第 46 卷 第 8 期 自 动 化 学 报 Vol. 46, No. 8
2020 年 8 月 ACTA AUTOMATICA SINICA August, 2020

高阶系统方法
—II. 能控性与全驱性

段广仁 [1]

摘 要 本文首先简述了基于状态空间模型的一阶动态系统的能控性进展, 指出了一阶系统方法中卡尔曼能控性体系的一些问题. 然后证明了线性定常系统能控的充要条件是它能化成一个高阶全驱系统, 同时还在一定程度上将这一结果推广到非线性系统的情形. 基于这一发现, 本文定义了一般动态系统的完全能控性, 明确其意义在于存在控制律使得闭环系统为一线性定常的高阶系统, 并且可以任意配置闭环特征多项式的系数矩阵, 同时还指出其多方面相关结论.

关键词 能控性, 完全能控性, 高阶系统, 全驱系统, 能控规范型

引用格式 段广仁. 高阶系统方法 —II. 能控性与全驱性. 自动化学报, 2020, **46**(8): 1571−1581

DOI 10.16383/j.aas.c200369

High-order System Approaches: II. Controllability and Full-actuation

DUAN Guang-Ren[1]

Abstract In this paper, development in controllability of dynamical systems described by first-order state-space models is firstly overviewed briefly, and problems with the controllability theory originally introduced by Kalman are pointed out. It is then proven that a necessary and sufficient condition for a constant linear system to be controllable is that it can be equivalently expressed as a high-order fully-actuated system, and this result is also generalized, in a sense, to the case of nonlinear systems. Based on this discovery, complete-controllability of general dynamical systems is defined. Together with some other important properties, significance of super-controllability is clearly revealed as such that the system can be turned, by a feedback controller, into a high-order constant linear system with the coefficient matrices of the closed-loop eigen-polynomial being arbitrarily assignable.

Key words Controllability, complete-controllability, high-order systems, fully-actuated systems, controllability canonical forms

Citation Duan Guang-Ren. High-order system approaches: II. Controllability and full-actuation. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(8): 1571−1581

1 引言

文献 [1] 指出了控制领域中普遍使用的增广一阶系统方法的弊端, 介绍了高阶全驱系统的概念, 并给出了一类高阶全驱系统的一种参数化设计方法. 高阶全驱系统的一个重要优势是可以通过状态反馈获得一个具有希望特征结构的线性定常闭环系统, 而参数化方法还提供了这种设计中的所有自由度. 本文将进一步基于高阶全驱系统方法研究动态系统的能控性.

收稿日期 2020-06-15 录用日期 2020-07-15
Manuscript received June 15, 2020; accepted July 15, 2020
国家自然科学基金重大项目 (61690210, 61690212), 国家自然科学基金 (61333003), 机器人与系统国家重点实验室自主计划任务 (HIT) (SKLRS201716A) 资助
Supported by the Major Program of National Natural Science Foundation of China (61690210, 61690212), National Natural Science Foundation of China (61333003), and the Self-Planned Task of State Key Laboratory of Robotics and System (HIT) (SKLRS201716A)
本文责任编委 贺威
Recommended by Associate Editor HE Wei
1. 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心 哈尔滨 150001
1. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

1.1 一阶系统框架下的能控性

非线性系统的能控性分析是一个历史悠久且十分棘手的问题, 受到了国内外学者的广泛关注. 下面按系统类型对能控性理论进展做一简单综述.

1) "线性 + 非线性扰动" 形式的系统

这是非线性系统领域中得到较为广泛研究的一类系统. 文献 [2] 考虑了线性部分为定常的情形, 给出其线性部分的能控性可以决定系统的全局能控性的条件. 文献 [3−5] 研究了带有时变线性部分的系统的全局能控性. 文献 [4] 的证明以 Schauder 不动点定理为工具, 文献 [5] 考虑了非线性项中含有控制的情况. 时滞系统的能控性也得到了关注, 包括控制输入含有时变时滞[6] 和分布时滞[7] 的情况, 以及系统状态中存在时滞的系统[8]. 不同于上述情形, 文献 [9−11] 考虑了伪线性 + 非线性扰动形式的系统的

局部和全局能控性, 文献 [12] 又在此基础上进一步考虑了控制存在时滞的情形.

值得指出的是, 针对这一类情形的研究, 一般只能给出能控性的充分条件.

2) 仿射非线性系统

作为一类更一般的系统, 仿射非线性系统受到了许多学者的关注. 文献 [13] 从 2 维仿射系统入手, 基于 Jordan 曲线定理和 Poincare-Bendixson 定理给出了其全局能控的充要条件, 并将结果推广到了一种高维类三角系统上. 文献 [14] 进一步考虑了受扰的情形, 给出了全局能控的充分条件. 对于单输入仿射系统的沿闭合参考轨迹的局部能控性 (简称 "闭能控性") 问题, 文献 [15] 给出了充分条件并将结果推广到了一类多输入仿射系统和更一般的系统. 在 "三角结构" 的假设下, 文献 [16] 给出了仿射非线性系统快速局部能控的充要条件, 这一结果后来也被推广到一类更一般的非三角系统上[17]. 对于时变系统的情形, 文献 [18] 给出了初始状态能控的充分条件. 文献 [19] 进一步给出了状态含有时滞的系统的局部能控和全局能控性充分条件.

3) 其他特殊非线性系统

除上述情形外, 作为一类特殊的非线性系统, 对称非线性系统因其对称结构可简化能控性判别条件[20], 受到人们的关注[21−24]. 特别地, 文献 [22] 在文献 [21] 的基础上, 证明了若对称非线性系统在某点可能控分解, 则在此点所属的轨道上的所有点均可能控分解.

双线性系统被认为是最接近线性系统的非线性系统, 关于其能控性的一个系统性的综述可见文献 [25]. 一些其他类型系统的能控性, 如振动系统[26]、耗散拉格朗日系统[27]、齐次系统[28] 和随机系统[29] 等也都得到了一定程度的讨论. 另外, 非线性系统能控性分析的一些理论成果也被应用到一些实际系统上, 如带有两个陀螺的刚体运动系统[30]、航天器姿态系统[31−32]、带有 DC-DC、Buck 等变换器的电力系统[33]、欠驱动机械臂系统[34] 以及化学反应器系统[35] 等.

4) 一般非线性系统

对于不具备特殊结构的一般非线性系统的能控性, 现有理论成果较少. Davison 等[36] 指出, 一个系统的能控性等价于施加某一带有参考输入的状态反馈控制后的闭环系统的能控性. 文献 [37] 指出, 如果系统可以局部线性化, 则由其线性化部分的能控性和其非线性解映射的局部可逆性, 可推知系统的局部能控性, 同时还进一步考虑了受扰的情形. 综述论文 [38] 讨论了非线性系统弱能控的概念及相应的判别方法. 除此之外, 人们还提出了能控性分析的 "类 Lyapunov 方法"[39] 和基于受控因子的弱能控性判据[40]. 对于离散时间系统的情形, 文献 [41] 提出了 N 步能控与渐近能控的概念, 并研究了这两种能控性与有限时间控制之间的关系. 另外, 文献 [42] 定义了一类非线性系统的能控性子分布, 并给出了计算包含在某些分布内的最大能控性子分布的算法. 文献 [43] 又将此结果推广到了非线性奇异系统上.

