

基于改进高斯混合模型的机器人运动状态估计

葛泉波¹ 王贺彬² 杨秦敏³ 张兴国⁴ 刘华平⁵

摘要 针对复杂环境下机器人运动状态估计的精度改善问题, 提出一种面向非线性非高斯系统的改进高斯和容积卡尔曼滤波估计方法. 首先, 引入加权信息量概念来改进期望最大化算法目标函数惩罚项, 使得在优化过程中能考虑更全面的参数信息, 以达到减少期望最大化算法的迭代次数和提高收敛速度的目的. 此外, 以基于马氏距离和 Kullback-Leibler (KL) 距离的高斯项合并方法为基础, 提出一种能有效联合两类高斯项合并方式的融合模式. 先单独使用马氏距离和 KL 距离进行高斯混合项合并, 再对获得的高斯混合项进行加权融合处理, 以改善高斯和滤波中多高斯项的合并性能和保真度. 最后, 应用非线性非高斯系统的高斯和容积卡尔曼滤波框架实现对复杂环境下机器人的运动状态估计. 理论分析与仿真结果表明, 该方法能实现对机器人运动更好的状态估计精度, 并具有更强的鲁棒性能.

关键词 非线性非高斯系统, 状态估计, 高斯和容积卡尔曼滤波, 鲁棒期望最大化算法, 凸组合融合

引用格式 葛泉波, 王贺彬, 杨秦敏, 张兴国, 刘华平. 基于改进高斯混合模型的机器人运动状态估计. 自动化学报, 2022, 48(8): 1972–1983

DOI 10.16383/j.aas.c200660

Estimation of Robot Motion State Based on Improved Gaussian Mixture Model

GE Quan-Bo¹ WANG He-Bin² YANG Qin-Min³ ZHANG Xing-Guo⁴ LIU Hua-Ping⁵

Abstract For robot motion state estimation accuracy under complex environment to improve the problem, an improved Gaussian summation cubature Kalman filter is proposed for a kind of nonlinear non-Gaussian system by improving expectation-maximum algorithm and Gaussian merging method. Firstly, the weighted information is introduced to help improve the penalty item of the objective function in the expectation-maximum algorithm, so that more comprehensive parameter information can be considered in the optimization process to achieve the purpose of reducing the number of iterations of the EM algorithm and increasing the convergence speed. Then, based on the Gaussian merging methods using the Mahalanobis distance and the Kullback-Leibler distance, respectively, one fusion mode that can effectively combine the two types of Gaussian merging method is proposed. The Mahalanobis distance and the Kullback-Leibler distance are used to merge the Gaussian mixture items separately, and then the obtained Gaussian mixture items are weighted and fused to improve the merging performance and fidelity of multiple Gaussian items in the Gaussian sum filtering. Finally, the Gaussian sum cubature Kalman filter framework of nonlinear non-Gaussian system is applied to estimate the motion state of the robot in complex environment. Theoretical analysis and simulation results show that the new method can achieve better state estimation accuracy for robot motion and obtain stronger robust performance.

Key words Nonlinear non-Gaussian system, state estimation, Gaussian-sum cubature Kalman filter, robust expectation-maximum algorithm, convex combination fusion

Citation Ge Quan-Bo, Wang He-Bin, Yang Qin-Min, Zhang Xing-Guo, Liu Hua-Ping. Estimation of robot motion state based on improved Gaussian mixture model. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(8): 1972–1983

收稿日期 2020-08-17 录用日期 2021-05-12

Manuscript received August 17, 2020; accepted May 12, 2021

国家自然科学基金 (61773147, 62033010) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61773147, 62033010)

本文责任编辑 邓方

Recommended by Associate Editor DENG Fang

1. 南京信息工程大学自动化学院 南京 210044 2. 淳安县千岛湖科学研究院 杭州 311799 3. 浙江大学控制科学与工程学院 杭州 310027 4. 中国飞行试验研究院 西安 710089 5. 清华大学计算机科学与技术系 北京 100084

1. School of Automation, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044 2. Qiandao Lake Institute of Science of Chun'an, Hangzhou 311799 3. College of Control Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou

状态估计理论被广泛应用于各领域, 例如太空监测^[1]、无线通信、机器人运动跟踪以及金融行业等^[2]. 当系统为线性、噪声统计特性服从高斯分布并完全已知时, 卡尔曼滤波器是最优的解决方案^[3-4]. 在大多数实际工程应用中, 系统往往存在非线性、非高斯等复杂特征, 此时若采用经典卡尔曼滤波方法对实际系统进行状态估计, 将出现估计精度下降和收敛性变差等情形, 甚至会出滤波发散现象, 这严

310027 4. Chinese Flight Test Establishment, Xi'an 710089 5. Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084

重制约了经典卡尔曼滤波理论在实际工程中的应用. 因此, 深入开展非线性非高斯系统下的卡尔曼滤波方法研究具有重要的意义.

近几十年来, 研究人员已提出诸多面向非线性系统的卡尔曼滤波方法, 如扩展卡尔曼滤波、无迹卡尔曼滤波、容积卡尔曼滤波 (Cubature Kalman filter, CKF)^[5], 以及一些相应的改进算法. 其中, 扩展卡尔曼滤波因结构简单在早期大受欢迎, 但该方法只能处理弱非线性问题, 当系统非线性增强时其估计性能将急剧下降; 与扩展卡尔曼滤波相比, 无迹卡尔曼滤波引入了采样近似技术, 估计精度和稳定性有了很大提升; CKF 则是在无迹卡尔曼滤波基础上提出的一种改进型卡尔曼滤波方法, 基于三阶球面径向容积准则来进行采样近似, 是理论上当前最接近贝叶斯滤波的基础性非线性滤波算法. 现有研究表明, CKF 的数值稳定性及滤波精度优于传统的扩展卡尔曼滤波和无迹卡尔曼滤波, 尤其是在高维非线性系统状态估计中具有更为明显的算法优势^[6-7].

此外, 针对非高斯系统的状态估计问题研究也取得一些进展, 目前已建立了基于高斯和、粒子滤波和极大相关熵等技术在内多种非高斯滤波方法^[8]. 文献 [9] 基于最大相关熵准则提出一种适用于非高斯噪声的卡尔曼滤波算法, 但是其高斯核大小对结果影响较大. 为了克服这一缺陷, 研究者们对极大相关熵准则中的核函数进行一系列的改进^[10], 如对高斯核大小进行自适应处理, 但都难以从根本上解决对核敏感的问题. 高斯和技术是一种比较直观和受欢迎的非高斯处理方法之一, 其基本原理是采用多个有限高斯项概率密度去逼近非高斯概率密度, 即利用多个高斯分布的和去近似表示一个非高斯分布, 从而可以基于传统的卡尔曼滤波框架实现滤波^[11]. 因此, 通过将高斯和技术与 CKF 结合, 可进一步构建相应的滤波算法来解决非线性非高斯系统的状态估计问题^[3, 12]. 事实上, 高斯和滤波器设计的关键问题主要包括高斯混合模型的参数估计和高斯项优化合并^[13-14], 其中高斯混合模型参数估计主要采用期望最大化 (Expectation-maximum, EM) 算法, 该算法是由 Dempster 等^[15] 于 1977 年提出的一种迭代算法, 其通过估计参数的极大似然值来分析不完全数据集, 从而达到获取最佳聚类结果的目的. 然而, EM 算法存在对初始值比较敏感、收敛速度慢、容易陷入局部收敛以及需要知道混合成分个数等缺陷, 在工程应用受到极大的限制^[16-17], 依然有待进一步深入改进. 此外, 在高斯和滤波过程中, 高斯项的个数会呈指数型递增, 这使得对高斯项进行合理有效地合并就显得非常必要. 目前典型用于高斯项合并的距离度量包括马氏 (Mahalanobis) 距离和

Kullback-Leibler (KL) 距离^[18-19], 其中马氏距离度量倾向于采用剪枝方式来删除权重较低的高斯项, 而 KL 距离度量更倾向于合并而不是剪枝方式^[19]. 由于这两种高斯混合项处理方式机理不同, 所产生的高斯项约简效果也有差异, 一般很难从理论上验证孰优孰劣.

针对上述问题, 本文以自由度为 3 (包括 x 、 y 与朝向) 的地面移动机器人的运动状态估计系统为对象, 提出一类改进的非线性非高斯 CKF 的设计. 该工作主要创新包括建立一种改进的鲁棒 EM 算法, 并提出了基于信息融合技术的高斯项合并方法. 在鲁棒 EM 算法改进方面, 本文将引入加权信息量概念来进一步完善 EM 算法中的目标函数惩罚项, 使得在优化过程中能考虑包括隐含信息量在内的更全面的参数信息. 通过这种方式, 得到的权重更新参数将更具有代表性, 从而减少 EM 算法的迭代次数并提高其收敛速度. 在高斯项合并方法方面, 综合考虑上述两类高斯项合并方法原理和性能上的差异性和互补性, 基于信息融合技术提出一种新的高斯合并项融合方法: 先单独对马氏距离和 KL 距离度量进行高斯混合项合并, 以改善高斯项合并距离度量的合理性; 再以两个距离度量独立运行输出的高斯合并项为基础, 提出对两类高斯合并项进行加权融合的高斯混合项融合方法. 基于传统高斯和容积卡尔曼滤波的设计框架, 本文提出新型非线性非高斯滤波方法, 并通过理论分析和机器人转弯运动状态估计仿真场景来验证新算法的有效性.

