

基于输出反馈线性化的多移动机器人目标包围控制

寇立伟^{1,2} 项基^{1,2}

摘要 针对受非完整约束的多移动机器人系统的移动目标包围控制问题, 提出一种基于输出反馈线性化的局部协同控制方法. 利用机器人与邻居节点和目标的相对距离信息、角度信息以及机器人自身的方位角信息设计协同控制器. 该方法无需事先指定包围编队形状, 可实现对移动目标的速度估计, 且保证机器人之间的障碍规避. 严格的理论分析证明了移动目标指数收敛到多移动机器人构成的凸包内部. 最后, 仿真结果验证了所提控制方法的有效性.

关键词 协同控制, 非完整约束, 分布式控制, 反馈线性化

引用格式 寇立伟, 项基. 基于输出反馈线性化的多移动机器人目标包围控制. 自动化学报, 2022, 48(5): 1285–1291

DOI 10.16383/j.aas.c200335

Target Fencing Control of Multiple Mobile Robots Using Output Feedback Linearization

KOU Li-Wei^{1,2} XIANG Ji^{1,2}

Abstract In this paper, we focus on a moving-target-fencing problem for a group of mobile robots with nonholonomic constraints. A local cooperative control law is proposed based on output feedback linearization. The proposed control law uses the relative angle and distance measurements from the target and its neighbors, as well as the bearing angle itself. This control law does not need to predefine a fencing formation, and it can assure the estimation for unknown target's velocity and collision avoidance. It is rigorously proved that the proposed control law ensures that the moving target is exponentially fenced into the convex hull of multiple robots. Finally, numerical simulations verify the effectiveness of the proposed control law.

Key words Cooperative control, nonholonomic constraints, distributed control, feedback linearization

Citation Kou Li-Wei, Xiang Ji. Target fencing control of multiple mobile robots using output feedback linearization. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(5): 1285–1291

近年来, 多移动机器人的协同控制得到了越来越广泛的研究与应用^[1-5]. 和单一机器人相比, 多移动机器人能够执行更加复杂的任务, 同时对外部环境的变化有更强的鲁棒性. 典型的多移动机器人协同控制主要包括包络控制^[6]、主从编队控制^[7]、环形运动控制等. 本文主要研究非完整约束下的多移动机器人的包围控制问题, 旨在设计一种协同控制器, 不考虑具体的编队形状同时能够保证移动目标指数收敛到多移动机器人构成的凸包内部.

目前, 已有一些完整、系统的包围控制研究成果. 如文献 [8] 采用图论和动态系统理论研究了一

阶积分型机器人的包围控制问题; 文献 [9] 利用复邻接矩阵方法设计了一种分布式包围控制器. 但是, 以上控制策略无法扩展到受非完整约束的多移动机器人系统. 非完整系统控制的难点在于, 不存在任何连续的静态状态反馈控制律使其稳定到平衡点^[10]. 然而, 文献 [11] 指出如果选择合适的坐标平移, 非完整系统能够满足输出反馈线性化条件, 使得控制器设计更加简洁. 该方法已经广泛应用在机器人、水面船等各类非完整系统的控制器设计中^[12-13].

另一方面, 多移动机器人的包围控制问题可认为是环形运动控制的扩展. 环形运动控制在包围目标点的同时, 围绕目标点做等角度的圆周运动. 文献 [14] 考虑静止目标, 研究了在联合连通图条件下的环形运动控制. 文献 [15] 考虑了速度约束下的非完整移动机器人的环形运动控制. 在实际工程应用中, 感兴趣的目标点经常随着时间不断变化. 文献 [16-17] 研究了多小车对常速移动目标的环形包围; 文献 [18] 研究了目标速度时变情况下的环形包围控制.

以上文献都要求事先指定编队形状或是相邻机器人之间、机器人和目标点之间的相对距离/角度.

收稿日期 2020-05-23 录用日期 2020-08-14

Manuscript received May 23, 2020; accepted August 14, 2020

国家自然科学基金 (62173295), 山西省基础研究计划青年项目 (202103021223048), 工业控制技术国家重点实验室自主课题 (ICT2021A18) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62173295), Shanxi Basic Research Project (202103021223048), and Research Project of the State Key Laboratory of Industrial Control Technology (ICT2021A18)

本文责任编辑 诸兵

Recommended by Associate Editor ZHU Bing

1. 浙江大学工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027 2. 浙江大学电气工程学院 杭州 310027

1. State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027 2. College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027

然而, 考虑实际复杂时变的外部环境, 不可能对其事先指定. 而且对于时效性较强的包围控制, 将目标包围在机器人构成的凸包内部是其首要任务, 例如军事领域中对敌方目标的包围打击等. 基于以上考虑, 文献 [19] 提出了一种新的目标包围控制策略, 该策略能够使目标收敛到多智能体构成的凸包内部, 并且无需指定包围队形.

在文献 [19] 的基础上, 本文研究了受非完整约束的多移动机器人的移动目标包围控制问题. 通过坐标偏置, 为移动机器人设计输出反馈线性化控制器, 并引入障碍函数和自适应项实现障碍规避和对移动目标的速度估计. 和文献 [19] 相比, 本文一方面将单积分系统扩展到了受非完整约束的多移动机器人系统, 另一方面将静止目标扩展到了未知常速移动的目标. 主要贡献: 1) 控制器可使多移动机器人包围移动目标, 使其指数收敛至移动机器人所构成的凸包内部; 2) 引入障碍函数保证了机器人之间的障碍规避; 3) 引入自适应项实现了对移动目标的速度估计; 4) 利用局部线性化方法研究了多移动机器人系统方位角动态的稳定性.

