

基于自适应 LASSO 先验的稀疏贝叶斯学习算法

白宗龙¹ 师黎明² 孙金玮¹

摘要 为了提高稀疏信号恢复的准确性,开展了基于自适应套索算子 (Least absolute shrinkage and selection operator, LASSO) 先验的稀疏贝叶斯学习 (Sparse Bayesian learning, SBL) 算法研究. 1) 在稀疏贝叶斯模型构建阶段,构造了一种新的多层贝叶斯框架,赋予信号中元素独立的 LASSO 先验. 该先验比现有稀疏先验更有效地鼓励稀疏并且该模型中所有参数更新存在闭合解. 然后在该多层贝叶斯框架的基础上提出了一种基于自适应 LASSO 先验的 SBL 算法. 2) 为降低提出的算法的计算复杂度,在贝叶斯推断阶段利用空间轮换变元方法对提出的算法进行改进,避免了矩阵求逆运算,使参数更新快速高效,从而提出了一种基于自适应 LASSO 先验的快速 SBL 算法. 本文提出的算法的稀疏恢复性能通过实验进行了验证,分别针对不同大小测量矩阵的稀疏信号恢复以及单快拍波达方向 (Direction of arrival, DOA) 估计开展了实验. 实验结果表明:提出基于自适应 LASSO 先验的 SBL 算法比现有算法具有更高的稀疏恢复准确度;提出的快速算法的准确度略低于提出的基于自适应 LASSO 先验的 SBL 算法,但计算复杂度明显降低.

关键词 稀疏信号恢复, 稀疏贝叶斯学习, 自适应 LASSO 先验, 贝叶斯推断

引用格式 白宗龙, 师黎明, 孙金玮. 基于自适应 LASSO 先验的稀疏贝叶斯学习算法. 自动化学报, 2022, 48(5): 1193–1208

DOI 10.16383/j.aas.c210022

Sparse Bayesian Learning Using Adaptive LASSO Priors

BAI Zong-Long¹ SHI Li-Ming² SUN Jin-Wei¹

Abstract To improve the recovery accuracy of sparse signal, we study on sparse Bayesian learning (SBL) algorithm using adaptive least absolute shrinkage and selection operator (LASSO) priors. First, a hierarchical Bayesian framework is built for Bayesian model. Each elements of the weights is assigned with hierarchical priors, resulting in adaptive LASSO priors. Compared with other priors, the proposed adaptive LASSO priors encourage sparsity more efficiently and all the variables in the proposed model can be updated using close form solution. Thus, a SBL algorithm using adaptive LASSO priors is proposed. Second, the space alternating approach is integrated into the proposed algorithm to reduce the computational complexity by avoiding matrix inverse operation. In this way, the parameters can be updated efficiently and a fast SBL algorithm using adaptive LASSO priors is proposed. The accuracy performance of the proposed algorithms are verified using numerical simulations versus different size of measurement matrix and single snapshot direction-of-arrival (DOA) estimation, respectively. The experiments show that the root mean square error (RMSE) of the proposed adaptive LASSO priors based SBL method is lower than state-of-the-art methods. Besides, the RMSE of proposed fast algorithm is slightly lower than the proposed adaptive LASSO priors based SBL method but achieves lower computational complexity performance.

Key words Sparse signal recovery, sparse Bayesian learning, reweighted LASSO priors, Bayesian inference

Citation Bai Zong-Long, Shi Li-Ming, Sun Jin-Wei. Sparse Bayesian learning using adaptive LASSO priors. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(5): 1193–1208

稀疏信号恢复具有广泛的应用性和充分的理论支持,因此成为信号处理领域中的一个重要且受到持续关注的研究课题. 稀疏信号恢复可应用于麦

克风阵列信号处理^[1-3], 图像处理^[4-9], 脑电信号处理^[10-11], 雷达信号处理^[12-14]等领域. 目前,有多种稀疏信号恢复算法被提出,主要包括基于 ℓ_p 范数 ($0 < p \leq 1$) 惩罚项的凸优化算法,贪婪算法,贝叶斯方法. 其中,基于 ℓ_p 范数惩罚项的凸优化算法有基追踪去噪 (Basis pursuit denoise, BPDN), 欠定系统聚焦求解 (Focal underdetermined system solver, FOCUSS) 等,贪婪算法有正交匹配追踪 (Orthogonal matching pursuit, OMP), 压缩采样匹配追踪 (Compressive sampling matching pursuit, CoSaMP) 等,贝叶斯方法有稀疏贝叶斯学习

收稿日期 2021-01-12 录用日期 2021-04-29
Manuscript received January 12, 2021; accepted April 29, 2021
中央高校基本科研业务费项目 (IR2021222) 资助
Supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities (IR2021222)
本文责任编辑 张军平
Recommended by Associate Editor ZHANG Jun-Ping
1. 哈尔滨工业大学仪器科学与工程学院 哈尔滨 150006 中国
2. 奥尔堡大学建筑设计与媒体艺术系 奥尔堡 9000 丹麦
1. School of Instrument Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150006, China 2. Create, Aalborg University, Aalborg 9000, Denmark

(Sparse Bayesian learning, SBL) 等. 基于 ℓ_p 范数惩罚项的凸优化算法在给定合适的正则因子时可以取得比较好的稀疏恢复效果, 但是在实际应用中, 正则化因子的选取通常比较困难, 一般通过经验选取导致对算法环境变化不鲁棒^[15]. 贪婪算法在已知源信号的稀疏度的条件下表现良好, 信号恢复效果在源信号稀疏度未知的条件下变差, 而实际应用中源信号稀疏度很难获得, 限制了该类算法的应用. 贝叶斯算法具有自回归与不确定性估计的特性, 可以自适应学习正则化因子, 并且可以提供具有不确定度的估计结果. 因此, 基于 SBL 的稀疏信号恢复算法受到越来越多的关注.

SBL 与其他贝叶斯算法类似, 通过赋予信号稀疏先验分布, 最大化后验分布得到信号的估计. 与其他贝叶斯方法不同的是 SBL 采取构建多层贝叶斯框架的方式赋予信号中每个元素独立的稀疏分布, 根据稀疏分布的不同, SBL 可以分为基于 Student-t 先验的 SBL^[16], 基于 Laplace 先验的 SBL^[17-18], 基于合成 LASSO 先验的分布等^[19]. SBL 最早在文献 [16] 中提出, 该文献中构建了一种多层贝叶斯框架, 通过赋予信号中每个元素多层共轭先验, 等价赋予信号 Student-t 稀疏先验. 多层共轭先验的贝叶斯框架的构造使得模型中每层参数可以依次更新. 类似的, 文献 [17] 提出一种基于 Laplace 先验的多层贝叶斯框架. 文献 [18] 中提出一种针对复值信号的自聚焦的基于 Laplace 先验的多层贝叶斯框架. 文献 [19] 中提出一种基于合成 LASSO 先验的多层贝叶斯框架, 赋予信号 LASSO 先验. 由于 LASSO 分布缺少共轭先验, 文中采用了高斯接近的方法进行求解. 该文献对应于在文献 [20] 中提出的一种基于凸优化的自适应 LASSO 算法.

由于 SBL 算法在参数更新时需要矩阵求逆运算, 导致计算量很高. 为降低计算复杂度, 文献 [21] 提出一种基于基选择的快速 SBL 算法, 文献 [17] 给出了 Laplace 先验下基于基选择的快速算法, 但是该算法无法推广至复值信号模型. 文献 [22] 提出一种基于最大化证据下界的快速算法, 但是该算法稳定性欠佳, 存在不收敛的情况. 文献 [23] 提出一种基于近似消息传递 (Approximate message passing, AMP) 的 SBL 算法, 并在文献 [24] 针对相干信号进行进一步改进. 文献 [25] 提出一种基于空间轮换的 SBL 算法. 文献 [26] 在 [25] 基础上提出一种应用于大数据量的基于标量平均场的 SBL 算法.

为提高稀疏信号恢复的准确性, 本文开展了基于自适应 LASSO 先验的 SBL 算法研究. 在贝叶斯模型构造阶段, 本文中通过构建一种与现有 SBL 算法不同的多层贝叶斯框架, 赋予信号中每个元素具

有独立权重的 LASSO 先验, 比现有稀疏先验更有效的鼓励稀疏. 根据该多层贝叶斯框架提出一种基于自适应 LASSO 先验的 SBL 算法. 为进一步降低提出算法的计算复杂度, 在贝叶斯推断阶段利用空间轮换技术避免矩阵求逆运算, 形成一种快速算法.

本文中使用的符号总结如下: \mathbf{R} 表示实数集合; \mathbf{C} 表示复数集合; $\|\mathbf{y}\|_0$ 表示向量 \mathbf{y} 的 ℓ_0 范数, 即向量 \mathbf{y} 中非零元素的个数; $\|\mathbf{y}\|_p$ ($0 < p \leq 1$) 表示向量 \mathbf{y} 的 ℓ_p 范数, 定义为 $\|\mathbf{y}\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, 其中, y_i 表示向量 \mathbf{y} 中第 i 个元素, $|y_i|$ 表示 y_i 的模; $\|\mathbf{y}\|_2 = \sqrt{\mathbf{y}^H \mathbf{y}}$ 表示向量 \mathbf{y} 的 Euclidean 范数, 又称为 ℓ_2 范数, 其中, \mathbf{y}^H 表示向量 \mathbf{y} 的共轭转置; $\|\mathbf{y}\|_F$ 表示向量 \mathbf{y} 的 Frobenius 范数; $\mathcal{N}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 表示向量 \mathbf{y} 服从于期望为 $\boldsymbol{\mu}$ 、方差为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的高斯分布; $\mathcal{CN}(\mathbf{y}; \bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\Sigma}})$ 表示向量 \mathbf{y} 服从于期望为 $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ 、方差为 $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ 的复高斯分布; $\mathcal{G}(z; a, b)$ 表示变量 z 服从于形状参数为 a ($a > 0$)、尺度参数为 b ($b > 0$) 的 Gamma 分布, 其函数形式为 $\mathcal{G}(z; a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} z^{a-1} e^{-bz}$; $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ 表示 Gamma 函数; $K_p(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh pt dt$ 表示修正 Bessel 函数, 其中, 当 $p = \frac{1}{2}$ 时有 $K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$; $\langle z \rangle$ 表示变量 z 的期望; $\text{Var}(z)$ 表示变量 z 的方差.

1 稀疏信号恢复问题描述

稀疏信号恢复问题是指已知测量矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{M \times N}$, 利用欠采样数据 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^M$ 和稀疏恢复算法估计稀疏信号 $\mathbf{g} \in \mathbf{R}^N$ 的问题. 实值稀疏信号恢复的数学模型表示如下:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{g} + \mathbf{w} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^M$ 是可加性高斯白噪声. 复值信号模型与实值信号模型的区别在于测量矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{M \times N}$ 是复值矩阵, 测量数据 $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^M$ 和稀疏信号 $\mathbf{g} \in \mathbf{C}^N$ 是复值向量, $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^M$ 是复值圆周对称高斯白噪声.

由于测量数据 \mathbf{x} 是欠采样数据, 即数据维度 M 小于信号维度 N , 因此使用最小二乘算法求解信号 \mathbf{g} 是一个不适定问题. 然而, Candes 等在文献 [27] 中证明了在已知信号 \mathbf{g} 是稀疏信号且满足有限等距性质 (Restricted isometry property, RIP) 条件下, 稀疏信号恢复问题具有唯一解. 为了利用信号的稀疏先验信息, 最直接的方法是添加正则项 $\|\mathbf{g}\|_0$ 约束解的范围. 从而将稀疏信号恢复问题转化为如下优化问题:

$$\mathcal{L}(\mathbf{g}) = \arg \min_{\mathbf{g}} \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{g}\|_2^2 + \zeta \|\mathbf{g}\|_0 \quad (2)$$

其中, ζ 是正则化因子. 然而, 凸优化问题 (2) 是一个 NP-hard 问题, 难以进行求解. 常用的求解问题 (2) 的方法是将 l_0 范数释放至 l_1 范数, 形成如下凸优化问题:

$$\mathcal{L}(\mathbf{g}) = \arg \min_{\mathbf{g}} \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{g}\|_2^2 + \zeta \|\mathbf{g}\|_1 \quad (3)$$

其中, $\|\cdot\|_1$ 表示 l_1 范数. 凸优化问题 (3) 可以通过 LASSO 算法进行求解, 但是 LASSO 算法不能一定保证收敛, 为提高算法性能, Zou 在文献 [20] 中对 LASSO 算法进行了改进, 提出了自适应 LASSO 算法, 并对该算法的 Oracle 特性进行了证明¹. 自适应 LASSO 算法求解如下优化问题:

$$\mathcal{L}(\mathbf{g}) = \arg \min_{\mathbf{g}} \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{g}\|_2^2 + \zeta \sum_{i=1}^N \omega_i |g_i| \quad (4)$$

其中, g_i 是信号 \mathbf{g} 中的第 i 个元素, ω_i 表示信号元素 g_i 的权重.