1 问题描述

1.1 系统描述

考虑如下非线性非高斯估计系统:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

式中, $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态变量, $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^m$ 为系统的量测向量, $\mathbf{f}(\cdot)$ 和 $\mathbf{h}(\cdot)$ 分别为已知的状态转移函数和量测函数. $\mathbf{w}_{k-1} \in \mathbf{R}^n$ 为非高斯过程噪声, $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^m$ 为非高斯量测噪声. 实际上, 非高斯噪声如脉冲噪声、闪烁噪声等广泛存在于工程应用中, 会严重破坏以二阶统计理论为基础的高斯滤波算法的设计过程^[20], 因此为了提高滤波器工程应用能力, 必须深入研究非高斯滤波方法的设计.

1.2 高斯和容积卡尔曼滤波

根据高斯和定理, 任意分布的概率密度函数都能够用 N 个高斯项的累加进行近似表示, 即利用多

个不同权重的高斯项求和去描述非高斯噪声^[1]。过程和量测噪声可用高斯混合模型表示为:

$$p(\mathbf{w}_{k-1}) = \sum_{j=1}^J \alpha_{w,k}^j N(\mathbf{w}_{k-1}; \bar{\mathbf{w}}_{k-1}^j, \mathbf{Q}_{k-1}^j) \quad (3)$$

$$p(\mathbf{v}_k) = \sum_{l=1}^L \alpha_{v,k}^l N(\mathbf{v}_k; \bar{\mathbf{v}}_k^l, \mathbf{R}_k^l) \quad (4)$$

式中, $p(\mathbf{w}_{k-1})$ 、 $p(\mathbf{v}_k)$ 分别表示过程噪声和量测噪声的概率密度; $\alpha_{w,k}^j$ 、 $\bar{\mathbf{w}}_{k-1}^j$ 和 \mathbf{Q}_{k-1}^j 分别表示第 j 个过程噪声高斯分量的权重、均值和方差. $\alpha_{v,k}^l$ 、 $\bar{\mathbf{v}}_k^l$ 和 \mathbf{R}_k^l 分别表示第 l 个量测噪声高斯分量的权重、均值和方差, 且 $\sum_{j=1}^J \alpha_{w,k}^j = 1$, $\sum_{l=1}^L \alpha_{v,k}^l = 1$.

高斯和容积卡尔曼滤波 (Gaussian-sum cubature Kalman filter, GSCKF) 的基本框架如图 1 所示. 主要步骤包括: 近似高斯分布集合估计、并行容积卡尔曼滤波、高斯项合并和信息融合等. 其中, 高斯分布集合估计是确定几个高斯分布的和来近似表示原非高斯分布, 并估计出各个高斯分布的特征参数, 从而可以建立高斯混合模型; 并行容积卡尔曼滤波是以多高斯分布估计为基础, 分别执行单高斯分布下的标准 CKF 来获得相应的状态估计; 随着估计时间增加, 高斯项个数将呈几何级增长, 因此进行高斯项即多个高斯分布的滤波估计结果合并约简就显得非常必要; 当完成高斯项合并约简后, 将剩余的高斯分布滤波估计进行融合获得最终的高斯和滤波估计.

现有的高斯和容积卡尔曼滤波方法研究重点集中在算法设计上, 主要包括如下 2 个核心问题: 1) 对于非高斯噪声特性的参数估计研究. 虽然通过高斯和原理可将非高斯噪声表示为多个高斯分布的混合模型, 但应用传统的 EM 算法及改进方法对高斯混合模型的参数进行估计时, 往往需要提前确定混合成分个数, 并且初始参数值对算法性能的影响较大, 因此提高 EM 算法的鲁棒性对于改善高斯和滤波的性能非常重要; 2) 对高斯混合项的合并模型降阶方法的研究. 高斯和滤波过程将产生大量的高斯项, 这是非高斯模型高斯化的必然结果. 但过多的高斯项必然会对整个滤波过程和结果性能产生不利影响, 尤其是高斯项合并结果将直接影响非高斯状态估计的性能. 现有研究大都采用单一距离的合并机制, 如基于马氏距离的高斯项合并, 该方法主要倾向于合并均值相近的高斯项. 事实上, 高斯化后产生的众多高斯项类型和特征各有不同, 单一的合并基准或策略往往难以尽可能有效地衡量出所有需要合并或剪枝的高斯项, 同时又需要考虑最大高斯分量数的约束, 使得寻找一个合适的动态阈值来降

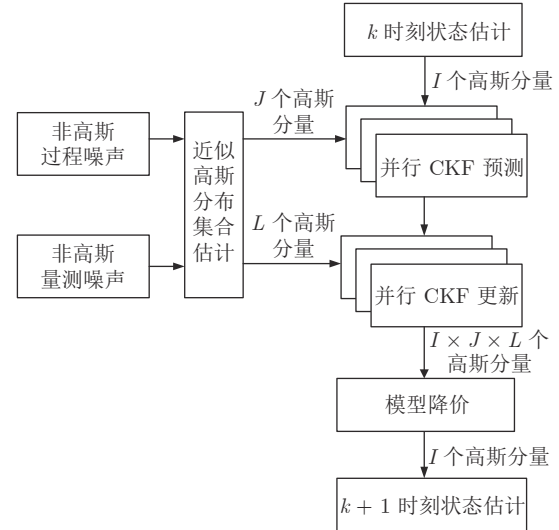


图 1 高斯和容积卡尔曼滤波算法流程

Fig.1 GSCKF algorithm process

低算法复杂度的同时又能保证算法精度是一个挑战性的问题. 因此, 如何设计更加高效的高斯项合并策略成为改善高斯和滤波性能的一个重要方向.

1.3 研究动机

由于准确确定高斯混合模型中混合成分的具体类簇和数量是非常困难的, 从而导致传统 EM 算法的应用和性能受到很大的限制. 因此, 针对第 1.1 节的问题 1), 本文借鉴文献 [21] 引进信息量概念的思路, 通过对传统 EM 算法目标函数添加惩罚项, 优化 EM 算法中权重参数的更新规则, 得到一种中引进信息量概念来改进 EM 算法输出性能的思想, 通过进一步增加传统 EM 算法目标函数惩罚项 (即加权信息量) 的方式来实现 EM 算法中权重参数更新规则的深度优化, 从而获得一种改进的鲁棒 EM 算法. 该改进算法将混合成分个数的初值作为采样点数, 从而能有效改善对初始参数值敏感的问题, 随后应用各个类簇竞争性的关系和迭代过程中删除权重低的项来获得混合成分的具体参数, 从而 EM 算法的鲁棒性能够得到有效改善.

针对问题 2), 考虑到基于单一距离指标的高斯项合并方式存在适用性和鲁棒性等受限问题, 加之高斯化得到的高斯混合项具有各自的特性以及每种距离指标拥有天然不同的明确倾向性, 使得采用信息融合技术来实现多种距离指标下高斯项合并方法的融合成为可能, 因此提出基于多距离指标高斯项的二次融合模式来设计一种改进的高斯混合项合并方法. 理论上使用更多的距离指标更够更加符合和逼近高斯混合项的复杂特征, 但为了研究阐述的简便性和直观性, 本文只讨论基于马氏距离和基于

KL 距离的高斯混合项融合合并方法, 即将基于上述两种距离方法的合并结果进行凸组合加权融合^[22]来获得最终的非高斯状态估计. 需要提及的是, 一般意义上更多距离指标的融合参与过程可类推获得, 但鉴于计算复杂性和实时性的要求, 过多的距离指标使用也会产生一些新的问题.

2 改进鲁棒 EM 算法

EM 算法是一种针对不完全数据进行参数估计值求解的迭代算法, 其在观测数据的基础上引进不可观测的潜在数据, 从而将复杂的不完全数据问题转化为完全数据问题^[23], 并通过迭代算法完成不完全数据的参数的估计.

2.1 EM 算法

假定存在一组观测数据 $\mathbf{X}' = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$, 其中 \mathbf{x}_i 为 p 维向量, 由高斯混合模型生成

$$p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \sum_{k=1}^c \alpha_k f_k(\mathbf{x}_i|\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) \quad (5)$$

式中, α_k 、 $\boldsymbol{\mu}_k$ 、 $\boldsymbol{\Sigma}_k$ 分别表示高斯混合模型中第 k 个高斯项的权重、均值和协方差, c 表示混合模型分量的个数即最终类簇.

