

二自由度无人直升机的非线性自抗扰姿态控制

王怡怡¹ 赵志良^{1,2}

摘要 无人机高性能姿态控制的难题之一是无人机系统模型通常无法精确建立且受到复杂外部干扰的作用. 针对这一难题, 本文提出了二自由度无人直升机姿态控制的非线性自抗扰控制设计方法. 该方法的主要思想是将系统内部的未建模动态和外部干扰等不确定性因素作为“总扰动”, 利用输入输出信息在线观测, 并在反馈控制环节对其进行补偿. 本文发展了非线性扩张状态观测器与非线性反馈控制律用以提高控制品质. 本文严格证明了控制闭环系统的稳定性和收敛性, 并通过数值仿真验证了理论结果的有效性. 数值结果显示当量测输出受噪音干扰时本文提出的方法优于线性自抗扰控制方法和滑模控制方法.

关键词 二自由度无人直升机, 姿态控制, 自抗扰控制, 扩张状态观测器

引用格式 王怡怡, 赵志良. 二自由度无人直升机的非线性自抗扰姿态控制. 自动化学报, 2021, 47(8): 1951–1962

DOI 10.16383/j.aas.c190521

Nonlinear Active Disturbance Rejection Attitude Control of Two-DOF Unmanned Helicopter

WANG Yi-Yi¹ ZHAO Zhi-Liang^{1,2}

Abstract A major challenge of high-performance attitude control of unmanned aerial vehicle (UAV) is that the mathematical models of UAVs are always not accurately built and they are often disturbed by external disturbances. Taking up this challenge, in this paper we develop a nonlinear active disturbance rejection control (ADRC) method for attitude control of two-degree-of-freedom unmanned helicopters. The key idea of this method is online estimating the “total disturbance” which is composed by un-modeled system dynamics and external disturbance at first, and then compensate it in the feedback control. In this paper, we develop a nonlinear extended state observer and a nonlinear feedback controller to improve the control performance. The stability and convergence of the closed-loop control systems are proved strictly. The effectiveness of the theoretical results are verified by simulations. The numerical results show that, when the measured output is contaminated by random noise, the performance of the controller proposed in this paper is better than the linear ADRC and sliding model control.

Key words Two-degree-of-freedom unmanned helicopter, attitude control, active disturbance rejection control, extended state observer

Citation Wang Yi-Yi, Zhao Zhi-Liang. Nonlinear active disturbance rejection attitude control of two-DOF unmanned helicopter. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(8): 1951–1962

由于无人机飞行器灵活性强、机动速度快、地形适应能力强等特点, 它在国防、城市管理、农业、地质、气象、电力、抢险救灾、视频拍摄等行业显现出越来越重要的作用. 近年来随着动力系统、复合

材料、传感器等技术的进步, 无人机也得到了迅速的发展, 针对无人机的控制技术也被广泛深入研究^[1–10]. 本文研究的是二自由度无人直升机的姿态控制问题, 即通过控制俯仰和偏航两个方向角来控制无人机的飞行姿态. 二自由度无人直升机的姿态控制引起了学者与工程师的广泛关注, 产出了一批优秀成果, 例如二自由度无人直升机姿态控制的自适应动态规划控制方法^[1], 反馈线性化控制^[11], 神经网络控制^[12], 滑模控制方法^[13–14]等. 在实际飞行控制中, 无人机系统存在着大量的不确定性因素, 已有不少文献针对无人机控制中的不确定性因素展开研究. 例如针对参数不确定性和外扰, 文献 [4] 引入了自适应反步技术. 文献 [5] 将反步算法与惯性延迟控制器相结合来处理时变不确定和外扰. 文献 [6]

收稿日期 2019-07-09 录用日期 2020-01-09

Manuscript received July 9, 2019; accepted January 9, 2020

国家自然科学基金 (61973202), 流程工业综合自动化国家重点实验室开放课题基金资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61973202), State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries

本文责任编辑 许斌

Recommended by Associate Editor XU Bin

1. 陕西师范大学数学与统计学院 西安 710119 2. 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室 沈阳 110004

1. School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119 2. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110004

则利用超扭曲算法估计和补偿外部干扰, 相关的研究还可见文献 [7-8] 等.

上述控制方法在不同方面体现出了各自的优点和特点, 但大部分方法或者处理复杂不确定性因素的能力有限, 或者设计复杂实现难度高, 或者控制器的设计需要利用系统的精确模型. 为进一步提升二自由度无人直升机姿态控制的性能品质, 本文发展了一个易于物理实现的高性能控制方法 — 基于非线性扩张状态观测器的非线性自抗扰控制方法.

自抗扰控制 (Active disturbance rejection control, ADRC) 是 80 年代末 90 年代初韩京清研究员提出的新型控制技术^[15]. 自抗扰控制的主要思想是利用扩张状态观测器 (Extended state observer, ESO) 在线观测并补偿不确定性因素. 近年来自抗扰控制技术被广泛应用, 如陀螺仪控制^[16], 流化床燃烧控制^[17], 引擎控制^[18], 航空航天^[19-22] 等. 自抗扰控制理论方面也有丰富的研究成果. 线性自抗扰控制的理论研究可参见文献 [23-29] 等. 非线性自抗扰控制的理论研究在专著^[30] 有较为详细的论述. 对于系统中不确定性因素估计并补偿的研究还可参见文献 [31-36] 以及专著^[37] 等. 关于更一般的随机干扰系统的自抗扰控制研究可参见文献 [38-39].

一般来说 ESO 的增益参数需根据控制精度的需求和“总扰动”的变化快慢进行调整. 当“总扰动”变化较快时为精确估计系统的状态和“总扰动”, 需要使用较大的增益, 而传统的单参数调整线性 ESO 当增益较大时具有较大的超调且对系统输出的量测噪音比较敏感. 研究表明, 基于非光滑 fal 函数构造的非线性扩张状态观测器 (fal-ESO) 在保证观测精度的同时具有较小的超调, 同时在系统量测输出被随机噪音干扰时表现更好^[15, 40]. 本文针对模型建立不准确且受到外部干扰的二自由度无人直升机高性能姿态控制难题, 提出了基于 fal-ESO 的非线性自抗扰控制设计方法. 首先利用非光滑 fal 函数构造非线性扩张状态观测器, 用于在线观测系统的状态, 同时估计由系统内外不确定性因素构成的“总扰动”, 然后设计基于 ESO 的非线性输出反馈控制器, 利用“总扰动”的观测值对其进行补偿. 本文的主要创新之处在于同时在 ESO 和反馈控制设计中采用非线性的设计方法, 并严格证明了闭环控制系统的稳定性和收敛性. 仿真结果显示本文提出的非线性自抗扰控制具有更好的抗扰性能.

本文剩余内容安排如下: 第 1 节是二自由度无人直升机姿态控制的问题描述. 第 2 节给出二自由度无人直升机姿态控制的非线性自抗扰控制设计, 包括非线性扩张状态观测器设计和基于扩张状态观

测器的非线性不确定性因素补偿控制器设计, 同时给出本文的主要理论结果. 第 3 节是主要结果的理论证明. 数值仿真在第 4 节给出. 最后是全文总结和展望.

1 问题描述

本文的研究对象是二自由度无人直升机, 其简化模型可由图 1 来表示. 无人直升机的作用原理是通过俯仰电机带动俯仰螺旋桨旋转产生推力, 从而控制无人直升机绕俯仰轴旋转, 同时通过偏航电机驱动偏航螺旋桨旋转来驱使无人直升机绕偏航轴旋转.

