

一类具有未知幂次的高阶不确定非线性系统的自适应控制

刘玉发^{1,2} 刘勇华^{1,2} 苏春翌^{1,2} 鲁仁全^{1,2}

摘要 研究了一类具有未知幂次的高阶不确定非线性系统的自适应跟踪控制问题. 在无需系统函数先验知识的条件下, 采用积分反推技术和障碍李雅普诺夫函数, 提出了一种新颖的自适应跟踪控制算法. 该控制算法的显著特点是所设计的自适应控制器均与系统幂次无关, 并且能够保证闭环系统的所有信号皆有界. 仿真算例验证了该控制算法的有效性.

关键词 高阶非线性系统, 输出跟踪, 自适应控制, 障碍函数, 未知幂次

引用格式 刘玉发, 刘勇华, 苏春翌, 鲁仁全. 一类具有未知幂次的高阶不确定非线性系统的自适应控制. 自动化学报, 2022, 48(8): 2018–2027

DOI 10.16383/j.aas.c200893

Adaptive Control for a Class of High-order Uncertain Nonlinear Systems With Unknown Powers

LIU Yu-Fa^{1,2} LIU Yong-Hua^{1,2} SU Chun-Yi^{1,2} LU Ren-Quan^{1,2}

Abstract This paper studies the problem of adaptive output tracking for a class of high-order uncertain nonlinear systems with unknown powers. Without incorporating a priori information of system functions, a novel adaptive tracking control algorithm is proposed by combining integrator backstepping technique and barrier Lyapunov functions. The remarkable feature of the proposed algorithm is that the designed adaptive controller does not rely on the powers and ensures the global uniform boundedness of all the closed-loop signals. Simulation studies are stated to perform the effectiveness of the control algorithm.

Key words High-order nonlinear systems, output tracking, adaptive control, barrier function, unknown powers

Citation Liu Yu-Fa, Liu Yong-Hua, Su Chun-Yi, Lu Ren-Quan. Adaptive control for a class of high-order uncertain nonlinear systems with unknown powers. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(8): 2018–2027

在工业生产和社会生活中, 存在着大量的复杂系统, 如非线性耦合机械系统^[1]、超临界机组^[2]等. 这些复杂系统线性化时通常包含了不可控模态, 给其控制器设计与分析带来了挑战. 在过去十几年里, 这类称之为高阶非线性系统的自适应控制问题吸引了很多研究者的关注. Lin 等在文献 [3–4] 中提出了一种新的构造性设计框架—增加幂次积分法, 有效解决了高阶非线性系统的镇定与实际跟踪问题. 借助于这一方法, 文献 [5–19] 研究了不同条件下高阶不确定非线性系统的自适应控制问题, 取得了一系

列研究成果. 值得指出的是, 上述绝大多数研究结果都要求系统的幂次信息完全已知. 然而, 在一些实际应用中, 由于控制系统本身与周围环境存在着各种不确定因素, 使得系统的幂次信息可能无法精确获取. 因此, 进一步探讨具有未知幂次的高阶非线性系统的控制器设计是很有意义并值得研究的问题.

针对具有未知幂次的高阶非线性系统, 文献 [20–21] 采用改进的增加幂次积分法, 分别给出了状态反馈和输出反馈控制算法. 然而, 这些算法没有考虑系统函数的不确定性, 且需要假设系统的幂次上界信息已知. 文献 [22] 结合增加幂次积分技术和自适应控制方法, 解决了具有未知幂次和不确定参数的高阶非线性系统的自适应控制问题. 最近, 针对一类具有未知时变幂次的高阶非线性系统, 文献 [23] 利用障碍李雅普诺夫方法给出了满足全状态约束条件的自适应控制方案. 但文献 [22–23] 所提控制方案仍然要求系统幂次的上界已知. 为去除这一假设条件, 文献 [24] 采用增加幂次积分技术和逻辑切换方法, 设计了一种全局切换自适应镇定方案. 该方案的不足在于切换控制信号是非光滑的, 可能会引

收稿日期 2020-10-25 录用日期 2021-04-16

Manuscript received October 25, 2020; accepted April 16, 2021

国家自然科学基金 (61803097, U2013601), 广东省特支计划本土创新创业团队项目基金 (2019BT02X353) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61803097, U2013601) and Local Innovative and Research Teams Project of Guangdong Special Support Program (2019BT02X353)

本文责任编辑 刘艳军

Recommended by Associate Editor LIU Yan-Jun

1. 广东工业大学自动化学院 广州 510006 2. 广东省智能决策与协同控制重点实验室 广州 510006

1. School of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006 2. Guangdong Province Key Laboratory of Intelligent Decision and Cooperative Control, Guangzhou 510006

起抖振问题, 从而激发系统中的高频未建模动态. 为此, 文献 [25] 利用动态增益法, 提出了一种光滑自适应状态反馈控制器, 但这种控制器仅适用于相对阶为 2 的非线性系统.

基于以上讨论, 本文研究了一类具有未知幂次的高阶不确定非线性系统的自适应跟踪控制问题. 结合积分反推技术和障碍李雅普诺夫函数, 提出了一种新颖的自适应状态反馈控制策略. 本文所得到的控制策略具有如下优点: 1) 采用对数型障碍李雅普诺夫函数^[26-27]解决了系统幂次未知与模型不确定带来的技术难题; 2) 所提出的自适应控制策略中没有包含虚拟控制律的导数信息, 避免了积分反推法中的“计算膨胀”问题; 3) 所设计控制器能够确保闭环系统的所有信号一致有界. 最后, 仿真结果验证了本文理论结果的有效性.

本文采用如下符号: \mathbf{R} , $\mathbf{R}_{\geq 0}$, $\mathbf{R}_{> 0}$ 分别表示实数、非负实数和正实数集合. \mathbf{R}^n 表示 n 维实向量集合. $\text{sign}(s)$ 表示变量 s 的符号函数. 对任意正常数 q , 定义 $[s]^q = \text{sign}(s)|s|^q$. $\mathbf{Q}_{\text{odd}}^{\geq 1}$ 表示分子和分母都是正奇整数的所有有理数的集合.

1 问题描述与预备知识

1.1 问题描述

考虑如下高阶不确定非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(t, \mathbf{x}, u) + g_i(t, \mathbf{x}, u)[x_{i+1}]^{p_i} \\ &\quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f_n(t, \mathbf{x}, u) + g_n(t, \mathbf{x}, u)[u]^{p_n} \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量, 初始值 $\mathbf{x}(0) = [x_1(0), \dots, x_n(0)]^T$, $\bar{\mathbf{x}}_i = [x_1, \dots, x_i]^T \in \mathbf{R}^i$, $i = 1, \dots, n$; $u \in \mathbf{R}$ 和 $y \in \mathbf{R}$ 分别是控制输入和系统输出; $p_i \in \mathbf{Q}_{\text{odd}}^{\geq 1}$, $i = 1, \dots, n$ 是系统 (1) 的未知幂次. 系统函数 $f_i, g_i: \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$ 在 t 上分段连续, 且关于 \mathbf{x} 和 u 满足局部 Lipschitz 条件. 本文的控制目标是设计自适应控制器 u , 使得系统输出 y 跟踪期望轨迹 y_r , 同时确保闭环系统的所有信号皆有界.

注 1. 不同于文献 [20-25] 中的研究结果, 本文中系统幂次无需满足 $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$.

假设 1. 存在未知的连续函数 $f_{il}(\bar{\mathbf{x}}_i): \mathbf{R}^i \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$, $g_i(\bar{\mathbf{x}}_i): \mathbf{R}^i \rightarrow \mathbf{R}_{> 0}$ 和 $\bar{g}_i(\bar{\mathbf{x}}_i): \mathbf{R}^i \rightarrow \mathbf{R}_{> 0}$, 满足

$$|f_i(t, \mathbf{x}, u)| \leq \sum_{l=1}^{j_i} |x_{i+1}|^{q_{il}} \bar{f}_{il}(\bar{\mathbf{x}}_i) \quad (2)$$

$$0 < g_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \leq g_i(t, \mathbf{x}, u) \leq \bar{g}_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \quad (3)$$

其中, $i = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, j_i$, j_i 为有限正整数, q_{il} 为满足 $0 \leq q_{i1} < q_{i2} < \dots < q_{ij_i} < p_i$ 的正常数.

注 2. 假设 1 表明了本文所提控制算法无需知晓系统函数 $g_i(t, \mathbf{x}, u)$, $f_i(t, \mathbf{x}, u)$ 及相应的界函数 $g_i(\bar{\mathbf{x}}_i)$, $\bar{g}_i(\bar{\mathbf{x}}_i)$, $\bar{f}_{il}(\bar{\mathbf{x}}_i)$ 的解析表达式.