经典 EM 算法的流程如图 2 所示, 其中 z_{ki} 为隐含参量, $\theta^0 = \{\alpha_1^0, \dots, \alpha_c^0, \boldsymbol{\mu}_1^0, \dots, \boldsymbol{\mu}_c^0, \boldsymbol{\Sigma}_1^0, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_c^0\}$, 混合模型分量数目 c , 在 EM 算法中需要提前给出.

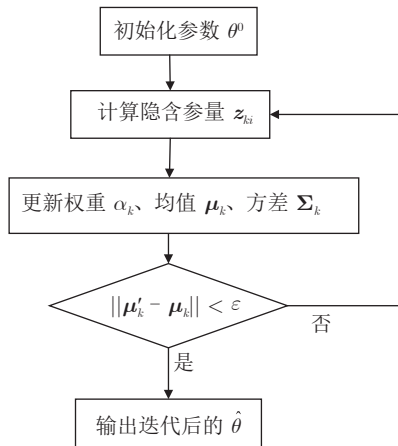


图 2 EM 算法迭代流程

Fig.2 EM algorithm process

E-step: 给定初始参数 θ^0 , 计算隐含参量 z_{ki} ^[21]:

$$z_{ki} = \frac{\alpha_k f(\mathbf{x}_i; \theta_k)}{\sum_{s=1}^c \alpha_s f(\mathbf{x}_i; \theta_s)} \quad (6)$$

M-step: 计算新一轮迭代模型参数:

1) 混合高斯项的权重为:

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^n z_{ki}}{n} \quad (7)$$

2) 高斯混合模型分量的均值为:

$$\boldsymbol{\mu}_k = \frac{\sum_{i=1}^n z_{ki} \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n z_{ki}} \quad (8)$$

3) 高斯混合模型分量的协方差为:

$$\boldsymbol{\Sigma}_k = \frac{\sum_{i=1}^n z_{ki} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k) (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T}{\sum_{i=1}^n z_{ki}} \quad (9)$$

对于上述传统 EM 算法, 一般需要提前给定混合成分的具体个数, 且对于初始参数比较敏感, 容易陷入局部最优, 这些都限制了 EM 算法应用.

2.2 一种改进鲁棒 EM 算法

Yang 等^[21] 提出一种鲁棒 EM 算法, 通过对传统 EM 算法目标函数添加惩罚项, 以优化 EM 算法当中高斯混合项的权重更新方式, 进而改变混合模型的具体参数更新规则. 但添加的惩罚项仅考虑优化权重参数 α_k , 因此只包含混合高斯项的权重信息. 本文引入信息量的概念来进行惩罚项的添加, 除考虑权重参数外, 进一步考虑了数据中的隐含信息量. 其中, 隐含参量 z_{ki} 代表 \mathbf{x}_i 属于第 k 个高斯分量的概率, 其包含了混合高斯项的权重、均值和协方差. 通过在 EM 算法的基础上引进加权信息量的思想, 样本总体加权隐含信息量可表示为 $-\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^c \alpha_k \ln z_{ki}$, 其中 $-\sum_{k=1}^c \ln z_{ki}$ 代表第 i 个样本的含信息量, α_k 代表每个高斯项的权重. 若要使总体的加权信息量最小, 则意味着最大化 $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^c \alpha_k \ln z_{ki}$. 将其作为惩罚项加入到目标函数中可以得到:

$$J(\alpha, \mathbf{z}, \theta) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^c z_{ki} \ln [\alpha_k f(\mathbf{x}_i; \theta_k)] + \beta \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^c \alpha_k \ln z_{ki} \quad (10)$$

其中

$$\beta = \sum_{k=1}^c \frac{|\alpha_k - \alpha_{k-1}|}{c} \quad (11)$$

进一步考虑约束条件 $\sum_{k=1}^c z_{ki} = 1$ 和 $\sum_{k=1}^c \alpha_k = 1$ 下, 通过拉格朗日乘数法最大化 J 可以求解得到各个高斯项的权重更新公式 α_k 为 (详见附录 A):

$$\alpha_k^{(new)} = \frac{\sum_{i=1}^n z_{ki}}{n} + \frac{\beta \alpha_k^{(old)}}{n} \times \left(\sum_{i=1}^n \ln z_{ki} - \sum_{k=1}^c \sum_{i=1}^n \alpha_k^{(old)} \ln z_{ki} \right) \quad (12)$$

每次迭代时, 若 $\alpha_k < 1/n$ 或 $\alpha_k < 0$, 则认为该高斯项对混合成分的贡献忽略不计, 并移除此高斯项^[21], 然后重新调整高斯混合项数目 c , 具体为:

$$c^{(new)} = c^{(old)} - |\alpha_k|, \quad k = 1, \dots, c^{(old)} \quad (13)$$

同时, 为了保证约束条件 $\sum_{k=1}^c \alpha_k = 1$, 需进行以下更新:

$$\alpha_{k'} = \frac{\alpha_{k'}}{\sum_{s=1}^{c^{(new)}} \alpha_s} \quad (14)$$

$$z_{k'i} = \frac{z_{k'i}}{\sum_{s=1}^{c^{(new)}} z_{si}} \quad (15)$$

流程如图 3 所示, 本文改进鲁棒 EM 算法具体

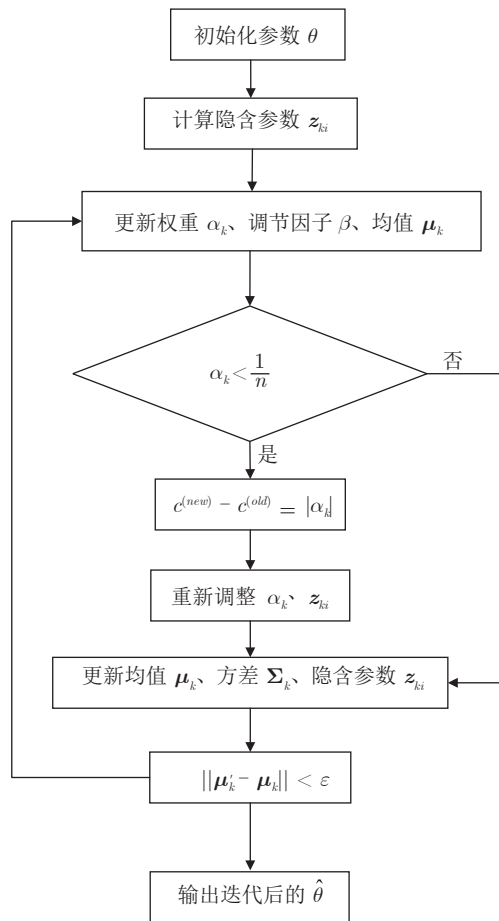


图 3 改进鲁棒 EM 算法迭代流程

Fig.3 Improved robust EM algorithm process

步骤如下:

步骤 1. 初始化参数 $c = n$, $\alpha_k = 1/n$, $\beta = 1$. μ_k , Σ_k 取值任意, 即 θ 值, 并设定一个足够小的数 $\varepsilon > 0$ 作为判断循环结束的条件;

步骤 2. E-step: 根据式 (6) 计算 z_{ki} ;

步骤 3. M-step: 由式 (12) 更新权重, 由式 (8) 计算 μ_k , 由式 (11) 计算 β , 第 1 次迭代令 $\beta = 1$;

步骤 4. 当 $\alpha_k < 1/n$ 时, 可令第 k 个高斯分量无效, 移除此时的混合系数 α_k , 同时高斯分量参数 $c^{(new)} = c^{(old)} - |\alpha_k|$, 当迭代次数大于 60 次时令 $\beta = 0$;

步骤 5. 根据式 (14) 和式 (15) 更新得到 $\alpha_{k'}$ 和 $z_{k'i}$, 并根据式 (8) 和式 (9) 来更新 $\mu_{k'}$ 和 Σ_k ;

步骤 6. 根据式 (6) 更新 z_{ki} ;

步骤 7. 若 $\|\mu'_k - \mu_k\| < \varepsilon$ 则迭代停止, 否则转到步骤 3 继续执行.

本节提出改进鲁棒 EM 算法, 对初始的参数值不敏感, 迭代过程中各个高斯项之间是竞争关系, 每次迭代删除权重较小的高斯项, 通过不断迭代可得到混合成分具体参数估计.

3 改进高斯和容积卡尔曼滤波

3.1 高斯和容积卡尔曼滤波

本文将给出非高斯噪声环境下的高斯和滤波算法 (Improved GSCKF, IGCKF), 算法流程如图 4 所示. 在非高斯噪声环境下, 用改进鲁棒 EM 算法进行高斯混合模型的求解, 通过高斯和原理, 使用多个并行的 CKF 进行状态预测与更新, 求解得到目标的状态估计值. 然而, 随着时间推移, 高斯项的个数会越来越多从而限制算法的使用. 为了有效地对高斯项进行合并, 本文将利用现有两类方法来进行高斯项的合并, 并将合并后的高斯混合项进行凸组合融合. 结合图 4 具体阐述改进后的高斯和容积卡尔曼滤波算法的滤波过程如下.