1 系统建模和问题描述

文中, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, n 代表移动机器人个数, 本文假设 $n \geq 3$. $\forall \theta \in \mathbf{R}$, $R(\theta) = [\tau(\theta), \nu(\theta)]$, $\tau(\theta) = [\cos(\theta), \sin(\theta)]^T$, $\nu(\theta) = [-\sin(\theta), \cos(\theta)]^T$. 给定任一 n 维向量 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\|\mathbf{x}\| = [|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|]^T$, $\|\mathbf{x}\|$ 代表模长. 给定任意两个向量 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j , $\mathbf{x}_{ij} := \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$. $\mathbf{x}_i \prec \mathbf{x}_j$ ($\mathbf{x}_i \preceq \mathbf{x}_j$) 表示 $x_{i,k} < x_{j,k}$ ($x_{i,k} \leq x_{j,k}$), 其中 $x_{i,k}$, $x_{j,k}$ 分别代表向量 \mathbf{x}_i , \mathbf{x}_j 的元素.

1.1 系统建模

考虑如下 n 个移动机器人运动学模型

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_i, \quad i \in N \quad (1)$$

$\mathbf{r}_i = [x_i, y_i]^T$ 表示世界坐标系下机器人 i 的几何中心, θ_i 代表机器人的方位角. $\mathbf{u}_i = [u_i, \omega_i]^T$ 代表机器人的独立控制输入, 其中 u_i 和 ω_i 分别代表机器人的纵向线速度和旋转角速度.

定义多移动机器人的位置分布 $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n]$ 和相应多移动机器人构成的凸包:

$$\mathbf{co}(\mathbf{r}) = \left\{ \sum_{i \in N} \lambda_i \mathbf{r}_i : \lambda_i \geq 0, \forall i \text{ and } \sum_{i \in N} \lambda_i = 1 \right\}$$

定义多移动机器人的平均位置 $\bar{\mathbf{r}} = \sum_{i \in N} \mathbf{r}_i / n$, 则有如下引理成立.

引理 1. $\bar{\mathbf{r}}$ 是凸包 $\mathbf{co}(\mathbf{r})$ 的内点.

证明. 根据凸包 $\mathbf{co}(\mathbf{r})$ 的定义易知 $\bar{\mathbf{r}} \in \mathbf{co}(\mathbf{r})$. 假如 $\bar{\mathbf{r}}$ 位于凸包 $\mathbf{co}(\mathbf{r})$ 的边界上, 且 $\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$, $i \neq j \in N$ 位于 $\mathbf{co}(\mathbf{r})$ 的同一条边上. 可得 $\bar{\mathbf{r}} = \lambda_i \mathbf{r}_i + (1 - \lambda_i) \mathbf{r}_j$, 和 $\bar{\mathbf{r}}$ 定义矛盾, 因此可知 $\bar{\mathbf{r}}$ 是凸包 $\mathbf{co}(\mathbf{r})$ 的内点. \square

本文研究的移动目标模型为如下单积分形式

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0 \quad (2)$$

其中, \mathbf{r}_0 表示目标的位置, \mathbf{v}_0 表示运动目标的未知常值速度. 目标点和凸包距离定义如下:

$$P_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = \min_{\mathbf{s} \in \mathbf{co}(\mathbf{r})} \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{s}\|$$

显然, 当且仅当 $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{co}(\mathbf{r})$, $P_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = 0$. 该结果表示实现了移动目标包围控制目标.

本文选取移动机器人 i 纵轴正前方, 距离机器人几何中心 δ 远的点 \mathbf{r}'_i 作为偏置点 (第 2 节分析表明 \mathbf{r}'_i 相对 \mathbf{u}_i 满足输出反馈线性化条件), 如图 1 所示. 此外, 本文采用最近邻居规则来确定机器人 i 的邻居节点. 机器人 i 的邻居节点可由以下集合 \mathcal{N}_i 表示

$$\mathcal{N}_i = \{j \in N, j \neq i : \|\mathbf{r}_{ij}\| \leq \mu\} \quad (3)$$

式中, $\mu > d > 0$, d 代表机器人之间的防撞安全距离. 由于实际情况中机器人的位置会不断变化, 因此本文研究的是动态拓扑的移动目标包围控制问题.

从实际工程角度来看, 可移动机器人 i 的绝对位置 \mathbf{r}_i 、相应的邻居节点位置 \mathbf{r}_j 和目标位置 \mathbf{r}_0 很难获取. 本文中, 可移动机器人在偏置点 \mathbf{r}'_i 装配有距离传感器和角度传感器, 分别用来测量自身与邻居节点和目标的相对距离信息和角度信息 (如图 1 所示). 具体来说, 机器人 i 能够测量相对距离 $d_{i'0}$, $d_{i'j'}$ 和角度 $\alpha_{i'0}$, $\alpha_{i'j'}$. 其中, $d_{i'0}$ 代表 \mathbf{r}'_i 和 \mathbf{r}_0 之间的相对距离; $d_{i'j'}$ 代表 \mathbf{r}'_i 和 \mathbf{r}'_j 之间的相对距离; $\alpha_{i'0}$ 代表向量 $\mathbf{r}_i \mathbf{r}'_i$ 绕点 \mathbf{r}'_i 旋转到 $\mathbf{r}'_i \mathbf{r}_0$ 的角度; $\alpha_{i'j'}$ 代表向量 $\mathbf{r}_i \mathbf{r}'_i$ 绕点 \mathbf{r}'_i 旋转到 $\mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_j$ 的角度.