本文利用稀疏贝叶斯框架构建了基于自适应 LASSO 先验的 SBL 算法, 通过构建多层贝叶斯网络赋予信号中每个元素独立信号的 LASSO 先验, 从而实现贝叶斯框架下的自适应 LASSO 算法.

2 贝叶斯模型

在贝叶斯模型中, 所有未知变量都被认为是随机变量, 并根据未知变量的先验信息赋予随机变量不同的分布. 本文中根据信号的稀疏特性赋予未知信号 \mathbf{g} 自适应 LASSO 先验分布 $p(\mathbf{g}|\boldsymbol{\eta})$, 并且假设测量数据 \mathbf{x} 是一个条件概率为 $p(\mathbf{x}|\mathbf{g}, \rho)$ 的随机过程. 其中, ρ 表示噪声的精度, 即噪声方差的倒数. 下面将对该多层贝叶斯框架进行具体的描述.

2.1 观测模型

假定实值模型中观测噪声 \mathbf{w} 是方差为 ρ^{-1} 的高斯白噪声, 复值模型中观测噪声 \mathbf{w} 是方差为 ρ^{-1} 的圆周共轭复高斯白噪声, 则实值模型和复值模型中测量数据 \mathbf{x} 的条件概率表示如下:

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{g}, \rho, \varsigma) = \frac{\frac{M}{\rho^\varsigma}}{(\varsigma\pi)^{\frac{M}{\varsigma}}} e^{-\frac{\rho}{\varsigma}(\mathbf{x}-\mathbf{A}\mathbf{g})^H(\mathbf{x}-\mathbf{A}\mathbf{g})} = \begin{cases} \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{A}\mathbf{g}, \rho^{-1}\mathbf{I}_M), & \varsigma = 2 \\ \mathcal{CN}(\mathbf{x}; \mathbf{A}\mathbf{g}, \rho^{-1}\mathbf{I}_M), & \varsigma = 1 \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\varsigma = 2$ 对应于实值模型, $\varsigma = 1$ 对应于复值模型. 为更新噪声精度 ρ , 假设 ρ 服从于如下 Gamma

¹ Oracle 特性具体包括模型选择相和性和参数估计渐进正态性. 其含义为, 在一些变量不是提前已知的情况下, 如果算法具有 Oracle 特性, 那么它能够筛选出正确的预测的概率为 1 而且能够有效而正确地估计非零估计量.

分布:

$$p(\rho|c, d) = \mathcal{G}(c, d) \quad (6)$$

其中, c 和 d 是预设的模型参数, 且 $c > 0$ 是 Gamma 分布的形状参数, $d > 0$ 是 Gamma 分布的尺度参数. 在变量 ρ 服从于 Gamma 分布 (6) 的假定下, 变量的均值和方差分别表示为 $\frac{c}{d}$ 和 $\frac{c}{d^2}$.

2.2 信号模型

类似于其它 SBL 算法, 未知信号 \mathbf{g} 的自适应 LASSO 先验 $p(\mathbf{g}|\boldsymbol{\eta})$ 通过多层共轭先验的形式实现. 首先, 使用零均值的多维高斯分布对信号进行如下建模:

$$p(\mathbf{g}|\boldsymbol{\Lambda}) = \frac{1}{(\varsigma\pi)^{\frac{N}{\varsigma}} |\boldsymbol{\Lambda}|} e^{-\frac{1}{\varsigma} \mathbf{g}^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{g}} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{(\varsigma\pi\lambda_i)^{\frac{1}{\varsigma}}} e^{-\frac{g_i^H g_i}{\varsigma\lambda_i}} \quad (7)$$

其中, $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}\{\boldsymbol{\lambda}\}$ 表示多维高斯分布的协方差矩阵, $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T$ 表示信号的方差向量且 $\lambda_i > 0$, $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵操作. 对于变量 $\boldsymbol{\lambda}$, 假设其服从于如下独立的 Gamma 分布:

$$p(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\eta}) = \prod_{i=1}^N \mathcal{G}\left(\lambda_i; \frac{1}{2} + 2^{1-\varsigma}, \frac{\eta_i^2}{2^{3-\varsigma}}\right) \quad (8)$$

其中, $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N]^T$ 表示变量的向量且 $\eta_i > 0$. 根据式 (7) 和 (8), 变量 \mathbf{g} 关于变量 $\boldsymbol{\eta}$ 的边缘分布可以通过对变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 积分获得, 表示如下:

$$p(\mathbf{g}|\boldsymbol{\eta}) = \int p(\mathbf{g}|\boldsymbol{\Lambda}) p(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\lambda} = \prod_{i=1}^N \frac{\eta_i^{2-\varsigma}}{2\pi^{\varsigma-1}} e^{-\eta_i |g_i|} \quad (9)$$

即, 前两层贝叶斯先验 (7) 和 (8) 等价与赋予信号 \mathbf{g} 一种 LASSO 先验, 其中, η_i 对应于式 (4) 中的权重 w_i . 为了自适应调节 LASSO 先验的权重, 对非负变量 $\boldsymbol{\eta}$ 赋予如下 Gamma 分布:

$$p(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \prod_{i=1}^N \mathcal{G}(\eta_i; a_i, b_i) \quad (10)$$

其中, $a_i > 0$ 和 $b_i > 0$ 为预设的模型参数.

根据式 (9) 和 (10), 变量 \mathbf{g} 关于 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的边缘分布可通过对变量 $\boldsymbol{\eta}$ 的积分获得, 结果如下:

$$p(\mathbf{g}|\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int p(\mathbf{g}|\boldsymbol{\eta}) p(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\boldsymbol{\eta} = \prod_{i=1}^N \frac{b_i^{a_i} \Gamma(a_i + 2^{2-\varsigma})}{2\pi^{\varsigma-1} \Gamma(a_i)} (b_i + |g_i|)^{-(a_i + 2^{2-\varsigma})} \quad (11)$$

其中, $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数. 实际上, 根据式 (11), 本文提出的贝叶斯框架最终赋予信号 \mathbf{g} 一种

Student-t 先验. 其中, Student-t 分布是一种具有长拖尾特性的分布, 可以表达信号的稀疏特性^[16]. 基于自适应 LASSO 先验的 SBL 模型由式 (5), (7), (8), (10) 构成. 该模型的因子图如图 1 所示. 图中节点函数总结如下:

$$f_i^g = p(g_i | \lambda_i) \quad (12a)$$

$$f_i^\lambda = p(\lambda_i | \eta_i) \quad (12b)$$

$$f_i^\eta = p(\eta_i | a_i, b_i) \quad (12c)$$

$$f^x = p(\mathbf{x} | \mathbf{g}, \rho) \quad (12d)$$

$$f^\rho = p(\rho | \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (12e)$$

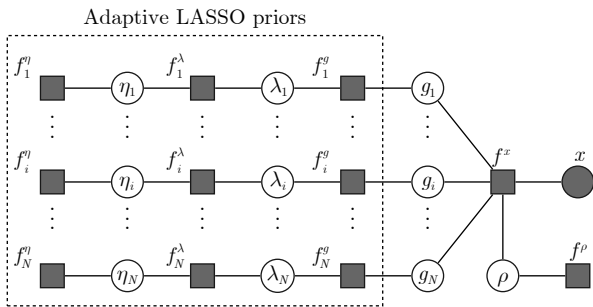


图 1 基于自适应 LASSO 先验的 SBL 框架的因子图

Fig. 1 The factor graph of the proposed SBL framework using adaptive LASSO priors

2.3 基于自适应 LASSO 先验 SBL 算法的稀疏恢复原理分析

SBL 算法本质是一种鲁棒的极大后验估计方法^[2,16]. 一般通过 I 型或 II 型估计器稀疏求解^[28]. 本文采用 I 型估计器对提出的基于自适应 LASSO 先验 SBL 算法进行分析. I 型估计器为最大化后验分布^[28]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}} &= \arg \max_{\mathbf{g}} p(\mathbf{g} | \mathbf{x}) = \\ & \arg \max_{\mathbf{g}} \ln \int \int p(\mathbf{x} | \mathbf{g}) p(\mathbf{g} | \boldsymbol{\lambda}) p(\boldsymbol{\lambda} | \boldsymbol{\eta}) p(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\lambda} d\boldsymbol{\eta} = \\ & \arg \max_{\mathbf{g}} \ln \int p(\mathbf{x} | \mathbf{g}) p(\mathbf{g} | \boldsymbol{\eta}) p(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\tilde{\mathbf{g}}$ 为信号 \mathbf{g} 的估计.

在 SBL 算法中, 通过迭代的方式对参数进行更新, 对于每一次迭代需要使用上一次迭代的参数. 即在每一步迭代中等价于如下优化问题:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{\text{new}} &= \arg \max_{\mathbf{g}} \ln p(\mathbf{x} | \mathbf{g}, \rho) + \\ & \int \ln(p(\mathbf{g} | \boldsymbol{\eta})) p(\boldsymbol{\eta} | \mathbf{g}^{\text{old}}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) d\boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (14)$$

其中, \mathbf{g}^{new} 和 \mathbf{g}^{old} 分别是本次迭代和上一次迭代中 \mathbf{g} 的估计. 根据式 (9), 式 (14) 可写为如下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{\text{new}} &= \arg \max_{\mathbf{g}} p(\mathbf{x} | \mathbf{g}, \rho) - \\ & \sum_{i=1}^N \int \eta_i |g_i| p(\eta_i | g_i^{\text{old}}, a_i, b_i) d\eta_i \end{aligned} \quad (15)$$

由 Laplace 分布和 Gamma 分布的共轭性质可得, 变量 $\boldsymbol{\eta}$ 服从于如下 Gamma 分布:

$$p(\boldsymbol{\eta}) = \prod_{i=1}^N \mathcal{G}(a_i + 2^{2-\zeta}, b_i + |g_i^{\text{old}}|) \quad (16)$$

其中, η_i 的期望表示为 $\frac{a_i + 2^{2-\zeta}}{b_i + |g_i^{\text{old}}|}$. 根据式 (5) 和式 (14), 式 (15) 等价于

$$\mathbf{g}^{\text{new}} = \arg \min_{\mathbf{g}} \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{g}\|_2^2 + \zeta \sum_{i=1}^N w_i |g_i| \quad (17)$$

其中, $\zeta = \frac{\zeta}{\rho}$, $w_i = \frac{a_i + 2^{2-\zeta}}{b_i + |g_i^{\text{old}}|}$.

比较式 (17) 和式 (4) 可知, 本文提出的基于自适应 LASSO 先验的 SBL 算法对应于自适应 LASSO 算法. 自适应 LASSO 算法需要预定义回归系数 ζ , 但本文中算法具有自回归特性, 可自适应选择合适的回归系数, 并且 SBL 算法具有不确定估计特性, 估计结果在统计意义上优于自适应 LASSO 算法. 根据文献 [20], 自适应 LASSO 算法是对 LASSO 算法的改进, 稀疏恢复性能优于 LASSO 算法. 又根据文献 [17], 基于 Laplace 先验的 SBL 算法对应于 LASSO 算法, 并且性能优于基于 Student-t 算法. 文献 [19] 提出的基于合成 LASSO 先验的 SBL 算法对应于自适应 LASSO 算法, 但是由于采用高斯接近的方法进行参数更新, 导致在测量数少或者 SNR 低时存在无法进行高斯拟合的情况. 本文提出的基于自适应 LASSO 先验的 SBL 算法通过多层贝叶斯框架的方式构造自适应 LASSO 先验, 避免了无法拟合的情况. 通过以上分析可知, 本文提出的基于基于自适应 LASSO 先验的 SBL 算法性能优于现有算法.