1) 时间更新:

假设已知 $k-1$ 时刻 $\mathbf{x}_{k-1|k-1}$ 统计特性为:

$$p(\mathbf{x}_{k-1|k-1}) = \sum_{i=1}^I \alpha_{k-1|k-1} N(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^i) \quad (16)$$

根据贝叶斯滤波递推公式可得 k 时刻 \mathbf{x}_k 的一步预测概率密度估计 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{k-1})$ 为^[12]:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{k-1}) = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \alpha_{k|k-1}^{i,j} N(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{i,j}) \quad (17)$$

式中, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k-1}^{i,j}$ 可以表示为:

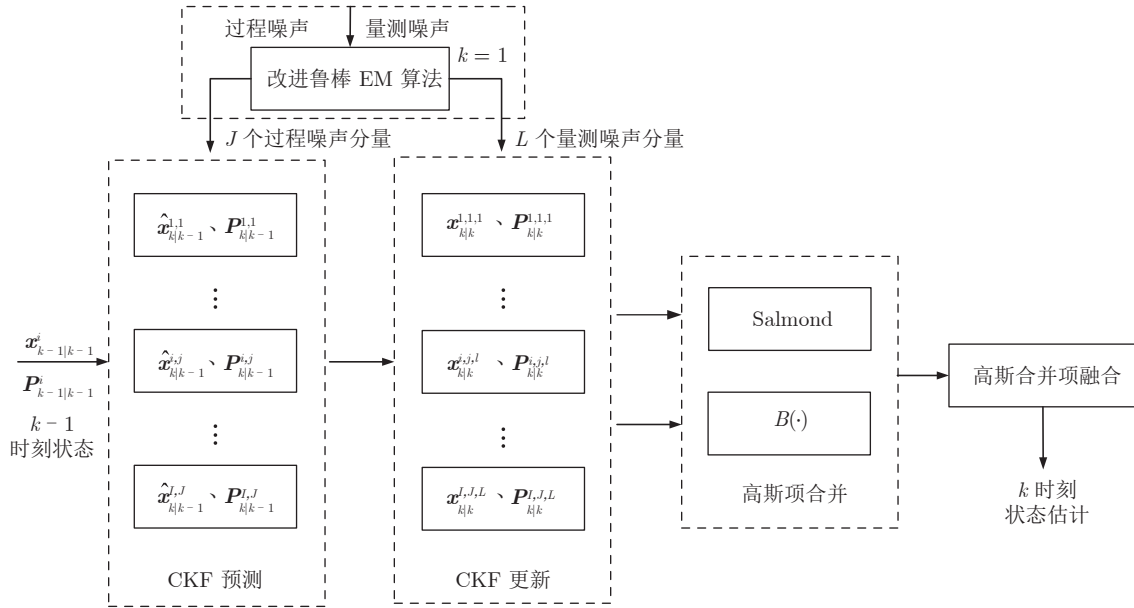


图 4 改进高斯和容积卡尔曼滤波

Fig.4 Improved Gaussian-sum cubature Kalman filter

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j} = \sum_{r=1}^{2n_x} \beta^r \boldsymbol{\xi}_{k|k-1}^{i,r} + \bar{\mathbf{w}}_{k-1}^j \quad (18)$$

和

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{i,j} = \sum_{r=1}^{2n_x} \beta^r \left(\boldsymbol{\xi}_{k|k-1}^{i,r} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j} \right) \left(\boldsymbol{\xi}_{k|k-1}^{i,r} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j} \right)^T + \mathbf{Q}_{k-1}^j \quad (19)$$

式中, 各中间变量为:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{k-1|k-1}^i = \mathbf{S}_{k-1|k-1}^i \left(\mathbf{S}_{k-1|k-1}^i \right)^T \\ \boldsymbol{\xi}_{k|k-1}^{i,r} = \mathbf{f} \left(\mathbf{S}_{k-1|k-1}^i \cdot \boldsymbol{\chi}^r + \mathbf{x}_{k-1|k-1}^i \right) \\ \alpha_{k|k-1}^{i,j} = \alpha_{k-1|k-1}^i \alpha_{w,k}^j \end{cases} \quad (20)$$

式中, β^r 为容积点权重, n_x 为状态向量维数, $\boldsymbol{\chi}^r$ 为球面径向规则确定的容积点.2) 量测更新: 当接收到 k 时刻量测值时, 可以得到后验概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ 为^[12]:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \alpha_{k|k}^{i,j,l} \mathbf{N} \left(\mathbf{x}_{k|k}^{i,j,l}, \mathbf{P}_{k|k}^{i,j,l} \right) \quad (21)$$

式中, $\mathbf{x}_{k|k}^{i,j,l}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}^{i,j,l}$ 可以表示为:

$$\mathbf{x}_{k|k}^{i,j,l} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j} + \mathbf{K}_k^{i,j,l} \left(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j,l} \right) \quad (22)$$

和

$$\mathbf{P}_{k|k}^{i,j,l} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{i,j} - \mathbf{K}_k^{i,j,l} \mathbf{P}_{z z, k|k-1}^{i,j,l} \left(\mathbf{K}_k^{i,j,l} \right)^T \quad (23)$$

式中, 各中间变量为:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{k|k-1}^{i,j} = \mathbf{S}_{k|k-1}^{i,j} \left(\mathbf{S}_{k|k-1}^{i,j} \right)^T \\ \boldsymbol{\varphi}_{k|k-1}^{i,j,r} = \mathbf{S}_{k|k-1}^{i,j} \cdot \boldsymbol{\chi}^r + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j} \\ \boldsymbol{\xi}_{k|k-1}^{i,j,r} = \mathbf{h} \left(\boldsymbol{\varphi}_{k|k-1}^{i,j,r} \right) \\ \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j,l} = \sum_{r=1}^{2n_x} \beta^r \boldsymbol{\xi}_{k|k-1}^{i,j,r} + \bar{\mathbf{v}}_k^l \\ \mathbf{P}_{z z, k|k-1}^{i,j,l} = \sum_{r=1}^{2n_x} \beta^r \left(\boldsymbol{\xi}_{k|k-1}^{i,j,r} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j,l} \right) \left(\boldsymbol{\xi}_{k|k-1}^{i,j,r} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j,l} \right)^T + \mathbf{R}_k^l \\ \mathbf{P}_{x z, k|k-1}^{i,j,l} = \sum_{r=1}^{2n_x} \beta^r \left(\boldsymbol{\varphi}_{k|k-1}^{i,j,r} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j} \right) \left(\boldsymbol{\xi}_{k|k-1}^{i,j,r} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j,l} \right)^T \\ \mathbf{K}_k^{i,j,l} = \mathbf{P}_{x z, k|k-1}^{i,j,l} \left(\mathbf{P}_{z z, k|k-1}^{i,j,l} \right)^{-1} \end{cases} \quad (24)$$

量测更新后每一项的权重为:

$$\alpha_{k|k}^{i,j,l} = \frac{\alpha_{k|k-1}^{i,j} \alpha_{v,k}^l \mathbf{N} \left(\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j,l}, \mathbf{P}_{z z, k|k-1}^{i,j,l} \right)}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \alpha_{k|k-1}^{i,j} \alpha_{v,k}^l \mathbf{N} \left(\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j,l}, \mathbf{P}_{z z, k|k-1}^{i,j,l} \right)} \quad (25)$$

$\mathbf{x}_{k|k}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}$ 可表示为:

$$\mathbf{x}_{k|k} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \alpha_{k|k}^{i,j,l} \mathbf{x}_{k|k}^{i,j,l} \quad (26)$$

和

$$\mathbf{P}_{k|k} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \alpha_{k|k}^{i,j,l} \mathbf{P}_{k|k}^{i,j,l} \quad (27)$$

3.2 基于凸组合技术的高斯混合项融合方法

高斯和滤波算法中初始高斯项有 I 项, 经过 1 次滤波操作后变为 $I \times J \times L$ 项, 随着时间的推移, k 次滤波结束后将增加到 $I \times J^k \times L^k$ 项. 高斯项数的增加会导致计算量不断增加, 从而限制该算法的使用. 因此, 需要对式 (26) 和式 (27) 的高斯混合项进行合并, 以减少高斯混合项的个数, 降低计算的复杂度. 就目前而言, 已有的高斯混合项合并方法大多基于马氏距离或者 KL 距离, 由于机理不同, 其产生的效果也不一样, 难以从理论比较两种算法的优劣性. 本文将对这两种方法合并后的高斯项进行加权融合估计.

