frac{\beta_{\max}e^\pi - \beta_{\min}e^{-\pi}}{e^\pi + e^{-\pi}}$ 是严格单调递增函数, 则

$$\pi(t) = \Upsilon^{-1}\left(\frac{\bar{s}_1(t)}{\rho(t)}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\beta_{\min} + \Upsilon}{\beta_{\max} - \Upsilon}\right) \quad (30)$$

其导数为

$$\begin{aligned} \dot{\pi}(t) &= \frac{1}{2} \dot{\Upsilon} \left(\frac{1}{\Upsilon + \beta_{\min}} - \frac{1}{\beta_{\max} - \Upsilon} \right) = \\ &\varpi \left(\dot{\bar{s}}_1(t) - \frac{\bar{s}_1(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

其中, $\varpi = \frac{1}{2\rho(t)}\left(\frac{1}{\Upsilon + \beta_{\min}} - \frac{1}{\Upsilon - \beta_{\max}}\right)$. 为了设计系统的实际控制器, 定义如下变换:

$$s_1(t) = \pi(t) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\beta_{\min}}{\beta_{\max}}\right) \quad (32)$$

注 3. 根据性能函数的定义以及跟踪误差的等效变换 (29), 可以得到系统的跟踪误差 $|\bar{s}_1(t)| < \max\{\beta_{\min}\rho(0), \beta_{\max}\rho(0)\}$. 性能函数 $\rho(t)$ 的下降速率 q 表示跟踪误差 $\bar{s}_1(t)$ 的最小容许收敛速度, ρ_∞ 表示系统在稳态时跟踪误差 $\bar{s}_1(t)$ 的最大允许值, 指定的最大超调量小于 $\max\{\beta_{\min}\rho(0), \beta_{\max}\rho(0)\}$. 因此通过选择合适的性能函数 $\rho(t)$ 结合参数 $\beta_{\min}, \beta_{\max}$ 可使得跟踪误差 $\bar{s}_1(t)$ 任意小, 从而实现对系统输出轨迹限制.

针对具有外部扰动的非线性系统 (1), 通过构造模糊状态观测器 (19), 基于反步法设计事件触发自适应模糊控制策略, 设计过程可分为 n 步, 前 $n-1$ 步设计虚拟控制输入, 在最后一步引入事件触发机制, 设计实际控制输入. 具体步骤如下.

步骤 1. 根据系统 (1), 结合式 (31) 和式 (32), 可得

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \varpi \left(\dot{\bar{s}}_1(t) - \frac{\bar{s}_1(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right) = \\ &\varpi \left(\dot{y} - \dot{y}_d - \frac{\bar{s}_1(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right) = \\ &\varpi \left(\tilde{z}_2 + s_2 + \alpha_1 + \Delta f_1 + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + \right. \\ &\left. \boldsymbol{\theta}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + \epsilon_1 + d_1(t) - \frac{\bar{s}_1(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

构造如下包含对数函数的 Lyapunov 泛函:

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 + \ln(\cosh(s_1)) + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad (34)$$

求 \mathcal{V}_1 关于时间 t 的导数

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_1 &= \dot{\mathcal{V}}_0 + \tanh(s_1)\dot{s}_1 + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_1 \leq \\ &-l_0 \|\tilde{z}\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i + \mathcal{C}_0 + \\ &\varpi \tanh(s_1) \left(\tilde{z}_2 + s_2 + \alpha_1 + \Delta f_1 + \right. \\ &\left. \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + \boldsymbol{\theta}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + \epsilon_1 + d_1(t) - \right. \\ &\left. \frac{\bar{s}_1(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right) + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_1 \end{aligned} \quad (35)$$

利用引理 2、假设 1 和假设 2, 可得

$$\varpi \tanh(s_1) s_2 \leq \frac{1}{2} \varpi^2 \tanh^2(s_1) + \frac{1}{2} s_2^2 \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \varpi \tanh(s_1) (\tilde{z}_2 + \Delta f_1) &\leq \\ \varpi^2 \tanh^2(s_1) + \frac{1}{2} \|\tilde{z}\|^2 + \frac{1}{2} \Gamma_1^2 \|\tilde{z}\|^2 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \varpi \tanh(s_1) (\epsilon_1 + d_1(t)) &\leq \varpi^2 \tanh^2(s_1) + \\ \varpi^2 \tanh^2(s_1) + \frac{1}{2} \epsilon_1^2 + \frac{1}{2} d_1^2 \end{aligned} \quad (38)$$

将不等式 (36) ~ (38) 代入式 (35), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_1 &\leq -l_1 \|\tilde{z}\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i + \varpi \tanh(s_1) \times \\ &\left(\alpha_1 + \frac{5}{2} \varpi \tanh(s_1) + \boldsymbol{\theta}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + \right. \\ &\left. \frac{1}{2\varpi} \tanh(s_1) - \frac{1}{2\varpi} \tanh(s_1) - \frac{\bar{s}_1(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right) + \\ &\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T \left(\varpi \tanh(s_1) \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) - \frac{\dot{\boldsymbol{\theta}}_1}{\gamma_1} \right) + \mathcal{C}_1 \end{aligned} \quad (39)$$

其中, $l_1 = l_0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Gamma_1^2$, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0 + \frac{1}{2} \epsilon_1^2 + \frac{1}{2} d_1^2$.

设计虚拟控制器 α_1 和自适应律 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ 为

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{c_1}{\varpi} \tanh(s_1) - \frac{5}{2} \varpi \tanh(s_1) - \boldsymbol{\theta}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + \\ &\frac{1}{2\varpi} \tanh(s_1) + \frac{\bar{s}_1(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \gamma_1 \varpi \tanh(s_1) \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) - \sigma_1 \boldsymbol{\theta}_1 \quad (41)$$

其中, $c_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\sigma_1 > 0$ 为后面设计的参数. 将虚拟控制器 α_1 和自适应律 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ 代入式 (39), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_1 &\leq -l_1 \|\tilde{z}\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i - c_1 \tanh^2(s_1) + \\ &\frac{1}{2} \tanh^2(s_1) + \frac{1}{2} s_2^2 + \frac{\sigma_1}{\gamma_1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T \boldsymbol{\theta}_1 + \mathcal{C}_1 \end{aligned} \quad (42)$$

步骤 2. 根据坐标变换, 结合模糊状态观测器 (19), 可得

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 = & s_3 + \alpha_2 + \boldsymbol{\vartheta}_2^T \boldsymbol{\phi}_2(\hat{\boldsymbol{z}}_2) + k_2 \tilde{z}_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \left(\hat{z}_2 + \right. \\ & \tilde{z}_2 + \Delta f_1 + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + \boldsymbol{\vartheta}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + \epsilon_1 + \\ & \left. d_1(t) \right) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{z}_1} \dot{\hat{z}}_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_1} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d} \dot{y}_d \end{aligned} \quad (43)$$