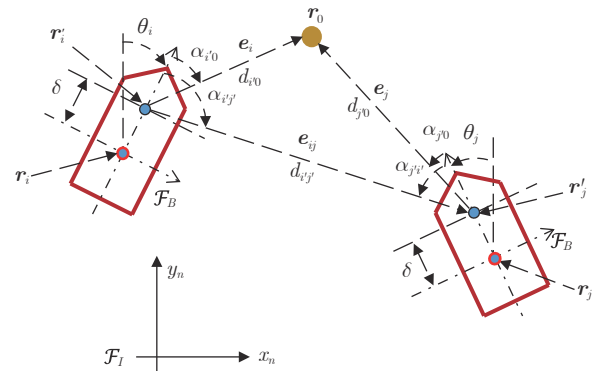


图 1 目标包围示意图

Fig. 1 Illustration of target fencing

1.2 问题描述

由于目标速度 \mathbf{v}_0 未知, 本文引入自适应项 \mathbf{v}_i 对 \mathbf{v}_0 进行估计. 结合第 1.1 节机器人 i 的局部测量信息, 本文研究的移动目标包围控制问题可总结如下.

考虑多移动机器人系统 (1) 和目标动态 (2), 设计带有速度估计器 \mathbf{v}_i 的控制器 \mathbf{u}_i , 例如

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i = \mathcal{U}_i(\delta, \theta_i, d_{i'0}, d_{i'j'}, \alpha_{i'0}, \alpha_{i'j'}, \mathbf{v}_i) \\ \dot{\mathbf{v}}_i = \mathcal{V}_i(\theta_i, d_{i'0}, d_{i'j'}, \alpha_{i'0}, \alpha_{i'j'}) \end{cases} \quad (4)$$

使得闭环系统满足以下三个性质:

- 1) 目标指数收敛到多移动机器人构成的凸包内部, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{r_0}(\mathbf{r}(t)) = 0$;
- 2) 机器人之间的碰撞可以避免, 即 $\|\mathbf{r}_{ij}(t)\| > d, \forall t \geq 0, i \neq j \in N$;
- 3) 速度估计器 \mathbf{v}_i 渐近收敛到目标速度 \mathbf{v}_0 , 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_0$.

2 主要结果

本节首先利用输出反馈线性化方法推导出多移动机器人的移动目标包围控制策略, 然后利用 Lyapunov 理论对整个闭环系统进行了严格的收敛性分析.

2.1 控制器设计

由式 (1) 可知, 机器人 i 动态满足如下约束:

$$\dot{x}_i \sin \theta_i - \dot{y}_i \cos \theta_i = 0$$

Frobenius 定理表明该约束不可积, 因此该约束是典型的非完整约束, 不满足反馈线性化的条件, 无法通过线性化的方法设计控制器. 文献 [10] 进一步指出, 不存在任何连续的静态状态反馈控制律使该系统稳定到平衡点. 为克服以上缺点, 本文选取移动机器人 i 纵轴正前方, 距离机器人几何中心 δ 远的点 $\mathbf{r}'_i = [x'_i, y'_i]^T$ 作为偏置点 (如图 1 所示). 由几何关系可知, 该点与机器人几何中心满足 $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\tau}(\theta) \delta$, 该点随时间微分可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}'_i &= \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}(\theta_i)}{\partial \theta_i} \frac{d\theta_i}{dt} \delta = \\ &\begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} \mathbf{u}_i + \begin{bmatrix} -\sin \theta_i \\ \cos \theta_i \end{bmatrix} \omega_i \delta = \\ &\boldsymbol{\tau}(\theta_i) \mathbf{u}_i + \boldsymbol{\nu}(\theta_i) \omega_i \delta = R(\theta_i) Q \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (5)$$

式中, 常数矩阵 $Q = \text{diag}\{1, \delta\}$. 由于 $R(\theta_i)Q$ 为可逆矩阵, 表明输出 \mathbf{r}'_i 相对于输入 \mathbf{u}_i 相对阶为 1, 满足输出反馈线性化条件^[20].

定义误差向量

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_i \quad (6)$$

该向量随时间微分可得

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{r}}_0 - \dot{\mathbf{r}}'_i = -R(\theta_i) Q \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_0 \quad (7)$$

由于无法获取移动目标的速度信息, 本文利用速度估计器对其估计. 控制器设计如下

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i = Q^{-1} R^{-1}(\theta_i) (K \mathbf{e}_i - \boldsymbol{\phi}_i + \mathbf{v}_i) \\ \dot{\mathbf{v}}_i = K \mathbf{e}_i - \boldsymbol{\phi}_i \\ \boldsymbol{\phi}_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \frac{\mathbf{e}_{ij}}{\|\mathbf{e}_{ij}\|} \end{cases} \quad (8)$$

式中, K 为正定对角矩阵; $K \mathbf{e}_i$ 表示机器人和目标之间的吸引力; $\boldsymbol{\phi}_i$ 表示机器人之间的排斥力, 用于实现障碍规避, 其中 $\beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ 为障碍函数; 动态项 \mathbf{v}_i 用于对移动目标速度 \mathbf{v}_0 的估计. 由图 1 易知, \mathbf{e}_i 在机器人坐标系 \mathcal{F}_B 的投影为 $d_{i'0} \boldsymbol{\tau}(\alpha_{i'0})$, 则 \mathbf{e}_i 在惯性坐标系 \mathcal{F}_I 的表示可通过旋转矩阵 $R(\theta_i)$ 求得, 即 $\mathbf{e}_i = R(\theta_i) d_{i'0} \boldsymbol{\tau}(\alpha_{i'0})$. 同理可求得, $\mathbf{e}_{ij} = R(\theta_i) d_{i'j'} \boldsymbol{\tau}(\alpha_{i'j'})$. 因此, 控制器 (8) 满足定义 (4). 此外, 由 \mathbf{e}_i 的定义易知

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{r}'_j - \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\tau}(\theta_j) \delta - \boldsymbol{\tau}(\theta_i) \delta$$