3.2.1 基于马氏距离的高斯项合并

Salmond^[18] 提出一种高斯项合并方法, 首先定义一个马氏距离为:

$$d^2(m, n) = \frac{\alpha_{k|k}^m \alpha_{k|k}^n}{\alpha_{k|k}^m + \alpha_{k|k}^n} \times (\mathbf{x}_{k|k}^m - \mathbf{x}_{k|k}^n)^\top (\mathbf{P}_{k|k}^m + \mathbf{P}_{k|k}^n)^{-1} (\mathbf{x}_{k|k}^m - \mathbf{x}_{k|k}^n) \quad (28)$$

式中, $\alpha_{k|k}^m$ 和 $\alpha_{k|k}^n$ 分别为来自式 (26) 和式 (27) 中第 m 和第 n 项高斯项的权重, 相应的 $\mathbf{x}_{k|k}^m$ 和 $\mathbf{x}_{k|k}^n$ 分别为其对应的均值, $\mathbf{P}_{k|k}^m$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}^n$ 分别为其协方差.

设定最大高斯项数为 G , 一旦高斯项超过该数值则进行合并. 此时, 首先删除权重较低的高斯项, 然后根据马氏距离依次将距离最小的高斯项进行合并, 高斯项合并的计算可表示为:

$$\begin{cases} \alpha_{k|k}^{1,i} = \alpha_{k|k}^m + \alpha_{k|k}^n \\ \mathbf{x}_{k|k}^{1,i} = \frac{\alpha_{k|k}^m \mathbf{x}_{k|k}^m + \alpha_{k|k}^n \mathbf{x}_{k|k}^n}{\alpha_{k|k}^m + \alpha_{k|k}^n} \\ \mathbf{P}_{k|k}^{1,i} = \frac{\alpha_{k|k}^m \mathbf{P}_{k|k}^m + \alpha_{k|k}^n \mathbf{P}_{k|k}^n}{\alpha_{k|k}^m + \alpha_{k|k}^n} \end{cases} \quad (29)$$

3.2.2 基于 KL 距离的高斯项合并

$B(\cdot)$ 准则^[19] 是一种基于 KL 距离的高斯项合并方法, 该算法的核心是计算两个高斯项的 KL 距

离, 若 KL 距离越小则两个高斯项越相近, 此时更趋向于去合并他们. $B(\cdot)$ 准则的计算方法定义如下:

$$B(m, n) = \frac{1}{2} \left[(\alpha_{k|k}^m + \alpha_{k|k}^n) \lg \det(\mathbf{P}_{k|k}^{2,j}) - \alpha_{k|k}^m \lg \det(\mathbf{P}_{k|k}^m) - \alpha_{k|k}^n \lg \det(\mathbf{P}_{k|k}^n) \right] \quad (30)$$

依据 $B(\cdot)$ 准则, 依次将最小 $B(m, n)$ 的两个高斯项进行合并, 原则如下:

$$\begin{cases} \alpha_{k|k}^{2,j} = \alpha_{k|k}^m + \alpha_{k|k}^n \\ \mathbf{x}_{k|k}^{2,j} = \alpha_{n|mn} \mathbf{x}_{k|k}^n + \alpha_{m|mn} \mathbf{x}_{k|k}^m \\ \mathbf{P}_{k|k}^{2,j} = \alpha_{n|mn} \mathbf{P}_{k|k}^n + \alpha_{m|mn} \mathbf{P}_{k|k}^m + \alpha_{n|mn} \alpha_{m|mn} (\mathbf{x}_{k|k}^m - \mathbf{x}_{k|k}^n) (\mathbf{x}_{k|k}^m - \mathbf{x}_{k|k}^n)^\top \\ \alpha_{m|mn} = \frac{\alpha_{k|k}^m}{\alpha_{k|k}^m + \alpha_{k|k}^n} \\ \alpha_{n|mn} = \frac{\alpha_{k|k}^n}{\alpha_{k|k}^m + \alpha_{k|k}^n} \end{cases} \quad (31)$$

3.2.3 基于凸组合的高斯合并项融合

第 3.2.1 节和第 3.2.2 节分别介绍了 2 种基于不同准则的高斯项合并方法, 但是其均存在高斯项合并失真的问题. 因此, 为了保证高斯项合并的保真度, 本文将对上述两种方法得到的高斯合并项进行凸组合融合^[22]. 融合过程可以表示为:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \mathbf{f}_2(\mathbf{x})}{\int \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad (32)$$

其中

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^d \alpha_{k|k}^{1,i} \alpha_{k|k}^{2,j} \mathbf{N}(\mathbf{x}_{k|k}^{1,i}, \mathbf{P}_{k|k}^{1,i}) \mathbf{N}(\mathbf{x}_{k|k}^{2,j}, \mathbf{P}_{k|k}^{2,j}) \quad (33)$$

式中, $\alpha_{k|k}^{1,i}$ 为第 i 个 Salmond 高斯项合并方法得到高斯项的权重, $\alpha_{k|k}^{2,j}$ 为第 j 个 $B(\cdot)$ 高斯项合并方法得到高斯项的权重, 相应的 $\mathbf{x}_{k|k}^{1,i}$ 和 $\mathbf{x}_{k|k}^{2,j}$ 分别为其对应的均值, $\mathbf{P}_{k|k}^{1,i}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}^{2,j}$ 分别为其协方差.

进而, 可以得到每一项的后验概率密度:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_{k|k}^{i,j}, \mathbf{P}_{k|k}^{i,j}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{x}_{k|k}^{1,i}, \mathbf{P}_{k|k}^{1,i}) \mathbf{N}(\mathbf{x}_{k|k}^{2,j}, \mathbf{P}_{k|k}^{2,j})}{\int \mathbf{N}(\mathbf{x}_{k|k}^{1,i}, \mathbf{P}_{k|k}^{1,i}) \mathbf{N}(\mathbf{x}_{k|k}^{2,j}, \mathbf{P}_{k|k}^{2,j}) d\mathbf{x}} \quad (34)$$

式中, $\mathbf{x}_{k|k}^{i,j}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}^{i,j}$ 可以定义为:

$$\mathbf{P}_{k|k}^{i,j} = \left((\mathbf{P}_{k|k}^{1,i})^{-1} + (\mathbf{P}_{k|k}^{2,j})^{-1} \right)^{-1} \quad (35)$$

和

$$\mathbf{x}_{k|k}^{i,j} = \mathbf{P}_{k|k}^{i,j} \left((\mathbf{P}_{k|k}^{1,i})^{-1} \mathbf{x}_{k|k}^{1,i} + (\mathbf{P}_{k|k}^{2,j})^{-1} \mathbf{x}_{k|k}^{2,j} \right) \quad (36)$$

每一项的权重为:

$$\beta'_{ij} = \alpha_{k|k}^{1,i} \alpha_{k|k}^{2,j} \int \mathbf{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}^{1,i}, \mathbf{P}_{k|k}^{1,i}) \times \mathbf{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}^{2,j}, \mathbf{P}_{k|k}^{2,j}) d\mathbf{x} \quad (37)$$

对权重归一化后得到:

$$\beta_{ij} = \frac{\beta'_{ij}}{\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^d \beta'_{ij}} \quad (38)$$

最终融合得到 $\mathbf{x}_{k|k}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}$ 如下:

$$\mathbf{x}_{k|k} = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^d \beta_{ij} \mathbf{x}_{k|k}^{i,j} \quad (39)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^d \beta_{ij} \left[\mathbf{P}_{k|k}^{i,j} + (\mathbf{x}_{k|k}^{i,j} - \mathbf{x}_{k|k}) (\mathbf{x}_{k|k}^{i,j} - \mathbf{x}_{k|k})^T \right] \quad (40)$$

定理 1. 融合后的子滤波器精度高于基于不同距离高斯项合并方法中的子滤波器的估计精度^[24]:

$$\text{tr}(\mathbf{P}_{k|k}^{i,j}) \leq \begin{cases} \text{tr}(\mathbf{P}_{k|k}^{1,i}) \\ \text{tr}(\mathbf{P}_{k|k}^{2,j}) \end{cases} \quad (41)$$

证明. 由式 (35) 可得:

$$\mathbf{P}_{k|k}^{i,j} - \mathbf{P}_{k|k}^{1,i} = \frac{-\left(\mathbf{P}_{k|k}^{1,i}\right)^2}{\mathbf{P}_{k|k}^{1,i} + \mathbf{P}_{k|k}^{2,j}} \quad (42)$$

式中, $\mathbf{P}_{k|k}^{1,i}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}^{2,j}$ 均为正定矩阵, 因此可得:

$$\mathbf{P}_{k|k}^{i,j} \leq \mathbf{P}_{k|k}^{1,i} \quad (43)$$

同理可得:

$$\mathbf{P}_{k|k}^{i,j} \leq \mathbf{P}_{k|k}^{2,j} \quad (44)$$

从而可知式 (41) 成立. \square

3.2.4 简要分析

针对非高斯系统的状态估计问题, 通过高斯项混合成分特性参数估计和高斯项合并方式两个角度的改进来开展新型高斯和容积卡尔曼滤波器设计, 主要工作包括: 1) 算法的权重更新方式得到进一步优化, 进而可获得改进后的混合模型参数更新规则, 最终实现非线性高斯和滤波估计性能的提高. 此外, 该方法不需要提前设定混合成分数目, 能够自适应估计混合成分的具体参数; 2) 针对单一距离指标的倾向性和基于单一距离指标的高斯项合并方法的局限性, 提出基于多模式融合策略的高斯项合并思想,