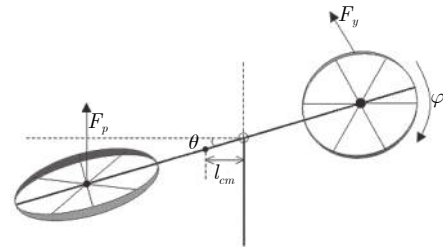


图 1 二自由度无人直升机简化图

Fig. 1 Simplified diagram of two degree of freedom unmanned helicopter

利用牛顿动力学定律和欧拉 — 拉格朗日方程, 二自由度无人直升机控制系统可用如下数学模型描述^[1, 14]:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}(t) &= \omega_{\theta}(t) \\
 \dot{\varphi}(t) &= \omega_{\varphi}(t) \\
 \dot{\omega}_{\theta}(t) &= \frac{\tau_{pp}F_p(t)}{I_p + m_h l_{cm}^2} - \frac{\tau_{py}F_y(t)}{I_p + m_h l_{cm}^2} - \\
 &\quad \frac{D_p \omega_{\theta}(t)}{I_p + m_h l_{cm}^2} + \frac{m_h g \cos(\theta(t)) l_{cm}}{I_p + m_h l_{cm}^2} + \\
 &\quad \frac{m_h \omega_{\varphi}^2(t) \sin(\theta(t)) l_{cm}^2 \cos(\theta(t))}{I_p + m_h l_{cm}^2} + \\
 &\quad q_1(\theta(t), \omega_{\theta}(t), \varphi(t), \omega_{\varphi}(t), d_1(t)) \\
 \dot{\omega}_{\varphi}(t) &= \frac{\tau_{yp}F_p(t)}{I_y + m_h l_{cm}^2} - \frac{\tau_{yy}F_y(t)}{I_y + m_h l_{cm}^2} - \\
 &\quad \frac{D_y \omega_{\varphi}(t)}{I_y + m_h l_{cm}^2} + \\
 &\quad \frac{2m_h \omega_{\varphi}(t) \sin(\theta(t)) l_{cm}^2 \cos(\theta(t)) \omega_{\theta}(t)}{I_y + m_h l_{cm}^2} + \\
 &\quad q_2(\theta(t), \omega_{\theta}(t), \varphi(t), \omega_{\varphi}(t), d_2(t))
 \end{aligned} \tag{1}$$

这里 $\theta(t)$, $\varphi(t)$ 分别是 t 时刻的俯仰角和偏航角, 是系统的量测输出. $F_p(t)$ 和 $F_y(t)$ 分别是俯仰电机/螺

旋桨和偏航电机/螺旋桨产生的推力, 是系统的控制输入. $\omega_\theta(t)$ 和 $\omega_\varphi(t)$ 分别是俯仰和偏航角速度, 参数 I_p 和 I_y 分别为俯仰和偏航惯性系数. D_p 和 D_y 分别为俯仰和偏航阻尼摩擦系数, τ_{pp} 表示俯仰螺旋桨作用在俯仰轴上的力矩常数, τ_{yy} 表示偏航螺旋桨作用在偏航轴上的力矩常数, τ_{py} 表示偏航螺旋桨作用在俯仰轴上的力矩常数, τ_{yp} 表示俯仰螺旋桨作用在偏航轴上的力矩常数, m_h 为直升机的总质量, l_{cm} 为轴心点和质心点之间的距离, g 表示重力加速度. $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 分别是俯仰和偏航方向受到的随时间变化的外部干扰, $q_1(\cdot)$ 和 $q_2(\cdot)$ 是俯仰和偏航方向由系统未建模动态和外部干扰构成的不确定性因素. 本文控制目的是设计非线性自抗扰控制 F_p 和 F_y 使得系统的输出 θ, φ 跟踪到设定值 θ^*, φ^* . 由于系统 (1) 中的参数通常不易精确获取且存在非线性未建模动态和时变未知外部干扰的影响, 基于模型的控制方法不易物理实现. 为提升二自由度无人直升机姿态控制的性能品质, 本文发展了易于物理实现的高性能非线性自抗扰控制方法.

令 $x_1 = \theta - \theta^*, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = \varphi - \varphi^*, x_4 = \dot{\varphi}$,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_{pp}}{I_{T_p}} & -\frac{\tau_{py}}{I_{T_p}} \\ [8pt] \frac{\tau_{yp}}{I_{T_y}} & -\frac{\tau_{yy}}{I_{T_y}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中 $I_p + m_h l_{cm}^2 = I_{T_p}$, $I_y + m_h l_{cm}^2 = I_{T_y}$, $F_p = u_1$, $F_y = u_2$. 则

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = f_1(\mathbf{x}(t), d_1(t)) + u_1^*(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t), \dot{x}_4(t) = f_2(\mathbf{x}(t), d_2(t)) + u_2^*(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中 $f_1(\cdot)$ 和 $f_2(\cdot)$ 分别是俯仰和偏航方向除控制力之外所受到的作用力, 即由系统内外不确定性因素构成的总扰动:

$$f_1(\mathbf{z}(t), d_1(t)) = -\frac{D_p \omega_\theta(t)}{I_p + m_h l_{cm}^2} + \frac{m_h g \cos(\theta(t)) l_{cm}}{I_p + m_h l_{cm}^2} + \frac{m_h \omega_\varphi^2(t) \sin(\theta(t)) l_{cm}^2 \cos(\theta(t))}{I_p + m_h l_{cm}^2} + q_1(\theta(t), \omega_\theta(t), \varphi(t), \omega_\varphi(t), d_1(t))$$

$$f_2(\mathbf{z}(t), d_2(t)) = -\frac{D_y \omega_\varphi(t)}{I_y + m_h l_{cm}^2} + \frac{2m_h \omega_\varphi(t) \sin(\theta(t)) l_{cm}^2 \cos(\theta(t)) \omega_\theta(t)}{I_y + m_h l_{cm}^2} + q_2(\theta(t), \omega_\theta(t), \varphi(t), \omega_\varphi(t), d_2(t)) \quad (4)$$

本文控制器的设计不需要系统的模型信息, 只需假定系统函数满足如下非常弱的一个先验条件:

假设 1. 函数 $f_1, f_2 \in C([0, \infty), \mathbf{R})$ 连续可微, 同时外部扰动 $d_i(t) \in C([0, \infty), \mathbf{R})$ 及其导数有界, 即存在 $N > 0$ 使得

$$\sup_{t \in [0, \infty)} (|\dot{d}_i(t)| + |d_i(t)|) \leq N, \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

2 控制器设计与主要结果

这一部分主要给出二自由度无人直升机姿态控制的非线性自抗扰控制设计和主要理论结果. 本节包括两个小节, 第 2.1 节给出非线性扩张状态观测器设计和基于扩张状态观测器的非线性不确定性因素补偿控制设计. 第 2.2 节给出本文的主要理论结果.

2.1 控制器设计

首先设计如下非线性扩张状态观测器通过系统的输出误差在线估计系统的总扰动:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t; r) = \hat{x}_2(t; r) + \frac{k_1}{r} g_1(r^2(x_1(t) - \hat{x}_1(t; r))) \\ \dot{\hat{x}}_2(t; r) = \hat{f}_1(t; r) + k_2 g_2(r^2(x_1(t) - \hat{x}_1(t; r))) + u_1^*(t) \\ \dot{\hat{f}}_1(t; r) = r k_3 g_3(r^2(x_1(t) - \hat{x}_1(t; r))) \\ \dot{\hat{x}}_3(t; r) = \hat{x}_4(t; r) + \frac{k_1}{r} g_1(r^2(x_3(t) - \hat{x}_3(t; r))) \\ \dot{\hat{x}}_4(t; r) = \hat{f}_2(t; r) + k_2 g_2(r^2(x_3(t) - \hat{x}_3(t; r))) + u_2^*(t) \\ \dot{\hat{f}}_2(t; r) = r k_3 g_3(r^2(x_3(t) - \hat{x}_3(t; r))) \end{cases} \quad (6)$$

这里 $r > 0$ 是增益参数, $\hat{x}_i(t; r)$, $\hat{f}_j(t; r)$ 分别是对 $x_i(t)$, $f_j(\cdot)$ 的估计, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2$, g_i 是如下定义的非线性 fal 函数^[15, 40]:

$$g_i(\tau) = \text{fal}(\tau, \eta_i, \delta) = \begin{cases} \frac{\tau}{\delta^{1-\eta_i}}, & |\tau| \leq \delta \\ |\tau|^{\eta_i} = |\tau|^{\eta_i} \text{sign}(\tau), & |\tau| > \delta \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\text{sign}(s)$ 是符号函数. 同时 $\eta_1 = \mu$, $\eta_2 = 2\mu - 1$, $\eta_3 = 3\mu - 2$, $\mu \in (\frac{2}{3}, 1)$. 为了方便讨论, 令 $\delta = 1$. 这里 k_1, k_2, k_3 是使得下述矩阵 K 是 Hurwitz 的常数:

$$K = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

容易验证矩阵 K 是 Hurwitz 的充要条件是 $k_i > 0, i = 1, 2, 3$, 且 $k_1 k_2 - k_3 > 0$.