为更直观的表现本文提出的算法所提供的稀疏恢复特性, 我们绘制了实值模型下不同算法的稀疏先验的代价函数的二位等高线图, 结果见图 2. 复值信号模型与实值信号模型的结果类似, 此处不再重复讨论. 图中 BPDN 是文献 [29] 提出的算法, FastSBL 是文献 [21] 提出的基于 Student-t 先验的 SBL 算法, FastLap-SBL 是文献 [17] 提出基于 Laplace 先验的 SBL 算法, aLASSO-SBL 是本文提出的基于

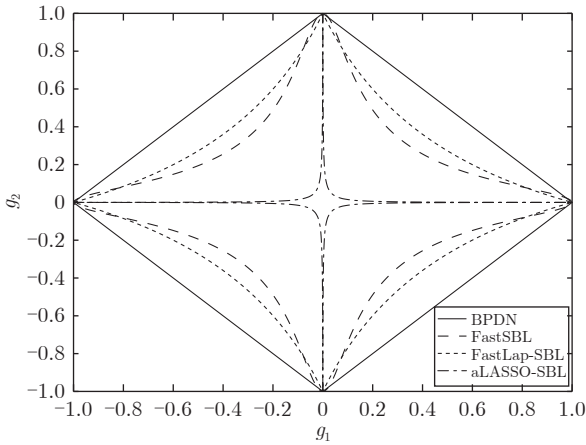


图 2 四种算法的稀疏先验代价函数二维等高线图

Fig.2 Two dimensional contour plots of cost functions of different sparse priors

自适应 LASSO 先验的 SBL 算法. 其中, BPDN 和 FastLap-SBL 的先验与参数无关; FastSBL 和 aLASSO-SBL 算法的参数设置相同, 都为 $a = 1$, $b = 0.1$. 根据文献 [16]、文献 [30] 和文献 [19], 如果先验具有长拖尾特性并且概率分布在零点处越“尖锐”则越鼓励稀疏, 反映到二维等高线图上为越靠近坐标轴, 越鼓励稀疏. 观察图 2, 自适应 LASSO 先验的二维等高线图相比于其他先验更靠近坐标轴. 由图中可知, 本文提出的算法比其他算法有更好的稀疏恢复性.

另外, 我们绘制了不同参数下自适应 LASSO 先验的代价函数等高线图, 如图 3 所示, 在参数 a 固定为 1 的条件下, 参数 b 越接近于 0, 二维等高线越靠近坐标轴, 即算法提供的解越稀疏. 基于以上分析, 相比于其它算法, 本文提出的算法在理论上可以提供最稀疏的解, 从而得到更精确的稀疏信号恢复性能.

3 变元贝叶斯推断

在本文提出的贝叶斯模型中, 所有隐藏变量的集合表示为 $\Theta = \{g, \lambda, \eta, \rho\}$. 根据图 1 表示的贝叶斯模型, 联合概率密度表示如下:

$$p(\mathbf{x}, \Theta) = p(\mathbf{x}|g, \rho)p(g|\eta)p(\eta)p(\rho) \quad (18)$$

后验分布的闭合形式 $p(\Theta|\mathbf{x})$ 需要计算边缘分布密度函数 $p(\mathbf{x})$, 但是 $p(\mathbf{x})$ 难以求得, 因此本文采用变元贝叶斯推断的方法进行参数更新. 变元贝叶斯推断使用因子化变量分布对实际后验分布进行近似. 隐藏变量的因子化变量分布表示如下:

$$q(\Theta) = q(g)q(\lambda)q(\eta)q(\rho) \quad (19)$$

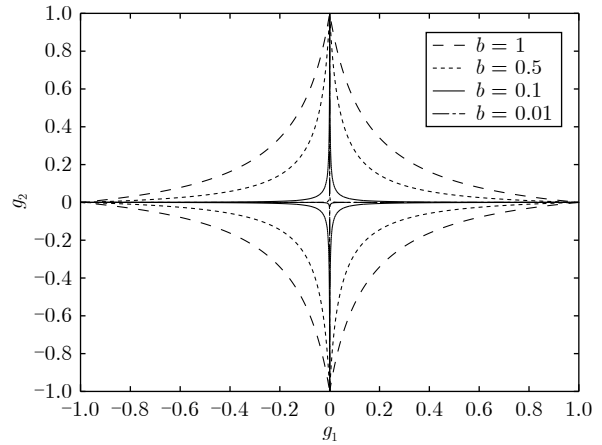


图 3 本算法在不同参数下稀疏先验代价函数二维等高线图

Fig.3 Two dimensional contour plots of cost functions of the proposed sparse priors versus hyperparameters

其中, $q(\Theta)$ 是实际后验 $p(\Theta|\mathbf{x})$ 的近似. 然后, 通过最小化实际后验分布 $p(\Theta|\mathbf{x})$ 与近似分布 $q(\Theta)$ 的 KL 散度 (Kullback-Leibler, KL) 对参数进行更新, 该过程等价于最大化如下目标函数:

$$\mathcal{L}(\Theta) = E_{q(\Theta)}[\ln p(\Theta|\mathbf{x})] - E_{q(\Theta)}[\ln q(\Theta)] \quad (20)$$

其中, $E_q[\cdot]$ 表示在 q 分布下的求参数期望的算子, 即 $E_{q(x)}[p(x)] = \int q(x)p(x)dx$.

如图 1 所示, 本文提出的模型中所有节点的先验和似然函数都存在共轭指数分布族, 因此变元贝叶斯推断表示如下^[31-32]:

$$\ln q(\theta_k) = E_{q(\Theta \setminus \theta_k)}[\ln p(\mathbf{x}, \Theta)] + C \quad (21)$$

其中, θ_k 表示隐藏变量集合 Θ 中第 k 个变量, 例如 θ_1 表示变量 g , $\Theta \setminus \theta_k$ 表示集合 Θ 中去除第 k 个变量 θ_k 的集合, C 表示常数.

3.1 参数更新

根据式 (18), 对数形式的联合分布表示如下:

$$\begin{aligned} \ln p(\mathbf{x}, \Theta) = & \frac{M}{\varsigma} \ln \rho - \frac{\rho}{\varsigma} (\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{g})^H (\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{g}) + \\ & \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varsigma} \ln \lambda_i^{-1} - \frac{1}{\varsigma} \mathbf{g}^H \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{g} + \\ & \sum_{i=1}^N (1 + 2^{2-\varsigma}) \ln \eta_i + (-\frac{1}{2} + 2^{1-\varsigma}) \times \\ & \ln \lambda_i - \frac{\eta_i^2}{2^{3-\varsigma}} \lambda_i + \sum_{i=1}^N (a_i - 1) \ln \eta_i - \\ & b_i \eta_i + (c - 1) \ln \rho - b\rho + C \end{aligned} \quad (22)$$

然后, 参数可根据式 (21) 和 (22) 更新, 下面给

出具体更新规则.

参数 \mathbf{g} 的更新: 根据式 (21), 实际后验分布 $p(\mathbf{g}|\mathbf{x})$ 的变元近似分布的对数形式为

$$\ln q(\mathbf{g}) = -\frac{1}{\varsigma} \mathbf{g}^H (\langle \rho \rangle \mathbf{A}^H \mathbf{A} + \langle \Lambda^{-1} \rangle) \mathbf{g} - \frac{\langle \rho \rangle}{\varsigma} \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{g} - \frac{\langle \rho \rangle}{\varsigma} \mathbf{g}^H \mathbf{A}^H \mathbf{x} + c_g \quad (23)$$

其中, $\langle \cdot \rangle$ 表示参数的期望, c_g 表示更新参数 \mathbf{g} 时的常量. 由式 (23) 可知, $q(\mathbf{g})$ 可以使用多维高斯分布表示, 其期望和方差表示如下:

$$\boldsymbol{\mu} = \langle \rho \rangle \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}^H \mathbf{x} \quad (24a)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\langle \rho \rangle \mathbf{A}^H \mathbf{A} + \langle \Lambda^{-1} \rangle)^{-1} = \langle \Lambda \rangle - \langle \Lambda \rangle \mathbf{A}^H (\langle \rho \rangle^{-1} \mathbf{I}_M + \mathbf{A} \langle \Lambda \rangle \mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{A} \langle \Lambda \rangle \quad (24b)$$

其中, \mathbf{I}_M 表示维度为 M 的单位矩阵. 式 (24b) 的推导使用了 Woodbury 引理^[33], 目的是降低矩阵求逆的计算量. 其中, Woodbury 引理见附录 A.

参数 $\boldsymbol{\lambda}$ 的更新: 变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 的对数近似后验为:

$$\ln q(\lambda_i) = -\frac{1}{2} \ln \lambda_i - \lambda_i^{-1} \langle g_i^H g_i \rangle - \frac{\langle \eta_i^2 \rangle}{2^{3-\varsigma}} \lambda_i + c_{\lambda_i} \quad (25)$$

其中, c_{λ_i} 表示更新 λ_i 时的常数, $\langle g_i^H g_i \rangle = \boldsymbol{\mu}_i^H \boldsymbol{\mu}_i + \{\boldsymbol{\Sigma}\}_{ii}$, $\langle \eta_i^2 \rangle = \langle \eta_i \rangle^2 + \text{Var}(\eta_i)$, $\boldsymbol{\mu}_i$ 是 $\boldsymbol{\mu}$ 的第 i 个元素, $\{\boldsymbol{\Sigma}\}_{ii}$ 是协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的第 i 个对角线元素, $\text{Var}(\eta_i)$ 是 η_i 的方差. 根据式 (25), 使用 Gamma 分布无法对实际分布 $p(\boldsymbol{\lambda})$ 进行近似, 因此本文采用广义逆高斯分布对实际分布 $p(\boldsymbol{\lambda})$ 进行近似. 对应的参数表示如下:

$$p = \frac{1}{2}, \quad \bar{a}_i = \frac{\langle \eta_i^2 \rangle}{2^{2-\varsigma}}, \quad \bar{b}_i = 2 \langle g_i^H g_i \rangle \quad (26)$$

变量 λ_i 的估计如下:

$$\langle \lambda_i \rangle = \frac{\sqrt{\bar{b}_i} K_{\frac{3}{2}}(\sqrt{\bar{a}_i \bar{b}_i})}{\sqrt{\bar{a}_i} K_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\bar{a}_i \bar{b}_i})} = \frac{\sqrt{\bar{b}_i}}{\sqrt{\bar{a}_i}} + \frac{1}{\bar{a}_i} \quad (27a)$$

$$\langle \lambda_i^{-1} \rangle = \frac{\sqrt{\bar{a}_i} K_{\frac{3}{2}}(\sqrt{\bar{a}_i \bar{b}_i})}{\sqrt{\bar{b}_i} K_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\bar{a}_i \bar{b}_i})} - \frac{2p}{\bar{b}_i} = \frac{\sqrt{\bar{a}_i}}{\sqrt{\bar{b}_i}} \quad (27b)$$

参数 $\boldsymbol{\eta}$ 的更新: 根据式 (21), 变量 η_i 的对数近似分布表示为:

$$\ln q(\eta_i) = E_{q(\boldsymbol{\Theta} \setminus \eta_i)} [\ln (p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})p(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{a}, \mathbf{b}))] + c_{\eta_i,0} = (a_i + 2^{2-\varsigma} - 1) \ln \eta_i - (\langle |g_i| \rangle + b_i) \eta_i + c_{\eta_i} \quad (28)$$

其中, $\boldsymbol{\Theta} \setminus \eta_i$ 表示去除变量 η_i 之后隐藏变量的集合, $c_{\eta_i,0}$ 和 c_{η_i} 是更新参数 η_i 时的常量. 因此, 根据式 (28), 变量 η_i 的近似分布为 Gamma 分布, 对应参