假设 2. 期望轨迹 y_r 为连续可微函数, 且存在未知正常数 B_r , 满足

$$|y_r(t)| + |\dot{y}_r(t)| \leq B_r, t \geq 0 \quad (4)$$

1.2 预备知识

引理 1^[28]. 考虑初值问题

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_r(t) = h_r(t, \boldsymbol{\eta}_r), \boldsymbol{\eta}_r(0) = \boldsymbol{\eta}_r^0 \in \Xi_r \quad (5)$$

其中, $h_r: \mathbf{R}_{\geq 0} \times \Xi_r \rightarrow \mathbf{R}^N$ 在 t 上分段连续, 且关于 $\boldsymbol{\eta}_r$ 满足局部 Lipschitz 条件, $\Xi_r \subset \mathbf{R}^N$ 为非空开子集. $\boldsymbol{\eta}_r(t)$ 是初值问题 (5) 在最大存在区间 $[0, t'_f)$ 上的解, $t'_f < +\infty$. 设 Ξ'_r 是 Ξ_r 的紧子集, 则存在 $t_s \in [0, t'_f)$, 使得 $\boldsymbol{\eta}_r(t_s) \notin \Xi'_r$.

引理 2^[29]. 对任意 $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{R}_{> 0}$, $n \in \mathbf{R}_{> 0}$ 和函数 $\rho(a, b) > 0$, 下列不等式成立

$$\begin{aligned} |a|^m |b|^n &\leq \frac{m}{m+n} \rho(a, b) |a|^{m+n} + \\ &\quad \frac{n}{m+n} \rho(a, b)^{-\frac{m}{n}} |b|^{m+n} \end{aligned} \quad (6)$$

引理 3^[29-30]. 对任意 $p \geq 1$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, 下列不等式成立

$$||a|^p - |b|^p| \leq |[a]^p - [b]^p| \quad (7)$$

$$|[a]^p - [b]^p| \leq c_p |a - b| \times (|a - b|^{p-1} + |b|^{p-1}) \quad (8)$$

$$|a|^p + |b|^p \leq (|a| + |b|)^p \quad (9)$$

其中, $c_p = 2^{p-2} + 2$.

引理 4^[31]. 对任意 $\delta \in \mathbf{R}_{> 0}$ 和 $\xi \in \mathbf{R}$, 下列不等式成立

$$0 \leq |\xi| - \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 + \delta^2}} < \delta \quad (10)$$

引理 5^[32]. 对满足 $0 \leq d < c$ 的 $c \in \mathbf{R}$ 和 $d \in \mathbf{R}$, 下列不等式成立

$$\log \frac{c}{c-d} \leq \frac{d}{c-d} \quad (11)$$

2 自适应跟踪控制策略

本节设计了一种基于障碍李雅普诺夫函数的自适应跟踪控制器, 并给出了闭环系统的稳定性证明.

2.1 自适应控制器设计

定义如下误差坐标变换

$$z_1 = x_1 - y_r \tag{12}$$

$$z_i = x_i - \alpha_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n \tag{13}$$

其中, α_{i-1} 是第 $i-1$ 步的虚拟控制律.

步骤 i ($i = 1, \dots, n-1$). 选取正常数 μ_i 满足 $\mu_i > |z_i(0)|$, 设计第 i 步虚拟控制律和自适应律为

$$\alpha_i = -\xi_i \left(k_i + \frac{\sigma_i \hat{\vartheta}_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} \right) \tag{14}$$

$$\dot{\hat{\vartheta}}_i = \gamma_i \left(\frac{\xi_i^2}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} - \lambda_i \hat{\vartheta}_i \right) \tag{15}$$

其中, $\xi_i = \frac{z_i}{\mu_i^2 - z_i^2}$, $\hat{\vartheta}_i$ 是 ϑ_i 的估计值, $\hat{\vartheta}_i(0) \geq 0$, k_i , σ_i , γ_i 和 λ_i 为正常数.

步骤 n . 选取正常数 μ_n 满足 $\mu_n > |z_n(0)|$, 设计实际控制律和自适应律为

$$u = -\xi_n \left(k_n + \frac{\sigma_n \hat{\vartheta}_n}{\sqrt{\xi_n^2 + \delta_n^2}} \right) \tag{16}$$

$$\dot{\hat{\vartheta}}_n = \gamma_n \left(\frac{\xi_n^2}{\sqrt{\xi_n^2 + \delta_n^2}} - \lambda_n \hat{\vartheta}_n \right) \tag{17}$$

其中, $\xi_n = \frac{z_n}{\mu_n^2 - z_n^2}$, $\hat{\vartheta}_n$ 是 ϑ_n 的估计值且满足, $\hat{\vartheta}_n(0) \geq 0$, k_n , σ_n , γ_n 和 λ_n 为正常数.

上述自适应控制器的设计过程如图 1 所示.

注 3. 如式 (14) ~ (17) 所示, 本文提出的自适应反推控制策略不依赖于系统幂次 p_i 及其上界信息, 且无需知晓系统函数 $f_i(t, \mathbf{x}, u)$, $g_i(t, \mathbf{x}, u)$ 及相应的界函数 $\bar{f}_{il}(\bar{\mathbf{x}}_i)$, $\bar{g}_i(\bar{\mathbf{x}}_i)$, $\bar{g}_i(\bar{\mathbf{x}}_i)$ 的解析表达式. 同时, 该控制策略未包含虚拟控制律 α_i 的导数, 消除了积分反推法中“计算膨胀”问题.

2.2 稳定性分析

在给出闭环系统的稳定性分析之前, 先引入如下命题.

命题 1. 对式 (14) ~ (17) 的 $\hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ 和 u , 下列陈述成立

- i) $\hat{\vartheta}_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$
- ii) $\xi_i[\alpha_i]^{p_i} = -|\xi_i||\alpha_i|^{p_i} \leq 0, \quad \xi_n[u]^{p_n} = -|\xi_n||u|^{p_n},$
 $i = 1, \dots, n-1.$

证明. i) 由于 $\frac{\xi_i^2}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} \geq 0$ 和 $\hat{\vartheta}_i(0) \geq 0$, 根据式

(15) 和式 (17), 可直接推出 $\hat{\vartheta}_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$

ii) 根据式 (14) 和式 (16), $\alpha_i, \quad i = 1, \dots, n-1$ 和 u 改写为

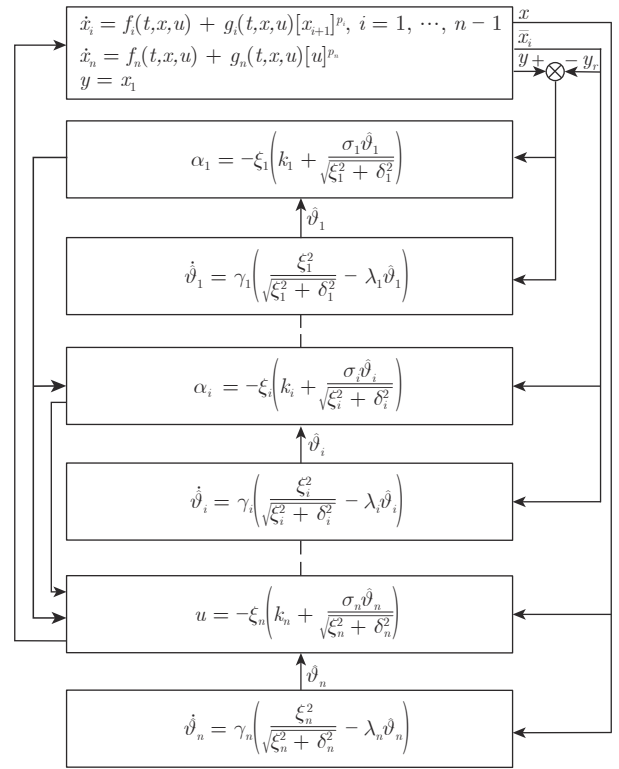


图 1 具有未知幂次的控制系统框图

Fig.1 Block diagram of the control system with unknown powers

$$\alpha_i = \xi_i \phi_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \tag{18}$$

$$u = \xi_n \phi_n \tag{19}$$

其中,

$$\phi_i = -k_i - \frac{\sigma_i \hat{\vartheta}_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}}, \quad i = 1, \dots, n \tag{20}$$

从而, 有

$$\xi_i[\alpha_i]^{p_i} = \xi_i|\alpha_i|^{p_i} \text{sign}(\xi_i \phi_i) \tag{21}$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

$$\xi_n[u]^{p_n} = \xi_n|u|^{p_n} \text{sign}(\xi_n \phi_n) \tag{22}$$

另外, 由于 $\hat{\vartheta}_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$, 从式 (20) 易知 $\phi_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n$, 进而可得 $\text{sign}(\xi_i \phi_i) = -\text{sign}(\xi_i), \quad i = 1, \dots, n.$ 故

$$\xi_i[\alpha_i]^{p_i} = -|\xi_i||\alpha_i|^{p_i} \leq 0 \tag{23}$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

$$\xi_n[u]^{p_n} = -|\xi_n||u|^{p_n} \leq 0 \tag{24}$$

□

本文主要结论可总结为如下定理.