选取如下包含对数函数的 Lyapunov 泛函:

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 + \ln(\cosh(s_2)) + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_2^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_2 \quad (44)$$

求 \mathcal{V}_2 关于时间 t 的导数

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_2 \leq & -l_1 \|\tilde{\boldsymbol{z}}\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i - c_1 \tanh^2(s_1) + \\ & \frac{1}{2} \tanh^2(s_1) + \frac{1}{2} s_2^2 + \frac{\sigma_1}{\gamma_1} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \boldsymbol{\vartheta}_1 + \mathcal{C}_1 + \\ & \tanh(s_2) \left[s_3 + \alpha_2 + \boldsymbol{\vartheta}_2^{*T} \boldsymbol{\phi}_2(\hat{\boldsymbol{z}}_2) - \right. \\ & \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_2^T \boldsymbol{\phi}_2(\hat{\boldsymbol{z}}_2) + k_2 \tilde{z}_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \left(\hat{z}_2 + \tilde{z}_2 + \Delta f_1 + \right. \\ & \left. \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + \boldsymbol{\vartheta}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + \epsilon_1 + d_1(t) \right) - \\ & \left. \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{z}_1} \dot{\hat{z}}_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_1} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d} \dot{y}_d \right] + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_2^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}}_2 \end{aligned} \quad (45)$$

利用引理 2、假设 1、假设 2 以及 $0 \leq \boldsymbol{\phi}_i^T(\cdot) \boldsymbol{\phi}_i(\cdot) \leq 1$, 可得

$$\begin{aligned} & \tanh(s_2) (s_3 + \boldsymbol{\vartheta}_2^{*T} \boldsymbol{\phi}_2(\hat{\boldsymbol{z}}_2)) \leq \\ & \tanh^2(s_2) + \frac{1}{2} s_3^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\vartheta}_2^{*T} \boldsymbol{\vartheta}_2^* \quad (46) \\ & - \tanh(s_2) \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\tilde{z}_2 + \Delta f_1) \leq \\ & \tanh^2(s_2) \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\boldsymbol{z}}\|^2 + \\ & \frac{1}{2} \Gamma_1^2 \|\tilde{\boldsymbol{z}}\|^2 \quad (47) \\ & - \tanh(s_2) \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + \epsilon_1 + d_1(t)) \leq \\ & \frac{3}{2} \tanh^2(s_2) \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1 + \\ & \frac{1}{2} \epsilon_1^2 + \frac{1}{2} \bar{d}_1^2 \quad (48) \end{aligned}$$

将不等式 (46) ~ (48) 代入式 (45), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_2 \leq & -l_2 \|\tilde{\boldsymbol{z}}\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i - c_1 \tanh^2(s_1) + \\ & \frac{1}{2} \tanh^2(s_1) + \sum_{j=2}^3 \frac{1}{2} s_j^2 + \frac{\sigma_1}{\gamma_1} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \boldsymbol{\vartheta}_1 + \\ & \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1 + \tanh(s_2) \left[\alpha_2 + \tanh(s_2) + \right. \\ & \left. \frac{5}{2} \tanh(s_2) \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 + k_2 \tilde{z}_1 - \mathcal{H}_2 \right] + \\ & \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_2^T \left(-\tanh(s_2) \boldsymbol{\phi}_2(\hat{\boldsymbol{z}}_2) - \frac{\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_2}{\gamma_2} \right) + \mathcal{C}_2 \end{aligned} \quad (49)$$

其中,

$$\begin{aligned} l_2 = & l_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Gamma_1^2 \\ \mathcal{H}_2 = & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\hat{z}_2 + \boldsymbol{\vartheta}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1)) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{z}_1} \dot{\hat{z}}_1 + \\ & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_1} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d} \dot{y}_d \\ \mathcal{C}_2 = & \mathcal{C}_1 + \frac{1}{2} \epsilon_1^2 + \frac{1}{2} \bar{d}_1^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\vartheta}_2^{*T} \boldsymbol{\vartheta}_2^* \end{aligned}$$

设计虚拟控制器 α_2 和自适应律 $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_2$ 为

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & -c_2 \tanh(s_2) - \tanh(s_2) - \\ & \frac{5}{2} \tanh(s_2) \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 - k_2 \tilde{z}_1 + \mathcal{H}_2 \end{aligned} \quad (50)$$

$$\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_2 = -\gamma_2 \tanh(s_2) \boldsymbol{\phi}_2(\hat{\boldsymbol{z}}_2) - \sigma_2 \boldsymbol{\vartheta}_2 \quad (51)$$

将虚拟控制器 α_2 和自适应律 $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_2$ 代入式 (49), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_2 \leq & -l_2 \|\tilde{\boldsymbol{z}}\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i - \sum_{j=1}^2 c_j \tanh^2(s_j) + \\ & \frac{1}{2} \tanh^2(s_1) + \sum_{j=2}^3 \frac{1}{2} s_j^2 + \sum_{j=1}^2 \frac{\sigma_j}{\gamma_j} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_j^T \boldsymbol{\vartheta}_j + \\ & \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1 + \mathcal{C}_2 \end{aligned} \quad (52)$$

步骤 i ($i = 3, \dots, n-1$). 与步骤 1 和步骤 2 采用的方法类似, 考虑如下包含对数函数的 Lyapunov 泛函:

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_{i-1} + \ln(\cosh(s_i)) + \frac{1}{2\gamma_i} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i \quad (53)$$

设计的虚拟控制器 α_i 和自适应律 $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i$ 分别为

$$\alpha_i = -c_i \tanh(s_i) - \tanh(s_i) - \frac{5}{2} \tanh(s_i) \left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \right)^2 - k_i \tilde{z}_1 + \mathcal{H}_i \quad (54)$$

$$\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i = -\gamma_i \tanh(s_i) \boldsymbol{\phi}_i(\hat{\mathbf{z}}_i) - \sigma_i \boldsymbol{\vartheta}_i \quad (55)$$

其中, c_i, σ_i, γ_i 为设计的正参数,

$$\mathcal{H}_i = \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} (\hat{z}_2 + \boldsymbol{\vartheta}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1)) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{z}_j} \dot{\hat{z}}_j + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_j} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_j + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_d^{(j-1)}} y_d^{(j)}$$

基于式 (53) ~ (55), 可求得 \mathcal{V}_i 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_i \leq & -l_i \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i - \sum_{j=1}^i c_j \tanh^2(s_j) + \\ & \frac{1}{2} \tanh^2(s_1) + \sum_{j=2}^{i+1} \frac{1}{2} s_j^2 + \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j}{\gamma_j} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_j^T \boldsymbol{\vartheta}_j + \\ & \frac{i-1}{2} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1 + C_i \end{aligned} \quad (56)$$

其中, $l_i = l_{i-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Gamma_1^2$, $C_i = C_{i-1} + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_1^2 + \frac{1}{2} \bar{d}_1^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\vartheta}_i^{*T} \boldsymbol{\vartheta}_i^*$.