等式两边取模得

$$\|\mathbf{r}_{ij}\| - 2\delta \leq \|\mathbf{e}_{ij}\| \leq \|\mathbf{r}_{ij}\| + 2\delta$$

一方面, 障碍规避要求机器人位置满足 $\|\mathbf{r}_{ij}\| > d$, 即 $\|\mathbf{e}_{ij}\| > d_1 = d + 2\delta$; 另一方面, 由式 (3) 可知机器人 i 的邻居节点 j 满足 $\|\mathbf{r}_{ij}\| < \mu$, 即 $\|\mathbf{e}_{ij}\| \leq \mu_1 = \mu - 2\delta$. 本文障碍函数 $\beta = \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ 定义如下:

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{e}_{ij}\| - d_1} - \frac{1}{\mu_1 - d_1}, & \text{if } \|\mathbf{e}_{ij}\| \in (d_1, \mu_1) \\ 0, & \text{if } \|\mathbf{e}_{ij}\| \in (\mu_1, \infty) \end{cases}$$

其中, 障碍函数中包含的常数项 $1/(\mu_1 - d_1)$, 可以保证当 $\|\mathbf{e}_{ij}\| = \mu_1$ 时, β 取值为 0, 表明机器人 i 和 j 之间的排斥力消失, 相互不为邻居节点. 此外, 当 $\|\mathbf{e}_{ij}\| \rightarrow d_1$ 时, 障碍函数 $\beta \rightarrow +\infty$, 用于实现障碍规避.

2.2 收敛性分析

定理 1. 考虑多移动机器人系统 (1) 和移动目标动态 (2), 其中移动目标以未知常速运动. 假设移动机器人位置在初始时刻满足 $\|\mathbf{r}_{ij}(0)\| > d, i \neq j \in N$, 则当参数 δ 足够小时, 多移动机器人系统在控制器 (8) 的作用下可以实现移动目标的包围控制, 同时整个闭环系统满足性质 1) ~ 3). 此外, 多移动机器人的方位角可以渐近收敛到目标的移动方向.

证明. 为表述方便, 引入平均位置误差 $\hat{\mathbf{e}} = \sum_{i \in N} \mathbf{e}_i / n$, 速度估计误差 $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0$, 平均速度估计误差 $\hat{\mathbf{v}} = \sum_{i \in N} \tilde{\mathbf{v}}_i / n$. 对 $\hat{\mathbf{e}}$ 微分可得:

$$\dot{\hat{e}} = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \dot{e}_i = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} (-R(\theta_i) Q u_i + v_0)$$

将式 (8) 代入上式并化简得:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}} &= \frac{1}{n} \sum_{i \in N} (-K e_i + \phi_i - v_i + v_0) = \\ & -K \hat{e} + \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \phi_i - \hat{v} \end{aligned}$$

因为 $j \in \mathcal{N}_i \Leftrightarrow i \in \mathcal{N}_j$ 且 $e_{ij} = -e_{ji}$, 因此 $\sum_{i \in N} \phi_i = 0$. 上式可变形为

$$\dot{\hat{e}} = -K \hat{e} - \hat{v} \tag{9}$$

由式 (8) 易知 \hat{v} 满足

$$\dot{\hat{v}} = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \dot{v}_i = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} (K e_i - \phi_i) = K \hat{e} \tag{10}$$

根据式 (9) 和式 (10) 可得如下稳定系统:

$$\ddot{\hat{e}} + K \dot{\hat{e}} + K \hat{e} = 0$$

易知随着 $t \rightarrow \infty$, \hat{e} 指数收敛到 $\mathbf{0}$. 此外, \hat{e} 满足:

$$\hat{e} = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} (r_0 - r'_i) = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} (r_0 - r_i - \tau(\theta_i) \delta)$$

化简后取模得:

$$\|r_0 - \bar{r}\| \leq \|\hat{e}\| + \frac{\delta}{n} \left\| \sum_{i \in N} \tau(\theta_i) \right\| = \|\hat{e}\| + \delta$$

随着 $t \rightarrow \infty$, \hat{e} 指数收敛到 $\mathbf{0}$, 易知 r_0 指数收敛到集合 $\mathcal{C}_1(r) = \{r : \|r - \bar{r}\| \leq \delta\}$. 此外, 由引理 1 知 \bar{r} 是凸包 $\text{co}(r)$ 的内点, 故存在以 \bar{r} 为内点的邻域 $\mathcal{C}_2(r) = \{r : \|r - \bar{r}\| \leq \bar{\delta}\}$, 使得 $\mathcal{C}_2(r) \subseteq \text{co}(r)$. 如果 δ 选取的足够小, 使得 $\delta < \bar{\delta}$ 成立, 则有 $\mathcal{C}_1(r) \subseteq \mathcal{C}_2(r) \subseteq \text{co}(r)$. 结果表明 $r_0 \in \text{co}(r) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} P_{r_0}(r) = 0$. 性质 1) 得证.

为证明性质 2), 首先定义如下能量函数

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{\|e_{ij}\|}^{\mu_1} \beta(e_i, e_j) de_{ij} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i \in N} e_i^T K e_i + \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \|v_i - v_0\|^2 \end{aligned} \tag{11}$$

显然 $V(x) \geq 0$. 计算易知 $V(x)$ 相对 e_i 和 v_i 的偏微分如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial e_i^T} &= \left(- \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \beta(e_i, e_j) \frac{e_{ij}}{\|e_{ij}\|} + K e_i \right)^T = \\ & (-\phi_i + K e_i)^T \\ \frac{\partial V(x)}{\partial v_i^T} &= (v_i - v_0)^T \end{aligned}$$