定理 1. 对满足假设 1 和假设 2 的高阶不确定非线性系统 (1), 在任意初始条件 $\mathbf{x}(0)$ 下, 控制器 (16) 以及自适应律 (15) 和 (17) 保证了闭环系统的

所有信号一致有界, 并且输出跟踪误差可以收敛到残差为任意小的残差集.

证明. 本证明共分为 3 部分. 首先, 证明由系统 (1), 控制器 (16), 自适应律 (15) 和 (17) 组成的闭环系统在最大存在区间 $[0, t_f]$ 上存在唯一解 $\boldsymbol{\eta}(t) = [z_1(t), \dots, z_n(t), \hat{\vartheta}_1(t), \dots, \hat{\vartheta}_n(t)]^T$. 然后, 采用反证法证明 $t_f = +\infty$. 最后, 实现本文控制目标.

Part 1. 根据式 (14) 和式 (16), 虚拟控制律 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, 实际控制律 u 以及系统状态 x_1, \dots, x_n 可写为

$$\alpha_i = \check{\alpha}_i(z_i, \hat{\vartheta}_i), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (25)$$

$$u = \check{\alpha}_n(z_n, \hat{\vartheta}_n) \quad (26)$$

$$x_1 = z_1 + y_r = \check{x}_1(t, z_1) \quad (27)$$

$$x_i = z_i + \check{\alpha}_{i-1}(t, z_{i-1}, \hat{\vartheta}_{i-1}) = \check{x}_i(t, z_{i-1}, z_i, \hat{\vartheta}_{i-1}), \quad i = 2, \dots, n \quad (28)$$

因此, 由式 (1) 和式 (14) ~ (17) 组成的闭环系统可改写为

$$\dot{z}_1 = f_1(t, \check{\mathbf{x}}, \check{\alpha}_n) + g_1(t, \check{\mathbf{x}}, \check{\alpha}_n)[\check{x}_2]^{p_1} - \dot{y}_r = \varphi_1(t, z_1, \dots, z_n, \hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_n) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= f_i(t, \check{\mathbf{x}}, \check{\alpha}_n) + g_i(t, \check{\mathbf{x}}, \check{\alpha}_n)[\check{x}_{i+1}]^{p_i} - \\ &\quad \frac{\partial \check{\alpha}_{i-1}}{\partial t} - \frac{\partial \check{\alpha}_{i-1}}{\partial z_{i-1}} \varphi_{i-1} - \gamma_{i-1} \frac{\partial \check{\alpha}_{i-1}}{\partial \hat{\vartheta}_{i-1}} \times \\ &\quad \left(\frac{\xi_{i-1}^2}{\sqrt{\xi_{i-1}^2 + \delta_{i-1}^2}} - \lambda_{i-1} \hat{\vartheta}_{i-1} \right) = \\ &\quad \varphi_i(t, z_1, \dots, z_n, \hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_n), \\ &\quad i = 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= f_n(t, \check{\mathbf{x}}, \check{\alpha}_n) + g_n(t, \check{\mathbf{x}}, \check{\alpha}_n)[\check{\alpha}_n]^{p_n} - \\ &\quad \frac{\partial \check{\alpha}_{n-1}}{\partial t} - \frac{\partial \check{\alpha}_{n-1}}{\partial z_{n-1}} \varphi_{n-1} - \gamma_{n-1} \frac{\partial \check{\alpha}_{n-1}}{\partial \hat{\vartheta}_{n-1}} \times \\ &\quad \left(\frac{\xi_{n-1}^2}{\sqrt{\xi_{n-1}^2 + \delta_{n-1}^2}} - \lambda_{n-1} \hat{\vartheta}_{n-1} \right) = \\ &\quad \varphi_n(t, z_1, \dots, z_n, \hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_n) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\vartheta}}_i &= \gamma_i \left(\frac{\xi_i^2}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} - \lambda_i \hat{\vartheta}_i \right) = \\ &\quad \varphi_{n+i}(t, z_i, \hat{\vartheta}_i), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (32)$$

其中, $\check{\mathbf{x}} = [\check{x}_1, \dots, \check{x}_n]^T \in \mathbf{R}^n$.

定义开集

$$\Xi = \underbrace{(-\mu_1, \mu_1) \times \dots \times (-\mu_n, \mu_n)}_n \times \mathbf{R}^n$$

由于 $\mu_i > |z_i(0)|$, $i = 1, \dots, n$, 可知 $\boldsymbol{\eta}(0) = [z_1(0), \dots,$

$z_n(0), \hat{\vartheta}_1(0), \dots, \hat{\vartheta}_n(0)]^T \in \Xi$. 同时, 由于期望参考信号 y_r 及其导数 \dot{y}_r 有界, 函数 $f_i, g_i, i = 1, \dots, n$ 在 t 上分段连续, 且关于 \mathbf{x} 和 u 满足局部 Lipschitz 条件, 可推得 $\varphi_i: \mathbf{R}_{\geq 0} \times \Xi \rightarrow \mathbf{R}$ 在 t 上分段连续, 且关于 \mathbf{x} 和 u 满足局部 Lipschitz 条件. 根据微分方程解的存在唯一性定理^[33], 对任意初始条件 $\boldsymbol{\eta}(0)$, 闭环系统 (29) ~ (32) 在最大存在区间 $[0, t_f]$ 上存在唯一解 $\boldsymbol{\eta} = [z_1, \dots, z_n, \hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_n]^T \in \Xi$, 即, 对 $\forall t \in [0, t_f)$, $|z_i| < \mu_i, i = 1, \dots, n$.

Part 2. 本部分采用反证法证明 $t_f = +\infty$. 为此, 不妨假设 $t_f < +\infty$.

考虑如下障碍李雅普诺夫函数^[26]:

$$V_i = \frac{1}{2} \log \frac{\mu_i^2}{\mu_i^2 - z_i^2} + \frac{\sigma_i \omega_{il}}{2\gamma_i} \tilde{\vartheta}_i^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (33)$$

其中, $\tilde{\vartheta}_i = \vartheta_i - \hat{\vartheta}_i$, ω_{il} 是未知正常数.

步骤 i ($i = 1, \dots, n-1$). V_i 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \xi_i \left(f_i(t, \mathbf{x}, u) + g_i(t, \mathbf{x}, u)[x_{i+1}]^{p_i} - \dot{\alpha}_{i-1} \right) - \\ &\quad \frac{\sigma_i \omega_{il}}{\gamma_i} \tilde{\vartheta}_i \dot{\hat{\vartheta}}_i \end{aligned} \quad (34)$$

其中, $\alpha_0 = y_r$.

根据假设 1 和引理 2, 下列不等式成立

$$\begin{aligned} |f_i(t, \mathbf{x}, u)| &\leq \\ &\quad \sum_{l=1}^{j_i} |x_{i+1}|^{q_{il}} \bar{f}_{il}(\bar{\mathbf{x}}_i) \leq \\ &\quad \sum_{l=1}^{j_i} \left[\frac{g_i(t, \mathbf{x}, u) |x_{i+1}|^{p_i}}{2j_i} + \right. \\ &\quad \left. \frac{p_i - q_{il}}{p_i} \left(\frac{2j_i q_{il} \bar{f}_{il}(\bar{\mathbf{x}}_i)}{p_i g_i(t, \mathbf{x}, u)} \right)^{\frac{q_{il}}{p_i - q_{il}}} \bar{f}_{il}(\bar{\mathbf{x}}_i) \right] \leq \\ &\quad \frac{g_i(t, \mathbf{x}, u) |x_{i+1}|^{p_i}}{2} + \psi_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \end{aligned} \quad (35)$$

其中,

$$\begin{aligned} \psi_i(\bar{\mathbf{x}}_i) &= \sum_{l=1}^{j_i} \frac{p_i - q_{il}}{p_i} \times \\ &\quad \left(\frac{2j_i q_{il} \bar{f}_{il}(\bar{\mathbf{x}}_i)}{p_i g_i(\bar{\mathbf{x}}_i)} \right)^{\frac{q_{il}}{p_i - q_{il}}} \bar{f}_{il}(\bar{\mathbf{x}}_i) \end{aligned}$$