步骤 n . 值得注意的是, 在考虑系统的稳定性问题时, 一个非周期性事件触发控制方案对系统的通信传输是必要的. 也就是说, 控制信号 $u(t)$ 的更新不是基于固定周期采样, 而是当系统的某个性能指标超出设定的阈值条件时才进行信号更新. 然后通过更精确的控制信号 $u(t)$ 获得更好的系统性能. 在上述讨论的基础上, 建立固定阈值的事件触发控制策略为

$$w(t) = \alpha_n + y_d^{(n)} - \bar{\eta} \tanh\left(\frac{\tanh(s_n) \bar{\eta}}{\varsigma}\right) \quad (57)$$

$$u(t) = w(t_k), \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (58)$$

$$t_{k+1} = \inf\{t \in \mathbf{R} \mid |\delta(t)| \geq \eta\}, t_1 = 0 \quad (59)$$

其中, $\varsigma, \eta, \bar{\eta} > \eta$ 均为正的常数, $\delta(t) = w(t) - u(t)$ 表示测量误差, $t_k, k \in \mathbf{Z}^+$ 表示控制器的事件触发时刻, 即每当式 (59) 中的条件被触发时, 时间将标记为 t_{k+1} , 控制信号将更新为 $u(t_{k+1})$ 并应用于系统; 当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, 控制信号 $w(t_k)$ 保持不变. 因此, 存在一个连续的时变函数 $\tau(t)$ 满足 $\tau(t_k) = 0$, $\tau(t_{k+1}) = \pm 1, |\tau(t)| \leq 1, \forall t \in [t_k, t_{k+1})$, 使得 $w(t) = u(t) + \tau(t)\eta$.

构造如下包含对数函数的 Lyapunov 泛函:

$$\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_{n-1} + \ln(\cosh(s_n)) + \frac{1}{2\gamma_n} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_n^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_n \quad (60)$$

求得 \mathcal{V}_n 的导数

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_n = & \dot{\mathcal{V}}_{n-1} + \tanh(s_n) \left[u(t) + \boldsymbol{\vartheta}_n^{*T} \boldsymbol{\phi}_n(\hat{\mathbf{z}}_n) - \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_n^T \boldsymbol{\phi}_n(\hat{\mathbf{z}}_n) - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} (\hat{z}_2 + \Delta f_1 + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + \epsilon_1 + d_1(t)) - \mathcal{H}_n \right] + \frac{1}{\gamma_n} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_n^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}}_n = \\ & \dot{\mathcal{V}}_{n-1} + \tanh(s_n) \left[\alpha_n - \bar{\eta} \tanh\left(\frac{\tanh(s_n) \bar{\eta}}{\varsigma}\right) - \tau(t)\eta + \boldsymbol{\vartheta}_n^{*T} \boldsymbol{\phi}_n(\hat{\mathbf{z}}_i) - \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_n^T \boldsymbol{\phi}_n(\hat{\mathbf{z}}_n) - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} (\hat{z}_2 + \Delta f_1 + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + \epsilon_1 + d_1(t)) - \mathcal{H}_n \right] + \frac{1}{\gamma_n} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_n^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}}_n \end{aligned} \quad (61)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n = & \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} (\hat{z}_2 + \boldsymbol{\vartheta}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1)) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{z}_j} \dot{\hat{z}}_j + \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_j} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_j + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_d^{(j-1)}} y_d^{(j)} \end{aligned}$$

根据引理 5, 可得下列不等式

$$\begin{aligned} -\tanh(s_n) \tau(t) \eta - \tanh(s_n) \bar{\eta} \tanh\left(\frac{\tanh(s_n) \bar{\eta}}{\varsigma}\right) & \leq \\ |\tanh(s_n) \bar{\eta}| - \tanh(s_n) \bar{\eta} \tanh\left(\frac{\tanh(s_n) \bar{\eta}}{\varsigma}\right) & \leq \\ 0.2785\varsigma & \end{aligned} \quad (62)$$

利用引理 2、假设 1、假设 2, $0 \leq \boldsymbol{\phi}_i^T(\cdot) \boldsymbol{\phi}_i(\cdot) \leq 1$, 结合不等式 (56), (61) 和 (62), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_n \leq & -l_n \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i - \sum_{j=1}^n c_j \tanh^2(s_j) + \\ & \frac{1}{2} \tanh^2(s_1) + \sum_{j=2}^n \frac{1}{2} s_j^2 + \frac{n-1}{2} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1 + \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{\gamma_j} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_j^T \boldsymbol{\vartheta}_j + \tanh(s_n) \left[\alpha_n + \frac{1}{2} \tanh(s_n) + \frac{5}{2} \tanh(s_n) \left(\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \right)^2 + k_n \tilde{z}_1 - \mathcal{H}_n \right] + \\ & \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_n^T \left(-\tanh(s_n) \boldsymbol{\phi}_n(\hat{\mathbf{z}}_n) - \frac{1}{\gamma_n} \dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}}_n \right) + \\ & 0.2785\varsigma + \mathcal{C}_n \end{aligned} \quad (63)$$

虚拟控制器 α_n 和自适应律 $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_n$ 设计为如下形式:

$$\alpha_n = -c_n \tanh(s_n) - \frac{1}{2} \tanh(s_n) - \frac{5}{2} \tanh(s_n) \left(\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \right)^2 - k_n \tilde{z}_1 + \mathcal{H}_n \quad (64)$$

$$\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_n = -\gamma_n \tanh(s_n) \boldsymbol{\phi}_n(\tilde{\mathbf{z}}_n) - \sigma_n \boldsymbol{\vartheta}_n \quad (65)$$

2.2 稳定性分析

本节给出由模糊观测器状态反馈构成的闭环系统 (1) 的稳定性判据来实现本文的控制目标。

定理 1. 在假设 1 ~ 3 成立的条件下, 考虑虚拟控制器信号 (40), (50), (54), (64), 模糊逻辑系统参数的自适应律 (41), (51), (55), (65) 以及事件触发条件 (57) ~ (59), 则可以保证式 (1) 所描述的非线性系统满足以下条件: 1) 组成的闭环系统中所有信号都是一致最终有界的; 2) 系统的跟踪误差收敛于原点的有界邻域内且能够满足指定性能; 3) 事件触发的时间间隔中存在一个下限 t^* 且 $t^* > 0$, 即该控制器避免了 Zeno 行为。