1.2 一阶系统方法的局限性

文献 [1] 指出一阶系统方法的一个最大问题是破坏了许多系统原有的全驱特性. 根据动量 (矩) 定理和拉格朗日方程所建立的物理系统的原始模型都是二阶或高阶的, 一阶系统方法把它们化成一阶系统处理, 对控制系统的响应分析、状态观测和滤波等问题带来了很大的方便, 但长达 70 年的研究结果说明这种方法论却没有为控制系统的能控性分析提供多少益处:

1) 很难提出深入的能控性分析结果

人们所熟悉的一阶系统卡尔曼意义下的能控性定义本质上依赖于系统的响应 (解), 只有在线性的情形才能给出有效实用的判据, 因为线性系统的解是简单明了的, 而非线性系统的求解很复杂, 自然导致非线性系统的能控性分析问题很难入手.

对于一般的非线性系统, 获得能控性的充要条件是一件很难的事情. 目前已有的充要条件都是针对一些特殊系统给出的, 如, 具有严格的对称结构[23] 或某种特殊的广义对称性[24]、2 维的仿射结构[13]、三角结构[16] 和 "本征三角结构"[17]、单输入单输出系统[44] 等.

2) 导致现有一些结果的实用性较差

如果说控制理论中存在脱离实际应用、陷入抽象数学研究的内容, 那首先要数控制系统的能控性分析了. 这方面的许多工作从问题的描述到中间的推演, 以至于到最后结果的表述, 都没有跳出李代数、微分流形等一些抽象数学分支的范畴, 距离实际应用较远.

20 世纪 80 年代初期, 有人就将非线性系统能控性等方面的一些研究描述成 "是相对无害的活动. 充满了许多愉快的意外和轻微的失望, 而最终则是白费力气"[45−46]. 控制系统的能控性分析应该是为控制系统设计服务的, 但与线性系统的情形不同, 非线性系统能控性分析方面的工作并没有对控制系统设计带来多少指导意义. 正如文献 [45, 47] 所言, "非线性系统的能控性 (结果) 和镇定之间的关系是不明显的". 虽然 30 多年过去了, 关于非线性系统能控性分析方面的工作仍然没有出现重大突破性的结果.

除上述两个方面之外, 下一节还指出了以一阶状态空间模型为基础的能控性体系也存在一定的问题.

一阶状态空间模型是以系统状态为主导的一种模型. 基于一阶状态空间模型所定义的能控性是状态能控性, 自然要以系统的状态响应为基础. 而这种定义则完全决定了其分析的难度 — 除了线性系统和少数极特殊的系统外, 基本上没有有效、实用的判据, 自然对于非线性系统设计也不能提供多少帮助. 众所周知, 基于系统的解来进行控制系统设计应该是非常久远的初级尝试, 目前有效的控制系统设计方法几乎没有基于系统的解来进行设计的, 而控制系统的能控性至今却还要基于系统的解进行分析.

线性系统理论指出, 系统能控的充要条件是闭环极点可以通过状态反馈任意配置. 既然这样, 为什么非要用系统的解来定义能控性呢? 如果一个线性系统的闭环极点可以通过状态反馈任意配置, 我们便可称它为能控的. 对于非线性系统而言, 其能控性可否类似地定义为系统的动态特性可以通过状态反馈任意配置 (见第 5 节)?

本文打破一阶系统方法框架的束缚, 首先证明了一个线性定常系统能控的充要条件是其可以化为一个高阶全驱系统, 这一结论深刻地揭示了能控性的本质, 也被一定程度上推广到非线性系统情形. 基于这一事实, 我们定义了一般形式动态系统的完全能控性, 把控制系统的能控性和高阶系统的全驱性联系起来, 从而将控制系统的设计问题和控制系统的能控性分析问题统一起来.

2 现有能控性体系中的问题

本节的目的是指出现有能控性体系中的问题, 所以不注重所述问题的一般性和复杂性, 仅以能说明问题为主.

考虑如下的输入输出系统:

$$A_m x^{(m)}+A_{m-1}x^{(m-1)}+\cdots+A_1\dot{x}+A_0x = B_l u^{(l)}+B_{l-1}u^{(l-1)}+\cdots+B_0u \qquad (1)$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$ 是系统的输出 (基础状态), $u\in\mathbf{R}^r$ 是控制输入, A_i, $i=0,1,\cdots,m$ 和 B_j, $j=0,1,\cdots,l$ 为系统的系数矩阵. 如令

$$\begin{cases}A(s)=A_m s^m+A_{m-1}s^{m-1}+\cdots+A_1 s+A_0\\ B(s)=B_l s^l+B_{l-1}s^{l-1}+\cdots+B_1 s+B_0\end{cases} \qquad (2)$$

则该系统有下述微分算子的表述形式

$$A(s)x=B(s)u \qquad (3)$$

卡尔曼于 1959 年发表的论文,《控制系统的一般理论》[48−49], 首次提出了状态空间方法, 在时间域内采用一阶的状态空间模型描述动态系统. 对于线性的情形, 其描述形式如下[50]

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases} \qquad (4)$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$ 是系统的状态, $u\in\mathbf{R}^r$ 是控制输入; A, B 和 C 为适当维数的系数矩阵. 后来人们又将其推广到下述广义系统形式[51]:

$$\begin{cases}E\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases} \qquad (5)$$

其中矩阵 E 可以奇异.

所谓的状态空间方法就是研究下述一阶的状态空间模型

$$\dot{x}=f(x,u) \qquad (6)$$

所描述系统的分析与控制问题, 其一般性蕴含在下述逻辑当中: 在极其宽松的条件下, 任何一个连续的动态系统都可以表示为一阶微分方程 (6) 的形式. 一阶系统方法认为控制系统的一阶状态空间模型 (6) 是万能的系统描述. 在这种逻辑下, 其他描述形式的系统没有研究的必要. 因此, 和其他许多概念一样, 能控性也只是针对一阶状态空间模型提出的. 这就使得系统的其他描述形式在能控性概念方面存在空白.

在线性系统理论中, 把系统的输入输出描述 (1) 转化为系统的状态空间描述 (4) 的问题称为实现问题, 而求得的一个具体的状态空间模型称为系统 (1) 的一个状态空间实现. 显然, 实现问题的解是不唯一的.

关于线性系统 (4) 的能控性问题, 早已形成了一整套完备的理论体系. 但输入输出模型 (1) 的能控性目前还没有一个能为人们广泛接受的定义[52−53]. 作为一个控制系统, 系统 (1) 也应该有能控性问题. 这种情况说明了现有能控性体系的不完备性.

如何定义输入输出系统 (1) 的能控性呢? 按照上面的逻辑, 一个自然的想法便是考虑输入输出系统 (1) 的状态空间实现的能控性. 但是, 输入输出系统 (1) 的状态空间实现是不唯一的. 很多例子显示, 一个输入输出系统 (1) 可能既有能控的状态空间实现, 也同时有不能控的状态空间实现. 从理论上讲, 该输入输出系统连同它的状态空间实现都应该是同一物理系统的不同的数学描述形式而已, 不应该有不同的能控性.