将式 (35) 代入式 (34), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq g_i(t, \mathbf{x}, u) \xi_i [x_{i+1}]^{p_i} + \frac{g_i(t, \mathbf{x}, u) |\xi_i|}{2} |x_{i+1}|^{p_i} + \\ &\quad |\xi_i| \left(\psi_i(\bar{\mathbf{x}}_i) + |\dot{\alpha}_{i-1}| \right) - \frac{\sigma_i \omega_{il}}{\gamma_i} \tilde{\vartheta}_i \dot{\hat{\vartheta}}_i \end{aligned} \quad (36)$$

根据命题 1, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq g_i(t, \mathbf{x}, u)\xi_i([x_{i+1}]^{p_i} - [\alpha_i]^{p_i}) + \\ &\frac{g_i(t, \mathbf{x}, u)|\xi_i|}{2} (|x_{i+1}|^{p_i} - |\alpha_i|^{p_i}) + \\ &|\xi_i|(\psi_i(\bar{\mathbf{x}}_i) + |\dot{\alpha}_{i-1}|) + \\ &\frac{g_i(t, \mathbf{x}, u)\xi_i}{2} [\alpha_i]^{p_i} - \frac{\sigma_i\omega_{il}}{\gamma_i}\tilde{\vartheta}_i\dot{\vartheta}_i \leq \\ &\frac{3g_i(t, \mathbf{x}, u)|\xi_i|}{2} |[x_{i+1}]^{p_i} - [\alpha_i]^{p_i}| + \\ &|\xi_i|(\psi_i(\bar{\mathbf{x}}_i) + |\dot{\alpha}_{i-1}|) - \frac{\sigma_i\omega_{il}}{\gamma_i}\tilde{\vartheta}_i\dot{\vartheta}_i + \\ &\frac{g_i(t, \mathbf{x}, u)\xi_i}{2} [\alpha_i]^{p_i} \end{aligned} \quad (37)$$

为了处理式 (37) 中的项 $|\xi_i||[x_{i+1}]^{p_i} - [\alpha_i]^{p_i}|$, 考虑以下两种情形.

情形 1. 当 $p_i = 1$ 时. 由 Part 1 可得: $|z_{i+1}| < \mu_{i+1}, \forall t \in [0, t_f]$, 因而

$$\begin{aligned} |\xi_i||[x_{i+1}]^{p_i} - [\alpha_i]^{p_i}| &= |\xi_i||z_{i+1}| \leq \\ &\mu_{i+1}|\xi_i|, \quad \forall t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (38)$$

情形 2. 当 $p_i > 1$ 时. 由引理 2 和引理 3 以及 $|z_{i+1}| < \mu_{i+1}, \forall t \in [0, t_f]$, 可得

$$\begin{aligned} |\xi_i||[x_{i+1}]^{p_i} - [\alpha_i]^{p_i}| &= \\ |\xi_i||[z_{i+1} + \alpha_i]^{p_i} - [\alpha_i]^{p_i}| &\leq \\ c_{p_i}|\xi_i|(\mu_{i+1}^{p_i} + \mu_{i+1}|\alpha_i|^{p_i-1}) &\leq \\ |\xi_i|\left(\frac{|\alpha_i|^{p_i}}{6} + \bar{\varepsilon}_{i1}\right), \quad \forall t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (39)$$

其中,

$$\begin{aligned} c_{p_i} &= p_i(2^{p_i-2} + 2) \\ \bar{\varepsilon}_{i1} &= c_{p_i}\mu_{i+1}^{p_i} + \frac{1}{p_i} \left(\frac{6(p_i-1)}{p_i}\right)^{p_i-1} (c_{p_i}\mu_{i+1})^{p_i} \end{aligned}$$

综合情形 1 和情形 2, 项 $|\xi_i||[x_{i+1}]^{p_i} - [\alpha_i]^{p_i}|$ 放缩为

$$\begin{aligned} |\xi_i||[x_{i+1}]^{p_i} - [\alpha_i]^{p_i}| &\leq \\ |\xi_i|\left(\frac{|\alpha_i|^{p_i}}{6} + \bar{\varepsilon}_{i1} + \mu_{i+1}\right), \quad \forall t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (40)$$

将式 (40) 代入式 (37) 中, 并结合命题 1, 易得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq \omega_i\xi_i[\alpha_i]^{p_i} - \frac{\sigma_i\omega_{il}}{\gamma_i}\tilde{\vartheta}_i\dot{\vartheta}_i + \\ &|\xi_i|\nu_i, \quad \forall t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (41)$$

其中, $\omega_i = \frac{g_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}{4}$, $\nu_i = \psi_i(\bar{\mathbf{x}}_i) + |\dot{\alpha}_{i-1}| + \frac{3}{2}g_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \times (\bar{\varepsilon}_{i1} + \mu_{i+1})$.

由 Part 1 可知, 对 $\forall t \in [0, t_f], |z_j| < \mu_j, j = 1, \dots, i$. 同时, 依据假设 1 和假设 2, y_r, \dot{y}_r 有界, 且 $\bar{f}_{il}, \underline{g}_i$ 和 \bar{g}_i 为连续函数. 此外, 根据第 $i-1$ 步设计, 可推知 $x_1, \dots, x_i, \dot{\alpha}_{i-1}$ 有界, $\forall t \in [0, t_f]$. 因此, 运用极值定理, 对 $\forall t \in [0, t_f]$, 有

$$0 < \omega_{il} \leq \omega_i \quad (42)$$

$$0 \leq \nu_i \leq \nu_{im} \quad (43)$$

其中, ω_{il} 和 ν_{im} 为未知正常数.

将式 (42) 和式 (43) 代入式 (41) 中, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq \omega_{il}\xi_i[\alpha_i]^{p_i} - \frac{\sigma_i\omega_{il}}{\gamma_i}\tilde{\vartheta}_i\dot{\vartheta}_i + \\ &\nu_{im}|\xi_i|, \quad \forall t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (44)$$

通过式 (14) 和式 (15), 并结合引理 3, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -\omega_{il}|\xi_i|^{p_i+1} \left(k_i + \frac{\sigma_i\hat{\vartheta}_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}}\right)^{p_i} - \\ &\sigma_i\omega_{il}\tilde{\vartheta}_i \left(\frac{\xi_i^2}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} - \lambda_i\hat{\vartheta}_i\right) + \nu_{im}|\xi_i| \leq \\ &-\omega_{il}|\xi_i|^{p_i+1} \left(\frac{\sigma_i\hat{\vartheta}_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}}\right)^{p_i} + \sigma_i\omega_{il}\vartheta_i|\xi_i| - \\ &\frac{\sigma_i\omega_{il}\tilde{\vartheta}_i\xi_i^2}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} - \omega_{il}k_i^{p_i}|\xi_i|^{p_i+1} + \\ &\sigma_i\omega_{il}\lambda_i\tilde{\vartheta}_i\hat{\vartheta}_i, \quad \forall t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (45)$$

其中, $\vartheta_i = \frac{\nu_{im}}{\sigma_i\omega_{il}}$.

根据引理 2 和引理 4, 式 (45) 中的项 $\sigma_i\omega_{il}\vartheta_i|\xi_i|$ 放缩为

$$\begin{aligned} \sigma_i\omega_{il}\vartheta_i|\xi_i| &\leq \frac{\sigma_i\omega_{il}\vartheta_i\xi_i^2}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} + \delta_i\sigma_i\omega_{il}\vartheta_i \leq \\ &\frac{\sigma_i\omega_{il}\hat{\vartheta}_i\xi_i^2}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} + \frac{\sigma_i\omega_{il}\tilde{\vartheta}_i\xi_i^2}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} + \delta_i\sigma_i\omega_{il}\vartheta_i \leq \\ &\omega_{il}|\xi_i|^{p_i+1} \left(\frac{\sigma_i\hat{\vartheta}_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}}\right)^{p_i} + \bar{\varepsilon}_{i2}\omega_{il}|\xi_i| + \\ &\frac{\sigma_i\omega_{il}\tilde{\vartheta}_i\xi_i^2}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} + \delta_i\sigma_i\omega_{il}\vartheta_i \leq \\ &\omega_{il}|\xi_i|^{p_i+1} \left(\frac{\sigma_i\hat{\vartheta}_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}}\right)^{p_i} + \\ &\frac{1}{2}\omega_{il}k_i^{p_i}|\xi_i|^{p_i+1} + \frac{\sigma_i\omega_{il}\tilde{\vartheta}_i\xi_i^2}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} + \\ &\bar{\varepsilon}_{i3} + \delta_i\sigma_i\omega_{il}\vartheta_i, \quad \forall t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (46)$$