证明. 根据式 (60) 设计的包含了对数的 Lyapunov 函数, 通过其导数满足的不等式条件 (63), 将设计的虚拟控制器 (64) 和自适应律 (65) 代入式 (63), 最终可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_n \leq & -l_n \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_i - \sum_{j=1}^n c_j \tanh^2(s_j) + \\ & \frac{1}{2} \tanh^2(s_1) + \sum_{j=2}^n \frac{1}{2} s_j^2 + \frac{n-1}{2} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1 + \\ & \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{\gamma_j} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_j^T \boldsymbol{\vartheta}_j + 0.2785\zeta + C_n \end{aligned} \quad (66)$$

应用引理 3 和引理 4, 可得

$$\frac{1}{2} \tanh^2(s_1) \leq \frac{1}{2} s_1^2 \quad (67)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_j^T \boldsymbol{\vartheta}_j \leq -\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_j^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_j + \frac{1}{2} \boldsymbol{\vartheta}_j^{*T} \boldsymbol{\vartheta}_j^* \quad (68)$$

令 $\Psi_n, l_j, j = 1, \dots, n$ 为设计的正常数, 将式 (67) 和式 (68) 代入式 (66), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_n \leq & -(l_n + \Psi_n) \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 - \sum_{j=1}^n c_j \tanh^2(s_j) - \\ & \left(\frac{\sigma_1}{2\gamma_1} + \ell_1 - \frac{1}{m} - \frac{n-1}{2} \right) \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1 - \\ & \sum_{j=2}^n \left(\frac{\sigma_j}{2\gamma_j} + \ell_j - \frac{1}{m} \right) \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_j^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_j + \\ & \Psi_n \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \sum_{j=1}^n \ell_j \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_j^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} s_j^2 + \Delta_n \end{aligned} \quad (69)$$

其中, $\Delta_n = C_n + \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{2\gamma_j} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_j^{*T} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_j^* + 0.2785\zeta$. 选择如下参数

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1}{2\gamma_1} + \ell_1 - \frac{1}{m} - \frac{n-1}{2} = \chi_1^* \\ \frac{\sigma_j}{2\gamma_j} + \ell_j - \frac{1}{m} = \chi_j^*, j = 2, \dots, n \end{cases} \quad (70)$$

其中, $\chi_j^* > 0, j = 1, \dots, n$.

定义下列向量

$$\mathbf{h} = [\tilde{\mathbf{z}}^T, \mathbf{Tanh}^T(\underline{\mathbf{s}}_n), \tilde{\boldsymbol{\Xi}}^T]^T, \boldsymbol{\zeta} = [\tilde{\mathbf{z}}^T, \underline{\mathbf{s}}_n^T, \tilde{\boldsymbol{\Xi}}^T]^T \quad (71)$$

其中, $\tilde{\mathbf{z}} = [z_1, \dots, z_n]^T$, $\mathbf{Tanh}(\underline{\mathbf{s}}_n) = [\tanh(s_1), \dots, \tanh(s_n)]^T$, $\tilde{\boldsymbol{\Xi}} = [\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_n]^T$, $\underline{\mathbf{s}}_n = [s_1, \dots, s_n]^T$. 因此, 式 (69) 满足

$$\dot{\mathcal{V}}_n \leq -\varrho_1 \|\mathbf{h}\|^2 + \varrho_2 \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 + \Delta_n \quad (72)$$

其中, $\varrho_1 = \min\{l_n + \Psi_n, c_j, \chi_j^*\}$, $\varrho_2 = \max\{\Psi_n, \frac{1}{2}, \ell_j\}$. 为了使闭环系统中所有信号有界, 假定下列不等式成立

$$-\varrho_1 \|\mathbf{h}\|^2 + \varrho_2 \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 \leq 0 \quad (73)$$

则式 (73) 可以等价于

$$\dot{\mathcal{V}}_n \leq -\varrho_3 \|\mathbf{h}\|^2 + \Delta_n \quad (74)$$

其中, $\varrho_3 > 0$ 是设定的常数。

基于引理 4 和 $\|\mathbf{h}\|^2 \geq \tanh^2(\|\boldsymbol{\zeta}\|)$, 可得式 (73) 的充分条件

$$(\|\boldsymbol{\zeta}\| + 1)^2 \leq \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \quad (75)$$

此外, 式 (60) 中的 Lyapunov 函数满足下列有界性:

$$\psi_1(\|\boldsymbol{\zeta}\|) \leq \mathcal{V}_n \leq \psi_2(\|\boldsymbol{\zeta}\|) \quad (76)$$

其中, $\psi_1(\|\boldsymbol{\zeta}\|) = \frac{1}{2} \ln(\cosh(\|\boldsymbol{\zeta}\|))$, $\psi_2(\|\boldsymbol{\zeta}\|) = \|\boldsymbol{\zeta}\|^2$, 这意味着

$$\|\boldsymbol{\zeta}\| \leq \operatorname{arccosh}(e^{2\mathcal{V}_n}) \quad (77)$$

因此, 如果下列不等式

$$[\operatorname{arccosh}(e^{2\mathcal{V}_n}) + 1]^2 \leq \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \quad (78)$$

满足, 则可得到不等式 (75).

由 $\|\mathbf{h}\|^2 \geq \tanh^2(\|\boldsymbol{\zeta}\|)$ 可知, 不等式 (74) 可以进一步表达为

$$\dot{\mathcal{V}}_n \leq -\psi_3(\|\boldsymbol{\zeta}\|) + \Delta_n \quad (79)$$

其中, $\psi_3: \mathbf{R}^{3n} \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个严格递增的非负函数, 定义为 $\psi_3(\|\boldsymbol{\zeta}\|) = \varrho_3 \tanh^2(\|\boldsymbol{\zeta}\|)$. 根据文献 [1, 15, 26-27] 的研究结果, 状态变量 $\boldsymbol{\zeta}$ 是一致最终有界的, 即

$$\|\zeta(t)\| < \bar{r}, \forall t \geq T(\bar{r}, \|\zeta(0)\|) \quad (80)$$

其中, \bar{r} 表示包含 $\tilde{z}, \underline{s}_n, \tilde{\Xi}$ 的球半径, $T(\bar{r}, \|\zeta(0)\|)$ 是一个正常数表示到达球面的最终时间. $\bar{r}, T(\bar{r}, \|\zeta(0)\|)$ 最终的形式为

$$T = \begin{cases} 0, & \|\zeta(0)\| \leq (\psi_2^{-1} \circ \psi_1)(\bar{r}) \\ \frac{\psi_2(\|\zeta(0)\|) - \psi_1((\psi_2^{-1} \circ \psi_1)(\bar{r}))}{\psi_3(\psi_2^{-1} \circ \psi_1)(\bar{r}) - \Delta_n}, & \|\zeta(0)\| > (\psi_2^{-1} \circ \psi_1)(\bar{r}) \end{cases}$$

其中, “ \circ ”表示函数的复合运算. 从式 (78) 和式 (80) 可以得出, 式 (73) 的充分条件为

$$[\operatorname{arccosh}(e^{2\iota}) + 1]^2 \leq \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \quad (81)$$

其中, $\iota = \max(\bar{r}, \|\zeta(0)\|)$.