分段光滑的 fal 函数 (7) 是最初用于构造扩张状态观测器的非线性函数^[15]. 最近文献 [40] 研究了这类非线性扩张状态观测器的参数整定和收敛性问题. 扩张状态观测器 (6) 是一个切换的扩张状态观测器, 即当 $r^2(x_j(t) - \hat{x}_j(t; r)) \leq \delta$ 时, 该扩张状态观测器是线性的, 当 $r^2(x_j(t) - \hat{x}_j(t; r)) > \delta$ 时, 该扩张状态观测器则为非线性的.

本文基于对“总扰动”的观测和补偿的非线性输出反馈控制——自抗扰控制构造如下:

$$\begin{cases} u_1^*(t) = \text{sat}_{M_1}(-[x_1(t)]^{\mu_1} - 2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_1(t; r)) \\ u_2^*(t) = \text{sat}_{M_2}(-[x_3(t)]^{\mu_1} - 2[\hat{x}_4(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_2(t; r)) \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\mu_1 = 2\mu - 1, \mu_2 = (2\mu - 1)/\mu$, $\text{sat}_{M_i}(\cdot)$ 是如下定义的饱和函数

$$\text{sat}_{M_i}(\tau) = \begin{cases} \tau, & |\tau| \leq M_i \\ M_i \text{sign}(\tau), & |\tau| > M_i \end{cases} \quad (10)$$

M_i 是依赖于初始状态上界的饱和参数, $i = 1, 2$, 其选取方式由式 (17) 给出. 由前述变量代换可得系统控制输入

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} \quad (11)$$

本文控制器设计的关键在于利用总扰动的观测值 $\hat{f}_i(t; r)$ 作为补偿项补偿总扰动 $f_i(\cdot)$, 在镇定项中采用了误差的非线性函数, 同时利用饱和函数做必要的限幅.

定义 Lyapunov 函数 $\tilde{V} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 为

$$\tilde{V}(z) = (z_1 \ z_2)P(z_1 \ z_2)^T, \ z = (z_1, z_2)^T \in \mathbf{R}^2 \quad (12)$$

其中 P 是 Lyapunov 方程 $A^T P + PA = -I$ 的对称正定矩阵解. 因为 A 是 Hurwitz 矩阵, 所以该 Lyapunov 方程存在唯一对称正定矩阵解. 令 $V_\mu : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 为

$$V_\mu(z) = \int_0^\infty \frac{1}{t^{\gamma+1}} (\alpha \circ \tilde{V})(tz_1, t^\mu z_2) dt \quad (13)$$

其中 $\gamma > 1$ 是常数, $\alpha \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 是如下定义的分段函数

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2}(\tau - 1)^2, & \tau \in [1, 2) \\ 1 - \frac{1}{2}(\tau - 3)^2, & \tau \in [2, 3) \\ 1, & \tau \in [3, +\infty) \end{cases} \quad (14)$$

容易验证 $\alpha(\cdot)$ 是连续可微函数, 且在 $(-\infty, 1]$ 上恒等于 0, 在 $[3, \infty)$ 中恒等于 1, 同时其导数 $\alpha'(\cdot)$ 在 (1, 3) 中大于 0.

我们需要使用系统的初始状态的上界来选取饱和参数 M_i . 令 β_i 为系统初始值的一个上界, 即

$$\beta_i \geq |x_{i0}|, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (15)$$

这里 $x_{i0} = x_i(0)$ 为系统的初始状态.

令

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{\nu \in \mathbf{R}^4 | V_\mu(\nu_1, \nu_2) + V_\mu(\nu_3, \nu_4) < A + 1\} \\ \nu &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \\ A &= 1 + \max_{|\nu_1| \leq \beta_1, |\nu_2| \leq \beta_2} V_\mu(\nu_1, \nu_2) + \\ &\quad \max_{|\nu_3| \leq \beta_3, |\nu_4| \leq \beta_4} V_\mu(\nu_3, \nu_4) \end{aligned} \quad (16)$$

选取饱和参数 $M_i, i = 1, 2$, 使得

$$\begin{aligned} M_1 &\geq \max_{\nu \in \mathcal{A}, |d_1| \leq N} (|\nu_1|^{\mu_1} + 2|\nu_2|^{\mu_2} + |f_1(\nu, d_1)|) + 1 \\ M_2 &\geq \max_{\nu \in \mathcal{A}, |d_2| \leq N} (|\nu_3|^{\mu_1} + 2|\nu_4|^{\mu_2} + |f_2(\nu, d_2)|) + 1 \end{aligned} \quad (17)$$

可以证明 (13) 中定义的 Lyapunov 函数是径向无界的正定函数, 因此上述定义的集合 \mathcal{A} 为 \mathbf{R}^4 中的有界闭集 (紧集).

2.2 主要结果

基于第 2.1 节中给出的非线性扩张状态观测器, 系统 (2) 在非线性反馈控制器 (9) 作用下的闭环系统为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = f_1(x(t), d_1(t)) + \text{sat}_{M_1}(-[x_1(t)]^{\mu_1} - 2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_1(t; r)) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = f_2(x(t), d_2(t)) + \text{sat}_{M_2}(-[x_3(t)]^{\mu_1} - 2[\hat{x}_4(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_2(t; r)) \\ \dot{\hat{x}}_1(t; r) = \hat{x}_2(t; r) + \frac{k_1}{r} g_1(r^2(x_1(t) - \hat{x}_1(t; r))) \\ \dot{\hat{x}}_2(t; r) = \hat{f}_1(t; r) + k_2 g_2(r^2(x_1(t) - \hat{x}_1(t; r))) + \text{sat}_{M_1}(-[x_1(t)]^{\mu_1} - 2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_1(t; r)) \\ \dot{\hat{f}}_1(t; r) = rk_3 g_3(r^2(x_1(t) - \hat{x}_1(t; r))) \\ \dot{\hat{x}}_3(t; r) = \hat{x}_4(t; r) + \frac{k_1}{r} g_1(r^2(x_3(t) - \hat{x}_3(t; r))) \\ \dot{\hat{x}}_4(t; r) = \hat{f}_2(t; r) + k_2 g_2(r^2(x_3(t) - \hat{x}_3(t; r))) + \text{sat}_{M_2}(-[x_3(t)]^{\mu_1} - 2[\hat{x}_4(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_2(t; r)) \\ \dot{\hat{f}}_2(t; r) = rk_3 g_3(r^2(x_3(t) - \hat{x}_3(t; r))) \end{cases} \quad (18)$$

对于上述控制闭环系统, 我们有如下主要结果:

定理 1. 假设式 (8) 中的矩阵 K 是 Hurwitz 的, 外部干扰 $d_1(t), d_2(t)$ 和非线性函数 $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ 满足假设 1, 则存在 $\mu^* \in (\frac{2}{3}, 1)$ 以及 $r^* > 0$, 对任意的 $\mu \in (\mu^*, 1)$, $r > r^*$, 以及任意给定的初始状态, 当饱和参数的选取满足式 (17) 时, 反馈控制闭环系统 (18) 的解满足

$$\begin{aligned} |x_i(t) - \hat{x}_i(t; r)| &\leq \frac{\tilde{\Gamma}}{r^3}, t \in [T, \infty), i = 1, 3 \\ |x_j(t) - \hat{x}_j(t; r)| &\leq \frac{\tilde{\Gamma}}{r^2}, t \in [T, \infty), j = 2, 4 \\ |f_k(x(t), d_k(t)) - \hat{f}_k(t; r)| &\leq \frac{\tilde{\Gamma}}{r}, t \in [T, \infty) \\ k = 1, 2 \end{aligned} \quad (19)$$

同时

$$\begin{aligned} |x_i(t)| &\leq \Gamma_1 \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2\mu-1}}, t \in [T, \infty), i = 1, 3 \\ |x_j(t)| &\leq \Gamma_2 \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\mu}{2\mu-1}}, t \in [T, \infty), j = 2, 4 \end{aligned} \quad (20)$$

这里 $\tilde{\Gamma}, \Gamma_1$ 和 Γ_2 是与 r 无关的常数, T 是与初值和 r 有关的一个常数.

注 1. 增益参数 r 与容许/期望的误差范围, 设计参数以及不确定性因素变化率的上界有关. 假设输出与目标值之间的允许误差不超过 σ , 由

$$\begin{aligned} |x_i(t)| &\leq \Gamma_1 \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2\mu-1}} < \sigma, \quad i = 1, 3 \\ |x_j(t)| &\leq \Gamma_2 \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\mu}{2\mu-1}} < \sigma, \quad j = 2, 4 \end{aligned} \quad (21)$$

可得增益参数 r 应满足

$$\begin{aligned} r &> \max\{r_1^*, r_2^*\}, \quad r_1^* = \left(\frac{\Gamma_1}{\sigma}\right)^{2\mu-1} \\ r_2^* &= \left(\frac{\Gamma_2}{\sigma}\right)^{\frac{2\mu-1}{\mu}} \end{aligned} \quad (22)$$

注 2. 定理 1 中的正数 Γ_i 主要依赖于系统总扰动的变化快慢, 总扰动变得越快, Γ_i 越大, 反之 Γ_i 越小 (具体表达式见式 (49)). 当总扰动在设定值处为常数时可实现误差系统的渐近稳定.

还需说明的是当 $\mu \in (\frac{2}{3}, 1)$ 时 $2\mu - 1 < \mu < 1$, $1/(2\mu - 1) > 1$ 且 $\mu/(2\mu - 1) > 1$. 因此当 r 趋于无穷大时 $(1/r)^{1/(2\mu-1)}$, $(1/r)^{\mu/(2\mu-1)}$ 收敛于 0, 且收敛速度快于 $1/r$ 收敛于 0 的速度. 这意味着在相同

的增益参数下, 本文提出的非线性自抗扰控制的精度高于线性自抗扰控制的精度.

3 主要结果的证明

为证明本文主要结果, 需要定义如下向量场和系统

$$\begin{aligned} F_\mu(\mathbf{z}) &= (z_2, -[z_1]^{\mu_1} - 2[z_2]^{\mu_2})^T \\ \dot{z}(t) &= F_\mu(\mathbf{z}(t)), \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2)^T \end{aligned} \quad (23)$$

可以证明向量场 $F_\mu(\cdot)$ 是 $\mu - 1$ 度加权齐次的. 关于加权齐次函数向量场的定义和基本性质参见文献 [41].

关于式 (13) 中定义的 Lyapunov 函数和式 (23) 中定义的向量场, 我们有如下结论:

引理 1^[42]. 若矩阵 (8) 是 Hurwitz 的, 对于上文定义的 Lyapunov 函数 $V_\mu(\cdot)$ 和向量场 $F_\mu(\cdot)$, 存在 $\mu^* \in (0, 1)$, 使得对任意的 $\mu \in (\mu^*, 1)$, $\gamma > 1$, 都有:

- 1) V_μ 是径向无界的正定函数;
- 2) $L_{F_\mu} V_\mu$ 是负定的, 这里 $L_{F_\mu} V_\mu(\mathbf{z}) = \frac{\partial V_\mu(\mathbf{z})}{\partial z_1} z_2 + \frac{\partial V_\mu(\mathbf{z})}{\partial z_2} \cdot (-[z_1]^{\mu_1} - 2[z_2]^{\mu_2})$;
- 3) V_μ 是 γ 度关于权数 $\{1, \mu\}$ 的加权齐次函数, $L_{F_\mu} V_\mu$ 是 $\gamma + \mu - 1$ 度关于权数 $\{1, \mu\}$ 的加权齐次函数.

可以证明 $|z_1|, |z_2|$ 是作为 (z_1, z_2) 的函数, 分别是 $1, \mu$ 度关于权数是 $\{1, \mu\}$ 的加权齐次函数. 由 $V_\mu(\cdot)$ 的加权齐次性可得 $\frac{\partial V_\mu(\mathbf{z})}{\partial z_1}, \frac{\partial V_\mu(\mathbf{z})}{\partial z_2}$ 分别是 $\gamma - 1, \gamma - \mu$ 度关于权数是 $\{1, \mu\}$ 的加权齐次函数.

关于不同度数相同权数的加权齐次函数我们有如下引理:

引理 2^[41]. 假设 $V_1(\cdot)$ 和 $V_2(\cdot)$ 都是 \mathbf{R}^2 上的连续函数, 并且分别是 l_1, l_2 度关于相同权数的加权齐次函数, 并且 $V_1(\cdot)$ 正定, 则对任意的 $z \in \mathbf{R}^2$, 都有

$$c_1(V_1(\mathbf{z}))^{\frac{l_2}{l_1}} \leq V_2(\mathbf{z}) \leq c_2(V_1(\mathbf{z}))^{\frac{l_2}{l_1}}, \quad (24)$$

其中 $c_1 = \min_{z \in V_1^{-1}(1)} V_2(\mathbf{z})$, $c_2 = \max_{z \in V_1^{-1}(1)} V_2(\mathbf{z})$, $V_1^{-1}(1) = \{\nu \in \mathbf{R}^2 | V_1(\nu) = 1\}$.

由引理 1 和 2 我们有

$$\begin{aligned} |z_1| &\leq B_1(V_\mu(\mathbf{z}))^{\frac{1}{\gamma}}, \quad |z_2| \leq B_2(V_\mu(\mathbf{z}))^{\frac{\mu}{\gamma}} \\ L_{F_\mu} V_\mu(\mathbf{z}) &\leq -B_0(V_\mu(\mathbf{z}))^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}} \\ \left| \frac{\partial V_\mu(\mathbf{z})}{\partial z_1} \right| &\leq B_3(V_\mu(\mathbf{z}))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ \left| \frac{\partial V_\mu(\mathbf{z})}{\partial z_2} \right| &\leq B_4(V_\mu(\mathbf{z}))^{\frac{\gamma-\mu}{\gamma}} \end{aligned} \quad (25)$$

这里 $B_0 > 0, B_i > 1, i = 1, 2, 3, 4$.