其中,

$$\bar{\varepsilon}_{i2} = \begin{cases} 0, & p_i = 1 \\ \frac{p_i - 1}{p_i} \left(\frac{1}{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i - 1}}, & p_i > 1 \end{cases} \quad |\dot{\alpha}_i| \leq \left\{ - \left(k_i + \frac{\sigma_i \hat{\vartheta}_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} \right) + \frac{\sigma_i \hat{\vartheta}_i \xi_i^2}{\sqrt{(\xi_i^2 + \delta_i^2)^3}} \right\} \dot{\xi}_i +$$

$$\bar{\varepsilon}_{i3} = \begin{cases} 0, & \bar{\varepsilon}_{i2} = 0 \\ \frac{\bar{\varepsilon}_{i2} \omega_{il} p_i}{p_i + 1} \left(\frac{2\bar{\varepsilon}_{i2}}{k_i^{p_i} (p_i + 1)} \right)^{\frac{1}{p_i}}, & \bar{\varepsilon}_{i2} > 0 \end{cases} \quad \frac{\gamma_i \sigma_i \xi_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} \left(\frac{\xi_i^2}{\sqrt{\xi_i^2 + \delta_i^2}} - \lambda_i \hat{\vartheta}_i \right), \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (56)$$

由式 (45) 和式 (46), 可得

$$\dot{V}_i \leq -\frac{1}{2} \omega_{il} k_i^{p_i} |\xi_i|^{p_i+1} + \sigma_i \omega_{il} \lambda_i \tilde{\vartheta}_i \hat{\vartheta}_i + \bar{\varepsilon}_{i3} + \delta_i \sigma_i \omega_{il} \vartheta_i, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (47)$$

依据引理 2 和引理 5, 以及 Young 不等式, 则有

$$\dot{V}_i \leq -\frac{1}{2} \omega_{il} k_i^{p_i} \xi_i^2 - \frac{1}{2} \sigma_i \omega_{il} \lambda_i \tilde{\vartheta}_i^2 + \varepsilon_i \leq -\frac{\omega_{il} k_i^{p_i}}{2\mu_i^2} \log \frac{\mu_i^2}{\mu_i^2 - z_i^2} - \frac{1}{2} \sigma_i \omega_{il} \lambda_i \tilde{\vartheta}_i^2 + \varepsilon_i \leq -\chi_i V_i + \varepsilon_i, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (48)$$

其中,

$$\chi_i = \min \left\{ \frac{\omega_{il} k_i^{p_i}}{\mu_i^2}, \gamma_i \lambda_i \right\}$$

$$\bar{\varepsilon}_{i4} = \frac{1}{2} \sigma_i \omega_{il} \lambda_i \vartheta_i^2 + \bar{\varepsilon}_{i3} + \delta_i \sigma_i \omega_{il} \vartheta_i$$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \bar{\varepsilon}_{i4}, & p_i = 1 \\ \frac{\omega_{il} k_i^{p_i} (p_i - 1)}{2(p_i + 1)} \left(\frac{2}{p_i + 1} \right)^{\frac{2}{p_i - 1}} + \bar{\varepsilon}_{i4}, & p_i > 1 \end{cases}$$

因此, 存在正常数 χ_i^* 和 ε_i^* 满足

$$0 < \chi_i^* \leq \chi_i \quad (49)$$

$$0 < \varepsilon_i \leq \varepsilon_i^* \quad (50)$$

由式 (48) ~ (50), 可得

$$\dot{V}_i \leq -\chi_i^* V_i + \varepsilon_i^*, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (51)$$

因此, 对 $\forall t \in [0, t_f]$ 中, 有

$$\frac{1}{2} \log \frac{\mu_i^2}{\mu_i^2 - z_i^2} \leq V_i \leq \varpi_i \quad (52)$$

$$\frac{\sigma_i \omega_{il}}{2\gamma_i} \tilde{\vartheta}_i^2 \leq V_i \leq \varpi_i \quad (53)$$

其中, $\varpi_i = \max \{ V_i(0), \frac{\varepsilon_i^*}{\chi_i^*} \}$.

从式 (52) 和式 (53), 可得

$$|z_i| \leq \bar{\mu}_i = \mu_i \sqrt{1 - \exp(-2\varpi_i)} < \mu_i \quad (54)$$

$$|\hat{\vartheta}_i| \leq \bar{\vartheta}_i = \sqrt{\frac{2\gamma_i \varpi_i}{\sigma_i \omega_{il}}} + \vartheta_i, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (55)$$

进而可推出, 对 $\forall t \in [0, t_f]$, α_i 和 x_{i+1} 有界. 接着, 对 α_i 和 ξ_i 分别求导, 可得

$$|\dot{\xi}_i| = \frac{(\mu_i^2 + z_i^2)}{(\mu_i^2 - z_i^2)^2} \left(f_i(t, \mathbf{x}, u) + g_i(t, \mathbf{x}, u) [x_{i+1}]^{p_i} - \dot{\alpha}_{i-1} \right) \leq \frac{(\mu_i^2 + z_i^2)}{(\mu_i^2 - z_i^2)^2} \left(\sum_{l=1}^{j_i} |x_{i+1}|^{q_{il}} \bar{f}_{il}(\bar{\mathbf{x}}_i) + |\dot{\alpha}_{i-1}| + \bar{g}_i(\bar{\mathbf{x}}_i) |x_{i+1}|^{p_i} \right), \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (57)$$

从式 (56) 和式 (57) 可知, 对 $\forall t \in [0, t_f]$, $\dot{\xi}_i$ 和 $\dot{\alpha}_i$ 亦有界.

步骤 n . 求 V_n 的导数, 可得

$$\dot{V}_n = \frac{z_n}{\mu_n^2 - z_n^2} (f_n(t, \mathbf{x}, u) + g_n(t, \mathbf{x}, u) [u]^{p_n} - \dot{\alpha}_{n-1}) - \frac{\sigma_n \beta_n}{\gamma_n} \tilde{\vartheta}_n \dot{\vartheta}_n \quad (58)$$

类似于式 (35) 的推导过程, 利用假设 1 和引理 2, 可得

$$|f_n(t, \mathbf{x}, u)| \leq \frac{1}{2} g_n(t, \mathbf{x}, u) |u|^{p_n} + \psi_n(\bar{\mathbf{x}}_n) \quad (59)$$

其中,

$$\psi_n(\bar{\mathbf{x}}_n) = \sum_{l=1}^{j_n} \frac{p_n - q_{nl}}{p_n} \times \left(\frac{2j_n q_{nl} \bar{f}_{nl}(\bar{\mathbf{x}}_n)}{p_n \underline{g}_n(\bar{\mathbf{x}}_n)} \right)^{\frac{q_{nl}}{p_n - q_{nl}}} \bar{f}_{nl}(\bar{\mathbf{x}}_n)$$

由式 (59) 以及命题 1, 可推得

$$\dot{V}_n \leq \omega_n \xi_n [u]^{p_n} + |\xi_n| \nu_n - \frac{\sigma_n \omega_{nl}}{\gamma_n} \tilde{\vartheta}_n \dot{\vartheta}_n \quad (60)$$

其中, $\omega_n = \frac{g_n(\bar{\mathbf{x}}_n)}{2}$, $\nu_n = \psi_n(\bar{\mathbf{x}}_n) + |\dot{\alpha}_{n-1}|$.

由 Part 1 可知, 对 $\forall t \in [0, t_f]$, $|z_j| < \mu_j$, $j = 1, \dots, n$. 同时, 根据假设 1 和假设 2, y_r 和 \dot{y}_r 有界, 且 \bar{f}_{nl} , \underline{g}_n 和 \bar{g}_n 连续. 此外, 由第 $n-1$ 步设计可推得 $x_1, \dots, x_n, \dot{\alpha}_{n-1}$ 有界, $\forall t \in [0, t_f]$. 因此, 运用极值定理, 对 $\forall t \in [0, t_f]$, 有

$$0 < \omega_{nl} \leq \omega_n \quad (61)$$

$$0 \leq \nu_n \leq \nu_{nm} \quad (62)$$

其中, ω_{nl} 和 ν_{nm} 为未知正常数.