因此, 闭环系统中的所有信号 $\tilde{z}, \underline{s}_n, \mathbf{Tanh}(\underline{s}_n), \tilde{\Xi}$ 都是有界的. 结合式 (32) 和闭环系统信号的有界性, 下列不等式成立

$$|s_1(t)| = \left| \pi(t) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\beta_{\min}}{\beta_{\max}} \right) \right| \leq \bar{r} \quad (82)$$

可得如下结果

$$|\pi(t)| \leq \left| \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\beta_{\min}}{\beta_{\max}} \right) \right| + \bar{r} \quad (83)$$

利用变换 (29) 和 $\Upsilon(\pi)$ 为严格递增函数的性质, 跟踪误差满足

$$|\bar{s}_1(t)| = \rho(t) |\Upsilon(\pi(t))| \leq \rho(t) \left| \Upsilon \left(\left| \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\beta_{\min}}{\beta_{\max}} \right) \right| + \bar{r} \right) \right| \quad (84)$$

由式 (84) 可得, 当球的半径 \bar{r} 趋于 0 时, 系统的跟踪误差 $\bar{s}_1(t)$ 趋于 0; 当球的半径 \bar{r} 趋于 ∞ 时, 系统的跟踪误差 $\bar{s}_1(t)$ 趋于 $\beta_{\min}\rho(t)$ 或 $\beta_{\max}\rho(t)$. 根据性能函数的递减性, 跟踪误差 $|\bar{s}_1(t)| < \max\{\beta_{\min}\rho(0), \beta_{\max}\rho(0)\}$. 因此, 式 (84) 中跟踪误差最终会收敛到以原点为中心的有界邻域内, 且满足指定的性能要求.

根据 $\delta(t) = w(t) - u(t), \forall t \in [t_k, t_{k+1})$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\delta(t)| &= \frac{d}{dt} (\delta(t) \times \delta(t))^{\frac{1}{2}} = \\ \operatorname{sign}(\delta(t)) \dot{\delta}(t) &\leq |\dot{w}(t)| \end{aligned}$$

由于系统中所有信号都是有界的, 则必然存在一个正常数 ν , 使得 $|\dot{w}(t)| \leq \nu$. 在该事件触发机制中, $\delta(t_k) = 0$, 且 $\lim_{t \rightarrow t_{k+1}} \delta(t) = \eta$, 事件触发时间间隔满足 $t_{k+1} - t_k \geq \eta/\nu$. 由此可得时间间隔的下界 $t^* = \eta/\nu > 0$, 从而证明本文提出的事件触发机

制不发生 Zeno 行为. □

3 仿真算例

考虑图 1 中带齿轮连接的单连杆机械手^[14, 29], 其动力学模型描述为

$$J\ddot{q} + B\dot{q} + Mgl \sin(q) = u(t) \quad (85)$$

令 $z_1 = q, z_2 = \dot{q}$ 分别表示连杆的角度和角速度, B 表示整体的阻尼系数, J 是电机的总转动惯量, M 是连杆的质量, l 表示关节轴到质心的距离, g 是重力加速度. 若系统 (85) 存在外部扰动, 可得如下状态空间方程:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{B}{J}z_2 - \frac{Mgl}{J} \sin(z_1) + \frac{u(t)}{J} + \frac{d(t)}{J} \end{cases} \quad (86)$$

上述系统选择以下物理参数: $J=1, B=2, M=2, g=10, l=1, d(t)=0.1 \cos(t)$ 表示系统的外部扰动, 满足 $|d(t)| \leq \bar{d}=0.1$, 则 $f(z_1)=0, f(z_2)=-2z_2-10 \sin(z_1)$, 为了估计系统的非线性函数, 本文设计如下模糊隶属度函数:

$$\mu_{F_i^j}(\hat{z}_i) = e^{-\left(\frac{\hat{z}_i - 3 + j}{16}\right)^2}$$

其中, $i=1, 2; j=1, 2, \dots, 6$. 模糊状态观测器为

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 + \boldsymbol{\vartheta}_1^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_1) + k_1(y - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 = u + \boldsymbol{\vartheta}_2^T \boldsymbol{\phi}_1(\hat{z}_2) + k_2(y - \hat{z}_1) \end{cases} \quad (87)$$

其中, 观测器增益选择 $k_1=0.8, k_2=130$ 使得矩阵 \mathbf{A} 为 Hurwitz 矩阵, 通过选择 $\mathbf{P}=10\mathbf{I}$, 求得如下正定对称矩阵

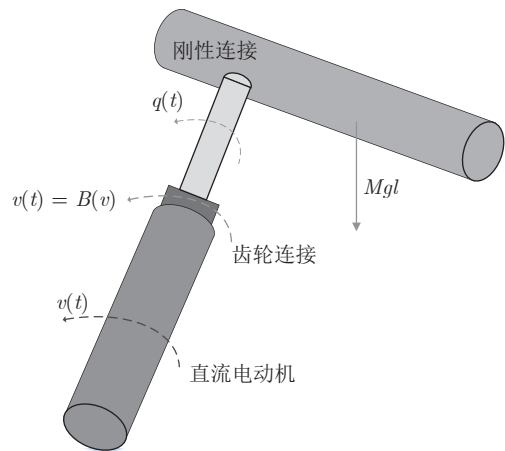


图 1 带齿轮连接的单连杆机械手

Fig.1 Single-link robot arm with a gearing connection

$$Q = \begin{bmatrix} 6.2981 & 0.0385 \\ 0.0385 & 818.7808 \end{bmatrix}$$

此外, 控制器设计过程中其他参数分别设置为 $\beta_{\min} = 0.999$, $\beta_{\max} = 1$, $\rho_0 = 2.2$, $\rho_{\infty} = 0.55$, $q = 3.2$, $c_1 = 0.6$, $c_2 = 60.5$, $\gamma_1 = 3.5$, $\gamma_2 = 20.8$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 5$, $\bar{\eta} = 1.1$, $\varsigma = 4$, $\eta = 1.5$. 系统 (86) 的初始状态为 $z(0) = [0.4, 0.1]^T$, 观测器 (87) 的初始状态为 $\hat{z}(0) = [-0.2, -1]^T$, $\vartheta_1(0) = [1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$, $\vartheta_2(0) = [3, 3, 3, 3, 3, 3]^T$. 参考信号 $y_d = 0.5 \sin(3t) + \cos(t)$.