那么可否用系统 (1) 的最小实现的能控性来定义系统 (1) 能控性呢? 这样岂不是解决了能控性不确定的问题吗? 这样做是解决了上述能控性不确定的问题, 但却带来了一个更大的矛盾, 即所有形如

(1) 的系统全都是能控的, 也就没有再定义其能控性的必要了.

这些矛盾现象都反映了现有能控性体系中存在的问题.

3 能控性与全驱性

考虑下述形式的高阶系统:

$$A_m x^{(m)} + A_{m-1}x^{(m-1)} + \cdots + A_1\dot{x} + A_0 x = Bu \tag{7}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态变量, $u \in \mathbf{R}^r$ 是控制输入, $A_i, i = 0, 1, \cdots, m$ 和 B 是适当维数的实系数矩阵. 当 $m = 1$, $A_1 = I_n$ 时, 该系统化为我们熟知的状态空间模型.

定义 1[1]**.** 若高阶系统 (7) 满足 $r = n$ 且 $\det B \neq 0$, 则称系统 (7) 是全驱的. 特别地, 当 $B = I_n$ 时我们称系统 (7) 是一个标准全驱系统.

本节将证明任何一个一阶线性定常系统能控的充要条件是其可以等价地化为一个形如式 (7) 的高阶全驱系统. 这一结论深刻地揭示了能控性的本质.

3.1 单输入系统的情形

考虑完全能控的单输入线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{8}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态向量, $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbf{R}^n$ 为系统的系数矩阵.

令系统的特征多项式为

$$\det(sI - A) = \alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 \tag{9}$$

如下定理给出了系统 (8) 的能控性与高阶全驱系统的关系.

定理 1. 系统 (8) 能控的充要条件是存在变换

$$\begin{cases}\bar{x} = P^{-1}x = \begin{bmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \bar{x}_i = z^{(i-1)},\ i = 1, 2, \cdots, n\end{cases} \tag{10}$$

其中 $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为一可逆矩阵, 使得在此变换下系统 (8) 等价于如下形式的标准高阶全驱系统

$$z^{(n)} + \alpha_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1\dot{z} + \alpha_0 z = u \tag{11}$$

其中 α_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$, 由式 (9) 给出.

证明. 周知, 系统 (8) 能控的充要条件是下述能控性矩阵

$$Q_c = \begin{bmatrix}b & Ab & \cdots & A^{n-1}b\end{bmatrix} \tag{12}$$

可逆. 作线性非奇异变换 $\bar{x} = P^{-1}x$, 其中

$$P = Q_c\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1\\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ \alpha_{n-1} & \iddots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \tag{13}$$

则根据线性系统能控规范型理论[50] 可知, 系统 (8) 可化为如下 Luenberger 第二能控规范型:

$$\dot{\bar{x}} = A_c\bar{x} + b_c u \tag{14}$$

其中

$$A_c = \left[\begin{array}{c:ccc}0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ \hdashline -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1}\end{array}\right],\quad b_c = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{15}$$

将式 (14) ~ (15) 写成下述分量形式:

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2\\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_3\\ \quad\vdots\\ \dot{\bar{x}}_{n-1} = \bar{x}_n\\ \dot{\bar{x}}_n = -\alpha_0\bar{x}_1 - \alpha_1\bar{x}_2 - \cdots - \alpha_{n-1}\bar{x}_n + u\end{cases} \tag{16}$$

记 $z = \bar{x}_1$, 再联合式 (16) 中的前 $n-1$ 个方程可得式 (10) 中的第二组方程. 将式 (10) 中的方程代入到式 (16) 中的最后一个方程, 可得式 (11) 表述的标准高阶全驱系统.

最后注意到上述过程的可逆性, 可得定理结论. □

说明 1. 式 (10) 中的第二组方程也可称作关联方程, 它给出的是高阶全驱系统的基础状态及其各阶导数和原系统状态变量之间的关联关系, 它在一定意义上也可以理解为系统 (11) 的输出方程. 应用中, 它可以将原系统的输出和高阶全驱系统的基础状态 x 及其各阶导数联系起来, 起到一个中间纽带的作用.

3.2 多输入系统的情形

根据线性系统能控性理论, 由状态空间模型表述的线性系统 (4) 能控的充要条件是其代数等价于下述 Luenberger 第二能控规范型[50]:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}_c\hat{x} + \hat{B}_c u \tag{17}$$

其中

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_r \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_i = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i1} \\ \hat{x}_{i2} \\ \vdots \\ \hat{x}_{i\mu_i} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{\mu_i}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \tag{18}$$

这里 μ_i, $i = 1, 2, \cdots, r$, 为一组正整数, 满足 $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = n$; 系数矩阵 $\hat{A}_c$ 和 $\hat{B}_c$ 具有下述结构

$$\hat{A}_c = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \cdots & \hat{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{r1} & \cdots & \hat{A}_{rr} \end{bmatrix}_{(n\times n)} \tag{19}$$

$$\hat{A}_{ii} = \left[\begin{array}{c:ccc} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hdashline -\alpha_{ii}^0 & -\alpha_{ii}^1 & \cdots & -\alpha_{ii}^{\mu_i-1} \end{array}\right]_{(\mu_i\times\mu_i)} \tag{20}$$

$$\hat{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{ij}^0 & \cdots & -\alpha_{ij}^{\mu_j-1} \end{bmatrix}_{(\mu_i\times\mu_j)}, \ i \neq j \tag{21}$$

$$\begin{cases} \hat{B}_c = \begin{bmatrix} B_1^{\mathrm{T}} & B_2^{\mathrm{T}} & \cdots & B_r^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}_{r\times n}^{\mathrm{T}} \\ B_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{i,i+1} & \cdots & b_{i,r} \end{bmatrix}_{\mu_i\times r} \end{cases} \tag{22}$$

为证明任何一个系统能控的充要条件是其可化为一个高阶全驱系统, 我们只需证明上述能控标准型可以化成一个高阶全驱系统即可.

定理 2. 多输入线性定常系统 (17) ∼ (22) 在下述变换下

$$\begin{cases} z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_r \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^r \\ \hat{x}_{ij} = z_i^{(j-1)}, \ i = 1, 2, \cdots, r, \ j = 1, 2, \cdots, \mu_i \end{cases} \tag{23}$$

等价于下述形式的高阶全驱系统:

$$A_\mu z^{(\mu)} + A_{\mu-1} z^{(\mu-1)} + \cdots + A_1 \dot{z} + A_0 z = \tilde{B} u \tag{24}$$

其中

$$\mu = \max\{\mu_i, \ i = 1, 2, \cdots, r\} \tag{25}$$

这里, μ_i, $i = 1, 2, \cdots, r$, 为一组正整数, 满足 $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = n$;

$$A_k = \left[\alpha_{ij}^k\right]_{r\times r}, \ k = 0, 1, \cdots, \mu \tag{26}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1r} \\ 0 & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2r} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & b_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

这里, α_{ij}^k, b_{ij}, $j, k = 1, 2, \cdots, \mu_i$, $i = 1, 2, \cdots, r$, 同式 (20) ∼ (22) 给出, 但满足下述约定:

$$\begin{cases} \alpha_{ij}^k = 0, \ j, k > \mu_i, \ i = 1, 2, \cdots, r \\ \alpha_{ii}^{\mu_i} = 1, \ i = 1, 2, \cdots, r \end{cases} \tag{28}$$