数如下:

$$\tilde{a}_i = a_i + 2^{2-\varsigma}, \quad \tilde{b}_i = \langle |g_i| \rangle + b_i \quad (29)$$

因此, 参数 η_i 的更新如下:

$$\langle \eta_i \rangle = \frac{\tilde{a}_i}{\tilde{b}_i} \quad (30a)$$

$$\text{Var}(\eta_i) = \frac{\tilde{a}_i}{\tilde{b}_i^2} \quad (30b)$$

参数 ρ 的更新: 根据式 (21) 和式 (22), 变量 ρ 的对数近似分布表示如下:

$$\ln q(\rho) = \left(c + \frac{M}{\varsigma} - 1 \right) \ln \rho - \left(\frac{1}{\varsigma} \langle (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{g})^H (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{g}) \rangle + d \right) \rho + c_\rho \quad (31)$$

其中, c_ρ 表示参数 ρ 更新时的常量. 根据式 (31), 变量 ρ 的近似分布为 Gamma 分布, 对应参数如下:

$$\tilde{c} = c + \frac{M}{\varsigma}, \quad \tilde{d} = \frac{1}{\varsigma} \langle (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{g})^H (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{g}) \rangle + d \quad (32)$$

其中, $\langle (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{g})^H (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{g}) \rangle$ 的表示如下:

$$\langle (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{g})^H (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{g}) \rangle = |(\mathbf{x} - \mathbf{A} \boldsymbol{\mu})^H (\mathbf{x} - \mathbf{A} \boldsymbol{\mu})| + \text{tr}(\mathbf{A}^H \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A})$$

其中, $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹. 因此, 参数 ρ 的更新规则为:

$$\langle \rho \rangle = \frac{\tilde{c}}{\tilde{d}} \quad (33)$$

上述为本文提出的基于自适应 LASSO 先验的 SBL 算法所有参数的更新规则, 以下将该算法简称为 aLASSO-SBL. 为清晰描述算法, 将参数更新流程总结如算法 1 所示.

算法 1. aLASSO-SBL 算法伪代码

输入: 输入测量数据 \mathbf{x} , 测量矩阵 \mathbf{A} ; 设置终止条件: 最大迭代次数 I_{\max} 和相邻迭代最大允许误差 e_{\max} .

输出: 稀疏信号 \mathbf{g} 的期望 $\boldsymbol{\mu}$ 和方差 $\boldsymbol{\Sigma}$.

初始化参数 \mathbf{g} 的期望 $\boldsymbol{\mu}$ 和方差 $\boldsymbol{\Sigma}$ 以及参数 $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\eta}$, ρ ; 初始化模型参数 \mathbf{a} , \mathbf{b} , c , d , 模型参数均设为接近于零的常数, 例如 10^{-6} . 初始化迭代次数 $i = 0$, 迭代误差 $e = 1$.

While $i < I_{\max}$ **and** $e > e_{\max}$ **do**

更新迭代次数 $i = i + 1$;

更新中间变量 $\boldsymbol{\mu}^{\text{old}} = \boldsymbol{\mu}$;

更新参数 $\boldsymbol{\mu} = \langle \rho \rangle \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}^H \mathbf{x}$;

更新参数 $\boldsymbol{\Sigma} = \langle \Lambda \rangle - \langle \Lambda \rangle \mathbf{A}^H (\langle \rho \rangle^{-1} \mathbf{I}_M + \mathbf{A} \langle \Lambda \rangle \mathbf{A}^H)^{-1}$

$\mathbf{A} \langle \Lambda \rangle$;

For $i = 1 : N$ **do**

更新参数 $\langle \lambda_i \rangle = \frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{a_i}} + \frac{1}{a_i}$;

更新参数 $\langle \lambda_i^{-1} \rangle = \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{b_i}}$;

更新参数 $\langle \eta_i \rangle = \frac{\tilde{a}_i}{b_i}$;

更新参数 $\text{Var}(\eta_i) = \frac{\tilde{a}_i}{b_i^2}$;

End For

更新参数 $\langle \rho \rangle = \frac{\tilde{c}}{d}$;

计算迭代误差 $e = \frac{\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^{\text{old}}\|_1}{\|\boldsymbol{\mu}\|_1}$.

End While

3.2 快速算法

根据参数更新规则, 算法的主要计算量在于更新参数 \boldsymbol{g} 的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$. 为进一步降低算法计算量, 本文采用空间轮换方法对参数 \boldsymbol{g} 进行更新. 在 \boldsymbol{g} 中元素相互独立的假设下, 根据式 (21), 变量 g_i 的对数近似分布表示如下:

$$\begin{aligned} \ln q(g_i) &= E_{q(\Theta \setminus g_i)} [\ln(p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{g}, \rho)p(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{\lambda}))] + c_{g_i0} = \\ &= -\frac{1}{\zeta} \left(\langle \rho \rangle (\boldsymbol{x} - \mathbf{A}_{\bar{i}} \langle \boldsymbol{g}_{\bar{i}} \rangle - \mathbf{a}_i g_i)^H \times \right. \\ &\quad \left. (\boldsymbol{x} - \mathbf{A}_{\bar{i}} \langle \boldsymbol{g}_{\bar{i}} \rangle - \mathbf{a}_i g_i) + g_i^H \langle \lambda_i^{-1} \rangle g_i \right) + c_{g_i1} \end{aligned} \quad (34)$$

令 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{x} - \mathbf{A}_{\bar{i}} \langle \boldsymbol{g}_{\bar{i}} \rangle$, 并代入式 (34) 则有

$$\begin{aligned} \ln q(g_i) &= -\frac{1}{\zeta} \left(g_i^H (\langle \rho \rangle \mathbf{a}_i^H \mathbf{a}_i + \langle \lambda_i^{-1} \rangle) g_i + \right. \\ &\quad \left. \langle \rho \rangle \tilde{\boldsymbol{x}}_i^H \mathbf{a}_i g_i + \langle \rho \rangle g_i^H \mathbf{a}_i^H \tilde{\boldsymbol{x}}_i \right) + c_{g_i2} \end{aligned} \quad (35)$$

其中, \mathbf{a}_i 是测量矩阵 \mathbf{A} 的第 i 列向量, $\mathbf{A}_{\bar{i}}$ 是测量矩阵 \mathbf{A} 去除 \mathbf{a}_i 后的矩阵, c_{g_i0} , c_{g_i1} 和 c_{g_i2} 是更新参数 g_i 时的常量. 根据式 (35), g_i 的近似分布为高斯分布, 对应参数表示如下:

$$\mu_i = \langle \rho \rangle \sigma_i^2 \mathbf{a}_i^H \tilde{\boldsymbol{x}}_i \quad (36a)$$

$$\sigma_i^2 = (\langle \rho \rangle \mathbf{a}_i^H \mathbf{a}_i + \langle \lambda_i^{-1} \rangle)^{-1} \quad (36b)$$

其中, μ_i 和 σ_i^2 分别表示变量 g_i 的期望和方差. 此时, 变量 \boldsymbol{g} 的期望和方差分别表示为 $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N]^T$ 和 $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}\{\boldsymbol{\sigma}^2\}$, 且 $\boldsymbol{\sigma}^2 = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2]^T$.

快速算法的参数更新流程与第 3.1 节中 aLASSO-SBL 算法的区别在于参数 \boldsymbol{g} 的更新, 即使使用式 (36) 替代式 (24) 进行更新, 其余参数更新规则不变. 快速算法的优势在于更新参数 \boldsymbol{g} 的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 时避免了矩阵求逆运算, 从而降低计算量, 缺点在于忽略了变量 \boldsymbol{g} 不同元素之间的协方差项, 所以在测量矩阵 \mathbf{A} 的列向量相关的情况下, 快速算法的稀疏信号恢复准确度会降低. 为描述方便, 下文中将快速算法简称为 FaLASSO-SBL 算法.

算法 2. FaLASSO-SBL 算法伪代码

输入: 输入测量数据 \boldsymbol{x} , 测量矩阵 \mathbf{A} ; 设置终止条件: 最大迭代次数 I_{\max} 和相邻迭代最大允许误差 e_{\max} .

输出: 稀疏信号 \boldsymbol{g} 的期望 $\boldsymbol{\mu}$ 和方差 $\boldsymbol{\Sigma}$.

初始化参数 \boldsymbol{g} 的期望 $\boldsymbol{\mu}$ 和方差 $\boldsymbol{\Sigma}$ 以及参数 $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\eta}$, ρ ; 初始化模型参数 \mathbf{a} , \mathbf{b} , c , d , 模型参数均设为接近于零的常数, 例如 10^{-6} ; 初始化迭代次数 $i = 0$, 迭代误差 $e = 1$.

While $i < I_{\max}$ **and** $e > e_{\max}$ **do**

更新迭代次数 $i = i + 1$;

更新中间变量 $\boldsymbol{\mu}^{\text{old}} = \boldsymbol{\mu}$;

For $i = 1 : N$ **do**

更新参数 $\mu_i = \langle \rho \rangle \sigma_i^2 \mathbf{a}_i^H \tilde{\boldsymbol{x}}_i$;

更新参数 $\sigma_i^2 = (\langle \rho \rangle \mathbf{a}_i^H \mathbf{a}_i + \langle \lambda_i^{-1} \rangle)^{-1}$;

更新参数 $\langle \lambda_i \rangle = \frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{a_i}} + \frac{1}{a_i}$;

更新参数 $\langle \lambda_i^{-1} \rangle = \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{b_i}}$;

更新参数 $\langle \eta_i \rangle = \frac{\tilde{a}_i}{b_i}$;

更新参数 $\text{Var}(\eta_i) = \frac{\tilde{a}_i}{b_i^2}$;

End For

更新参数 $\langle \rho \rangle = \frac{\tilde{c}}{d}$;

计算迭代误差 $e = \frac{\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^{\text{old}}\|_1}{\|\boldsymbol{\mu}\|_1}$;

End While

3.3 算法计算量分析

本文通过使用算法中的乘法或除法运算数量衡量计算复杂度, 并且在欠定条件 ($M < N$) 下进行分析. 在 aLASSO-SBL 算法中, 更新参数 \boldsymbol{g} 期望 $\boldsymbol{\mu}$ 的计算复杂度为 $\mathcal{O}(MN)$, 更新参数 \boldsymbol{g} 协方差矩阵的计算复杂度为 $\mathcal{O}(MN^2)$, 更新参数 ρ 的计算复杂度为 $\mathcal{O}(MN)$. 所以, 算法每次迭代的总计算复杂度为 $\mathcal{O}(MN^2)$. 对于 FaLASSO-SBL 算法, 更新参数 \boldsymbol{g} 的期望和方差矩阵的计算复杂度都为 $\mathcal{O}(MN)$, 更新参数 ρ 的计算复杂度为 $\mathcal{O}(MN)$, 算法每次迭代的总计算复杂度为 $\mathcal{O}(MN)$. 文献 [16] 提出的 SBL 算法的每次迭代的计算复杂度为 $\mathcal{O}(MN^2)$, 文献 [18] 提出的自回归算法的计算量为 $\mathcal{O}(MN^2)$, 文献 [25] 提出的算法计算复杂度为 $\mathcal{O}(MN)$, 文献 [19] 提出合成 LASSO 先验 SBL 算法的计算复杂度为 $\mathcal{O}(MN^2)$. 通过分析可知本文提出的 aLASSO 算法计算复杂度与目前多数 SBL 算法的计算复杂度处于同一量级, FaLASSO 算法的计算复杂度低于多数算法的计算复杂度.