并以马氏距离与 KL 距离为代表给出了两种高斯项合并方式下的多模式融合计算过程. 需要注意的是, 不同距离指标下高斯项融合合并实现包括 2 种方式, 本文采用第 2) 种方式: 1) 两者距离指标计算直接融合形成新距离指标后再进行高斯项合并操作; 2) 先采用各自距离指标进行高斯项合并后再进行融合操作. 同时, 从信息论角度采用更多的距离指标能够实现对高斯混合模型特征更好的表征, 相应的融合方法也可以从两个距离指标融合模式中类推获得. 然而, 距离指标类别数增加必然会产生一些新的问题, 如类别增加对高斯混合模型特征表达能力改善的量化表示、在状态估计正方向改善目标下的类别增加优化选择以及多距离指标融合下高斯项合并过程的收敛性与稳定性分析等, 这些问题的进一步研究有助于推动更多距离指标参与下高性能高斯和容积卡尔曼滤波算法的设计.

4 仿真结果与分析

本文以机器人运动状态估计为仿真场景^[5], 考虑机器人在进行半圆周运动. 定义其运动状态矢量 $\mathbf{x}_k = [x_k, y_k, \psi_k]^T$, 其中 x_k 和 y_k 为机器人在 x, y 轴方向的位置, ψ_k 为其方位角, 机器人的运动方程表示为:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (45)$$

观测模型可以表示为:

$$\mathbf{z}_{k,l} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_l) + \mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_l) = \begin{bmatrix} \sqrt{(\mathbf{y}_l^x - \mathbf{x}_{k,1})^2 + (\mathbf{y}_l^y - \mathbf{x}_{k,2})^2} \\ \arctan\left(\frac{\mathbf{y}_l^y - \mathbf{x}_{k,2}}{\mathbf{y}_l^x - \mathbf{x}_{k,1}}\right) - \psi_{k-1} \end{bmatrix} \quad (46)$$

地标集合 $\mathbf{y}_l = [\mathbf{y}_l^x \ \mathbf{y}_l^y]^T$, $l = 1, 2, 3, 4$ 为:

$$[\mathbf{y}_l^x \ \mathbf{y}_l^y] \in \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 50 \\ 50 & 50 \\ 50 & 10 \end{bmatrix} \quad (47)$$

机器人的运动模型如下:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ \psi_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v\Delta t \sin(\psi_{k-1}) \\ v\Delta t \cos(\psi_{k-1}) \\ \omega\Delta t \end{bmatrix} \quad (48)$$

式中, 控制量 \mathbf{u} 为:

$$\mathbf{u} = [v, \omega] = \left[1, \frac{\pi}{60}\right] \quad (49)$$

式中, Δt 为采样周期, \mathbf{y}_l^x 和 \mathbf{y}_l^y 分别为第 l 个地标的横坐标与纵坐标. \mathbf{x}_k 和 \mathbf{z}_k 分别为系统状态向量和量测向量, \mathbf{w}_{k-1} 和 \mathbf{v}_k 分别表示非高斯过程噪声

和非高斯量测噪声. 系统初始状态, 过程噪声, 量测噪声, 均由高斯混合模型表示如下:

$$p(\mathbf{x}_0) = \alpha_x N(\mathbf{x}_0; \bar{\mathbf{x}}^{01}, \mathbf{P}_{01}) + (1 - \alpha_x) N(\mathbf{x}_0; \bar{\mathbf{x}}^{02}, \mathbf{P}_{02})$$

$$p(\mathbf{w}_k) = \alpha_w N(\mathbf{w}_k; \bar{\mathbf{w}}^{01}, \mathbf{Q}^1) + (1 - \alpha_w) N(\mathbf{w}_k; \bar{\mathbf{w}}^{02}, \mathbf{Q}^2)$$

$$p(\mathbf{v}_k) = \alpha_v N(\mathbf{v}_k; \bar{\mathbf{v}}^{01}, \mathbf{R}^1) + (1 - \alpha_v) N(\mathbf{v}_k; \bar{\mathbf{v}}^{02}, \mathbf{R}^2)$$

式中, 各权重参数设定为: $\alpha_x = 0.5$, $\alpha_w = 0.3$, $\alpha_v = 0.4$, 其余参数设置为:

$$\bar{\mathbf{x}}_{01} = [40; 25; 0], \quad \bar{\mathbf{x}}_{02} = [40; 25; 0]$$

$$\mathbf{P}_{01} = \text{diag}\{1, 1, 0.01\}, \quad \mathbf{P}_{02} = \text{diag}\{1, 1, 0.01\}$$

$$\bar{\mathbf{v}}^{01} = [1.5; 0.5], \quad \bar{\mathbf{v}}^{02} = [0; 0]$$

$$\mathbf{R}^1 = \text{diag}\left\{2, \frac{8\pi}{180}\right\}, \quad \mathbf{R}^2 = \text{diag}\left\{1, \frac{5\pi}{180}\right\}$$

$$\bar{\mathbf{w}}^{01} = [0; 0; 0.1] \quad \bar{\mathbf{w}}^{02} = [0.5; 0.5; 0]$$

$$\mathbf{Q}^1 = \text{diag}\left\{0.1, 0.1, \frac{2\pi}{180}\right\}$$

$$\mathbf{Q}^2 = \text{diag}\left\{0.2, 0.2, \frac{9\pi}{180}\right\}.$$

4.1 仿真实验 1

为探究改进鲁棒 EM 算法对非高斯噪声参数的估计效果, 利用第 3.2 节中改进鲁棒 EM 算法对非高斯系统噪声和量测噪声各采样 $n = 1000$ 个点, 然后进行高斯混合模型参数的求解. 以非高斯过程噪声 $p(\mathbf{w}_k)$ 为例, 设置改进鲁棒 EM 初始参数为:

$$\alpha_k = \frac{1}{n}, \quad \boldsymbol{\mu}_k = \bar{\mathbf{W}}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_k = \|\mathbf{W}_i - \bar{\mathbf{W}}\|, \quad \varepsilon = 10^{-6}$$

式中, \mathbf{W}_i 为噪声采样数据, $\bar{\mathbf{W}}$ 为采样数据均值.

以过程噪声为例, 本文的改进鲁棒 EM 算法求解高斯混合模型参数的迭代过程如图 5 所示, 修改为其中空心圆为噪声的采样点, 实心点为用改进鲁棒 EM 算法估计得到高斯项的均值 (用 MuE 表示), 实线椭圆为其协方差 (用 SigmaE 表示), 三角形与虚线椭圆代表真实的高斯混合模型的均值 (用 MuR 表示) 与方差 (用 SigmaR 表示). 图 6 为文献 [21] 的鲁棒 EM 算法仿真, 其中三角形为用鲁棒 EM 算法估计得到高斯项的均值 (用 MuE 表示), 实线椭圆为其协方差 (用 SigmaE 表示).

表 1 为本文利用估计分布与原始分布的马氏距离衡量改进鲁棒 EM 算法前后的性能对比, 马氏距离越小表明估计分布越接近于原始分布, 其估计精度越高. 从图 5、图 6 和表 1 可以看出, 改进的鲁棒 EM 算法能有效地解决了 EM 算法鲁棒性差的缺点, 相对于鲁棒 EM 算法其参数性能、收敛速度都表现优越. 以马氏距离作为衡量标准改进后的鲁棒 EM 算法性能相比改进前提升 83.56%.