为证明系统输出收敛于其设定值, 我们需要扩张状态观测器的收敛性. 由文献 [40] 可得

引理 3^[40]. 如果假设 1 成立, 则存在 $\mu^* \in (\frac{2}{3}, 1)$, 对任意的 $\mu \in (\mu^*, 1)$, 以下结论成立:

1) 若 $\sup_{t \in [0, T]} |z(t)| < \infty, T > 0$, 则对任意的 $t^* \in (0, T)$, 存在 $r_1^* > 0$, 使得 $\forall r > r_1^*, t \in [t^*, T]$

$$\begin{aligned} |x_i(t) - \hat{x}_i(t; r)| &\leq \frac{\tilde{\Gamma}}{r^3}, \quad i = 1, 3 \\ |x_j(t) - \hat{x}_j(t; r)| &\leq \frac{\tilde{\Gamma}}{r^2}, \quad j = 2, 4 \\ |f_k(z(t), d_k(t)) - \hat{f}_k(t; r)| &\leq \frac{\tilde{\Gamma}}{r}, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (26)$$

2) 若 $\sup_{t \in [0, \infty)} |z(t)| < \infty$, 则对于任意的 $t^* > 0$, 存在 $r_2^* > 0$, 使得 $\forall r > r_2^*, t \in [t^*, +\infty)$,

$$\begin{aligned} |x_i(t) - \hat{x}_i(t; r)| &\leq \frac{\tilde{\Gamma}}{r^3}, \quad i = 1, 3 \\ |x_j(t) - \hat{x}_j(t; r)| &\leq \frac{\tilde{\Gamma}}{r^2}, \quad j = 2, 4 \\ |f_k(z(t), d_k(t)) - \hat{f}_k(t; r)| &\leq \frac{\tilde{\Gamma}}{r}, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (27)$$

这里 $x_i(t), \hat{x}_i(t; r), i = 1, 2, 3, 4$ 分别是系统 (2) 和扩张状态观测器 (6) 的状态, $\tilde{\Gamma}$ 是与 r 无关的常数.

因为当系统的状态有界时引理 3 成立, 为使用引理 3 证明本文主要结果, 我们需要证明如下有界性结论:

引理 4. 存在 $\mu^* \in (\frac{2}{3}, 1), r^* > 1$, 使得对任意的 $\mu \in (\mu^*, 1), r > r^*$, 都有

$$\{z(t) | t \in [0, \infty)\} \subset \mathcal{A} \quad (28)$$

这里 $z(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$ 是系统 (18) 的解, \mathcal{A} 是式 (16) 中定义的紧集.

证明. 本引理的证明主要利用引理 3 的结论 (1) 和反证法. 定义 Lyapunov 函数 $\bar{V}_\mu : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \bar{V}_\mu(\nu) &= V_\mu(\nu_1, \nu_2) + V_\mu(\nu_3, \nu_4) \\ \nu &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)^T \end{aligned} \quad (29)$$

容易证得 $\bar{V}_\mu(\cdot)$ 是径向无界的正定函数.

接下来我们用反证法证明引理 4. 假设引理 4 的结论不正确, 由于系统的初始状态满足 $\bar{V}_\mu(x(0)) \leq A$, 根据紧集 \mathcal{A} 的定义, 对任意的 $r > 0$, 存在正数 t_1, t_2 , 满足 $0 < t_1 < t_2$, 使得

$$\bar{V}_\mu(x(t_1)) = A, \quad \bar{V}_\mu(z(t_2)) = A + 1 \quad (30)$$

且

$$\begin{aligned} \bar{V}_\mu(x(t)) &\leq A + 1, \quad t \in [0, t_2] \\ A &\leq \bar{V}_\mu(x(t)) \leq A + 1, \quad t \in [t_1, t_2] \end{aligned} \quad (31)$$

考虑到 $\bar{V}_\mu(\cdot)$ 是径向无界函数, 由式 (31) 中的第一个公式可知系统的状态 $x(t)$ 在 $[0, t_2]$ 有界. 再根据引理 3 之式 (1) 可知存在 $\mu_1^* \in (0, 1), r_1^* > 0$, 使得对任意的 $\mu \in [\mu_1^*, 1), r > r_1^*, t \in [t_1, t_2]$, 都有

$$\begin{aligned} |2[\hat{x}_i(t; r)]^{\mu_2} - 2[x_i(t)]^{\mu_2}| &\leq \min \left\{ \sigma, \frac{1}{2} \right\}, \quad i = 2, 4 \\ |\hat{f}_j(t; r) - f_j(x(t), d_j(t))| &\leq \min \left\{ \sigma, \frac{1}{2} \right\}, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (32)$$

这里 $\sigma = B_0/(4B_4)$, 正数 B_0, B_4 与式 (25) 中的常数相同. 因此对任意的 $r > r_1^*, t \in [t_1, t_2]$,

$$\begin{aligned} | - [x_1(t)]^{\mu_1} - 2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_1(t; r) | &\leq \\ \max_{x \in \mathcal{A}, |d_1| \leq N} (|x_1(t)|^{\mu_1} + 2|x_2(t)|^{\mu_2} + & \\ |f_1(x(t), d_1(t))|) + |2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2} - 2[x_2(t)]^{\mu_2}| + & \\ |\hat{f}_1(t; r) - f_1(x(t), d_1(t))| &\leq M_1 \end{aligned} \quad (33)$$

由饱和函数 $\text{sat}_{M_i}(\cdot)$ 以及 M_i 的定义, 对任意的 $t \in [t_1, t_2]$,

$$\begin{aligned} \text{sat}_{M_1}(-[x_1(t)]^{\mu_1} - 2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_1(t; r)) &= \\ -[x_1(t)]^{\mu_1} - 2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_1(t; r) \end{aligned} \quad (34)$$

同理, 对任意的 $t \in [t_1, t_2]$,

$$\begin{aligned} \text{sat}_{M_2}(-[x_3(t)]^{\mu_1} - 2[\hat{x}_4(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_2(t; r)) &= \\ -[x_3(t)]^{\mu_1} - 2[\hat{x}_4(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_2(t; r) \end{aligned} \quad (35)$$

因此对于任意的 $t \in [t_1, t_2]$, 我们有:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = f_1(x(t), d_1(t)) - [x_1(t)]^{\mu_1} - \\ \quad 2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_1(t; r) - \\ \quad 2[x_2(t)]^{\mu_2} + 2[x_2(t)]^{\mu_2} \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = f_2(x(t), d_2(t)) - [x_3(t)]^{\mu_1} - \\ \quad 2[\hat{x}_4(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_2(t; r) - \\ \quad 2[x_4(t)]^{\mu_2} + 2[x_4(t)]^{\mu_2} \end{cases} \quad (36)$$

计算 Lyapunov 函数 \bar{V}_μ 沿系统 (36) 关于时间 $t \in [t_1, t_2]$ 的导数, 由 $(|z_1| + |z_2|)^\theta \leq |z_1|^\theta + |z_2|^\theta \leq 2(|z_1| + |z_2|)^\theta$ 以及上述结论可得

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{V}_\mu(\mathbf{x}(t))}{dt} \Big|_{(36)} = & \frac{dV_\mu(x_1(t), x_2(t))}{dt} + \frac{dV_\mu(x_3(t), x_4(t))}{dt} = \\ & L_{F_\mu} V_\mu(x_1(t), x_2(t)) + \frac{\partial V_\mu(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_2(t)} \cdot \\ & (f_1(\mathbf{x}(t), d_1(t)) - \hat{f}_1(t; r) + 2[x_2(t)]^{\mu_2} - \\ & 2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2}) + L_{F_\mu} V_\mu(x_3(t), x_4(t)) + \\ & \frac{\partial V_\mu(x_3(t), x_4(t))}{\partial x_4(t)} \cdot (f_2(x(t), d_2(t)) - \\ & \hat{f}_2(t; r) + 2[x_4(t)]^{\mu_2} - 2[\hat{x}_4(t; r)]^{\mu_2}) \leq \\ & -B_0(V_\mu(x_1(t), x_2(t)))^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}} - \\ & B_0(V_\mu(x_3(t), x_4(t)))^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}} + \\ & 2\sigma B_4(V_\mu(x_1(t), x_2(t)))^{\frac{\gamma-\mu}{\gamma}} + \\ & 2\sigma B_4(V_\mu(x_3(t), x_4(t)))^{\frac{\gamma-\mu}{\gamma}} \leq \\ & -B_0(\bar{V}_\mu(x(t)))^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}} + \\ & 4\sigma B_4(\bar{V}_\mu(x(t)))^{\frac{\gamma-\mu}{\gamma}} \end{aligned} \quad (37)$$

对于任意的 $\mu \in (\mu_1^*, 1)$, 有 $\frac{\gamma + \mu - 1}{\gamma} \geq \frac{\gamma - \mu}{\gamma}$, 因此

$$\frac{d\bar{V}_\mu(\mathbf{x}(t))}{dt} \leq -(B_0 - 4\sigma B_4)(\bar{V}_\mu(\mathbf{x}(t)))^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}} \leq 0 \quad (38)$$

这意味着当 $t \in [t_1, t_2]$ 时, $\bar{V}_\mu(x(t))$ 随 t 的增加而单调减少. 这与式 (30) 矛盾. 故引理 4 成立.