4 仿真实验

本节通过仿真实验验证提出的 aLASSO-SBL 和 FaLASSO-SBL 算法的性能. 仿真实验分别针对实值信号模型 ($\zeta = 2$) 和复值信号模型 ($\zeta = 1$) 开

展. 对于实值信号模型, 测量矩阵 \mathbf{A} 中的元素满足独立同分布的高斯分布, 稀疏信号 \mathbf{g} 中非零元素服从于独立同分布的高斯分布. 对于复值信号模型, 测量矩阵 \mathbf{A} 中的元素和稀疏信号 \mathbf{g} 中的非零元素都服从于独立同分布的复高斯分布. 无噪测量数据通过测量矩阵 \mathbf{A} 与稀疏信号 \mathbf{g} 相乘得到, 即 $\mathbf{A}\mathbf{g}$, 然后对信号添加高斯白噪声, 信噪比 (Signal-Noise Ratio, SNR) 的定义如下:

$$\text{SNR} = 10 \lg \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{g}\|_2^2}{\|\mathbf{w}\|_2^2}$$

各个算法的稀疏恢复准确性通过均方根误差 (Root-Mean-Square-Error, RMSE) 衡量, 定义如下:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\sum_{j=1}^J \frac{\|\hat{\mathbf{g}}_j - \mathbf{g}_0\|_2^2}{J\|\mathbf{g}_0\|_2^2}} \quad (37)$$

其中, $\hat{\mathbf{g}}_j$ 是第 j 次独立实验恢复的信号, J 是独立实验的总次数, \mathbf{g}_0 是原始信号. 稀疏恢复算法估计的信号 RMSE 越低表示算法的准确性越高, 性能越好.

本文使用的算法及相应简称总结如下: BPDN 为文献 [29] 提出的基追踪去噪算法, OMP 为文献 [34] 提出的正交基追踪算法, aLASSO 为文献 [20] 提出的自适应 LASSO 算法, FastSBL 为文献 [21] 提出的快速 SBL 算法, GAMP-SBL 为文献 [24] 中提出的基于近似消息传递 (Approximate Message Passing, AMP) 的 SBL 算法, FastLap-SBL 为文献 [17] 提出的基于 Laplace 先验的快速 SBL 算法, MFOCUSS 为文献 [35] 提出的类 ℓ_p 范数优化算法, HSL-SBL 为文献 [19] 提出的合成 LASSO 先验的 SBL 算法, aLASSO-SBL 和 FaLASSO-SBL 是本文提出的基于自适应 LASSO 先验的 SBL 算法及其快速算法. 其中, aLASSO 的正则因子设置为 1, MFOCUSS 的参数 p 按文中建议设为 0.8, FastSBL, Lap-SBL, HSL-SBL, aLASSO-SBL 和 FaLASSO-SBL 的模型参数设置为相同的接近于零的值 10^{-6} .

本文中所有仿真实验使用 MATLAB 软件实现, 软件版本为 R2020a, 操作系统为 64 位 Windows 10. 硬件配置总结如下: 处理器为 AMD Ryzen 7 4750U, 物理核心数为 8, 主频为 1.7 GHz, 内存容量为 16 GB.

4.1 仿真实验一

与凸优化和贪婪算法相比, 贝叶斯方法的一个重要特性是可以提供未知信号的后验分布而非点估计结果. 利用后验分布估计参数的优势在于通过协

方差矩阵 Σ 可以得到参数估计的不确定度, 在统计的角度优于凸优化算法. 本次实验中我们给出实值模型下各个算法对稀疏信号的估计结果. 仿真中测量矩阵的维度为 50×200 , 即测量数为 50, 信号长度为 200, 信号中非零元素的个数设置为 10, SNR 设置为 30 dB. 实验结果如图 4 所示. 其中, 图 4(a) 为纯净的稀疏信号; 图 4(b) 为使用 BPDN 算法恢复的信号; 图 4(c) 为使用 aLASSO 算法恢复的信号; 图 4(d) 为使用 OMP 算法恢复的信号; 图 4(e) 为使用 FaLASSO-SBL 算法恢复的信号; 图 4(f) 为使用 aLASSO-SBL 算法恢复的信号. 由图 4 可知, 基于凸优化的 BPDN 和 aLASSO 算法以及基于贪婪算法的 OMP 算法仅提供点估计结果, 而本文提出的 aLASSO-SBL 和 FaLASSO-SBL 算法与其它贝叶斯算法相同, 可以提供具有不确定度的估计结果. 其中, 图中误差线表示恢复信号的不确定度. 由于 FaLASSO-SBL 算法忽略协方差项导致对信号

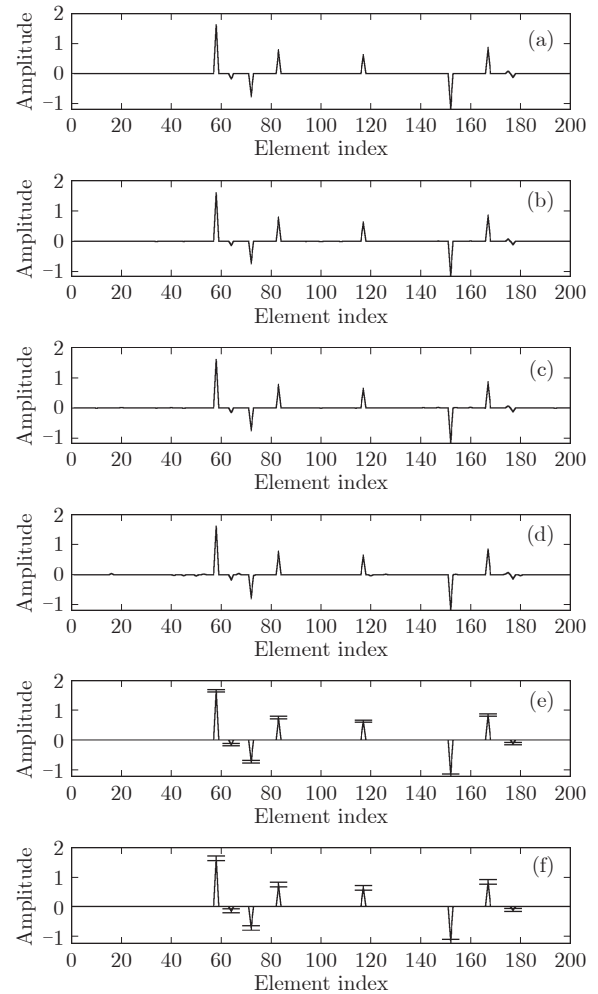


图 4 一维信号稀疏恢复图

Fig. 4 Results for one-dimensional signal recovery

方差的估计小于 aLASSO-SBL 算法估计的方差, 但是协方差项的忽略会导致稀疏信号恢复准确性降低 (见仿真实验二, 三和四).

4.2 仿真实验二

本次仿真实验研究各个算法稀疏恢复性能与测量数的关系. 对于实值信号模型, 信号长度设置为 200, 非零元素数设置为 30, 测量数变化范围为 50 到 100, 间隔为 10. SNR 为 30 dB. 独立实验次数为 200 次. 对于复值信号模型, 测量数变化范围为 40 到 90, 其它参数设置与实值信号模型相同, 原因是相同维度下, 复值测量数据的信息量大于实值测量数据的信息量, 所以需要更少的测量数. 实值信号模型和复值信号模型的实验结果如图 5 和图 6 所示. 表 1 给出了测量数为 80 时实值信号模型和复值信号模型下各算法单次运行的时间.

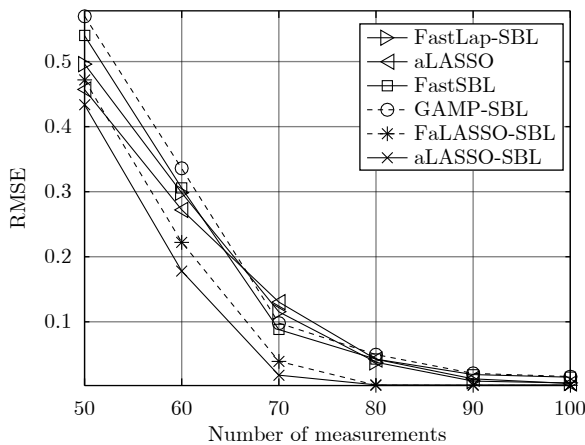


图 5 实值模型下各算法稀疏恢复准确度与测量数的关系
Fig.5 RMSE of different algorithms with the real-value signal model versus length of measurements

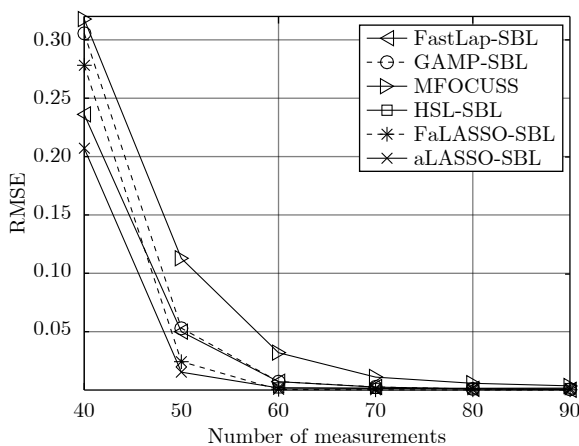


图 6 复值模型下各算法稀疏恢复准确度与测量数的关系
Fig.6 RMSE of different algorithms with the complex-value signal model versus length of measurements

表 1 各算法单次运行时间
Table 1 Time consumptions of different algorithms

实值信号模型		复值信号模型	
算法	用时(s)	算法	用时(s)
FastLaplace	0.11	FastSBL	1.54
aLASSO	1.94	GAMP-SBL	0.51
FastSBL	0.40	MFOCUSS	0.21
GAMP-SBL	0.07	HSL-SBL	3.16
FaLASSO-SBL	0.26	FaLASSO-SBL	0.74
aLASSO-SBL	0.98	aLASSO-SBL	2.33

由图 5 可知, 针对实值信号模型, 当测量数 $M = 50$ 时, 所有算法失效. 当测量数 $M \geq 60$ 时, 本文提出的 aLASSO-SBL 的稀疏恢复准确性优于其他算法, 特别是在测量数较小 ($60 \leq M \leq 90$) 时恢复效果相较于其它算法有明显提升. 快速算法 FaLASSO-SBL 算法的准确性相比于 aLASSO-SBL 算法有一定程度的降低, 但是如表 1 所示, FaLASSO-SBL 算法计算时间明显低于 aLASSO-SBL 算法. 根据图 5 和表 1, FastLap-SBL 算法和 GAMP-SBL 算法的运算速度比本文提出的 FaLASSO-SBL 算法快, 但是信号恢复的准确度比本文提出的算法低.

如图 6 所示, 对于复值信号模型, 所有算法在测量数 $70 \leq M \leq 90$ 时稀疏恢复效果较好, 在测量数 $50 \leq M \leq 70$ 时, 本文提出的 aLASSO-SBL 和 FaLASSO-SBL 算法相比于其他算法具有更低的 RMSE. 在测量数 $M = 40$ 时, 所有算法的恢复效果很差. 在测量数 $M \geq 60$ 时, HSL-SBL 算法与本文提出的算法有相同的稀疏恢复效果, 但是 HSL-SBL 算法在测量数小于 60 时出现不收敛的情况, 所以无法显示其在 $M < 60$ 时的结果. 相比 HSL-SBL 算法, 本文提出的算法稳定性较高. 根据图 6 和表 1, 对于复值信号模型, MFOCUSS 算法和 GAMP-SBL 算法的计算速度比本文提出的 FaLASSO-SBL 算法速度快, 但信号恢复的准确率低于本文提出的算法. 原因是 MFOCUSS 算法在归一化因子选择不合适时准确性降低; GAMP-SBL 是一种基于 Student-t 先验的快速 SBL 算法, 其优势在于计算速度快, 但缺点在于其信号恢复的准确率低于基于 Student-t 先验的 SBL 算法.

为进一步验证本文中提出的 aLASSO-SBL 算法对高维信号的稀疏恢复性能, 进行如下仿真实验. 对于实值信号模型, 信号长度设置为 2000, 非零元素数设置为 100, 测量数变化范围为 100 到 350, 间隔为 50. SNR 为 20 dB. 独立实验次数为 200 次. 复值信号模型参数设置与实值信号模型相同. 仿真实验结果如图 7 和图 8 所示.