证明. 将式 (17) 中的方程分组写成分量形式, 有

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{k1} = \hat{x}_{k2} \\ \dot{\hat{x}}_{k2} = \hat{x}_{k3} \\ \quad\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{k(\mu_k-1)} = \hat{x}_{k\mu_k} \\ \dot{\hat{x}}_{k\mu_k} = -\sum\limits_{i=1}^{\mu_k} \alpha_{kk}^{i-1} \hat{x}_{ki} - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{r} \sum\limits_{j=1}^{\mu_k} \alpha_{ki}^{j-1} \hat{x}_{ij} + \\ \qquad\qquad u_k + \sum\limits_{l=k+1}^{r} b_{kl} u_l, \quad k = 1, 2, \cdots, r \end{cases} \tag{29}$$

由式 (29) 中的前 $\mu_k - 1$ 个方程可得

$$\begin{cases} \hat{x}_{k2} = \dot{\hat{x}}_{k1} \\ \hat{x}_{k3} = \ddot{\hat{x}}_{k1} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k\mu_k} = \hat{x}_{k1}^{(\mu_k-1)}, \quad k = 1, 2, \cdots, r \end{cases} \tag{30}$$

将上述关系式 (30) 代入到式 (29) 中的最后一式可

得

$$\begin{cases}\hat{x}_{11}^{(\mu_1)}=-\sum\limits_{i=1}^{\mu_1}\alpha_{11}^{i-1}\hat{x}_{11}^{(i-1)}-\gamma_1+u_1+\sum\limits_{l=2}^{r}b_{1l}u_l\\ \hat{x}_{21}^{(\mu_2)}=-\sum\limits_{i=1}^{\mu_2}\alpha_{22}^{i-1}\hat{x}_{21}^{(i-1)}-\gamma_2+u_2+\sum\limits_{l=3}^{r}b_{2l}u_l\\ \qquad\vdots\\ \hat{x}_{r-1,1}^{(\mu_{r-1})}=-\sum\limits_{i=1}^{\mu_{r-1}}\alpha_{r-1,r-1}^{i-1}\hat{x}_{r-1,1}^{(i-1)}-\gamma_{r-1}+\\ \qquad u_{r-1}+\sum\limits_{l=r}^{r}b_{r-1,l}u_l\\ \hat{x}_{r1}^{(\mu_r)}=-\sum\limits_{i=1}^{\mu_r}\alpha_{rr}^{i-1}\hat{x}_{r1}^{(i-1)}-\gamma_r+u_r\end{cases}\tag{31}$$

其中

$$\gamma_i=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}\sum_{j=1}^{\mu_k}\alpha_{ik}^{j-1}\hat{x}_{k1}^{(j-1)},i=1,2,\cdots,r$$

再注意到约定式 (28), 可将式 (31) 进一步写为

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{\mu_1+1}\alpha_{11}^{i-1}\hat{x}_{11}^{(i-1)}+\gamma_1=u_1+\sum\limits_{l=2}^{r}b_{1l}u_l\\ \sum\limits_{i=1}^{\mu_2+1}\alpha_{22}^{i-1}\hat{x}_{21}^{(i-1)}+\gamma_2=u_2+\sum\limits_{l=3}^{r}b_{2l}u_l\\ \qquad\vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{\mu_{r-1}+1}\alpha_{r-1,r-1}^{i-1}\hat{x}_{r-1,1}^{(i-1)}+\gamma_{r-1}=u_{r-1}+\\ \qquad\sum\limits_{l=r}^{r}b_{r-1,l}u_l\\ \sum\limits_{i=1}^{\mu_r+1}\alpha_{rr}^{i-1}\hat{x}_{r1}^{(i-1)}+\gamma_r=u_r\end{cases}\tag{32}$$

最后定义

$$z=\begin{bmatrix}\hat{x}_{11} & \hat{x}_{21} & \cdots & \hat{x}_{r1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\tag{33}$$

再使用式 (25) ∼ (27) 中的记号, 系统 (32) 可表为式 (24) 所表达的高阶全驱系统, 同时式 (30) 给出式 (23) 中的第二式.

注意到上述过程的可逆性, 可得定理结论. □

4 非线性系统的情形

本节旨在将上一节中的内容在一定意义下推广到非线性系统的情形.

4.1 单输入系统的情形

李文林和高为炳[54] 将线性系统的能控标准型推广到非线性系统. 对于单输入非线性系统

$$\dot{x}=g(x,t,u),\quad x\in\mathbf{R}^n,\ \ u\in\mathbf{R}\tag{34}$$

他们定义了下述形式的能控规范型

$$\dot{\bar{x}}=A_c\bar{x}+f_c(\bar{x},t)+b_cu\tag{35}$$

其中

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\tag{36}$$

$$A_c=\left[\begin{array}{c:ccc}0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0\end{array}\right],\ f_c=\begin{bmatrix}0\\0\\\cdots\\f(\bar{x},t)\end{bmatrix},\ b_c=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\tag{37}$$

并给出系统 (34) 经过状态变换 $x=T(z)$ 化成上述可控标准型的充要条件. 此处有一点与文献 [54] 不同的是, 我们在上面的非线性函数 f 和 g 中增加了时间 t 自变量.

下述定理说明上述非线性系统的能控规范型 (35) ∼ (37) 等价于文献 [1] 中提出的标准高阶全驱系统.

定理 3. 非线性系统 (35) ∼ (37) 在变换

$$\bar{x}_i=z^{(i-1)},\ \ i=1,2,\cdots,n\tag{38}$$

下等价于下述形式的高阶标准全驱系统:

$$z^{(n)}=f(z,\dot{z},\cdots,z^{(n-1)},t)+u\tag{39}$$

证明. 将非线性系统 (35) ∼ (37) 写成分量形式, 有

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}_1=\bar{x}_2\\ \quad\vdots\\ \dot{\bar{x}}_{n-1}=\bar{x}_n\\ \dot{\bar{x}}_n=f(\bar{x},t)+u\end{cases}\tag{40}$$

记 $z=\bar{x}_1$, 并联合 (40) 中的前 $n-1$ 个方程可得式 (38) 中的方程. 再将这些方程代入到式 (40) 中的最后一个方程, 可得式 (39) 描述的高阶标准全驱系统.