接下来我们利用引理 3 和引理 4 证明本文的主要结果.

定理 1 的证明. 由引理 4, 存在 $\mu_1^* \in (0, 1)$, $r_1^* > 0$ 使得对任意的 $\mu \in [\mu_1^*, 1)$, $r > r_1^*$, $t \in [0, \infty)$, 都有 $x(t) \in \mathcal{A}$. 由引理 3 之式 (2), 存在 $\mu_2^* \in (\frac{2}{3}, 1)$, $r_2^* > \max\{1, r_1^*\}$, 使得对任意的 $\mu \in (\mu_2^*, 1)$, $r > r_2^*$, $t \in [0, \infty)$, 都有

$$\begin{aligned} |\hat{x}_j(t; r) - x_j(t)| & \leq \frac{\tilde{\Gamma}}{r^2} \\ |2[\hat{x}_j(t; r)]^{\mu_2} - 2[x_j(t)]^{\mu_2}| & \leq \frac{1}{2}, j = 2, 4 \\ |f_k(x(t), d_k(t)) - \hat{f}_k(t; r)| & \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\tilde{\Gamma}}{r}\right\}, k = 1, 2 \end{aligned} \quad (39)$$

类似于式 (34) 和 (35) 的证明可得对任意 $t \in [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} \text{sat}_{M_1}(-[x_1(t)]^{\mu_1} - 2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_1(t; r)) = \\ -[x_1(t)]^{\mu_1} - 2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_1(t; r) \end{aligned} \quad (40)$$

因此对于任意的 $t \in (0, \infty)$, 都有:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = f_1(\mathbf{x}(t), d_1(t)) - [x_1(t)]^{\mu_1} - \\ \quad 2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2} - \hat{f}_1(t; r) - \\ \quad 2[x_2(t)]^{\mu_2} + 2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2} \end{cases} \quad (41)$$

计算 Lyapunov 函数 $V_\mu(x_1(t), x_2(t))$ 沿系统 (41) 关于时间 t 的导数, 且由 $||z_1]^{\mu_2} - [z_2]^{\mu_2}| \leq 2|z_1 - z_2|^{\mu_2}$ 可得:

$$\begin{aligned} \frac{dV_\mu(x_1(t), x_2(t))}{dt} \Big|_{(41)} = & L_{F_\mu} V_\mu(x_1(t), x_2(t)) + \frac{\partial V_\mu(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_2(t)} \cdot \\ & (2[x_2(t)]^{\mu_2} - 2[\hat{x}_2(t; r)]^{\mu_2} + \\ & f_1(x(t), d_1(t)) - \hat{f}_1(t; r) \leq \\ & -B_0(V_\mu(x_1(t), x_2(t)))^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}} + \\ & \frac{(\tilde{\Gamma} + 4\tilde{\Gamma}^{\mu_2})B_4}{r} (V_\mu(x_1(t), x_2(t)))^{\frac{\gamma-\mu}{\gamma}} \end{aligned} \quad (42)$$

由式 (42) 可知, 当

$$V_\mu(x_1(t), x_2(t)) > \left(\frac{(\tilde{\Gamma} + 4\tilde{\Gamma}^{\mu_2})B_4}{B_0 r}\right)^{\frac{\gamma}{2\mu-1}} \quad (43)$$

有

$$\frac{dV_\mu(x_1(t), x_2(t))}{dt} \Big|_{(41)} < 0 \quad (44)$$

即当

$$V_\mu(x_1(t), x_2(t)) > \left(\frac{(\tilde{\Gamma} + 4\tilde{\Gamma}^{\mu_2})B_4}{B_0 r}\right)^{\frac{\gamma}{2\mu-1}} \quad (45)$$

$V_\mu(x_1(t), x_2(t))$ 随时间 t 的增大而严格单调递减. 因此存在 $t_1^* > 0$, 使得对任意的 $t > t_1^*$,

$$V_\mu(x_1(t), x_2(t)) \leq \left(\frac{(\tilde{\Gamma} + 4\tilde{\Gamma}^{\mu_2})B_4}{B_0 r}\right)^{\frac{\gamma}{2\mu-1}}, \quad \forall t > t_1^* \quad (46)$$

这与结论 (25) 中的 $|z_1| \leq B_1(V_\mu(z))^{\frac{1}{\gamma}}$ 和 $|z_2| \leq B_2(V_\mu(z))^{\frac{\mu}{\gamma}}$ 相结合可以推出

$$|x_1(t)| \leq \Gamma_1 \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2\mu-1}}, \quad |x_2(t)| \leq \Gamma_2 \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\mu}{2\mu-1}} \quad (47)$$

同理可得

$$|x_3(t)| \leq \Gamma_1 \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2\mu-1}}, \quad |x_4(t)| \leq \Gamma_2 \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\mu}{2\mu-1}} \quad (48)$$

这里 Γ_1, Γ_2 是与 r 无关的常数:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= B_1 \left(\frac{(\tilde{\Gamma} + 4\tilde{\Gamma}^{\mu_2})B_4}{B_0} \right)^{\frac{1}{2\mu-1}} \\ \Gamma_2 &= B_2 \left(\frac{(\tilde{\Gamma} + 4\tilde{\Gamma}^{\mu_2})B_4}{B_0} \right)^{\frac{\mu}{2\mu-1}}\end{aligned}\quad (49)$$

4 数值仿真

本节利用仿真来验证本文设计方法的有效性和优越性. 在仿真中我们将本文提出的设计方法和滑模控制^[9]以及已有自抗扰控制进行对比. 自抗扰控制方法的改进有很多, 扩张状态观测器也有很多新的设计方法, 如文献 [26, 43–44] 等, 其中^[43]中有关于时变增益的扩张状态观测器设计, 即扩张状态观测器中增益参是随时间变化的函数. 我们将对线性自抗扰控制, 具有时变参数的自抗扰控制和本文提出的非线性自抗扰控制三种自抗扰控制方法和滑模控制进行仿真对比.

在仿真中, 俯仰角和偏航角目标值均设置为分段函数

$$m(t) = \begin{cases} -1\text{rad}, & 0 \leq t < 30 \\ 1\text{rad}, & 30 \leq t \leq 60 \\ -1\text{rad}, & 60 \leq t < 90 \\ 1\text{rad}, & 90 \leq t \leq 120 \end{cases}\quad (50)$$

选取函数 $q_1(\cdot)$, $q_2(\cdot)$ 为:

$$q_1(t) = \sin(2t), \quad q_2(t) = e^{-t} \sin(t + \pi/4)\quad (51)$$

根据文献 [9], 非奇异终端超扭滑模控制 (Nonsingular terminal super twisted sliding mode control, NSTST-SMC) 控制器设计为

$$\begin{aligned}s &= \dot{\epsilon} + \beta_1 \epsilon + \beta_2 e^{-\lambda t} \epsilon^{-2\alpha}, \\ u &= -\beta_1 \dot{\epsilon} - \beta_2 [-e^{-\lambda t} \epsilon^{-2\alpha} (\lambda + 2\alpha \dot{\epsilon})] - \\ &\quad \alpha_1 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) - \alpha_2 \int_0^t \text{sign}(s) d\tau,\end{aligned}\quad (52)$$

这里 $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_3)^T$, $\epsilon_i(t) = x_i(t) - x_{id}(t)$, $i = 1, 3$.