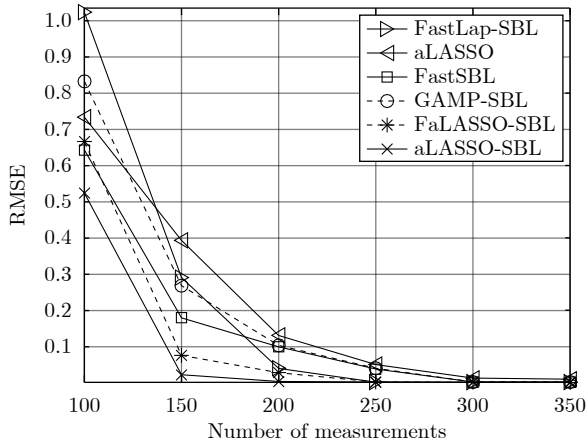


图 7 高维实值信号模型下各算法稀疏恢复准确度与测量数的关系

Fig.7 RMSE of different algorithms with the high-dimensional real-value signal model versus length of measurements

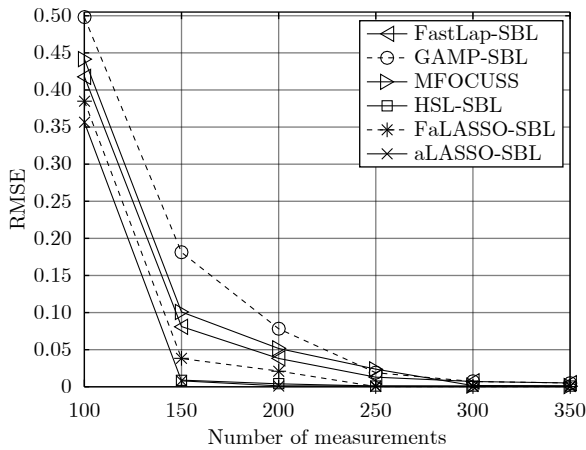


图 8 高维复值信号模型下各算法稀疏恢复准确度与测量数的关系

Fig.8 RMSE of different algorithms with the high-dimensional complex-value signal model versus length of measurements

图 7 为高维信号实值模型下各算法稀疏恢复准确度与测量数的关系. 由图 7 可知, 本文提出的 aLASSO-SBL 算法的稀疏信号恢复准确性优于现有稀疏恢复算法. 本文 FaLASSO-SBL 算法的准确性比 aLASSO-SBL 算法有所降低, 但在测量数 $M \geq 150$ 时高于其他算法. 图 8 为高维信号复值模型下各算法稀疏恢复准确度与测量数的关系. 由图 8 可知, HSL-SBL 算法在 $M \geq 150$ 时与本文提出的 aLASSO-SBL 算法的稀疏信号恢复准确度相同并且高于其它算法, 但是当 $M < 150$ 时失效. 本文 FaLASSO-SBL 算法的准确性比 aLASSO-SBL

算法略低, 但在 $M \geq 150$ 时高于除 aLASSO-SBL 算法和 HSL-SBL 算法之外的其它算法, 但计算量低于 aLASSO-SBL 算法和 HSL-SBL 算法.

表 2 给出了高维信号实值模型和复值模型在测量长度为 200 时单次运行需要的时间. 与表 1 相比可知, 信号维度增加会导致计算量的增加. 结合表 2、图 7 和图 8 可知, 对于高维信号, 本文中提出的 aLASSO-SBL 算法的稀疏信号恢复准确性高于现有算法, 但是在信号维度增高时计算量会显著增加; 本文中提出的 FaLASSO-SBL 算法稀疏恢复准确性略低于 aLASSO-SBL 算法, 但运算速度明显高于 aLASSO-SBL 算法.

表 2 恢复高维信号时各算法单次运行时间

Table 2 Time consumptions of different algorithms when the dimension of signal is high

实值信号模型		复值信号模型	
算法	用时(s)	算法	用时(s)
FastLaplace	0.83	FastSBL	6.95
aLASSO	5.71	GAMP-SBL	2.17
FastSBL	3.40	MFOCUSS	2.86
GAMP-SBL	0.69	HSL-SBL	15.73
FaLASSO-SBL	1.06	FaLASSO-SBL	4.61
aLASSO-SBL	8.38	aLASSO-SBL	17.41

4.3 仿真实验三

本次仿真实验研究各个算法稀疏恢复性能和稀疏度的关系. 对于实值信号模型, 测量矩阵的维度设置为 100×200 , 即测量数为 100, 信号长度为 200 信号中非零元素个数变化范围为 10 到 50, 间隔为 10. SNR 设置为 30 dB. 独立实验次数为 200. 对于复值信号模型, 信号中非零元度的个数变化范围设置为 20 到 70, 其他参数设置与实值模型设置相同. 针对实值信号模型和复值信号模型的稀疏恢复结果如图 9 和图 10 所示.

根据图 9 可知, 针对实值信号模型, 所有算法在稀疏度高的条件下, 即信号中非零元素个数 $10 \leq K \leq 30$ 时稀疏恢复效果较好, 在稀疏度低的条件下 ($30 \leq K \leq 60$), FaLASSO-SBL 和 aLASSO-SBL 的 RMSE 明显低于其它算法, 即本文提出的算法对信号稀疏度的鲁棒性比其它常用算法更强.

如图 10 所示, 针对复值信号模型, MFOCUSS 算法的恢复效果比贝叶斯算法的恢复效果差. 比较贝叶斯算法, HSL-SBL 与 aLASSO-SBL 算法的恢复效果处于相同水平, 优于其它算法, FaLASSO-SBL 算法作为 aLASSO-SBL 的快速算法, 在信号

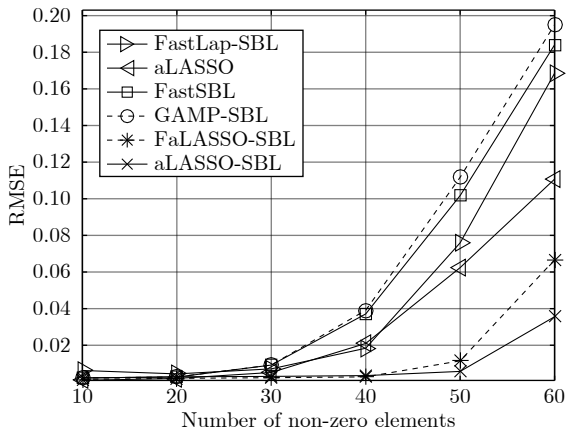


图 9 实值模型下各算法稀疏恢复准确度与稀疏度的关系
 Fig.9 RMSE of different algorithms with the real-value signal model versus number of non-zero elements

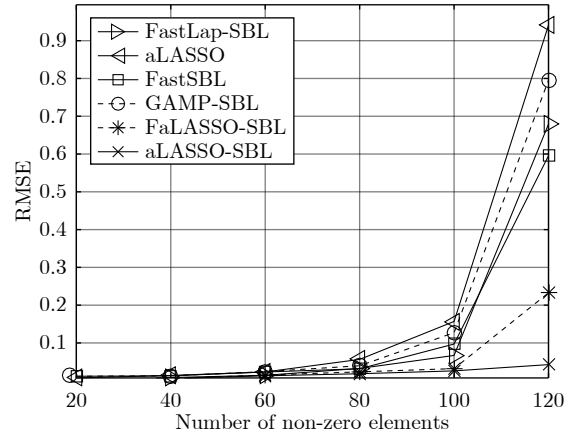


图 11 高维实值信号模型下各算法稀疏恢复准确度与稀疏度的关系
 Fig.11 RMSE of different algorithms with the high-dimensional real-value signal model versus number of non-zero elements

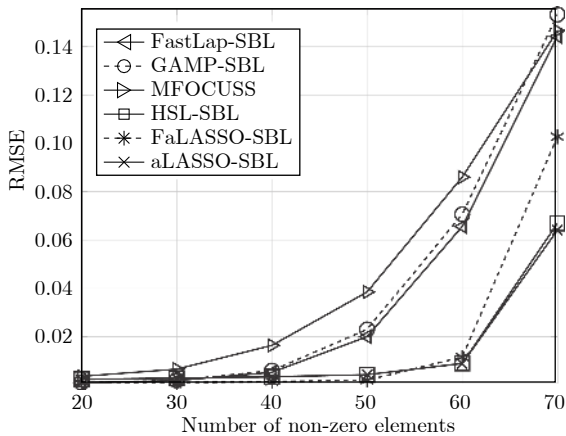


图 10 复值模型下各算法稀疏恢复准确度与稀疏度的关系

Fig.10 RMSE of different algorithms with the complex-value signal model versus number of non-zero elements

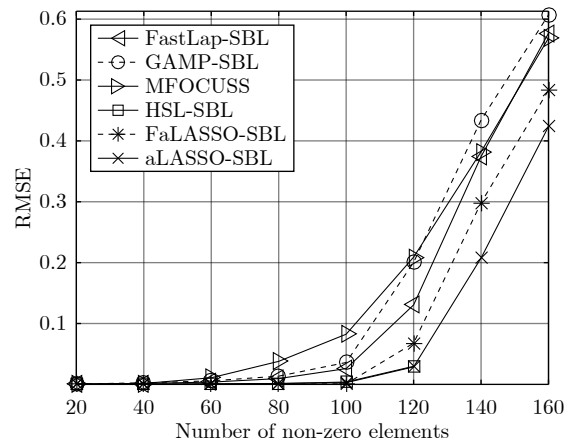


图 12 高维复值信号模型下各算法稀疏恢复准确度与稀疏度的关系

Fig.12 RMSE of different algorithms with the high-dimensional complex-value signal model versus number of non-zero elements

非零元素个数增加到一定程度 ($K \geq 60$) 时稀疏信号恢复的准确性有所下降。

与仿真二相同, 为了进一步验证本文提出的算法对高维稀疏信号的恢复性能, 进行如下仿真实验. 对于实值信号模型, 信号长度设置为 2000, 测量数设置为 200, 信号中非零元素数目变化范围为 20 到 120, 间隔为 20. SNR 为 20 dB. 独立实验次数为 200 次. 对于复值信号模型, 信号中非零元素数目变化范围为 20 到 160, 间隔为 20, 其它参数设置与实值信号模型相同. 仿真实验结果如图 11 和图 12 所示.

图 11 为高维信号实值模型下的稀疏恢复准确度与稀疏度之间的关系. 如图所示, 本文提出的 aLASSO-SBL 算法的稀疏恢复准确度高于现有算法, 本文提出的 FaLASSO-SBL 算法准确度在非零

元素个数为 20 到 100 的范围内与 aLASSO-SBL 算法接近, 但是在非零元素个数增加到 120 时准确性低于 FaLASSO-SBL 算法. 图 12 为高维信号复值模型下的稀疏恢复准确度与稀疏度之间的关系. 观察图 12, HSL-SBL 算法和本文提出的 aLASSO-SBL 算法在非零元素数目为 20 到 120 范围内的稀疏恢复准确性优于现有算法, 但是 HSL-SBL 算法在非零元素数目大于 120 时失效. 本文提出的 FaLASSO 算法稀疏恢复准确性优于除 aLASSO-SBL 算法和 HSL-SBL 算法之外的其它算法, 但计算复杂度低于 aLASSO-SBL 算法和 HSL-SBL 算法.

4.4 仿真实验四

本次仿真实验研究各个算法稀疏恢复性能和信噪比的关系. 对于实值信号模型, 测量矩阵的维度设置为 100×200 , 即测量数为 100, 信号长度为 200. 信号中非零元素个数设置为 50. SNR 变化范围为 10 dB 到 30 dB, 间隔为 5 dB. 独立实验次数为 200 次. 复值信号模型参数设置与实值信号模型相同. 对于实值信号模型和复值信号模型的稀疏信号恢复结果分别如图 13 和图 14 所示.