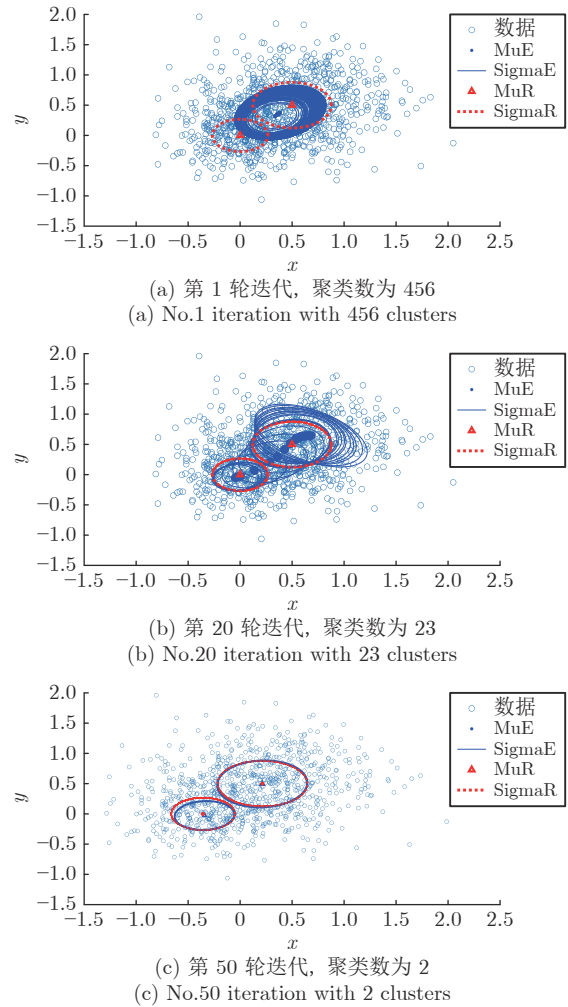


图 5 改进鲁棒 EM 算法迭代过程

Fig.5 Improved robust EM algorithm iterative process

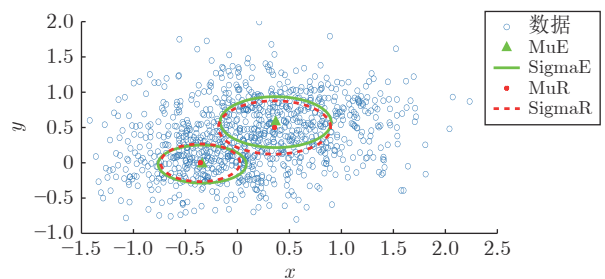


图 6 鲁棒 EM 算法迭代过程

Fig.6 Robust EM algorithm iterative process

表 1 改进前后鲁棒 EM 算法对比

Table 1 Comparison of robust EM algorithms before and after improvement

算法	迭代次数 (次)	马氏距离
文献 [21] 算法	143	0.0073
本文改进算法	50	0.0012

同时, 由迭代结果可以看出, 改进鲁棒 EM 算法可以解决高斯混合模型的参数求解问题, 获得了较好的高斯混合模型参数, 且收敛速度较快. 同理, 量测噪声的求解与过程噪声相同, 二者用改进鲁棒 EM 算法迭代出来的结果为:

$$\hat{\alpha}_v = 0.38, \quad \hat{\alpha}_w = 0.30$$

$$\hat{v}^{01} = [1.5923; 0.5234], \quad \hat{v}^{02} = [0.0526; -0.0233]$$

$$\hat{R}^1 = \begin{bmatrix} 2.1077 & -0.0209 \\ -0.0209 & 0.1307 \end{bmatrix}$$

$$\hat{R}^2 = \begin{bmatrix} 0.9746 & -0.0102 \\ -0.0102 & 0.0862 \end{bmatrix}$$

$$\hat{w}^{01} = [0.027; -0.012; 0.103]$$

$$\hat{w}^{02} = [0.513; 0.512; 0.012]$$

$$\hat{Q}^1 = \begin{bmatrix} 0.0934 & 0.0063 & -0.0037 \\ 0.0063 & 0.0845 & -0.0021 \\ -0.0037 & -0.0021 & 0.0317 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Q}^2 = \begin{bmatrix} 0.1999 & 0.0079 & 0.0099 \\ 0.0070 & 0.2093 & -0.0064 \\ 0.0099 & -0.0064 & 0.1506 \end{bmatrix}$$

4.2 仿真实验 2

仿真实验 2 是为了比较基于马氏距离的 Salmond 方法^[18]、基于 KL 距离的 $B(\cdot)$ 准则方法和本文建立的凸组合融合估计方法 (GSCKF 和 IG-SCKF) 在跟踪精度上的优劣关系. 在仿真场景中, 采用仿真一中改进鲁棒 EM 算法估计所得到的非高斯噪声的高斯混合模型参数, 作为高斯和容积卡尔曼滤波状态估计的非高斯噪声参数, 分别对其进行蒙特卡洛仿真, 以各算法的均方根误差 (Root mean square error, RMSE) 作为目标跟踪精度的指标.

对机器人进行运动状态估计的仿真结果如图 7 所示, 其对应的机器人位置的均方根误差计算结果如图 8 所示, 方位角度误差如图 9 所示.

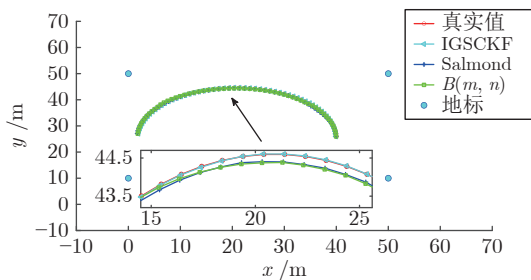


图 7 3 种算法对于机器人状态估计

Fig. 7 Three algorithms for robot state estimation

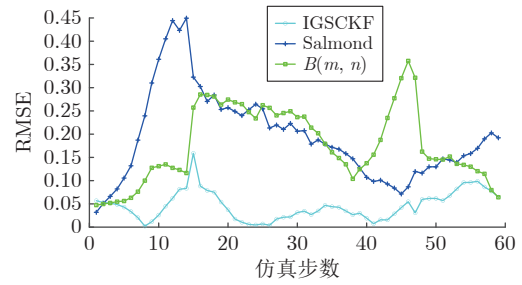


图 8 3 种算法的 RMSE

Fig. 8 RMSE of three algorithms

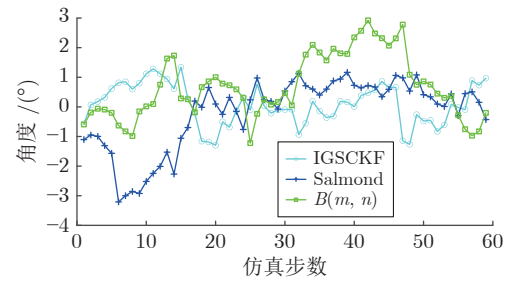


图 9 3 种算法的方位角误差

Fig. 9 The azimuth error of three algorithms

由图 7 ~ 9 可以看出, 基于凸组合融合的高斯混合项合并方法的滤波精度要高于常规的 Salmond 方法, 以及 $B(\cdot)$ 准则的高斯混合项合并方法. 由表 2 可以看出, 相比于其余两种方法, 本文基于凸组合融合的滤波方法的计算复杂度并没有明显增加. 仿真结果表明: 1) 改进的鲁棒 EM 算法可以很好地解决高斯混合模型的参数估计问题; 2) 采用凸组合来融合两种高斯混合项的合并方法, 有效提升了滤波算法的精度与可靠性.

表 2 3 种算法 RMSE 及运行时间

Table 2 RMSE and running time of 3 algorithms

算法	RMSE (m)	运行时间 (s)
Salmond	0.0705	1.16
$B(\cdot)$	0.17	1.06
IGSCKF	0.0576	1.20

5 结束语

针对非高斯非线性环境下的机器人状态估计问题, 本文首先对于非高斯噪声环境建立高斯混合模型, 并利用改进的鲁棒 EM 算法进行高斯混合模型参数的求解, 相比传统 EM 算法, 改进鲁棒 EM 算法对于初始参数不敏感, 不需要提前设定混合成分个数. 其次, 利用由改进鲁棒 EM 算法得到的高斯混合模型参数, 进行高斯和容积卡尔曼滤波的设计.

考虑到高斯和滤波过程中会出现高斯项冗余的情况, 本文利用凸组合融合, 得到了 Salmond 方法与 $B(\cdot)$ 准则方法两种方法合并后的高斯混合项, 并给出相应的理论分析和对比仿真实验. 结果表明, 经过融合后滤波算法的状态估计精度相比于传统的两种方法有明显的提升. 同时, 通用场景下的飞行测试数据验证分析也表明了新方法的有效性. 未来进一步研究工作包括有效高斯项数目动态优化、非高斯噪声统计特性动态估计、更多合并距离方法的融合策略以及复杂场景的数据非高斯动态建模和基于可信度高斯和滤波器设计等.