将 $V(x)$ 沿着系统 (7)、(8) 的轨线求导可得

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= \sum_{i \in N} \frac{\partial V(x)}{\partial e_i^T} \dot{e}_i + \sum_{i \in N} \frac{\partial V(x)}{\partial v_i^T} \dot{v}_i = \\ & \sum_{i \in N} (-\phi_i + K e_i)^T \dot{e}_i + \sum_{i \in N} (v_i - v_0)^T \dot{v}_i = \\ & \sum_{i \in N} (-\phi_i + K e_i)^T (\phi_i - K e_i - v_i + v_0) + \\ & \sum_{i \in N} (v_i - v_0)^T (K e_i - \phi_i) = \\ & - \sum_{i \in N} \|-K e_i + \phi_i\|^2 \leq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

上式表明 $V(x)$ 是非增函数. 由式 (11) 可知

$$\begin{aligned} \int_{\|e_{ij}\|}^{\mu_1} \beta(e_i, e_j) de_{ij} &\leq V(x(t)) = \\ V(x(0)) + \int_0^t \frac{dV(x(t))}{dt} dt &\leq V(x(0)) < \infty \end{aligned}$$

上式积分的有界性表明 $\|e_{ij}(t)\| > d_1, \forall i \neq j \in N$. 再由 $d_1 = d + 2\delta$ 和 $r_{ij}(t) \geq e_{ij}(t) - 2\delta$ 易知 $\|r_{ij}(t)\| > d, \forall i \neq j \in N$. 性质 2) 得证.

接下来, 分三步证明性质 3).

第 1 步: $|e_i|$ 的有界性. 由能量函数 $V(x)$ 的非增性和非负性可知 $V(x) \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow |e_i| \in \mathcal{L}_\infty$, 因此

$$\exists M > 0, \forall t \geq 0, |e_i(t)| \leq [M, M]^T \tag{13}$$

第 2 步: \dot{e}_i 和 \ddot{e}_i 的收敛性. 由式 (7)、式 (8) 可知

$$\dot{e}_i = \dot{r}_0 - \dot{r}'_i = -\dot{v}_i - v_i + v_0 \tag{14}$$

等式两边同时对时间求导可得 $\ddot{e}_i = -\ddot{v}_i - \dot{v}_i$. 根据式 (12) 和不变集原理, 当 $t \rightarrow \infty$, 整个闭环系统的解会收敛到集合 $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} : -K e_i + \phi_i = 0, \forall i \in N\}$, 因此可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{v}_i(t) = 0$. 再根据 \ddot{v}_i 的一致连续性及 Barbalat 引理^[21] 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{v}_i(t) = 0$. 因此可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_i(t) = 0$.

接下来使用反证法证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_i(t) = 0$. 假设此结论不成立, 则存在 $\sigma > 0$, 使得对任意的 $T_2 > 0$

$$\begin{aligned} \exists T_1 > T_2 \\ |\dot{e}_i(T_1)| &\geq [\sigma, 0]^T \text{ or} \\ |\dot{e}_i(T_1)| &\geq [0, \sigma]^T \end{aligned} \tag{15}$$

选取一个正数 $\varepsilon < \sigma^2 / (8M)$, 因为 $\ddot{e}_i(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{e}_i(t) = 0$, 则可选 T_2 使得

$$|\ddot{e}_i(T_1)| < [\varepsilon, \varepsilon]^T, \forall t \geq T_2 \tag{16}$$

由式 (15) 和式 (16) 可知

$$\forall t \in \left[T_1, T_1 + \frac{\sigma}{2\varepsilon} \right]$$

$$|\dot{e}_i(t)| \geq |\dot{e}_i(T_1)| - \int_{T_1}^{T_1 + \frac{\sigma}{2\varepsilon}} |\ddot{e}_i(t)| dt >$$

$$|\dot{e}_i(T_1)| - \frac{\sigma}{2\varepsilon} \times \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{2}, -\frac{\sigma}{2} \end{bmatrix}^T \text{ or } \begin{bmatrix} -\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2} \end{bmatrix}^T$$

接下来考虑以下情况可能发生的矛盾 (另一种情况证明方法类似):

$$|\dot{e}_i(t)| > \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{2}, -\frac{\sigma}{2} \end{bmatrix}^T, \forall t \in \left[T_1, T_1 + \frac{\sigma}{2\varepsilon} \right]$$

为表述方便, 以下式 (17) ~ 式 (19) 中的变量代表相应原始向量的第一个元素. 由 $|\dot{e}_i(t)|$ 的连续性可知

$$\forall t \in \left[T_1, T_1 + \frac{\sigma}{2\varepsilon} \right] \\ \dot{e}_i(t) > \frac{\sigma}{2} \text{ or } \dot{e}_i(t) < -\frac{\sigma}{2} \quad (17)$$

上式表明 $\dot{e}_i(t)$ 在时间段 $[T_1, T_1 + \sigma/(2\varepsilon)]$ 内可以保证符号的一致性, 因此

$$\left| e_i \left(T_1 + \frac{\sigma}{2\varepsilon} \right) - e_i(T_1) \right| = \left| \int_{T_1}^{T_1 + \frac{\sigma}{2\varepsilon}} \dot{e}_i(t) dt \right| = \\ \int_{T_1}^{T_1 + \frac{\sigma}{2\varepsilon}} |\dot{e}_i(t)| dt > \frac{\sigma}{2\varepsilon} \times \frac{\sigma}{2} > 2M \quad (18)$$

另一方面, 由式 (13) 易得

$$\left| e_i \left(T_1 + \frac{\sigma}{2\varepsilon} \right) - e_i(T_1) \right| \leq \\ \left| e_i \left(T_1 + \frac{\sigma}{2\varepsilon} \right) \right| + |e_i(T_1)| \leq 2M \quad (19)$$

式 (19) 和式 (18) 矛盾, 假设不成立, 故有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_i(t) = \mathbf{0}$.