在系统参数设置相同的情况下, 图 2 ~ 4 分别展示了不同方法下系统跟踪误差 $\bar{s}_1(t)$, 状态变量 z_1 , z_2 和跟踪信号 y_d , \dot{y}_d 的轨迹图. 文献 [3] 通过将非线性系统中包含的不确定项和扰动作为系统的总扰动并用一个扩展状态来表示, 然后设计了一类高增益的扩张观测器来分析系统的输出跟踪控制问题, 但是系统的收敛效果依赖于观测器参数的选取. 文献 [26] 基于状态观测器, 通过构造对数 Lyapunov

函数分析了一类非线性系统的自适应模糊跟踪控制问题, 但未考虑对系统的跟踪误差进行指定性能约束和事件触发机制. 从图中仿真结果可以看出, 文献 [3] 和文献 [26] 方法下系统的跟踪误差在某些范围超出了指定界限, 且系统状态的跟踪误差也较大, 这也说明当前参数下本文设计的控制方案系统跟踪效果较好. 图 5 和图 6 展示了基于观测器和指定性能约束下系统 (85) 和观测器 (87) 的状态响应轨线, 反映了模糊状态观测器的观测性能. 图 7 描述了自适应参数 ϑ_1 , ϑ_2 范数的演化轨迹. 图 8 描述了传统时间采样和事件触发采样条件下控制信号的轨线图, 结合图 9 事件触发的采样结果, 在采样步长 $h = 0.002$ 的情况下, 相比于传统时间采样, 基于事件触发的采样次数相对较少, 且能够达到控制效果, 减少信号传输, 进一步节约通信资源. 由仿真结果可知, 本文提出的控制方案能使闭环系统中的所有信号都是有界的, 并且通过指定性能变换, 系统的跟踪误差能够约束在指定范围.