附录 A

在 2 个约束条件 $\sum_{k=1}^c z_{ki} = 1$ 和 $\sum_{k=1}^c \alpha_k = 1$ 下, 通过用拉格朗日乘数法, 可得:

$$J(\alpha, z, \theta) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^c z_{ki} \ln [\alpha_k f(\mathbf{x}_i; \theta_k)] + \beta \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^c \alpha_k \ln z_{ki} - \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^c \alpha_k - 1 \right) \quad (\text{A1})$$

对 α_k 求偏导, 可得:

$$\frac{\sum_{i=1}^n z_{ki}}{\alpha_k} + \beta \sum_{i=1}^n \ln z_{ki} - \lambda_1 = 0 \quad (\text{A2})$$

对 α_k 的二阶导数为:

$$J'' = -\frac{\sum_{i=1}^n z_{ki}}{(\alpha_k)^2} \quad (\text{A3})$$

由式 (A3) 可见, 二阶导数小于 0 说明 J 为严格凹函数, 根据严格凹函数的性质可知, 严格凹函数的任何极大值也是最大值. 将式 (A2) 两边同时乘 α_k , 可得:

$$\sum_{i=1}^n z_{ki} + \beta \alpha_k \sum_{i=1}^n \ln z_{ki} - \lambda_1 \alpha_k = 0 \quad (\text{A4})$$

$$\sum_{k=1}^c \sum_{i=1}^n z_{ki} + \beta \sum_{k=1}^c \sum_{i=1}^n \alpha_k \ln z_{ki} - \lambda_1 \sum_{k=1}^c \alpha_k = 0 \quad (\text{A5})$$

$$\lambda_1 = n + \beta \sum_{k=1}^c \sum_{i=1}^n \alpha_k \ln z_{ki} \quad (\text{A6})$$

将式 (A6) 代入式 (A2), 可得:

$$\alpha_k^{(new)} = \frac{\sum_{i=1}^n z_{ki}}{n} + \frac{\beta \alpha_k^{(old)}}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln z_{ki} - \sum_{k=1}^c \sum_{i=1}^n \alpha_k^{(old)} \ln z_{ki} \right) \quad (\text{A7})$$

References

- 1 Leong P H, Arulampalam S, Lamehewa T A, Abhayapa T D. A Gaussian-sum based cubature Kalman filter for bearings-only tracking. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2013, **49**(2): 1161–1176
- 2 Li W, Jia Y. Distributed consensus filtering for discrete-time nonlinear systems with non-Gaussian noise. *Signal Processing*, 2012, **92**(10): 2464–2470
- 3 Wang Lei, Cheng Xiang-Hong, Li Shuang-Xi. Gaussian sum high order unscented Kalman filtering algorithm. *Acta Electronica Sinica*, 2017, **45**(2): 424–430
(王磊, 程向红, 李双喜. 高斯和高阶无迹卡尔曼滤波算法. 电子学报, 2017, **45**(2): 424–430)
- 4 Jiang Tao, Qian Fu-Cai, Yang Heng-Zhan, Hu Shao-Lin. A new combined filtering algorithm for systems with dual uncertainties. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(4): 535–544
(江涛, 钱富才, 杨恒占, 胡绍林. 具有双重不确定性系统的联合滤波算法. 自动化学报, 2016, **42**(4): 535–544)
- 5 Song Yu, Sun Fu-Chun, Li Qing-Ling. Mobile robot Monte Carlo localization based on improved unscented particle filter. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(6): 851–857
(宋宇, 孙富春, 李庆玲. 移动机器人的改进无迹粒子滤波蒙特卡罗定位算法. 自动化学报, 2010, **36**(6): 851–857)
- 6 Ge Q B, Shao T, Yang Q M, Shen X F, Wen C L. Multi-sensor nonlinear fusion methods based on adaptive ensemble fifth-degree iterated cubature information filter for biomechanics. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2016, **46**(7): 912–925
- 7 Ienkar Arasaratnam, Simon Haykin. Cubature Kalman filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(6): 1254–1269
- 8 Ge Quan-Bo, Li Hong, Wen Cheng-Lin. Deep analysis of Kalman filtering theory for engineering applications. *Journal of Command and Control*, 2019, **5**(3): 167–180
(葛泉波, 李宏, 文成林. 面向工程应用的Kalman滤波理论深度分析. 指挥与控制学报, 2019, **5**(3): 167–180)
- 9 Izanloo R, Fakoorian S A, Yazdi H S, Simon D. Kalman filtering based on the maximum correntropy criterion in the presence of non-Gaussian noise. In Proceedings of the 2016 Annual Conference on Information Science and Systems, Princeton, USA: 2016. 500–505
- 10 Chen B D, Liu X, Zhao H Q, Principe J C. Maximum correntropy Kalman filter. *Automatica*, 2017, **76**: 70–77
- 11 Alspach D, Sorenson H. Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, **17**(4): 439–448
- 12 Xu Hong, Xie Wen-Chong, Wang Yong-Liang. Gaussian sum cubature Kalman tracking filter with angle glint noise. *Systems Engineering and Electronics*, 2019, **41**(2): 6–12
(许红, 谢文冲, 王永良. 角闪烁噪声下的高斯和容积卡尔曼滤波算法. 系统工程与电子技术, 2019, **41**(2): 6–12)
- 13 Lei M, Han C Z. Expectation-maximization (EM) algorithm based on IMM filtering, with adaptive noise covariance. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(1): 28–37
- 14 Zhang Fan, Shi Hua-Ji, Zhou Cong-Hua, Li Lei. Two-order extended Kalman filter algorithm based on Gaussian sum. *Information Technology*, 2017, (12): 84–89
(张帆, 施化吉, 周从华, 李雷. 基于高斯和的二阶扩展卡尔曼滤波算法. 信息技术, 2017, (12): 84–89)
- 15 Dempster A P, Laird N M, Rubin D B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Series B (Methodological)*, 1977, **39**(1): 1–38
- 16 Chamroukhi F. Robust EM algorithm for model-based curve clustering. In: Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN), Dallas, USA: 2013. 1–8
- 17 Xing Chang-Zheng, Zhao Quan-Ying, Wang Xing, Wang Wei. Accelerated EM algorithm research based on robust Gaussian

mixture model. *Application Research of Computers*, 2017, **34**(4): 1042–1046

(邢长征, 赵全颖, 王星, 王伟. 基于鲁棒高斯混合模型的加速EM算法研究. 计算机应用研究, 2017, **34**(4): 1042–1046)

- 18 Salmond D J. Mixture reduction algorithms for target tracking in clutter. In: Proceedings of the SPIE–The International Society for Optical Engineering, Orlando, USA: 1990. 434–445
- 19 Runnalls, A. R. Kullback-Leibler approach to Gaussian mixture reduction. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(3): 989–999
- 20 Hou Wei-Han, Guo Ying. Research on sarse aaptive fltering agorithm in nn-Gaussian nise evironmen. *Communications Technology*, 2019, **52**(1): 17–23
(侯威翰, 郭莹. 非高斯噪声环境下的稀疏自适应滤波算法研究. 通信技术, 2019, **52**(1): 17–23)
- 21 Yang M S, Lai C Y, Lin C Y. A robust EM clustering algorithm for Gaussian mixture models. *Pattern Recognition*, 2012, **45**(11): 3950–3961
- 22 Zhu H Y, Chen S, Han C Z. Fusion of Gaussian mixture models for possible mismatches of sensor model. *Information Fusion*, 2014, **20**: 203–212
- 23 Lu Yu-Gui. *Application of EM Algorithm to Parameter Estimation of Hierarchical Linear Models*. Nanning: Guangxi University Press, 2013.
(卢玉桂. EM算法在多层线性模型参数估计中的应用. 南宁: 广西大学出版社, 2013.)
- 24 Wang Shuo, Song Shen-Min, Shi Xiao-Ping, Yu Han. Multi-sensor covariance intersection fusion attitude estimation with unknown noise characteristics. *Control and Decision*, 2016, **31**(2): 273–278
(王硕, 宋申民, 史小平, 于滢. 噪声特性未知的多传感器协方差交叉融合姿态估计. 控制与决策, 2016, **31**(2): 273–278)



葛泉波 南京信息工程大学教授. 主要研究方向为工程信息融合理论与方法, 无人系统协同优化, 人机混合系统智能评估和智能电网大数据分析. 本文通信作者.

E-mail: QuanboGe@163.com

(**GE Quan-Bo** Professor at Nanjing University of Information Science and Technology. His research interest covers engineering information fusion theory, coordinated optimization for autonomous systems, intelligent evaluation for human-machine hybrid system, and big data in smart grid. Corresponding author of this paper.)



王贺彬 2021 年获得杭州电子科技大学硕士学位. 主要研究方向为多智能体控制和非线性非高斯状态估计.

E-mail: syeaxb@163.com

(**WANG He-Bin** He received his master degree from Hangzhou Dianzi University. His research interest covers multi-agent control and nonlinear non-Gaussian state estimation.)



杨秦敏 浙江大学控制科学与工程学院教授. 主要研究方向为工业大数据, 智慧能源系统和信息驱动的控制与优化. E-mail: qmyang@zju.edu.cn

(**YANG Qin-Min** Professor at the College of Control Science and Engineering, Zhejiang University. His research interest covers industrial big data, smart energy systems, information driven control and optimization.)



张兴国 中国飞行试验研究院高级工程师. 主要研究方向为飞行器试飞测试技术和智能化测试技术.

E-mail: cftezhang@qq.com

(**ZHANG Xing-Guo** Senior engineer at Chinese Flight Test Establishment. His research interest covers aircraft flight test technology and intelligent test technology.)



刘华平 清华大学计算机科学与技术系副教授. 主要研究方向为机器人感知, 学习与控制和多模态信息融合.

E-mail: hpliu@tsinghua.edu.cn

(**LIU Hua-Ping** Associate professor in the Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University. His research interest covers robotic perception, learning and control, and multi-mode information fusion.)