第 3 步: \mathbf{v}_i 的收敛性. 由 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_i(t) = \mathbf{0}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{0}$ 和式 (14), 易知 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_0$.

由上述分析可知, 控制器可以实现多移动机器人对移动目标的包围控制, 但并未考虑包围控制过程中移动机器人方位角的稳定性. 从实际应用考虑, 移动机器人方位角的稳定性对包围控制的效果有重要意义.

当闭环系统实现性质 1) ~ 3) 时, 由控制器 (8) 可知 $\mathbf{u}_i = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{R}^{-1}(\theta_i) \mathbf{v}_0$, 其元素形式为:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} v_{0x} \cos \theta_i + v_{0y} \sin \theta_i \\ \frac{1}{\delta} (-v_{0x} \sin \theta_i + v_{0y} \cos \theta_i) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_0\| \cos \theta_0 \cos \theta_i + \|\mathbf{v}_0\| \sin \theta_0 \sin \theta_i \\ -\frac{1}{\delta} (\|\mathbf{v}_0\| \cos \theta_0 \sin \theta_i - \|\mathbf{v}_0\| \sin \theta_0 \cos \theta_i) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_0\| \cos(\theta_i - \theta_0) \\ -\frac{\|\mathbf{v}_0\|}{\delta} \sin(\theta_i - \theta_0) \end{bmatrix}$$

式中, $\mathbf{v}_0 = [v_{0x}, v_{0y}]^T$, $\theta_0 = \arctan(v_{0x}/v_{0y})$ 代表目标的移动方向. 结合 $\dot{\theta}_i = \omega_i$ 可知机器人方位角满足以下动态方程

$$\dot{\theta}_i = f(\theta_i) = -\frac{\|\mathbf{v}_0\|}{\delta} \sin(\theta_i - \theta_0) \quad (20)$$

定义能量函数 $V(\theta_i) = 1 - \cos(\theta_i - \theta_0) \in \mathcal{L}_\infty$. 该函数对时间求导可得

$$\dot{V}(\theta_i) = \frac{\partial V(\theta_i)}{\partial \theta_i} f(\theta_i) = \\ -\frac{\|\mathbf{v}_0\|}{\delta} \sin^2(\theta_i - \theta_0) \leq 0$$

根据 $\dot{V}(\theta_i)$ 的一致连续性和 Barbalat 引理^[24] 可知, θ_i 收敛到集合 $\{\theta^{e1} : \theta^{e1} = \theta_0 + 2k\pi, \forall k \in \mathbf{Z}\}$ 或 $\{\theta^{e2} : \theta^{e2} = \theta_0 + (2k+1)\pi, \forall k \in \mathbf{Z}\}$. θ^{e1} 表示机器人的方位角和移动目标方向一致, θ^{e2} 表示两者方向相反. 令 $\tilde{\theta}_{i,1} = \theta_i - \theta^{e1}$, $\tilde{\theta}_{i,2} = \theta_i - \theta^{e2}$. 采用局部线性化可知, 式 (20) 在 θ^{e1} 附近有

$$\dot{\tilde{\theta}}_{i,1} = \left. \frac{df(\theta_i)}{d\theta_i} \right|_{\theta_i=\theta^{e1}} \tilde{\theta}_{i,1} = \\ -\frac{\|\mathbf{v}_0\|}{\delta} \cos(\theta_i - \theta_0) \Big|_{\theta_i=\theta^{e1}} \tilde{\theta}_{i,1} = -\frac{\|\mathbf{v}_0\|}{\delta} \tilde{\theta}_{i,1}$$

即 $\delta \dot{\tilde{\theta}}_{i,1} + \|\mathbf{v}_0\| \tilde{\theta}_{i,1} = 0$, 同理可得式 (20) 在 θ^{e2} 附近有 $\delta \dot{\tilde{\theta}}_{i,2} - \|\mathbf{v}_0\| \tilde{\theta}_{i,2} = 0$. 因此 θ^{e1} 是稳定的平衡点, 而 θ^{e2} 是不稳定的平衡点. 故机器人方位角满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta^{e1}$, 表明机器人方位角会渐近收敛到目标的移动方向. \square

注 1. 当控制器 (8) 实现闭环系统性质 1) ~ 3) 且方位角满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_i(t) = \theta^{e1}$ 时, 由式 (8) 可知机器人线速度 u_i 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_0\| \cos(\theta_i(t) - \theta_0) = \|\mathbf{v}_0\|$$

代入式 (1) 得, 机器人在世界坐标系下的速度满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{r}}_i(t) = \|\mathbf{v}_0\| [\cos \theta_0, \sin \theta_0]^T = \mathbf{v}_0$, 表明当 $t \rightarrow \infty$ 时, 移动机器人的速度渐近收敛到移动目标速度.

注 2. 尽管本文设计的多移动机器人系统的协同包围控制器针对的是以未知常速运动的移动目标, 但该控制器亦适用于静止目标. 因为静止目标的速度一直保持为 0, 亦属于特殊的“未知常速运动”的移动目标. 针对静止目标, 控制器 (8) 可以保证闭环系统满足性质 1) ~ 3), 同时实现机器人位置和方位角的收敛. 但和一般未知常速移动目标 (即速度不为 0 的常速移动目标) 相比, 静止目标没有移动方向的概念, 也可认为静止目标的移动方向是任意的. 对于静止目标的协同包围任务, 本文的控制器不保证机器人的方位角最终会收敛到什么方向.