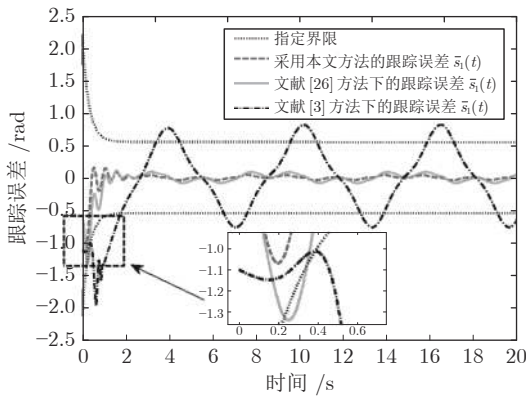


图 2 不同方法下的系统跟踪误差 \bar{s}_1

Fig.2 System tracking errors \bar{s}_1 under different methods

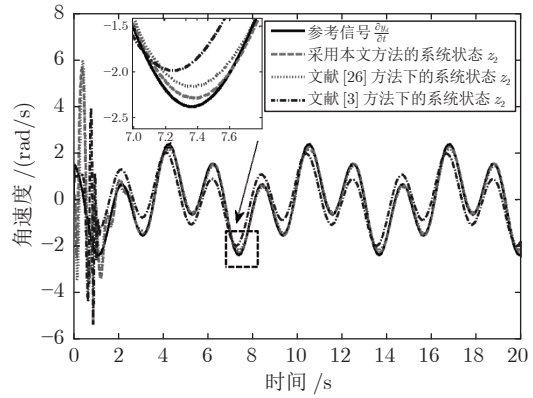


图 4 参考信号 \dot{y}_d 和不同方法下的系统状态 z_2

Fig.4 Reference signal \dot{y}_d and system states z_2 under different methods

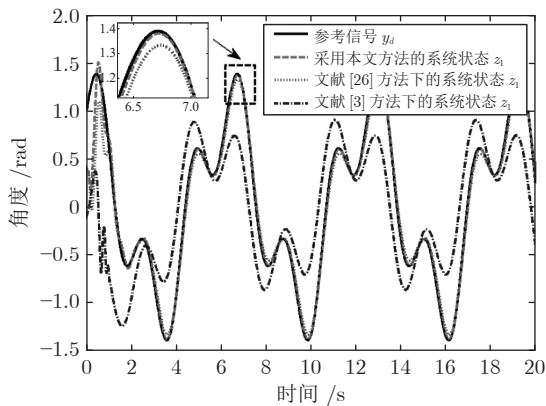


图 3 参考信号 y_d 和不同方法下的系统状态 z_1

Fig.3 Reference signal y_d and system states z_1 under different methods

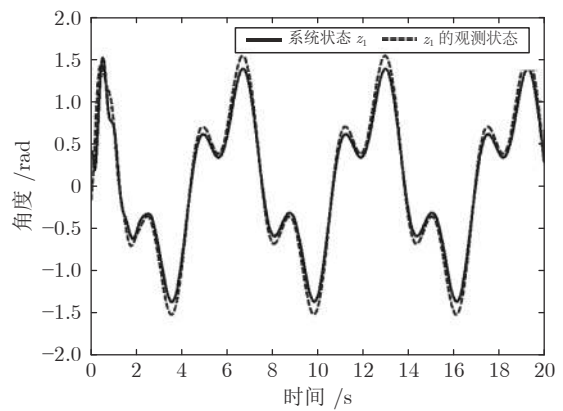


图 5 系统输出 $y = z_1$ 和观测状态 \hat{z}_1

Fig.5 System output $y = z_1$ and observed state \hat{z}_1

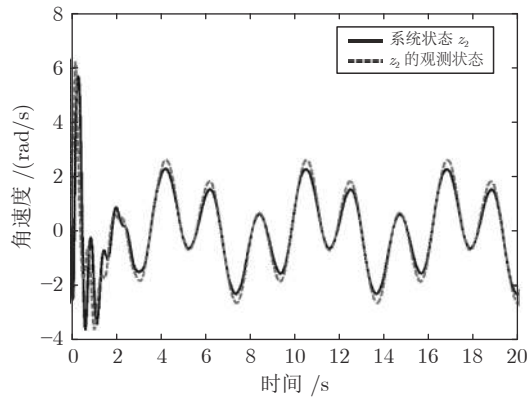
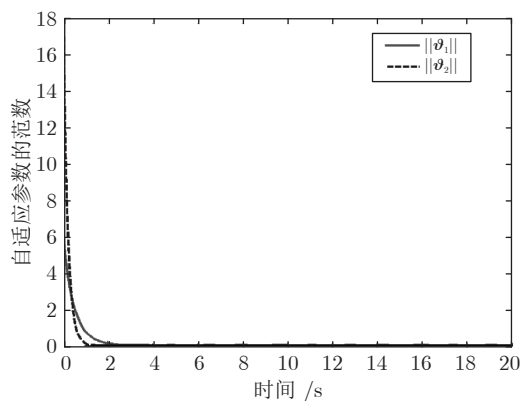
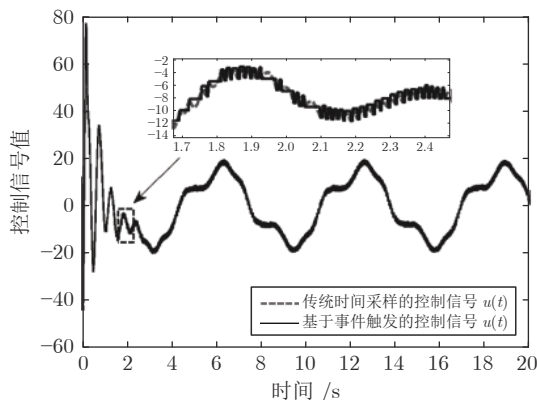
图6 系统状态 z_2 和观测状态 \hat{z}_2 Fig.6 System state z_2 and observed state \hat{z}_2 图7 自适应律 $\|\theta_1\|$ 和 $\|\theta_2\|$ Fig.7 Adaptive laws $\|\theta_1\|$ and $\|\theta_2\|$ 

图8 不同采样策略下的控制信号

Fig.8 Control signals under different sampling strategies

4 结束语

本文研究了一类具有外部扰动的非线性系统跟踪问题. 首先, 利用模糊逻辑系统来处理系统未知的非线性函数, 并构造了模糊状态观测器来估计系

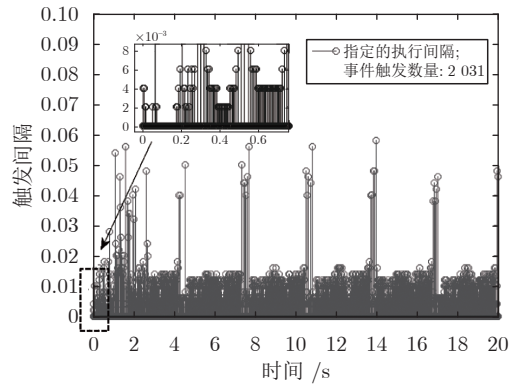


图9 事件触发间隔和触发次数

Fig.9 Event trigger interval and number of triggers

统的不可测状态. 然后, 通过对系统跟踪误差引入指定性能变换, 利用反步法结合包含对数函数的 Lyapunov 泛函和事件触发策略设计了一个自适应模糊控制器. 该策略不仅可以保证系统的跟踪误差能收敛到预先指定范围, 而且使得系统的控制信号不需要频繁更新, 可以进一步节约网络资源. 最后, 给出一个数值仿真算例验证了提出理论的有效性.

References

- Martin J, Corless G L. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, **26**(5): 1139–1144
- Wang Xin-Hua, Chen Zeng-Qiang, Yuan Zhu-Zhi. Output tracking based on extended observer for nonlinear uncertain systems. *Control and Decision*, 2004, **19**(10): 1113–1116 (王新华, 陈增强, 袁著祉. 基于扩张观测器的非线性不确定系统输出跟踪. *控制与决策*, 2004, **19**(10): 1113–1116)
- Cai Z, Dequeiroz M S, Dawson D M. Robust adaptive asymptotic tracking of nonlinear systems with additive disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(3): 524–529
- Pan H H, Chang X P, Zhang D. Event-triggered adaptive control for uncertain constrained nonlinear systems with its application. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2020, **16**(6): 3818–3827
- Xing L T, Wen C Y, Liu Z T, Su H Y, Cai J P. Event-triggered adaptive control for a class of uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(4): 2071–2076
- Wang W, Tong S. Distributed adaptive fuzzy event-triggered containment control of nonlinear strict-feedback systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, **50**(9): 3973–3983
- Su X H, Liu Z, Lai G Y, Zhang Y, Chen C L P. Event-triggered adaptive fuzzy control for uncertain strict-feedback nonlinear systems with guaranteed transient performance. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, **27**(12): 2327–2337
- Wang J H, Liu Z, Chen C L P, Zhang Y. Event-triggered fuzzy adaptive compensation control for uncertain stochastic nonlinear systems with given transient specification and actuator failures. *Fuzzy Sets and Systems*, 2019, **365**: 1–21
- Wang Min, Huang Long-Wang, Yang Chen-Guang. Event-