在仿真中, NSTST-SMC 控制器中的参数也按照文献中的设定值, 具体数值选取为: $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4.5$, $\beta_1 = 0.25$, $\beta_2 = 0.5$, $\lambda = 0.35$, $\alpha = 0.5$.

所谓线性自抗扰控制是指在扩张状态观测器 (6) 中将非线性函数 $g_i(\tau)$ 用恒等函数 $h_i(\tau) = \tau$ 来替换, 同时采用如下的线性不确定性因素补偿控制:

$$\begin{aligned}u_1^*(t) &= \text{sat}_{M_1}(-x_1(t) - 2\hat{x}_2(t; r) - \hat{f}_1(t; r)) \\ u_2^*(t) &= \text{sat}_{M_2}(-x_3(t) - 2\hat{x}_4(t; r) - \hat{f}_2(t; r))\end{aligned}\quad (53)$$

具有时变参数的自抗扰控制即将线性自抗扰控制中扩张状态观测器的增益参数替换为时变函数,

这里取该时变函数为 $e^{0.6t}$. 在线性与非线性扩张状态观测器中选取相同的增益参数 $r = 60$ 以及相同的设计参数 $k_1 = k_2 = 3$, $k_3 = 1$. 在线性与非线性自抗扰控制中的饱和参数均为 $M_1 = M_2 = 10$. 非线性扩张状态观测器中函数 $g_i(\cdot)$ 中参数 η_i 分别选取为 $\eta_1 = 0.7$, $\eta_2 = 0.4$, $\eta_3 = 0.1$.

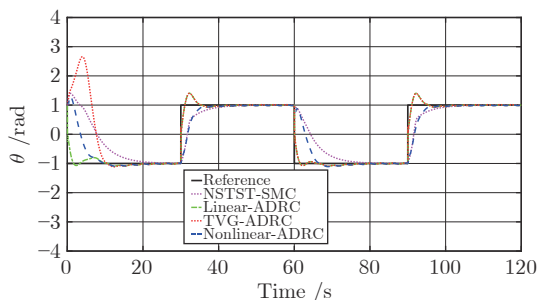
对于上述不同的控制方法, 采用 Euler 折线法, 选取积分步长 h 为 0.001, 系统初值为 (1, 1), 分别选取三组系统参数如表 1 所示进行仿真.

表 1 三组系统参数
Table 1 Three sets of system parameters

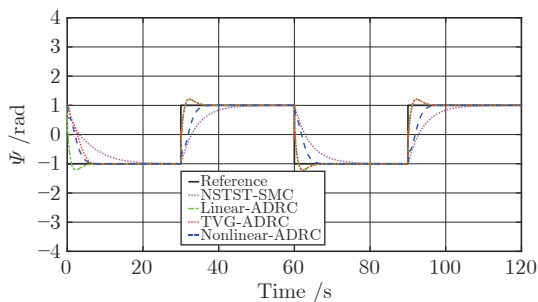
参数	I	II	III
τ_{pp} (Nm/V)	0.204	2.04	20.4
τ_{py} (Nm/V)	0.0068	0.068	0.68
τ_{yy} (Nm/V)	0.072	0.72	7.2
τ_{yp} (Nm/V)	0.0219	0.219	2.19
D_p (N/V)	0.8	8	80
D_y (N/V)	0.318	3.18	31.8
I_p (kg · m ³)	0.0384	0.384	3.84
I_y (kg · m ³)	0.0432	0.432	4.32
m (kg)	1.3872	13.872	138.72
l (m)	0.186	1.86	18.6
g (m/s ⁻²)	9.81	9.81	9.81

图 2 是第 I 组参数输出不受量测噪声污染时四种控制方法的仿真结果. 图 2 (a) 中的曲线分别表示期望值 (Reference), NSTST-SMC 控制驱动下的俯仰角输出, 线性自抗扰控制 (Linear active disturbance rejection control, linear ADRC) 驱动下的俯仰角输出 (Linear-ADRC), 具有时变增益的自抗扰控制 (Time-varying-gain active disturbance rejection control, TVG ADRC) 驱动下的俯仰角输出, 以及非线性自抗扰控制 (Nonlinear active disturbance rejection control, nonlinear ADRC) 驱动下的俯仰角输出. 图 2 (b) 中的曲线分别表示期望值 (Reference), NSTST-SMC 控制器驱动下的偏航角输出, 线性自抗扰控制器驱动下的偏航角输出, 具有时变增益的自抗扰控制器驱动下的偏航角输出, 以及非线性自抗扰控制器驱动下的偏航角输出.

从图 2 (a) 可看出在第 I 组参数无噪声污染情况下四种方法均能驱使系统输出跟踪到目标值. 对比发现非奇异终端超扭滑模控制 (NSTST-SMC) 方法较之于三类自抗扰控制在每个阶段跟踪目标值的响应时间要长. 线性自抗扰控制和具有时变增益的自抗扰控制驱动的俯仰角输出有一些超调, 而非

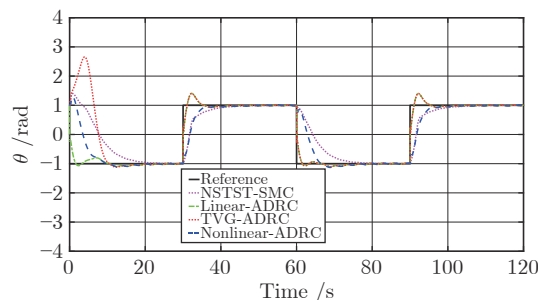


(a) 第 I 组参数下不受噪声污染时的俯仰角数值结果
(a) Numerical results of pitch angle without noise pollution under parameters group I

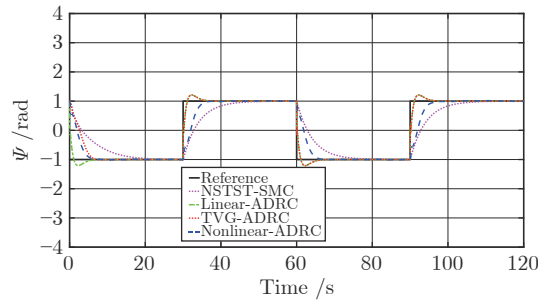


(b) 第 I 组参数下不受噪声污染时的偏航角数值结果
(b) Numerical results of yaw angle without noise pollution under parameters group I

图 2 第 I 组参数下不受噪声污染时的数值结果
Fig.2 Numerical results without noise pollution under parameters group I



(a) 第 I 组参数下受噪声污染时的俯仰角数值结果
(a) Numerical results of pitch angle with noise pollution under parameters group I



(b) 第 I 组参数下受噪声污染时的偏航角数值结果
(b) Numerical results of yaw angle with noise pollution under parameters group I

图 3 第 I 组参数下受噪声污染时的数值结果
Fig.3 Numerical results with noise pollution under parameters group I

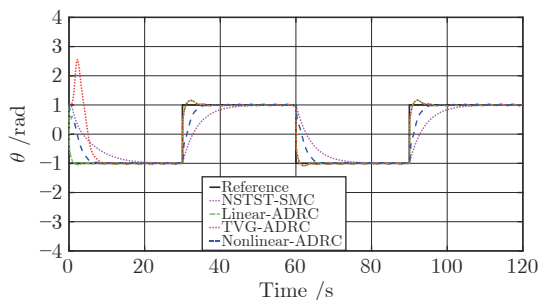
线性自抗扰控制驱动下几乎没有超调. 图 2 (b) 所示偏航角的跟踪仿真结果类似于俯仰角的跟踪.