3 数值仿真

本节以 5 个移动机器人为例, 验证控制器的有效性. 给定机器人的初始位置 $\mathbf{r}_i(0) = 20[\cos(2(i-1)\pi/5), \sin(2(i-1)\pi/5)]^T, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; 初始方位角 $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0, \theta_3(0) = \pi/2, \theta_4(0) = 2\pi/3, \theta_5(0) = \pi$. 移动目标的初始位置 $\mathbf{r}_0(0) = [0, -40]^T$, 移动速度 $\mathbf{v}_0 = [3, 1]^T$. 给定控制器参数 $K = \text{diag}\{0.5, 0.5\}$ 以及 $(\delta, \mu, d) = (0.1, 25, 15)$.

图 2 绘制了目标包围控制中多移动机器人的运动轨迹. 其中浅蓝色虚线表示目标的运动轨迹, 多边形表示移动机器人在 $t = \{0, 15, 30, 45, 60\}$ s 时刻所构成的凸多边形, 箭头表示机器人在相应时刻的位置和方位角. 平均位置误差 \hat{e} 随时间变化的曲线如图 3 所示, 由图 3 可知随时间变化 \hat{e} 会收敛到 $\mathbf{0}$. 结合第 2 节收敛性分析可知, 目标包围控制的性质 1) 能够实现. 任意两个机器人之间的相对距离变化如图 4 所示. 由图 4 易知, 机器人间的相对距离始终保持 $\|\mathbf{r}_{ij}(t)\| > d, i \neq j \in N$, 因此整个目标包围控制可以保证障碍规避.

此外, 速度估计曲线随时间变化如图 5 所示, 由图 5 可知速度估计会渐近收敛到目标速度, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_0$. 图 6 绘制了机器人在世界坐标系下的速度随时间变化曲线, 由图 6 可知该速度渐近收敛到目标速度. 图 7 绘制了机器人的方位角随时间变化的曲线, 由图 7 易知所有机器人的方位角都可渐近收敛到目标的移动方向.

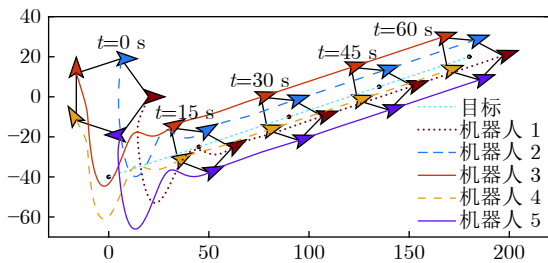


图 2 目标包围控制中多移动机器人的轨迹
Fig.2 Trajectories of multiple mobile robots during target fencing control

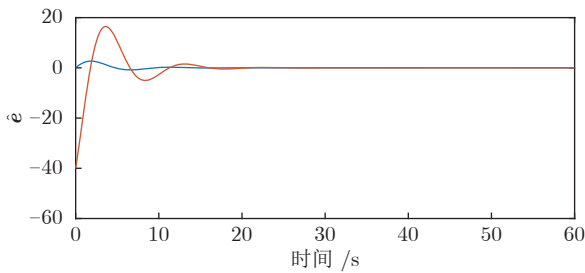


图 3 平均位置误差
Fig.3 Time evolution of the average position error

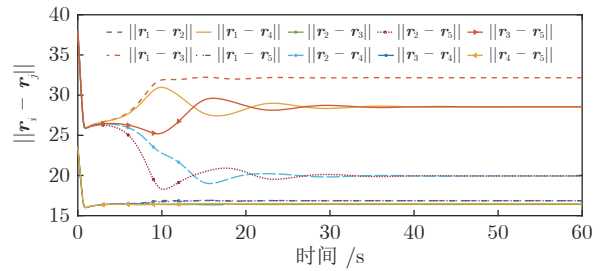


图 4 机器人 i 和 j 之间的相对距离
Fig.4 Time evolution of the relative distance between robot i and robot j

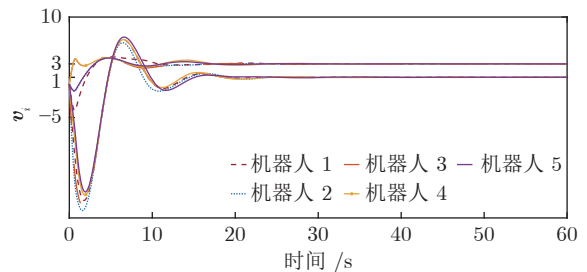


图 5 速度估计
Fig.5 Time evolution of the velocity estimation

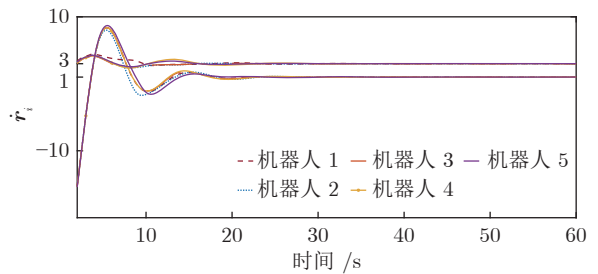


图 6 机器人在世界坐标系下的速度
Fig.6 The robots' velocity in terms of global frame of reference

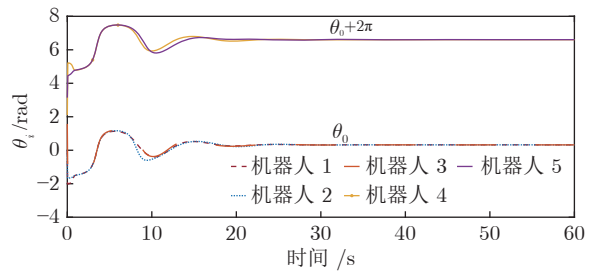


图 7 机器人的方位角
Fig.7 The robots' bearing angle

4 结论

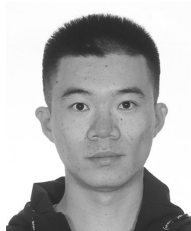
本文研究了非完整约束下多移动机器人系统的移动目标包围控制问题. 控制器基于输出反馈线性化方法, 并且无需事先指定包围队形. 基于 Lyapunov 稳定性理论对整个闭环系统作了严格的收敛性分析. 仿真结果验证了该控制器可以实现指数包围控制、机器人间的障碍规避、对移动目标未知速度的有效估计以及机器人的方位角能够渐近收敛到目标的移动方向.