最后注意到上述过程的可逆性, 可得定理结论. □

4.2 多输入系统的情形

对于多输入非线性系统

$$\dot{x}=g(x,t,u),\quad x\in\mathbf{R}^n,\ \ u\in\mathbf{R}^r\tag{41}$$

文献 [54] 定义了下述形式的能控规范型

$$\dot{\hat{x}}=\hat{A}_c\hat{x}+\hat{f}_c(\hat{x},t)+\hat{B}_cu\tag{42}$$

其中

$$\hat{x}=\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\\\vdots\\\hat{x}_r\end{bmatrix},\quad \hat{x}_i=\begin{bmatrix}\hat{x}_{i1}\\\hat{x}_{i2}\\\vdots\\\hat{x}_{i\mu_i}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{\mu_i},\ \ u=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_r\end{bmatrix} \tag{43}$$

$$\hat{f}_c=\begin{bmatrix}\hat{f}_1(\hat{x},t)\\\hat{f}_2(\hat{x},t)\\\vdots\\\hat{f}_r(\hat{x},t)\end{bmatrix},\ \hat{f}_i(\hat{x},t)=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\f_i(\hat{x},t)\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{\mu_i} \tag{44}$$

系数矩阵为

$$\hat{A}_c=\mathrm{blockdiag}(\hat{A}_{11}\quad\hat{A}_{22}\quad\cdots\quad\hat{A}_{rr})_{(n\times n)} \tag{45}$$

$$\hat{A}_{ii}=\left[\begin{array}{c:ccc}0&1&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\\0&&\ddots&1\\\hdashline 0&0&\cdots&0\end{array}\right]_{(\mu_i\times\mu_i)},\ i=1,2,\cdots,r \tag{46}$$

$$\begin{cases}\hat{B}_c=\begin{bmatrix}B_1^{\mathrm{T}}&B_2^{\mathrm{T}}&\cdots&B_r^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}_{r\times n}^{\mathrm{T}}\\ B_i=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&1&b_{i,i+1}&\cdots&b_{ir}\end{bmatrix}_{\mu_i\times r}\end{cases} \tag{47}$$

与文献 [54] 不同的是, 我们在上面的非线性函数 f_i 和 g 中增加了时间 t 自变量, 另外允许 B_i 中 1 元素右侧的元素可以非零.

针对上述能控标准型, 我们有下述结论.

定理 4. 多输入非线性系统 (42)～(47) 在下述变换下

$$\begin{cases}z=\begin{bmatrix}z_1&z_2&\cdots&z_r\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \hat{x}_{ij}=z_i^{(j-1)},\ j=1,2,\cdots,\mu_i,\ i=1,2,\cdots,r\end{cases} \tag{48}$$

等价于如下形式的高阶全驱系统:

$$Ez^{(m)}=\tilde{f}(z,\dot{z},\cdots,z^{(m-1)},t)+\tilde{B}u \tag{49}$$

其中

$$\tilde{f}(z,\dot{z},\cdots,z^{(m-1)},t)=\begin{bmatrix}f_1(\cdot,t)\\f_2(\cdot,t)\\\cdots\\f_r(\cdot,t)\end{bmatrix}+\sum_{i=m_0}^{m-1}E_iz^{(i)} \tag{50}$$

矩阵 E 和 E_i, $i=m_0,m_0+1,\cdots,m-1$ 为一组对角线元素为 0 或 1 的非零对角矩阵,

$$\begin{cases}m=\max\{\mu_i,\ i=1,2,\cdots,r\}\\ m_0=\min\{\mu_i,\ i=1,2,\cdots,r\}\end{cases} \tag{51}$$

而 $\tilde{B}\in\mathbf{R}^{r\times r}$ 分别由式 (27) 定义.

证明. 将式 (42) 中的方程分组写成分量形式, 有

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_{k1}=\hat{x}_{k2}\\ \dot{\hat{x}}_{k2}=\hat{x}_{k3}\\ \quad\vdots\\ \dot{\hat{x}}_{k,\mu_k-1}=\hat{x}_{k\mu_k}\\ \dot{\hat{x}}_{k\mu_k}=f_k(\hat{x},t)+u_k+\sum\limits_{l=k+1}^{r}b_{kl}u_l,\\ \qquad k=1,2,\cdots,r\end{cases} \tag{52}$$

由上式中的前 μ_k-1 个方程可得

$$\begin{cases}\hat{x}_{k2}=\dot{\hat{x}}_{k1}\\ \hat{x}_{k3}=\ddot{\hat{x}}_{k1}\\ \quad\vdots\\ \hat{x}_{k\mu_k}=\hat{x}_{k1}^{(\mu_k-1)},\ k=1,2,\cdots,r\end{cases} \tag{53}$$

将该组方程代入到式 (52) 中的最后一式可得

$$\begin{cases}\hat{x}_{11}^{(\mu_1)}=f_1(\hat{x},t)+u_1+\sum\limits_{l=2}^{r}b_{1l}u_l\\ \hat{x}_{21}^{(\mu_2)}=f_2(\hat{x},t)+u_2+\sum\limits_{l=3}^{r}b_{2l}u_l\\ \quad\vdots\\ \hat{x}_{r-1,1}^{(\mu_{r-1})}=f_{r-1}(\hat{x},t)+u_{r-1}+\sum\limits_{l=r}^{r}b_{r-1,l}u_l\\ \hat{x}_{r1}^{(\mu_r)}=f_r(\hat{x},t)+u_r\end{cases} \tag{54}$$

记

$$\begin{cases}z=\begin{bmatrix}z_1&z_2&\cdots&z_r\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ z_k=\hat{x}_{k1},\ k=1,2,\cdots,r\end{cases} \tag{55}$$

再注意到 $\tilde{B} \in \mathbf{R}^{r\times r}$ 的表达式和式 (51), 可将式 (54) 写成如下矩阵形式

$$Ez^{(m)} - \sum_{i=m_0}^{m-1} E_i z^{(i)} = f(z, \dot{z}, \cdots, z^{(m-1)}, t) + \tilde{B}u \tag{56}$$

其中矩阵 E 和 E_i, $i = m_0, m_0+1, \cdots, m-1$ 为一组对角线元素为 0 或 1 的非零对角矩阵,

$$f(z, \dot{z}, \cdots, z^{(m-1)}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\cdot, t) \\ f_2(\cdot, t) \\ \vdots \\ f_r(\cdot, t) \end{bmatrix}$$

将式 (56) 改写成

$$Ez^{(m)} = f(z, \dot{z}, \cdots, z^{(m-1)}, t) + \sum_{i=m_0}^{m-1} E_i z^{(i)} + \tilde{B}u$$

再利用式 (50) 便得式 (49) 所表达的高阶全驱系统, 同时式 (53) 和 (55) 联合给出式 (48) 中第二式.

最后注意到上述过程的可逆性, 可得定理结论. □

上述定理将系统 (42) ∼ (47) 的等价高阶全驱系统表成多变量广义系统 (49) 的形式. 但由定理的证明可见, 原系统等价于系统 (54). 如果令

$$\tilde{u} = \tilde{B}u$$

则系统 (54) 又可以等价地化成下述形式的一组高阶全驱系统

$$x_i^{(u_i)} = f_i(x, t) + \tilde{u}_i,\ i = 1, 2, \cdots, r$$

也即多输入非线性系统 (42) ∼ (47) 可以等价地化为一组高阶全驱系统. 对于这组高阶全驱系统, 显然存在控制律使得闭环系统由 r 个相互独立的线性定常系统构成. 这种将一个系统化成若干个高阶全驱系统来实现其控制的方法, 就是该系列论文所讨论的高阶全驱系统方法.

5 完全能控性

5.1 定义

前面两节的主要结果启发我们针对一般的控制系统引入能控性的定义.