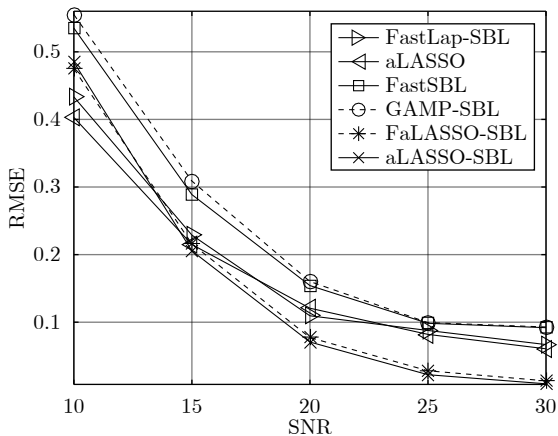


图 13 实值模型下各算法稀疏恢复准确度与信噪比的关系
Fig. 13 RMSE of different algorithms versus SNR with the real-value signal model

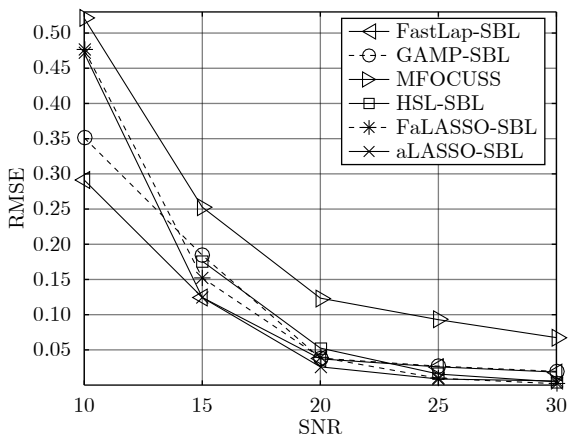


图 14 复值模型下各算法稀疏恢复准确度与信噪比的关系
Fig. 14 RMSE of different algorithms versus SNR with the complex-value signal model

由图 13 可知, 当 SNR 小于 20 dB 时, 所有算法失效, 即信号几乎不能被恢复. 当 SNR 大于 20 dB 时, 所有算法的稀疏恢复准确性随 SNR 的提高而提高. 其中, 本文提出的 aLASSO-SBL 和 FaLASSO-SBL 算法在 SNR 大于 20 dB 时恢复效果优于其他算法.

如图 14 所示, 对于复值信号模型, 当 SNR 低于 15 dB 时, 所有算法恢复效果比较差, HSL-SBL 在 SNR 为 10 dB 的情况下出现不收敛的情况. 当 SNR 大于 15 dB 时, 所有算法的 RMSE 随 SNR 的增加而降低, 而本文提出的 aLASSO-SBL 和 FaLASSO-SBL 算法恢复信号的 RMSE 比其它算法低.

与仿真二和仿真三相同, 为验证本文提出算法对高维信号的恢复性能, 进行如下实验. 对于实值信号模型, 信号长度设置为 2000, 测量数设置为 200, 非零元素数设置为 100. SNR 变化范围为 15 到 35, 间隔为 5 dB. 独立实验次数为 200 次. 对于复值信号模型, SNR 变化范围为 10 到 30, 其它参数设置与实值信号模型相同.

图 15 为高维实值信号模型下各算法稀疏恢复准确度与信噪比的关系. 观察图 15, 所有算法的恢复准确度随着 SNR 的增大而提高, 本文提出的 aLASSO-SBL 算法和 FaLASSO-SBL 算法在 SNR 为 20 dB 到 35 dB 的范围内恢复的准确率优于现有算法.

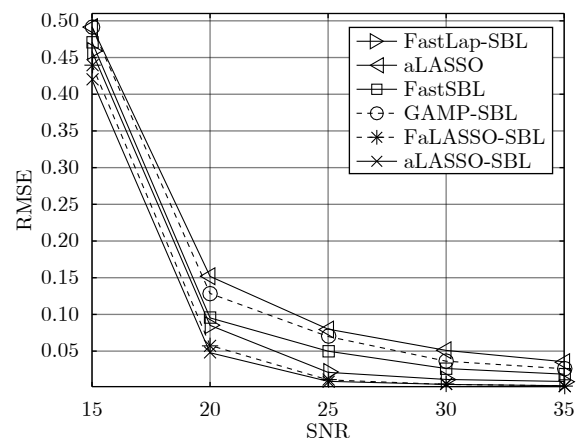


图 15 高维实值信号模型下各算法稀疏恢复准确度与信噪比的关系
Fig. 15 RMSE of different algorithms versus SNR with the high-dimensional real-value signal model

图 16 为高维实值信号模型下各算法稀疏恢复准确度与信噪比的关系. 观察图 16, HSL-SBL 算法、aLASSO-SBL 算法和 FaLASSO-SBL 算法在 SNR 为 20 dB 到 30 dB 的范围内恢复的准确率优于现有算法, 但是 HSL-SBL 算法在 SNR 低于 20 dB 时失效.

4.5 单快拍条件下波达方向估计实验验证

波达方向 (Direction of arrival, DOA) 估计是稀疏恢复的应用之一. 通过预定义网格构建测量信

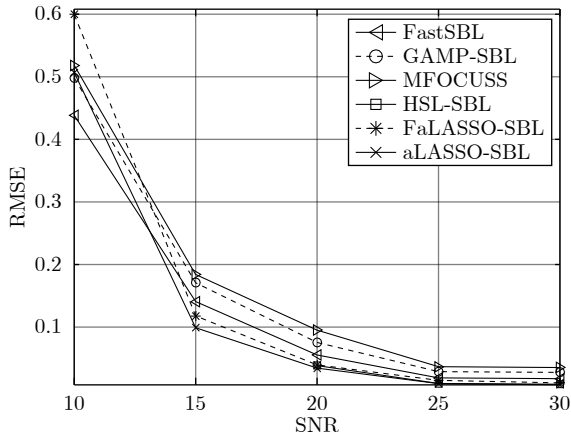


图 16 高维复值信号模型下各算法稀疏恢复准确度与信噪比的关系

Fig. 16 RMSE of different algorithms versus SNR with the high-dimensional complex-value signal model

号的空间中的过完备表达模型, 将 DOA 估计问题可转换为稀疏信号恢复问题^[15]. 其中, 恢复的信号的非零元素对应的位置代表信号源的到达角. 使用单个快拍的测量数据进行 DOA 估计的方法称为单快拍 DOA 估计. 本小节将结合单快拍 DOA 估计验证提出的算法的性能.

本小节中使用的所有算法总结如下: SS-ESPRIT 算法为文献 [36] 中提出的针对单快拍条件下 DOA 估计的空间平滑 ESPRIT 算法; L1-SR 算法为文献 [37] 中提出的基于 ℓ_1 范数的单快拍 DOA 估计算法; SURE-IR 算法为文献 [38] 中提出的超分辨率算法; OGSBL 为文献 [39] 提出的基于 SBL 的离网格 DOA 估计算法; HSL-SBL 为文献 [19] 中提出的基于合成 LASSO 先验的 SBL 算法; aLASSO-SBL 算法和 FaLASSO-SBL 算法为本文中提出的算法. 其中, HSL-SBL 算法、aLASSO-SBL 算法和 FaLASSO-SBL 算法需采用文献 [39] 中的离网格方法对估计的方位角进行提纯.

假设使用均匀线性阵列接收信号, 阵元间隔为 $\frac{\gamma}{2}$, 其中 γ 为波长. 目标平面为阵列前 -60° 到 60° 的扇形区域, 即所有信号源位于该扇形区域中. 仿真中信号源个数 K 设置为 10, 每次实验, 信号源的方位角、幅度和相位随机生成, 根据信号源的方位角确定阵列响应, 然后根据阵列响应生成纯净的测量数据, 最后对测量数据添加噪声得到带噪测量数据 \mathbf{x} . 对目标平面进行均匀网格化, 网格间隔为 0.5° , 即网格数为 $N = 241$. 根据预定义网格构建阵列流型矩阵 \mathbf{A} . 在生成以上数据后, 由测量数据 \mathbf{x} 和流型矩阵 \mathbf{A} 使用 DOA 估计算法进行 DOA 估计. 假设信号源的实际方位角为 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]^T$, 估

计得到的方位角为 $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = [\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_K]^T$, 使用 RMSE 对 DOA 估计的准确度进行衡量, 定义如下:

$$e = \sqrt{\frac{1}{KN_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_i\|_F^2} \quad (38)$$

其中, N_{MC} 表示 Monte-Carlo 实验的次数, 设置为 200; $\boldsymbol{\theta}_i$ 表示第 i 次 Monte-Carlo 实验的声源实际方位角; $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i$ 表示第 i 次 Monte-Carlo 实验的估计的声源方位角. 本次仿真分别测试各个算法在不同测量数 (阵元数) 和不同 SNR 下的 DOA 估计准确性. 结果分别如图 17 和图 18 所示.

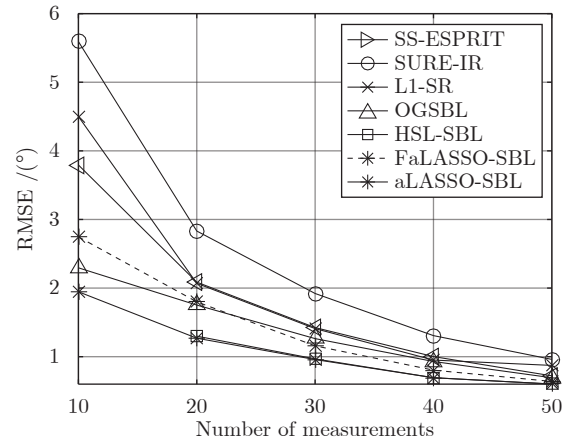


图 17 DOA 估计的准确度与测量数的关系

Fig. 17 RMSE of DOA estimation using different algorithms versus number of measurements

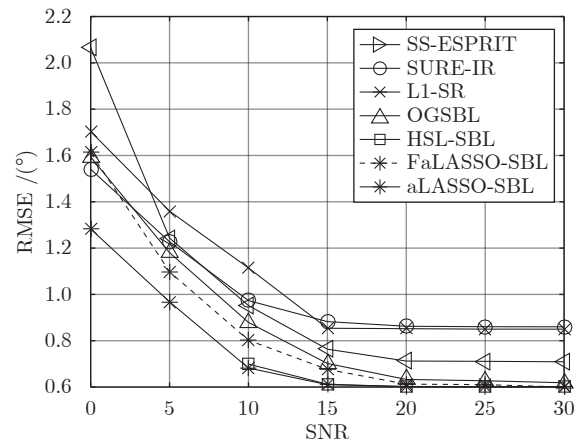


图 18 DOA 估计准确度与信噪比的关系

Fig. 18 RMSE of DOA estimation using different algorithms versus SNR

图 17 为不同测量数下 DOA 估计准确度的结果. 其中, SNR 设置为 20 dB. 如图所示, HSL-SBL 算法和本文中提出的 aLASSO-SBL 算法在测量数

为 20 到 50 的范围内 DOA 估计准确性优于其余算法, 但是 HSL-SBL 算法在测量数小于 20 时失效. 与 HSL-SBL 算法和 aLASSO-SBL 算法相比, FaLASSO-SBL 算法的准确性有所下降, 原因是阵列流形矩阵中的列向量在测量数小的情况下相关性较高^[15], 导致 FaLASSO-SBL 算法性能下降. 但是当测量数增大 $M \geq 30$ 时, 本文提出的 FaLASSO 算法准确性优于 OGSBL 算法、L-SR 算法和 SURE-IR 算法.

图 18 为不同 SNR 下 DOA 估计准确度的结果. 其中, 测量数设置为 50. 如图所示, HSL-SBL 算法和本文中提出的 aLASSO-SBL 算法在 SNR 为 10 到 30 的范围内的 DOA 估计准确性优于其余算法, 但是 HSL-SBL 算法在 SNR 小于 10 时失效. 与 HSL-SBL 算法和 aLASSO-SBL 算法相比, FaLASSO-SBL 算法的准确性有所下降.

表 3 给出了 SNR 为 20 dB, 测量数为 50 时各单快拍 DOA 估计算法单次运行时间. 结合图 17 和图 18 可知, 相比于 HSL-SBL 算法, 本文提出 aLASSO-SBL 算法在不增加计算量的前提下提高了算法的稳定性, 在小测量数或低信噪比的情况下性能优于 HSL-SBL 算法. 而本文提出的 FaLASSO-SBL 算法在运算速度方面具有优势.