利用式 (61) 和式 (62), 有

$$\dot{V}_n \leq \omega_{nl}\xi_n[u]^{p_n} + \nu_{nm}|\xi_n| - \frac{\sigma_n\omega_{nl}}{\gamma_n}\tilde{\vartheta}_n\hat{\vartheta}_n, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (63)$$

根据式 (16) 和式 (17) 以及命题 1 和引理 3, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\omega_{nl}|\xi_n|^{p_n+1} \left(k_n + \frac{\sigma_n\hat{\vartheta}_n}{\sqrt{\xi_n^2 + \delta_n^2}} \right)^{p_n} - \\ & \sigma_n\omega_{nl}\tilde{\vartheta}_n \left(\frac{\xi_n^2}{\sqrt{\xi_n^2 + \delta_n^2}} - \lambda_n\hat{\vartheta}_n \right) + \nu_{nm}|\xi_n| \leq \\ & -\omega_{nl}|\xi_n|^{p_n+1} \left(\frac{\sigma_n\hat{\vartheta}_n}{\sqrt{\xi_n^2 + \delta_n^2}} \right)^{p_n} - \\ & \omega_{nl}k_n^{p_n}|\xi_n|^{p_n+1} - \\ & \frac{\sigma_n\omega_{nl}\tilde{\vartheta}_n\xi_n^2}{\sqrt{\xi_n^2 + \delta_n^2}} + \sigma_n\omega_{nl}\lambda_n\tilde{\vartheta}_n\hat{\vartheta}_n + \\ & \sigma_n\omega_{nl}\vartheta_n|\xi_n|, \quad \forall t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (64)$$

其中, $\vartheta_n = \frac{\nu_{nm}}{\sigma_n\omega_{nl}}$.

依据引理 2 和引理 4, 式 (64) 中的项 $\sigma_n\omega_{nl}\vartheta_n|\xi_n|$ 放缩为

$$\begin{aligned} \sigma_n\omega_{nl}\vartheta_n|\xi_n| \leq & \frac{\sigma_n\omega_{nl}\vartheta_n\xi_n^2}{\sqrt{\xi_n^2 + \delta_n^2}} + \delta_n\sigma_n\omega_{nl}\vartheta_n \leq \\ & \frac{\sigma_n\omega_{nl}\hat{\vartheta}_n\xi_n^2}{\sqrt{\xi_n^2 + \delta_n^2}} + \frac{\sigma_n\omega_{nl}\tilde{\vartheta}_n\xi_n^2}{\sqrt{\xi_n^2 + \delta_n^2}} + \\ & \delta_n\sigma_n\omega_{nl}\vartheta_n \leq \\ & \omega_{nl}|\xi_n|^{p_n+1} \left(\frac{\sigma_n\hat{\vartheta}_n}{\sqrt{\xi_n^2 + \delta_n^2}} \right)^{p_n} + \\ & \bar{\varepsilon}_{n2}\omega_{nl}|\xi_n| + \delta_n\sigma_n\omega_{nl}\vartheta_n + \\ & \frac{\sigma_n\omega_{nl}\tilde{\vartheta}_n\xi_n^2}{\sqrt{\xi_n^2 + \delta_n^2}} \leq \\ & \omega_{nl}|\xi_n|^{p_n+1} \left(\frac{\sigma_n\hat{\vartheta}_n}{\sqrt{\xi_n^2 + \delta_n^2}} \right)^{p_n} + \\ & \frac{1}{2}\omega_{nl}k_n^{p_n}\xi_n^{p_n+1} + \delta_n\sigma_n\omega_{nl}\vartheta_n + \\ & \frac{\sigma_n\omega_{nl}\tilde{\vartheta}_n\xi_n^2}{\sqrt{\xi_n^2 + \delta_n^2}} + \bar{\varepsilon}_{n3} \end{aligned} \quad (65)$$

其中,

$$\bar{\varepsilon}_{n2} = \begin{cases} 0, & p_n = 1 \\ \frac{p_n - 1}{p_n} \left(\frac{1}{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n-1}}, & p_n > 1 \end{cases}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n3} = \begin{cases} 0, & \bar{\varepsilon}_{n2} = 0 \\ \frac{\bar{\varepsilon}_{n2}\omega_{nl}p_n}{p_n + 1} \left(\frac{2\bar{\varepsilon}_{n2}}{k_n^{p_n}(p_n + 1)} \right)^{\frac{1}{p_n}}, & \bar{\varepsilon}_{n2} > 0 \end{cases}$$

将式 (65) 代入式 (64) 中, 得到

$$\dot{V}_n \leq -\frac{1}{2}\omega_{nl}k_n^{p_n}|\xi_n|^{p_n+1} + \sigma_n\omega_{nl}\lambda_n\tilde{\vartheta}_n\hat{\vartheta}_n + \bar{\varepsilon}_{n3} + \delta_n\sigma_n\omega_{nl}\vartheta_n, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (66)$$

根据引理 2 和引理 5, 以及 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\frac{1}{2}\omega_{nl}k_n^{p_n}\xi_n^2 - \frac{1}{2}\sigma_n\omega_{nl}\lambda_n\tilde{\vartheta}_n^2 + \varepsilon_n \leq \\ & -\frac{\omega_{nl}k_n^{p_n}}{2\mu_n^2} \log \frac{\mu_n^2}{\mu_n^2 - z_n^2} - \frac{1}{2}\sigma_n\omega_{nl}\lambda_n\tilde{\vartheta}_n^2 + \varepsilon_n \leq \\ & -\chi_n V_n + \varepsilon_n, \quad \forall t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (67)$$

其中,

$$\begin{aligned} \chi_n &= \min \left\{ \frac{\omega_{nl}k_n^{p_n}}{\mu_n^2}, \gamma_n\lambda_n \right\} \\ \bar{\varepsilon}_{n4} &= \frac{1}{2}\sigma_n\omega_{nl}\lambda_n\vartheta_n^2 + \bar{\varepsilon}_{n3} + \delta_n\sigma_n\omega_{nl}\vartheta_n \\ \varepsilon_n &= \begin{cases} \bar{\varepsilon}_{n4}, & p_n = 1 \\ \frac{\omega_{nl}k_n^{p_n}(p_n - 1)}{2(p_n + 1)} \left(\frac{2}{p_n + 1} \right)^{\frac{2}{p_n-1}} + \bar{\varepsilon}_{n4}, & p_n > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

因此, 存在正常数 χ_n^* 和 ε_n^* , 使得

$$0 < \chi_n^* \leq \chi_n \quad (68)$$

$$0 < \varepsilon_n \leq \varepsilon_n^* \quad (69)$$

根据式 (67) ~ (69), 可得

$$\dot{V}_n \leq -\chi_n^* V_n + \varepsilon_n^*, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (70)$$

因此, 对 $\forall t \in [0, t_f)$, 有

$$\frac{1}{2} \log \frac{\mu_n^2}{\mu_n^2 - z_n^2} \leq V_n \leq \varpi_n \quad (71)$$

$$\frac{\sigma_n\omega_{nl}}{2\gamma_n}\tilde{\vartheta}_n^2 \leq V_n \leq \varpi_n \quad (72)$$

其中, $\varpi_n = \max\{V_n(0), \frac{\varepsilon_n^*}{\chi_n^*}\}$.

由式 (71) 和式 (72), 可得

$$|z_n| \leq \bar{\mu}_n = \mu_n \sqrt{1 - \exp(-2\varpi_n)} < \mu_n \quad (73)$$

$$|\hat{\vartheta}_n| \leq \sqrt{\tilde{\vartheta}_n} = \frac{2\gamma_n\varpi_n}{\sigma_n\omega_{nl}} + \vartheta_n, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (74)$$

故可推出, 对 $\forall t \in [0, t_f)$, u 有界.

由步骤 1 ~ n 可知, 存在紧子集 $\Xi' = [-\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_1] \times \cdots \times [-\bar{\mu}_n, \bar{\mu}_n] \times [-\bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_1] \times \cdots \times [-\bar{\vartheta}_n, \bar{\vartheta}_n] \subset \Xi$, 使得闭环系统在 $[0, t_f)$ 上存在唯一解 $\eta(t) \in \Xi'$. 根据引理 1, 可得: $t_f = +\infty$, 即, 对 $\forall t \in [0, +\infty)$, $|z_i| < \mu_i$, $i = 1, \dots, n$.

Part 3. 重复 Part 2 中的步骤 1 ~ n , 可得 $x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ 和 u 均有界, $\forall t \in [0, +\infty)$. 另外, 从式 (54) 可知, 通过减小 μ_1 和 ϖ_1 可将输出跟踪误差 z_1 收敛到任意小的残差集. \square

注 4. 不同于文献 [20–25] 中提出的控制方案, 本文采用积分反推技术和障碍李雅普诺夫方法解决了高阶非线性系统中幂次未知和系统函数不确定的问题, 且所设计控制策略不依赖于未知幂次的上界信息.