考虑下述形式的高阶非线性系统

$$\begin{aligned} Ex^{(m)} = &f(x, \dot{x}, \cdots, x^{(m-1)}, t) + \\ &g(x, \dot{x}, \cdots, x^{(m-1)},\ u,\ t) \end{aligned} \tag{57}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量, $u \in \mathbf{R}^n$ 为输入向量, $f(\cdot)$, $g(\cdot) \in \mathbf{R}^n$ 为充分光滑的向量函数, $E \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为一常数矩阵, 通常为单位矩阵, 亦可以奇异. 当 $m = 1$, $E = I_n$ 时, 系统 (59) 化为下述我们熟知的形式:

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, u, t) \tag{58}$$

定义 2. 令 $\Omega_i \subset \mathbf{R}^n$, $i = 0, 1, \cdots, m-1$, 为一组开集, 且记

$$\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{m-1}$$

对于 $t \geq 0$, 如果 $w = g(x, \dot{x}, \cdots, x^{(m-1)}, u, t)$

1) 对于任何 $x^{(i)} \in \Omega_i$, $i = 0, 1, \cdots, m-1$ 都是 u 到 w 的微分同胚, 则称系统 (57) 在 Ω 上是全驱的;

2) 只在 Ω 上的某个超曲面上不构成 u 到 w 的微分同胚, 则称系统 (57) 是亚全驱的;

3) 只在 Ω 上的某个孤立点集上不构成 u 到 w 的微分同胚, 则称系统 (57) 是几乎全驱的; 特别, 当该点集只包含有限个点时, 则称系统 (57) 是基本全驱的;

4) 对于任何 $x^{(i)} \in \mathbf{R}^n$, $i = 0, 1, \cdots, m-1$ 都是 u 到 w 的微分同胚, 则称系统 (57) 在 Ω 上是大范围全驱的, 简称全驱的; 特别, 当 $g(x, \dot{x}, \cdots, x^{(m-1)}, u, t) \equiv u$ 时, 则称系统 (57) 为一个标准全驱系统.

特别地, 对于下述高阶仿射系统

$$\begin{aligned} Ex^{(m)} = &f(x, \dot{x}, \cdots, x^{(m-1)}, t) + \\ &B(x, \dot{x}, \cdots, x^{(m-1)}, t)u \end{aligned} \tag{59}$$

其中 $B(x, \dot{x}, \cdots, x^{(m-1)}, t) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为一连续矩阵函数, 其他各量同前述. 此时上述定义化为文献 [1] 中的定义 1.

现在考虑如下一般的动态系统

$$F(z, \dot{z}, \cdots, z^{(m)};\ u, \dot{u}, \cdots, u^{(l)};\ t) = 0 \tag{60}$$

其中 $z \in \mathbf{R}^n$ 和 $u \in \mathbf{R}^r$ 分别为系统的状态和控制输入, F 为一个满足适当条件的向量函数, m 和 l 为两个正整数, 一般情况下有 $l \leq m$.

定义 3. 动态系统 (60) 称为完全能控的, 如果可以通过适当的变换将其等价地化成一个形如式 (57) 的高阶全驱系统.

由定理 1 和 2 可知下述结论成立.

命题 1. 一阶状态空间模型描述的线性定常系统 (4) 的完全能控性与其通常意义下的能控性等价.

尽管在线性定常系统的情况下, 完全能控性与其通常意义下的能控性是等价的, 但由定理 3 和 4

以及文献 [54] 中的定理 2 和 3 可以推知, 在非线性系统的情况下, 能控性的定义有多种, 某些意义下能控的系统不一定都是完全能控, 即完全能控系统仅是某些意义下能控系统的一个真子集. 因此, 在非线性的情况下, 完全能控性和卡尔曼意义下的一些能控性之间还是有缝隙的. 事实上, 文献 [55] 中所给出的非线性系统的能控规范型只代表一类一阶非线性完全能控系统.

根据上述定义 3, 机器人领域中的下述系统

$$M(x,\dot{x},t)\ddot{x}+D(x,\dot{x},t)\dot{x}+K(x,\dot{x},t)x=u \quad (61)$$

其中 $M(\cdot)$、$D(\cdot)$ 和 $K(\cdot)\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 分别为系统的广义质量矩阵、广义阻尼矩阵和广义刚度矩阵, 是完全能控的. 航天器控制中所涉及的许多系统也是完全能控的[55−56]. 文献 [1] 中所涉及的积分型系统、串联系统、严格反馈型系统和可反馈线性化的系统都是完全能控的. 更重要的是, 现在不只是对于一阶的状态空间模型描述的系统才有能控性定义, 而是对任何连续系统都有能控性的定义了.

5.2 基本意义

控制系统完全能控的意义是非常明确的, 即存在控制律使得闭环系统为一个线性定常系统, 并且可以任意配置闭环系统的特征多项式系数矩阵. 对此可以严格表达如下.

命题 2. 对于任意给定的定常矩阵 $A_i\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $i=0,1,\cdots,m-1$, 都可以选取高阶全驱系统 (57) 的下述控制律

$$\begin{cases}w=-\sum\limits_{i=0}^{m-1}A_ix^{(i)}+f(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},t)-\nu\\ u=g^{-1}(w)\end{cases} \quad (62)$$

获得如下的线性定常闭环系统

$$Ex^{(m)}+A_{m-1}x^{(m-1)}+\cdots+A_1\dot{x}+A_0x=\nu \quad (63)$$

上述命题为文献 [1] 中高阶仿射系统情形的自然推广.

鉴于矩阵 A_i, $i=0,1,\cdots,m-1$ 的任意性, 总可以通过合理地选择这些矩阵获得希望的闭环系统特性. 文献 [1] 从闭环系统的特征结构配置角度出发对此给出了具体的参数化方法, 并提供了系统设计中的所有自由度.

说明 2. 由定义 2 可知, 全驱系统是一类以控制变量为核心的系统, 本质上可以几乎显示解出控制变量 u. 进一步由定义 3 可知, 完全能控的系统就是可以求解出控制变量的系统. 控制系统的状态空间模型以系统的状态为核心, 对于求解系统的状态响应、状态观测与估计等问题自然提供了方便, 但对于求解系统的控制问题并没有提供多少益处. 由命题 2 可见, 控制系统的高阶全驱模型则为求解控制问题提供了 “天然” 条件.

说明 3. 上述控制律 (62) 要求基础状态 x 及其相关的各阶导数的信息. 这些信息是系统 (57) 的最基本的信息, 很多情况下都是可测的. 如果系统 (57) 是由某个一阶状态空间模型转化所得, 由于这种转化的可逆性, 容易证得, 当原系统的状态可测时, 必有系统 (57) 中的 x 及其相关的各阶导数可测, 而且这些信息还可以从模型转化过程中的变换关系获得. 当然, 这些信息必要时也可以通过设计系统 (57) 的状态观测器获得.

上述事实的意义是重大的. 它允许我们将很多非线控制问题直接转化成线性系统领域中的相应控制问题. 下面仅以几例概括一下这种思想.