- triggered adaptive critic fault-tolerant control for a class of discrete-time MIMO systems. *Acta Automatica Sinica*, 2022, **48**(5): 1234–1245
(王敏, 黄龙旺, 杨辰光. 基于事件触发的离散 MIMO 系统自适应评判容错控制. 自动化学报, 2022, **48**(5): 1234–1245)
- 10 Bechlioulis C P, Rovithakis G A. A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems. *Automatica*, 2014, **50**(4): 1217–1226
- 11 Si Wen-Jie, Wang Cong, Zeng Wei. Observed-based adaptive neural tracking control for nonlinear systems with unknown dead-zone. *Control and Decision*, 2017, **32**(5): 780–788
(司文杰, 王聪, 曾玮. 状态观测的未知死区非线性系统的自适应神经网络跟踪控制. 控制与决策, 2017, **32**(5): 780–788)
- 12 Yang Bin, Zhou Qi, Cao Liang, Lu Ren-Quan. Event-triggered control for multi-agent systems with prescribed performance and full state constraints. *Acta Automatica Sinica*, 2019, **45**(8): 1527–1535
(杨彬, 周琪, 曹亮, 鲁仁全. 具有指定性能和全状态约束的多智能体系统事件触发控制. 自动化学报, 2019, **45**(8): 1527–1535)
- 13 Qiu J B, Sun K K, Wang T, Gao H J. Observer-based fuzzy adaptive event-triggered control for pure-feedback nonlinear systems with prescribed performance. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, **27**(11): 2152–2162
- 14 Qiu J B, Wang T, Sun K K, Rudas I J, Gao H J. Disturbance observer-based adaptive fuzzy control for strict-feedback nonlinear systems with finite-time prescribed performance. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2022, **30**(4): 1175–1184
- 15 Fischer N, Dani A, Sharma N, Dixon W E. Saturated control of an uncertain nonlinear system with input delay. *Automatica*, 2013, **49**(6): 1741–1747
- 16 Zhang Hua-Guang, Zhang Xin, Luo Yan-Hong, Yang Jun. An overview of research on adaptive dynamic programming. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 303–311
(张化光, 张欣, 罗艳红, 杨珺. 自适应动态规划综述. 自动化学报, 2013, **39**(4): 303–311)
- 17 Sun Z Y, Zhang C H, Wang Z. Adaptive disturbance attenuation for generalized high-order uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 2017, **80**: 102–109
- 18 Li D F, Pan Z H, Deng H B, Hu L Y. Adaptive path following controller of a multi-joint snake robot based on the improved serpenoid curve. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, **69**(4): 3831–3842
- 19 Deng H, Krstić M. Stochastic nonlinear stabilization-I: A backstepping design. *Systems and Control Letters*, 1997, **32**(3): 143–150
- 20 Li Y X, Yang G H. Adaptive neural control of pure-feedback nonlinear systems with event-triggered communications. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, **29**(12): 6242–6251
- 21 Wang Tong, Qiu Jian-Bin, Gao Hui-Jun. Event-triggered adaptive neural network control for a class of stochastic nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2019, **45**(1): 226–233
(王桐, 邱剑彬, 高会军. 随机非线性系统基于事件触发机制的自适应神经网络控制. 自动化学报, 2019, **45**(1): 226–233)
- 22 Zhang C H, Yang G H. Event-triggered adaptive output feedback control for a class of uncertain nonlinear systems with actuator failures. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, **50**(1): 201–210
- 23 Zhou Q, Shi P, Xu S. Adaptive output-feedback fuzzy tracking control for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2011, **19**(5): 972–982
- 24 Huang L T, Li Y M, Tong S C. Fuzzy adaptive output feedback control for MIMO switched nontriangular structure nonlinear systems with unknown control directions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, **50**(2): 550–564
- 25 Cao L, Li H Y, Wang N, Zhou Q. Observer-based event-triggered adaptive decentralized fuzzy control for nonlinear large-scale systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, **27**(6): 1201–1214
- 26 Tong S C, Min X, Li Y. Observer-based adaptive fuzzy tracking control for strict-feedback nonlinear systems with unknown control gain functions. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, **50**(9): 3903–3913
- 27 Tong S C, Li Y M, Feng G, Li T S. Observer-based adaptive fuzzy backstepping dynamic surface control for a class of MIMO nonlinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B, Cybernetics*, 2011, **41**(4): 1124–1135
- 28 Wang W, Tong S. Adaptive fuzzy bounded control for consensus of multiple strict-feedback nonlinear systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, **48**(2): 522–531
- 29 Zhang L L, Yang G H. Adaptive fuzzy prescribed performance control of nonlinear systems with hysteretic actuator nonlinearity and faults. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, **48**(12): 2349–2358
- 30 Wang L, Basin M V, Li H, Lu R Q. Observer-based composite adaptive fuzzy control for nonstrict-feedback systems with actuator failures. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, **26**(4): 2336–2347



游星星 四川大学电气工程学院助理研究员. 主要研究方向为神经网络的稳定性理论, 非线性系统的自适应控制及其应用.

E-mail: youxingxing@stu.scu.edu.cn
(**YOU Xing-Xing** Assistant researcher at the College of Electrical Engineering, Sichuan University. His research interest covers the stability theory of neural network, and adaptive control of nonlinear systems and its application.)



杨道文 四川大学电气工程学院博士研究生. 主要研究方向为机器视觉、感知, 人工智能和大数据. 本文通信作者.

E-mail: yangdaowen@dubhedi.com
(**YANG Dao-Wen** Ph.D. candidate at the College of Electrical Engineering, Sichuan University. His research interest covers machine vision, perception, artificial intelligence, and big data. Corresponding author of this paper.)



郭 斌 四川大学电气工程学院副研究员. 2020 年获得电子科技大学博士学位. 主要研究方向为故障诊断-容错控制, 信息物理融合系统, 预测控制和鲁棒控制.

E-mail: bguodxl@163.com

(GUO Bin Associate researcher at the College of Electrical Engineering, Sichuan University. He received his Ph.D. degree from University of Electronic Science and Technology in 2020. His research interest covers fault diagnosis-fault-tolerant control, cyber-physical fusion system, predictive control, and robust control.)



刘 凯 四川大学电气工程学院教授. 分别于 1996 年和 2001 年获得四川大学计算机专业学士和硕士学位. 2010 年获得美国肯塔基大学电气工程博士学位. 主要研究方向为计算机/机器视觉, 主动/被动立体视觉和图像处理. E-mail: kailiu@scu.edu.cn

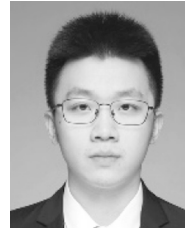
(LIU Kai Professor at the College of Electrical Engineering, Sichuan University. He received his bachelor and master degrees in computer science from Sichuan University, in 1996 and 2001, respectively, and his Ph.D. degree in electrical engineering from the University of Kentucky, USA in 2010. His research interest covers computer/machine vision, active/passive stereo vision, and image processing.)



佃松宜 四川大学电气工程学院教授. 分别于 1996 年和 2002 年获得四川大学控制工程专业学士和硕士学位. 2009 年获得日本东本大学纳米力学工程专业博士学位. 主要研究方向为先进控制理论和智能信号处理, 电力电子系统及其控制, 运动控制和机

器人控制. E-mail: scudiansy@scu.edu.cn

(DIAN Song-Yi Professor at the College of Electrical Engineering, Sichuan University. He received his bachelor and master degrees in control engineering from Sichuan University in 1996 and 2002, respectively. He received his Ph.D. degree in nanomechanics engineering from Tohoku University, Japan in 2009. His research interest covers advanced control methods and intelligent signal processing, power-electronics system and its control, motion control, and robotic control.)



朱雨琪 四川大学电气工程学院博士研究生. 主要研究方向为软体机器人建模及运动控制, 抗扰控制.

E-mail: zhuyuqi@stu.scu.edu.cn

(ZHU Yu-Qi Ph.D. candidate at the College of Electrical Engineering, Sichuan University. His research interest covers modeling and motion control for soft robots, and disturbance-rejection control.)