3 仿真算例

为了验证本文所提控制算法的有效性与通用性, 考虑如下两个高阶非线性系统

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = f_{1, \Sigma_1} + g_{1, \Sigma_1} [x_2]^{p_1} \\ \dot{x}_2 = f_{2, \Sigma_1} + g_{2, \Sigma_1} [u]^{p_2} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (75)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_1 = f_{1, \Sigma_2} + g_{1, \Sigma_2} [x_2]^{p_1} \\ \dot{x}_2 = f_{2, \Sigma_2} + g_{2, \Sigma_2} [u]^{p_2} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (76)$$

其中, $p_1 = 5/3$, $p_2 = 7/3$, $f_{1, \Sigma_1} = x_1 \cos(t)$, $g_{1, \Sigma_1} = 3 + 0.5 \sin(t)$, $f_{2, \Sigma_1} = x_1 + 2 \sin(x_1 x_2)$, $g_{2, \Sigma_1} = 2 + 0.1 \sin(t)$, $f_{1, \Sigma_2} = (0.5x_1 + 1) \cos(t)$, $g_{1, \Sigma_2} = 2 + 0.1 \sin(t)$, $f_{2, \Sigma_2} = \cos(x_1) \exp(2x_2 \sin(x_1)) + x_1 x_2 \sin(t)$, $g_{2, \Sigma_2} = 1$, 期望参考信号 $y_r(t) = \frac{\pi}{2} (1 - \exp(-0.1t^2)) \sin(t)$.

在仿真中, 系统 Σ_i 和自适应参数 $\hat{\vartheta}_i$ 的初始值设置为 $[x_1(0), x_2(0)]^T = [-0.5, 0.4]^T$, $\hat{\vartheta}_i(0) = 0$, $i = 1, 2$. 控制器参数 $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 2$, $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 3$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$ 和 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.002$, 其中, $\mu_1 = 4 > |z_1(0)| = 0.5$, $\mu_2 = 2 > |z_2(0)| = 106/315$. 系统 Σ_1 和 Σ_2 的仿真结果如图 2~4 所示. 图 2 刻画了输出跟踪误差 $y - y_r$ 的变

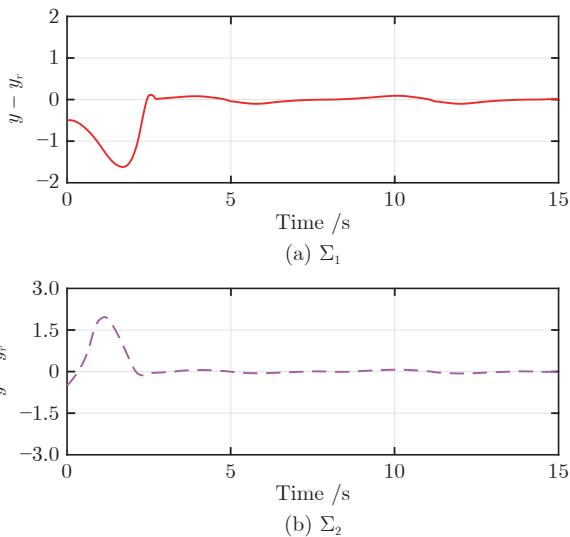


图 2 系统 Σ_1 和 Σ_2 的输出跟踪误差 $y - y_r$

Fig. 2 Output tracking errors $y - y_r$ of systems Σ_1 and Σ_2

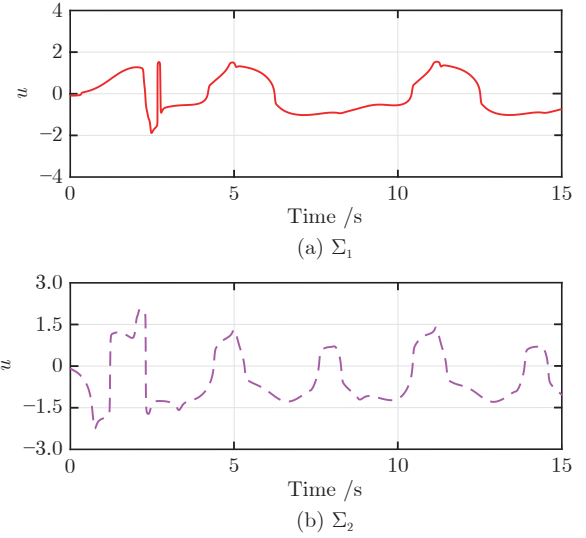


图 3 系统 Σ_1 和 Σ_2 的控制信号 u

Fig. 3 Control signals u of systems Σ_1 and Σ_2

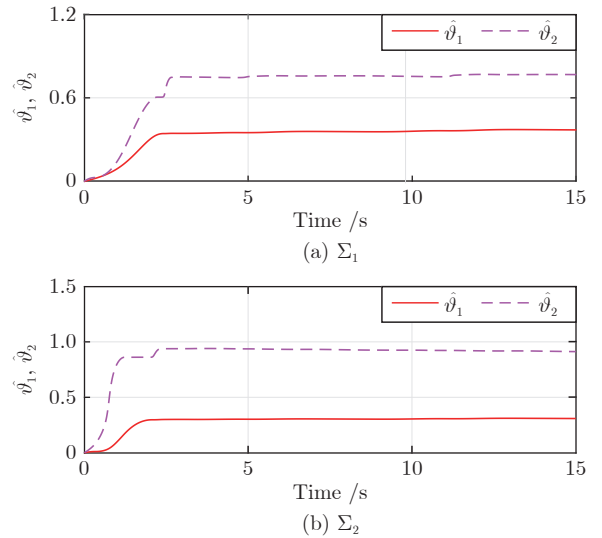


图 4 系统 Σ_1 和 Σ_2 的自适应参数 $\hat{\vartheta}_1$ 和 $\hat{\vartheta}_2$

Fig. 4 Adaptive parameters $\hat{\vartheta}_1$ and $\hat{\vartheta}_2$ of systems Σ_1 and Σ_2

化情况, 图 3 给出系统的控制信号 u , 图 4 描述了自适应参数 $\hat{\vartheta}_1$ 和 $\hat{\vartheta}_2$. 从仿真结果可以看出, 本文所提自适应控制策略既能使系统 Σ_1 和 Σ_2 的输出跟踪误差收敛到原点附近的较小邻域内, 又能确保闭环系统的所有信号有界.

为进一步验证本文控制算法的幂次无关特性, 在系统初始值与控制器参数不变的条件下, 对具有不同幂次 p_1 和 p_2 的系统 Σ_1 进行仿真测试. 仿真结果如图 5 和图 6 所示. 图 5 为系统 Σ_1 在不同幂次 p_1 和 p_2 条件下的输出跟踪误差 $y - y_r$, 图 6 为相应的控制信号 u . 仿真结果表明, 在不同幂次条件下, 该控

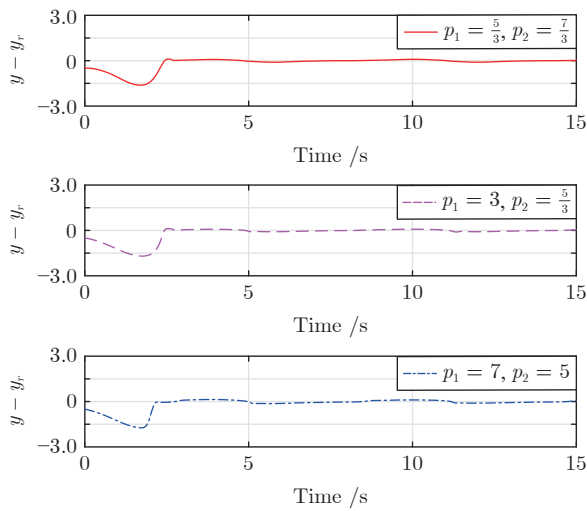


图 5 系统 Σ_1 在不同幂次下的跟踪误差 $y - y_r$

Fig.5 Output tracking errors $y - y_r$ of system Σ_1 under various powers

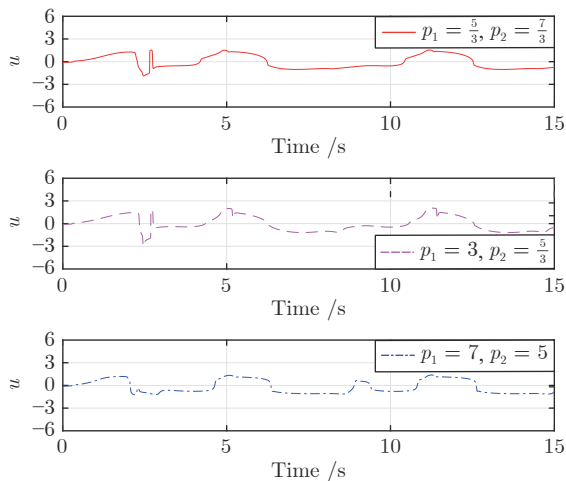


图 6 系统 Σ_1 在不同幂次下的控制信号 u

Fig.6 Control signals u of system Σ_1 under various powers

制器仍然可以保证闭环系统获得良好的控制性能。

4 结束语

针对一类具有未知幂次的高阶不确定非线性系统,提出了一种基于障碍李雅普诺夫函数的自适应控制算法。在无需知晓系统函数先验知识的条件下,所提控制算法有效克服了系统幂次未知与模型不确定带来的技术挑战。该算法的显著特点是所设计的自适应控制器均与系统幂次无关。最后,仿真结果验证了本文控制算法的有效性与通用性。