现在考虑含有两个附加项的非线性系统

$$\begin{aligned}Ex^{(m)}=&f(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},t)+\\ &g(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},\ u,\ t)+f^*+d\end{aligned} \quad (64)$$

在控制律 (62) 的作用下, 可得如下形式的闭环系统

$$\begin{aligned}&Ex^{(m)}+A_{m-1}x^{(m-1)}+\cdots+A_1\dot{x}+A_0x=\\ &\quad\nu+f^*+d\end{aligned} \quad (65)$$

1) 如果 d 是未知干扰, 我们可以应用一些频域方法处理系统 (65) 的干扰解耦和抑制问题, 也可以用一些现代的方法, 比如 H 无穷方法, 处理相应的干扰抑制问题;

2) 如果 f^* 是非线性摄动或者线性摄动, 原系统的某种鲁棒控制问题便转化成了线性系统 (65) 的相应鲁棒控制问题, 可以应用已知的线性系统鲁棒控制方法进行求解;

3) 如果 f^* 是某种参考输入信号, 以用来解决原系统的某类信号跟踪问题, 此时问题也转化成线性系统 (65) 的相应信号跟踪问题.

6 结论

由于牛顿定律、拉格朗日方程、动量 (矩) 定理等一批物理定律的存在, 现实世界中的许多物理系统的原始模型都是二阶或高阶的. 然而在上百年的系统与控制的发展过程中, 人们一直把这些高阶系统化成一阶系统来处理, 在一定程度上脱离了物理背景, 同时也给一些问题的研究增加了难度. 控制系统的能控性分析就是这方面的一个典型问题, 所有的研究都局限于一阶的状态空间模型上, 问题很复杂, 很难提出一般性的充要条件, 结果的适用性差.

本文突破了一阶系统方法的束缚, 建立了一阶系统能控性和高阶系统全驱性的联系. 首先证明了线性定常系统能控的充要条件是其可以等价地化为一个高阶全驱系统, 然后将这一结论在一定程度上推广到非线性系统的情形. 正是这一结论启发我们定义了一般非线性系统的完全能控性, 将控制系统的能控性分析问题和控制系统设计问题高度统一起来. 完全能控系统总可以通过状态反馈获得一个线性定常的闭环系统, 并且可以任意配置闭环系统的特征多项式系数矩阵, 从而允许使用线性系统的理论方法进行设计.

本文主要引出了完全能控性的概念, 指出了与其相关的一些重要基本事实. 这种方法论上的改变, 可能为控制系统的能控性研究打开新的空间. 关于亚全驱系统、几乎全驱系统, 甚至更一般的高阶系统的能控性, 都值得沿此方向深入研究.

有关高阶全驱系统的能观性、二阶和高阶严格反馈系统、鲁棒镇定与跟踪、干扰解耦与抑制、自适应控制等问题, 将另文讨论.

致谢

作者感谢其学生赵天一、胡艳梅、赵琴、王秀博等人协助查找文献、组织材料和检查错误.

References

1 Duan Guang-Ren. High-order system approaches: I. Full-actuated systems and parametric designs. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(7): 1333−1345
(段广仁. 高阶系统方法—I. 全驱系统与参数化设计. 自动化学报, 2020, **46**(7): 1333−1345)

2 Chen Yun-Feng. A sufficient condition for controllability of a class of nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 1985, **2**(2): 114−118
(陈云烽. 一类非线性系统的能控性条件. 控制理论与应用, 1985, **2**(2): 114−118)

3 Chen Peng-Nian, He Jian-Xun. Global controllability of a class of nonlinear systems with restrained control. *Control Theory & Applications*, 1986, **3**(2): 94−99
(陈彭年, 贺建勋. 一类控制有约束的非线性系统的全局可控性. 控制理论与应用, 1986, **3**(2): 94−99)

4 Vidyasagar M. A controllability condition for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, **17**(4): 569−570

5 Mirza K, Womack B. Controllability of a class nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, **16**(4): 531−535

6 Balachandran K, Somasundaram D. Controllability of nonlinear systems consisting of a bilinear mode with time-varying delays in control. *Automatica*, 1984, **20**(2): 257−258

7 Somasundaram D, Balachandran K. Controllability of nonlinear systems consisting of a bilinear mode with distributed delays in control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, **29**(6): 573−575

8 Balachandran K, Dauer J P. Controllability of perturbed nonlinear delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, **32**(2): 172−174

9 Klamka J. On the local controllability of perturbed nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, **20**(2): 289−291

10 Klamka J. On the global controllability of perturbed nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, **20**(1): 170−172

11 Klamka J. Relative controllability of nonlinear systems with delays in control. *Automatica*, 1976, **12**(6): 633−634

12 Klamka J. Controllability of nonlinear systems with delay in control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, **20**(5): 702−704

13 Sun Y M. Necessary and sufficient condition for global controllability of planar affine nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(8): 1454−1460

14 Sun Y M. Further results on global controllability of planar nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(8): 1872−1875

15 Nam K, Araostathis A. A sufficient condition for local controllability of nonlinear systems along closed orbits. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(3): 378−380

16 Celikovsky S, Nijmeijer H. On the relation between local controllability and stabilizability for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(1): 90−94

17 Celikovsky S. Local stabilization and controllability of a class of non-triangular nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(10): 1909−1913

18 Mirza K, Womack B. On the controllability of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, **16**(5): 497−483

19 Mirza K, Womack B. On the controllability of nonlinear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, **17**(6): 812−814

20 Zhang Si-Ying, Wang Jing-Cai, Liu Xiao-Ping. Differential geometric methods and nonlinear control systems. *Information and Control*, 1992, **21**(5): 288−294
(张嗣瀛, 王景才, 刘晓平. 微分几何方法与非线性控制系统 (5). 信息与控制, 1992, **21**(5): 288−294)

21 Liu Xiao-Ping, Zhang Si-Ying. Controllability of nonlinear control systems with symmetries. *Control Theory & Applications*, 1991, **8**(4): 452−455
(刘晓平, 张嗣瀛. 对称非线性控制系统的能控性. 控制理论与应用, 1991, **8**(4): 452−455)

22 Liu Xiao-Ping. Controllability decomposition for nonlinear control systems with symmetries. *Control and Decision*, 1992, **7**(1): 63−66
(刘晓平. 对称非线性控制系统的能控分解. 控制与决策, 1992, **7**(1): 63−66)

23 Zhao Jun, Zhang Si-Ying. On symmetries, reachability and controllability of nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 1992, **9**(2): 148−154
(赵军, 张嗣瀛. 关于非线性的对称性、可达性与可控性. 控制理论与应用, 1992, **9**(2): 148−154)

24 Jing Yuan-Wei, Hu San-Qing, Liu Xiao-Ping, Zhang Si-Ying. Isomorphic decompositon and controllability of systems possessing solvable general symmetries. *Control Theory & Applications*, 1996, **13**(2): 259−263
(井元伟, 胡三清, 刘晓平, 张嗣瀛. 可解的具有广义对称性的非线性系统的同构分解与可控性. 控制理论与应用, 1996, **13**(2): 259−263)

25 Tie Lin, Cai Kai-Yuan, Lin Yan. A survey on the controllability of bilinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(9): 1040−1049
(铁林, 蔡开元, 林岩. 双线性系统可控性综述. 自动化学报, 2011, **37**(9): 1040−1049)

26 Bellman R, Bentsman J, Meerkov S. Vibrational control of nonlinear systems: Vibrational controllability and transient behavior. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(8): 717−724