References

- Hong Yi-Guang, Zhai Chao. Dynamic coordination and distributed control design of multi-agent systems. *Control Theory & Application*, 2011, **28**(10): 1506–1512
(洪奕光, 翟超. 多智能体系统动态协调与分布式控制设计. 控制理论与应用, 2011, **28**(10): 1506–1512)
- Knorn S, Chen Z Y, Middleton R H. Overview: Collective control of multiagent systems. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2016, **3**(4): 334–347
- Li Yu-Ling, Yang Hong-Yong, Liu Fan, Yang Yi-Ze. Finite-time containment control of second-order multi-agent systems with mismatched disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2019, **45**(9): 1783–1790
(李玉玲, 杨洪勇, 刘凡, 杨怡泽. 带有不匹配干扰的二阶多自主体系统有限时间包容控制. 自动化学报, 2019, **45**(9): 1783–1790)
- Liu Juan, Zhang Hao, Wang Zhu-Ping. Cooperative output regulation of heterogeneous multi-agent systems by self-triggered. *Acta Automatica Sinica*, 2019, **45**(10): 1893–1902
(刘娟, 张皓, 王祝萍. 基于自触发的异构多智能体协同输出调节. 自动化学报, 2019, **45**(10): 1893–1902)
- Liu Fan, Yang Hong-Yong, Yang Yi-Ze, Li Yu-Ling, Liu Yuan-Shan. Finite-time integral sliding mode control for multi-agent systems with mismatched disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2019, **45**(4): 749–758
(刘凡, 杨洪勇, 杨怡泽, 李玉玲, 刘远山. 带有不匹配干扰的多智能体系统有限时间积分滑模控制. 自动化学报, 2019, **45**(4): 749–758)
- Huang Y, Duan M M, Mo L P. Multiagent containment control with nonconvex states constraints, nonuniform time delays, and switching directed networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, **31**(11): 5021–5028
- Jin Shang-Tai, Li Che, Ren Ye, Hou Zhong-Sheng. Model-free adaptive formation control for unknown heterogeneous nonlinear multi-agent systems. *Control and Decision*, 2020, **35**(6): 1519–1524
(金尚泰, 李澈, 任叶, 侯忠生. 未知异构非线性多智能体系统的无模型自适应编队控制. 控制与决策, 2020, **35**(6): 1519–1524)
- Chen F, Ren W, Cao Y C. Surrounding control in cooperative agent networks. *Systems & Control Letters*, 2010, **59**(11): 704–712
- Lou Y C, Hong Y G. Distributed surrounding design of target region with complex adjacency matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(1): 283–288
- Brockett R W. *Differential Geometric Control Theory*. Massachusetts: Birkhauser, 1983. 181–191
- Yamamoto Y, Yun X. Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(6): 1326–1332
- Arranz L, Seuret A, Pascoal A. Circular formation control for cooperative target tracking with limited information. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, **356**(4): 1771–1788
- Paliotta C, Lefeber E, Pettersen K Y, Pinto J, Costa M, De Figueiredo Borges De Sousa J T. Trajectory tracking and path

following for underactuated marine vehicles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2019, **27**(4): 1423–1437

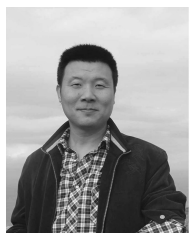
- Chen Z Y, Zhang H T. A remark on collective circular motion of jointly connected multi-agents. *Automatica*, 2011, **47**(9): 1929–1937
- Yu X, Liu L, Feng G. Distributed circular formation control of nonholonomic vehicles without direct distance measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, **63**(8): 2730–2737
- Lan Y, Yan G F, Lin Z Y. Distributed control of cooperative target enclosing based on reachability and invariance analysis. *Systems & Control Letters*, 2010, **59**(7): 381–389
- Frew E W, Lawrence D A, Morris S. Coordinated standoff tracking of moving targets using Lyapunov guidance vector fields. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2008, **31**(2): 290–306
- Yu X, Liu L. Cooperative control for moving-target circular formation of nonholonomic vehicles. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(7): 3448–3454
- Chen Z Y. A cooperative target-fencing protocol of multiple vehicles. *Automatica*, 2019, **107**: 591–594
- Isidori A. *Nonlinear Control Systems*. New York: Springer-Verlag, 1989. 147–161
- Slotine J J E, Li W P. *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1991. 100–156



寇立伟 浙江大学电气工程学院博士. 2015 年获得华中科技大学学士学位. 主要研究方向为多智能体协同控制, 自主水下航行器控制.

E-mail: koukou@zju.edu.cn

(KOU Li-Wei Ph.D. at the College of Electrical Engineering, Zhejiang University. He received his bachelor degree from Huazhong University of Science and Technology in 2015. His research interest covers coordinated control of multi-agent systems and control of autonomous underwater vehicles.)



项基 浙江大学电气工程学院教授, 工业控制技术国家重点实验室成员. 2005 年获得浙江大学博士学位. 主要研究方向为自主无人船与航行器, 分布式优化和电力系统柔性控制. 本文通信作者.

E-mail: jxiang@zju.edu.cn

(XIANG Ji Professor at the College of Electrical Engineering, and has been a member of the State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University. He received his Ph.D. degree from Zhejiang University in 2005. His research interest covers autonomous unmanned ships and underwater vehicles, distributed optimization, and flexible control of power systems. Corresponding author of this paper.)