今后的研究方向包括将本文所提方法推广到具有未知幂次的高阶非线性系统的输出反馈控制设

计^[34]。此外,为验证本文方法的实用性,将本文所提控制策略应用于实际系统^[35]亦是未来研究的目标。

References

- Rui C L, Reyhangolu M, Kolmanovsky I, Cho S, McClamroch N H. Nonsmooth stabilization of an underactuated unstable two degrees of freedom mechanical system. In: Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control. California, USA: IEEE, 1997. 3998-4003
- Su Z G, Qian C J, Wang Q, Wang Z. Reduced-order observer and controller design for a 1 000 mw ultra-supercritical unit. In: Proceedings of the 58th ISA Power Generation Division Symposium. Florida, USA: ISA, 2015. 129-140
- Lin W, Qian C J. Adding one power integrator: A tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems. *Systems and Control Letters*, 2000, **39**(5): 339-351
- Lin W, Qian C J. Adaptive regulation of high-order lowertriangular systems: An adding a power integrator technique. *Systems and Control Letters*, 2000, **39**(5): 353-364
- Qian C J, Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(7): 1061-1079
- Lin W, Qian C J. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: A nonsmooth feedback framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(5): 757-774
- Qian C J, Lin W. Practical output tracking of nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(1): 21-36
- Lin W, Pongvuthithum R. Adaptive output tracking of inherently nonlinear systems with nonlinear parameterization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(10): 1737-1749
- Yang B, Lin W. Homogeneous observers, iterative design, and global stabilization of high-order nonlinear systems by smooth output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(7): 1069-1080
- Back J, Cheong S G, Shim H, Seo J H. Nonsmooth feedback stabilizer for strict-feedback nonlinear systems that may not be linearizable at the origin. *Systems and Control Letters*, 2007, **56**(11-12): 742-752
- Yan X H, Liu Y G. Global practical tracking for high-order uncertain nonlinear systems with unknown control directions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2010, **48**(7): 4453-4473
- Fu J, Ma R C, Chai T Y. Global finite-time stabilization of a class of switched nonlinear systems with the powers of positive odd rational numbers. *Automatica*, 2015, **54**: 360-373
- Sun Z Y, Xue L R, Zhang K. A new approach to finitetime adaptive stabilization of high-order uncertain nonlinear system. *Automatica*, 2015, **58**: 60-66
- Fu J, Ma R C, Chai T Y. Adaptive finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via logic-based switchings. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(11): 5998-6003
- Sun Z Y, Shao Y, Chen C C. Fast finite-time stability and its application in adaptive control of high-order nonlinear system. *Automatica*, 2019, **106**: 339-348
- Duan Na, Xie Xue Jun. State-feedback regulation of nonlinear systems with iISS unmodeled dynamics. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(7): 1033-1036
(段纳, 解学军. 具有iISS未建模动态的非线性系统的状态反馈调节. 自动化学报, 2010, **36**(7): 1033-1036)
- Zhang Jian, Liu Yun-Gang. A new approach to adaptive control design without overparametrization for a class of uncertain nonlinear systems. *Science China Information Sciences*, 2011, **41**(7): 892-902
(张健, 刘允刚. 一类不确定非线性系统无过参数自适应控制设计

- 新方法. 中国科学: 信息科学, 2011, **41**(7): 892–902)
- 18 Man Yong-Chao, Liu Yun-Gang. Adaptive control design via linear state-feedback for high-order uncertain nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(1): 24–32 (满永超, 刘允刚. 高阶不确定非线性系统线性状态反馈自适应控制设计. 自动化学报, 2014, **40**(1): 24–32)
 - 19 Sun Cheng, Sun He-Xu, Diao Xin-Wei. Continuous feedback control design for a class of non-homogeneous highorder nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(1): 151–155 (孙丞, 孙鹤旭, 刁心微. 一类非齐次高阶非线性系统的连续反馈控制设计. 自动化学报, 2014, **40**(1): 151–155)
 - 20 Su Z G, Qian C J, Shen J. Interval homogeneity-based control for a class of nonlinear systems with unknown power drifts. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(3): 1445–1450
 - 21 Chen C C, Qian C J, Lin X Z, Sun Z Y, Liang Y W. Smooth output feedback stabilization for a class of nonlinear systems with time-varying powers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, **27**(18): 5113–5128
 - 22 Man Y C, Liu Y G. Global adaptive stabilization and practical tracking for nonlinear systems with unknown powers. *Automatica*, 2019, **100**: 171–181
 - 23 Guo C, Xie R M, Xie X J. Adaptive control of full-state constrained high-order nonlinear systems with time-varying powers. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, **51**(8): 5189–5197
 - 24 Wang M Q, Liu Y G, Man Y C. Switching adaptive controller for the nonlinear systems with uncertainties from unknown powers. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, **50**(7): 2375–2385
 - 25 Man Y C, Liu Y G. Global adaptive stabilization for planar nonlinear systems with unknown input powers. *Science China Information Sciences*, 2021, **64**: 199204
 - 26 Tee K P, Ge S S, Tay E H. Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems. *Automatica*, 2009, **45**(4): 918–927
 - 27 Jankovic M. Robust control barrier functions for constrained stabilization of nonlinear systems. *Automatica*, 2018, **96**: 359–367
 - 28 Khalil H K. *Nonlinear Systems, 3rd Edition*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 2002.
 - 29 Qian C J, Lin W. Non-Lipschitz continuous stabilizers for nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization. *Systems and Control Letters*, 2015, **42**(3): 185–200
 - 30 Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. *Inequalities*. London: Cambridge University Press. 1934.
 - 31 Wang C L, Zuo Z Y. Adaptive trajectory tracking control of output constrained multi-rotors systems. *IET Control Theory and Applications*, 2014, **8**(13): 1163–1174
 - 32 Ren B B, Ge S S, Tee K P, Lee T H. Adaptive neural control for output feedback nonlinear systems using a barrier Lyapunov function. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, **21**(8): 1339–1345
 - 33 Logemann M, Ryan E P. *Ordinary Differential Equations: Analysis, Qualitative Theory and Control*. London, UK: Springer. 2014.
 - 34 Liu Y H, Su C Y, Li H Y. Adaptive output feedback funnel con-

trol of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, **66**(6): 2854–2860

- 35 Liu Y H, Liu Y, Liu Y F, Su C Y, Zhou Q, Lu R Q. Adaptive approximation-based tracking control for a class of unknown high-order nonlinear systems with unknown powers. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, **52**(6): 4559–4573



刘玉发 广东工业大学自动化学院硕士研究生. 主要研究方向为自适应控制. E-mail: yufa.liu@outlook.com
(**LIU Yu-Fa** Master student at the School of Automation, Guangdong University of Technology. His main research interest is adaptive control.)



刘勇华 广东工业大学自动化学院副教授. 主要研究方向为非线性控制与智能控制. 本文通信作者.

E-mail: yonghua.liu@outlook.com
(**LIU Yong-Hua** Associate professor at the School of Automation, Guangdong University of Technology. His research interest covers nonlinear and intelligent control. Corresponding author of this paper.)



苏春翌 广东工业大学自动化学院教授. 主要研究方向为控制理论及其在机电系统中的应用.

E-mail: chunyi.su@concordia.ca
(**SU Chun-Yi** Professor at the School of Automation, Guangdong University of Technology. His research interest covers control theory and its applications to mechanical systems.)



鲁仁全 广东工业大学自动化学院教授. 主要研究方向为网络化控制系统理论及应用, 医疗大数据分析, 智能制造. E-mail: rqlu@gdut.edu.cn

(**LU Ren-Quan** Professor at the School of Automation, Guangdong University of Technology. His research interest covers theory and application of networked control system, medical big data analysis, and intelligent manufacturing.)