27 Cortes J, Martinez S, Bullo F. On nonlinear controllability and series expansions for Lagrangian systems with dissipative forces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(8): 1396−1401

28 Melody J, Basar T, Bullo F. On nonlinear controllability of homogeneous systems linear in control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(1): 139−143

29 Sunahara Y, Kabeuchi T, Asada Y, Aihara S, Kishino K. On stochastic controllability for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, **19**(1): 49−54

30 He Chang-Zheng, Yang Liu. The controllability of nonlinear control system and its application to dynamics of rigid body. *Control Theory & Applications*, 2000, **17**(2): 204−208
(贺昌政, 杨柳. 非线性控制系统的能控性及在刚体动力学中的应用. 控制理论与应用, 2000, **17**(2): 204−208)

31 Wang Xiao-Ming, Cui Ping-Yuan, Cui Hu-Tao. Controllability of affine nonlinear systems. *Control and Decision*, 2008, **23**(10): 1129−1134
(王晓明, 崔平远, 崔祜涛. 仿射非线性系统的能控性. 控制与决策, 2008, **23**(10): 1129−1134)

32 Bhat S R. Controllability of nonlinear time-varying systems: Applications to spacecraft attitude control using magnetic actuation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(11): 1725−1735

33 Xu Zhi-Yu, Xu Wei-Sheng, Yu You-Ling, Wu Qi-Di. Controllability of DC-DC converters with constant power-load. *Control Theory & Applications*, 2010, **27**(9): 1273−1276
(徐志宇, 许维胜, 余有灵, 吴启迪. DC-DC 变换器在恒功率负载下的能控性. 控制理论与应用, 2010, **27**(9): 1273−1276)

34 Nishimura Y, Tsubakino D. Local controllability of single-input nonlinear systems based on deterministic wiener processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, **65**(1): 354−360

35 Muller M A, Liberzon D, Allgower F. Norm-controllability of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(7): 1825−1840

36 Davison E, Silverman L, Varaiya P. Controllability of a class of nonlinear time-variable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, **12**(6): 791−792

37 Zhou Hong-Xing, Zhao Yi. A study of controllability theory of nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 1988, **5**(2): 1−14
(周鸿兴, 赵怡. 非线性系统的能控性理论. 控制理论与应用, 1988, **5**(2): 1−14)

38 Cheng Dai-Zhan, Qin Hua-Shu. Geometric methods for nonlinear systems. II. Current trends and prospects. *Control Theory & Applications*, 1987, **4** (2): 1−9
(程代展, 秦化淑. 非线性系统的几何方法 (下)—目前动态与展望. 控制理论与应用, 1987, **4**(2): 1−9)

39 Gershwin S, Jacobson D. A controllability theory for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, **16**(1): 37−46

40 Liu Cheng, Feng Yuan-Kun, Li Chun-Wen, Du Ji-Hong. A method to nonlinear controllability based on its controllable factors. *Control and Decision*, 1997, **12**(S1): 504−507
(刘成, 冯元琨, 李春文, 杜继宏. 基于非线性系统受控因子的能控性分析方法. 控制与决策, 1997, **12**(S1): 504−507)

41 Hanba S. Controllability to the origin implies state-feedback stabilizability for discrete-time nonlinear systems. *Automatica*, 2017, **76**: 49−52

42 Wang Wen-Tao, Li Yuan. Controllability distributions of a class of nonlinear differential-algebraic systems. *Control Theory & Applications*, 2009, **26**(10): 1126−1129
(王文涛, 李媛. 一类非线性微分代数系统的能控性子分布. 控制理论与应用, 2009, **26**(10): 1126−1129)

43 Wang Wen-Tao, Liu Xiao-Ping, Zhao Jun. Controllability distributions of nonlinear singular systems. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(5): 716−722
(王文涛, 刘晓平, 赵军. 非线性奇异系统的能控性子分布. 自动化学报, 2004, **30**(5): 716−722)

44 Zheng Y F, Willems J C, Zhang C S. A polynomial approach to nonlinear system controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(11): 1782−1788

45 Gao Wei-Bing, Cheng Mian, Xia Xiao-Hua. The development of nonlinear control systems. *Acta Automatica Sinica*, 1991, **17**(5): 513−523
(高为炳, 程勉, 夏小华. 非线性控制系统的发展. 自动化学报, 1991, **17**(5): 513−523)

46 Casti J L. Recent developments and future perspectives in nonlinear system theory. *SIAM Review*, 1982, **24**(3): 301−331

47 Brocket R W. Asymptotic stability and feedback stabilization. *Differential Geometric Control Theory*. Boston: Birkhauser, 1983. 181−191

48 Kalman R. On the general theory of control systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, 1959, **4**(3): 110

49 Kalman R E. On the general theory of control systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 1960, **1**(1): 491−502

50 Duan Guang-Ren. *Linear System Theory* (two volumes) (Third edition). Science Press, 2016.
(段广仁. 线性系统理论 (上下册). 第 3 版. 北京: 科学出版社, 2016.)

51 Duan G R. *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. New York, USA: Springer, 2010.

52 Duan G R. *Generalized Sylvester Equations: Unified Parametric Solutions*. Raton: CRC Press, 2015.

53 Duan G R, Gao Y J. State-space realization and generalized Popov Belevitch Hautus criterion for high-order linear systems – The singular case. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2020, **18**(8): 2038−2047

54 Li Wen-Lin, Gao Wei-Bing. Controllability canonical form for nonlinear control systems. *Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica*, 1989, **10**(5): 249−258
(李文林, 高为炳. 非线性控制系统的可控标准型问题. 航空学报, 1989, **10**(5): 249−258)

55 Duan Guang-Ren. Quasi-linear system approaches for flight vehicle control – Part 2: Methods and prospects. *Journal of Astronautics*, 2020, **41**(7): 839−849)
(段广仁. 飞行器控制的伪线性系统方法—第二部分: 方法与展望. 宇航学报, 2020, **41**(7): 839−849)

56 Duan Guang-Ren. Quasi-linear system approaches for flight vehicle control – Part 1: An overview and problems. *Journal of Astronautics*, 2020, **41**(6): 633−646
(段广仁. 飞行器控制的伪线性系统方法—第一部分: 综述与问题. 宇航学报, 2020, **41**(6): 633−646)

段广仁 中国科学院院士, 国家杰出青年基金获得者, 长江学者特聘教授, CAA Fellow, IEEE Fellow, IET Fellow. 1989 年获哈尔滨工业大学博士学位, 1991 年起任哈尔滨工业大学教授, 现为哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心主任. 主要研究方向为控制系统的参数化设计, 鲁棒控制, 广义系统, 航天器制导与控制. E-mail: g.r.duan@hit.edu.cn

(**DUAN Guang-Ren** Academician of the Chinese Academy of Sciences, winner of the National Science Fund for Distinguished Young Scholars, Distinguished Professor of Chang Jiang Scholars Program, CAA Fellow, IEEE Fellow and IET Fellow. He received his Ph. D. degree from Harbin Institute of Technology in 1989, and has been professor at Harbin Institute of Technology since 1991. He is currently the director of the Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology. His research interest covers parametric design of control systems, robust control, descriptor systems, spacecraft guidance and control.)