表 3 单快拍 DOA 估计实验各算法单次运行时间
Table 3 Time consumptions of different algorithms for single snapshot DOA estimation

算法	用时(s)	算法	用时(s)
SS-ESPRIT	0.37	HSL-SBL	0.85
SURE-IR	1.64	FaLASSO-SBL	0.47
L1-SR	0.91	aLASSO-SBL	0.83
OGSBL	0.69		

4.6 仿真结果分析总结

下面对实验结果进行总结. 通过图 5、图 6、图 7 和图 8 可知, 在相同测量数下, 本文提出 aLASSO-SBL 和 FaLASSO-SBL 算法稀疏恢复准确性优于现有算法. 另外, 比较表 1 和表 2, 当信号维度增加时, 本文提出 aLASSO-SBL 算法的计算量会明显提高, 本文提出的 FaLASSO-SBL 算法对高维信号进行恢复时, 在计算量方面比 aLASSO-SBL 算法有明显优势. 根据图 9、图 10、图 11 和图 12 可知, aLASSO-SBL 和 FaLASSO-SBL 算法鲁棒于信号的稀疏度, 即在稀疏度比较低的情况下仍然可以精确的恢复出信号. 根据图 13、图 14、图 15 和图 16 可知, 本文提出的 LASSO-SBL 和 FaLASSO-SBL

算法的在高 SNR 的条件下信号恢复准确性比其它常用算法高.

对于单快拍 DOA 估计而言, 由于单快拍 DOA 估计中阵列流形矩阵的列向量具有在测量数较少时相关性较高, 所以导致 FaLASSO-SBL 算法在小测量数时 ($M \leq 20$) 性能下降. 根据图 17 和图 18 可知, 当测量数较大时, 本文提出的 aLASSO-SBL 算法和 FaLASSO-SBL 算法的单快拍 DOA 估计准确性优于现有单快拍 DOA 估计算法, 结合表 3 可知, 本文提出的 FaLASSO 算法降低了 aLASSO-SBL 算法计算量. 综上所述, 当测量矩阵 \mathbf{A} 的列向量不相关时, aLASSO-SBL 算法的稀疏恢复准确度优于现有算法, FaLASSO-SBL 算法的准确度略低于 aLASSO-SBL 算法但是计算量明显低于 aLASSO-SBL 算法; 当测量矩阵 \mathbf{A} 的列向量相关时, FaLASSO-SBL 算法的稀疏恢复准确度有明显下降. 对于单快拍 DOA 估计而言, 在测量数大的情况下 FaLASSO-SBL 算法准确性和运算速度优于现有算法.

5 结论

针对稀疏信号恢复问题, 本文提出了两种 SBL 算法, 即 aLASSO-SBL 算法和 FaLASSO-SBL 算法. 其中, FaLASSO-SBL 算法是 aLASSO-SBL 算法的快速算法. 具体的创新点为: 1) 提出一种多层先验的稀疏贝叶斯框架用于稀疏贝叶斯模型构建, 赋予信号中元素独立的 LASSO 先验. 通过分析, 自适应 LASSO 先验比现有稀疏先验更有效的鼓励稀疏. 根据构建的稀疏恢复模型提出了 aLASSO-SBL 算法. 2) 在贝叶斯推断阶段, 利用空间轮换方法避免矩阵求逆运算, 进一步降低了算法的计算复杂度, 使参数更新快速高效. 从而提出了 FaLASSO-SBL 算法. 本文提出的算法的稀疏恢复性能通过仿真实验进行了验证, 结果表明本文提出基于自适应 LASSO 先验的 SBL 算法比现有算法具有更高的稀疏恢复准确度; 本文提出的快算法的准确度略低于基于自适应 LASSO 先验的 SBL 算法, 但计算复杂度明显降低. 对于单快拍 DOA 估计而言, 在测量数大的情况下 FaLASSO-SBL 算法准确性和运算速度优于现有算法.

附录 A

Woodbury 引理. 如果矩阵 \mathbf{A} 、矩阵 \mathbf{C} 和矩阵 $\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}$ 是非奇异矩阵, 则有以下恒等式:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{UCV})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A1})$$

其中, 矩阵 \mathbf{A} 、矩阵 \mathbf{C} 、矩阵 \mathbf{U} 和矩阵 \mathbf{V} 为维度合适的矩阵.

References

- 1 Wang L, Zhao L F, Bi G A, Wan C R, Zhang L R, Zhang H J. Novel wideband DOA estimation based on sparse Bayesian learning with dirichlet process priors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, **64**(2): 275–289
- 2 Xenaki A, Boldt J B, Christensen M G. Sound source localization and speech enhancement with sparse Bayesian learning beamforming. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2018, **143**(6): 3912–3921
- 3 Bai Z L, Sun J W, Jensen J R, Christensen M G. Indoor sound source localization based on sparse Bayesian learning and compressed data. In: Proceedings of the 27th European Signal Processing Conference. A Coruna, Spain: IEEE, 2019. 1–5
- 4 Zheng Y L, Fraysse A, Rodet T. Efficient variational Bayesian approximation method based on subspace optimization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2015, **24**(2): 681–693
- 5 Lan Cheng-Dong, Lin Yu-Peng, Fang Da-Rui, Chen Jian. Multi-view sparse measurement for image-based rendering method. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(4): 882–890 (兰诚栋, 林宇鹏, 方大锐, 陈建. 多视点稀疏测量的图像绘制方法. *自动化学报*, 2021, **47**(4): 882–890)
- 6 Zhang M C, Yuan X J, He Z Q. Variance state propagation for structured sparse Bayesian learning. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2020, **68**: 2386–2400
- 7 Liu S H, Huang Y M, Wu H, Tan C, Jia J B. Efficient multi-task structure-aware sparse Bayesian learning for frequency-difference electrical impedance tomography. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2021, **17**(1): 463–472
- 8 Guo Jun-Feng, Li Yu-Liang. Sparse representation of robot image based on dictionary learning algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(4): 820–830 (郭俊峰, 李育亮. 基于学习字典的机器人图像稀疏表示方法. *自动化学报*, 2020, **46**(4): 820–830)
- 9 Zhang Fang, Wang Meng, Xiao Zhi-Tao, Wu Jun, Geng Lei, Tong Jun, Wang Wen. Saliency detection via full convolution neural network and low rank sparse decomposition. *Acta Automatica Sinica*, 2019, **45**(11): 2148–2158 (张芳, 王萌, 肖志涛, 吴骏, 耿磊, 董军, 王雯. 基于全卷积神经网络与低秩稀疏分解的显著性检测. *自动化学报*, 2019, **45**(11): 2148–2158)
- 10 Ojeda A, Kenneth K D, Mullen T. Fast and robust block-sparse Bayesian learning for EEG source imaging. *NeuroImage*, 2018, **174**: 449–462
- 11 Jiao Y, Zhang Y, Chen X, Yin E W, Jin J, Wang X Y, Cichocki A. Sparse group representation model for motor imagery EEG classification. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, 2019, **23**(2): 631–641
- 12 Niu H Q, Gerstoft P, Ozanich E, Li Z L, Zhang R H, Gong Z X, Wang H B. Block sparse Bayesian learning for broadband mode extraction in shallow water from a vertical array. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2020, **147**(6): 3729–3739
- 13 Zheng R, Xu X, Ye Z F, Dai J S. Robust sparse Bayesian learning for DOA estimation in impulsive noise environments. *Signal Processing*, 2020, **171**(107500): 1–6
- 14 Cao Na, Wang Yong-Li, Sun Jian-Hong, Zhao Ning, Gong Xiao-Ze. SAR target recognition based on dictionary learning and extended joint dynamic sparse representation. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(12): 2638–2646 (曹娜, 王永利, 孙建红, 赵宁, 宫小泽. 基于字典学习和拓展联合动态稀疏表示的 SAR 目标识别. *自动化学报*, 2020, **46**(12): 2638–2646)
- 15 Yang Z, Li J, Stoica P, Xie L H. Sparse methods for direction-of-arrival estimation. *Academic Press Library in Signal Processing*. London: Academic Press, 2018. 509–581
- 16 Tipping M E, Smola A. Sparse Bayesian learning and the relevance vector machine. *The Journal of Machine Learning Research*, 2001, **59**(1): 211–244
- 17 Babacan S D, Molina R, Katsaggelos A K. Bayesian compressive sensing using laplace priors. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, **19**(1): 53–63
- 18 Zhao L F, Wang L, Bi G A, Yang L. An autofocus technique for high-resolution inverse synthetic aperture radar imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2014, **52**(10): 6392–6403
- 19 Yang J, Yang Y. Sparse Bayesian DOA estimation using hierarchical synthesis lasso priors for off-grid signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2020, **68**: 872–884
- 20 Zou H. The adaptive lasso and its oracle properties. *Journal of the American Statistical Association*, 2006, **101**(476): 1418–1429
- 21 Tipping M E, Faul A C. Fast marginal likelihood maximisation for sparse Bayesian models. In: Proceedings of the Ninth International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics. Florida, USA: Springer, 2003. 3–6
- 22 Duan H, Yang L, Fang J, Li H. Fast inverse-free sparse Bayesian learning via relaxed evidence lower bound maximization. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, **24**(6): 774–778
- 23 Shoukairi M A, Rao B D. Sparse Bayesian learning using approximate message passing. In: Proceedings of the 48th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Pacific Grove, USA: IEEE, 2014. 1957–1961
- 24 Shoukairi M A, Schniter P, Rao B D. A gamp-based low complexity sparse Bayesian learning algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, **66**(2): 294–308
- 25 Thomas C K, Slock D. Save - space alternating variational estimation for sparse Bayesian learning. In: Proceedings of IEEE Data Science Workshop. Lausanne, Switzerland: IEEE, 2018. 11–15
- 26 Worley B. Scalable mean-field sparse Bayesian learning. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, **67**(24): 6314–6326
- 27 Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(2): 489–509
- 28 Wipf D P, Rao B D, Nagarajan S. Latent variable Bayesian models for promoting sparsity. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2011, **57**(9): 6236–6255
- 29 Figueiredo M A T, Nowak R D, Wright S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, **1**(4): 586–597
- 30 Xenaki A, Gerstoft P, Mosegaard K. Compressive beamforming. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2014, **136**(1): 260–271
- 31 Bishop C M. *Pattern recognition and machine learning*. New York, USA: Springer-Verlag, 2006. 152–169
- 32 Tzikas D G, Likas A C, Galatsanos N P. The variational approximation for Bayesian inference. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(6): 131–146
- 33 Higham N J. Accuracy and stability of numerical algorithms. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. Philadelphia, USA: Springer, 2002. 67–93
- 34 Pati Y C, Rezaifar R, Krishnaprasad P S. Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In: Proceedings of the Conference on Signals, Systems and Computers. Pacific Grove, USA: IEEE, 2002. 1–5
- 35 Cotter S F, Rao B D, Engan K, Delgado K K. Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, **53**(7): 2477–2488
- 36 Thakre A, Haardt M, Giridhar K. Single snapshot spatial smoothing with improved effective array aperture. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, **16**(6): 505–508

- 37 Raj A G, Mcclellan J H. Single snapshot super-resolution DOA estimation for arbitrary array geometries. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, **26**(1): 119–123
- 38 Fang J, Wang F, Shen Y, Li H, Blum R S. Super-resolution compressed sensing for line spectral estimation: an iterative re-weighted approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, **64**(18): 4649–4662
- 39 Yang Z, Xie L H, Zhang C. Off-grid direction of arrival estimation using sparse Bayesian inference. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, **61**(1): 38–43



白宗龙 哈尔滨工业大学仪器科学与工程学院博士研究生. 主要研究方向为稀疏信号恢复, 麦克风阵列信号处理.

E-mail: baizongyao@163.com

(**BAI Zong-Long** Ph.D. candidate at the School of Instrument Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. His research interest covers sparse signal recovery technology, microphone array signal processing.)



师黎明 奥尔堡大学建筑设计与媒体艺术系博士后. 主要研究方向为稀疏信号处理, 语音信号处理.

E-mail: ls@create.aau.dk

(**SHI Li-Ming** Postdoctoral at the Create, Aalborg University. His research interest covers sparse signal recovery technology, speech signal processing.)



孙金玮 哈尔滨工业大学仪器科学与工程学院教授. 主要研究方向为生物信号处理, 主动噪声控制. 本文通信作者.

E-mail: jwsun@hit.edu.cn

(**SUN Jin-Wei** Professor at the School of Instrument Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. His research interest covers biomedical signal processing, active noise control. Corresponding author of this paper.)