图 3 是对系统输出遭受量测噪声污染时的仿真结果, 我们加入了 0.0001 倍的高斯噪声, 高斯噪声由 MATLAB 命令 “randn” 生成. 由图 3 可看出, 较小的噪声对四种不同控制方法几乎没有影响.

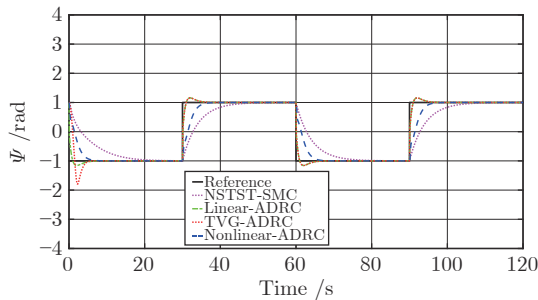
图 4 和图 5 分别是在第 II 组参数下当系统输出不受量测噪声污染和输出受同等强度 (0.1 倍的高斯噪声) 的量测噪声污染时四种方法的仿真结果, 图 6 和图 7 分别是第 III 组参数在输出不受量测噪声污染和输出受同等强度 (0.1 倍的高斯噪声) 的量测噪声污染下四种方法的仿真结果. 由图 4-7 可见, 当噪音加强时线性自抗扰控制、具有时变增益的自抗扰控制与非奇异终端超扭滑模控制发散或者出现较大波动, 而本文提出的非线性自抗扰控制仍然有较好的控制效果.

5 结论

本文研究了二自由度无人直升机受内外不确定性因素作用下的高性能飞行姿态控制问题. 为提高控制系统的抗干扰能力, 提出了非线性自抗扰姿态控制设计方法, 并证明了闭环控制系统的稳定性和收敛性, 从理论上保证了该控制方法的有效性. 仿

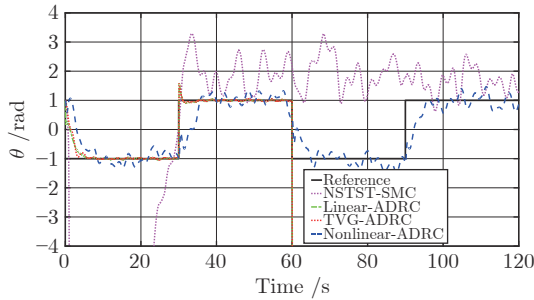


(a) 第 II 组参数下不受噪声污染时的俯仰角数值结果
(a) Numerical results of pitch angle without noise pollution under parameters group II

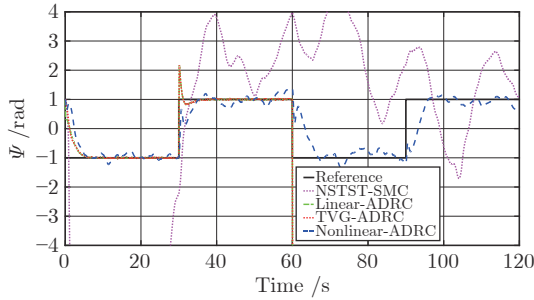


(b) 第 II 组参数下不受噪声污染时的偏航角数值结果
(b) Numerical results of yaw angle without noise pollution under parameters group II

图 4 第 II 组参数下不受噪声污染时的数值结果
Fig.4 Numerical results without noise pollution under parameters group II

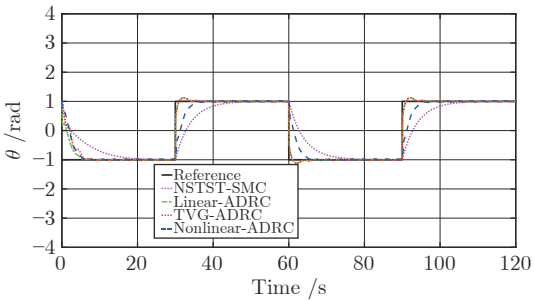


(a) 第 II 组参数下受噪声污染时的俯仰角数值结果
(a) Numerical results of pitch angle with noise pollution under parameters group II

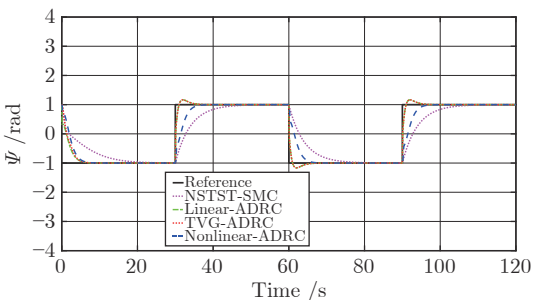


(b) 第 II 组参数下受噪声污染时的偏航角数值结果
(b) Numerical results of yaw angle with noise pollution under parameters group II

图 5 第 II 组参数下受噪声污染时的数值结果
Fig.5 Numerical results with noise pollution under parameters group II

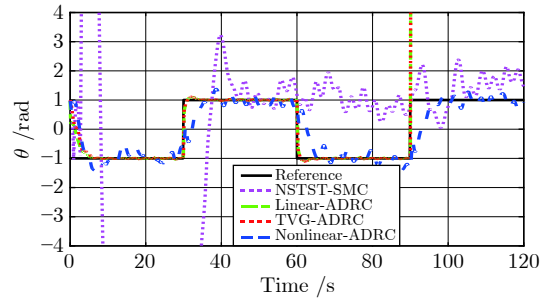


(a) 第 III 组参数下不受噪声污染时的俯仰角数值结果
(a) Numerical results of pitch angle without noise pollution under parameters group III

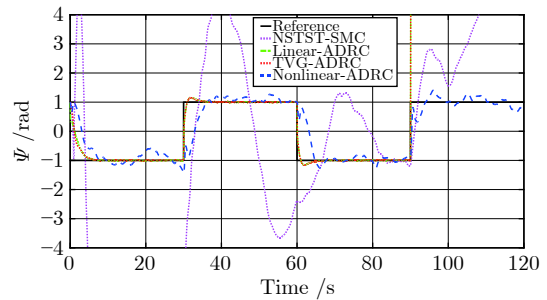


(b) 第 III 组参数下不受噪声污染时的偏航角数值结果
(b) Numerical results of yaw angle without noise pollution under parameters group III

图 6 第 III 组参数下不受噪声污染时的数值结果
Fig.6 Numerical results without noise pollution under parameters group III



(a) 第 III 组参数下受噪声污染时的俯仰角数值结果
(a) Numerical results of pitch angle with noise pollution under parameters group III



(b) 第 III 组参数下受噪声污染时的偏航角数值结果
(b) Numerical results of yaw angle with noise pollution under parameters group III

图 7 第 III 组参数下受噪声污染时的数值结果
Fig.7 Numerical results with noise pollution under parameters group III

真结果显示本文提出的非线性自抗扰控制具有更好的性能品质。在今后的研究中我们将本文的方法拓展到多旋翼无人机以及无人机编队等更复杂对象的高性能控制，同时将自抗扰控制方法与其他优化控制方法相结合，发展复杂受控对象的新型高性能控制方法。

References

- 1 Gao W N, Huang M Z, Jiang Z P, Chai T Y. Sampled-data-based adaptive optimal output-feedback control of a 2-degree-of-freedom helicopter. *IET Control Theory & Applications*, 2016, **10**(12): 1440-1447
- 2 Yu Z Q, Qu Y H, Zhang Y M. Safe control of trailing UAV in close formation flight against actuator fault and wake vortex effect. *Aerospace Science and Technology*, 2018, **77**: 189-205
- 3 Wang Ning, Wang Yong. Fuzzy uncertainty observer based adaptive dynamic surface control for trajectory tracking of a quadrotor. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(4): 685-695 (王宁, 王永. 基于模糊不确定观测器的四旋翼飞行器自适应动态面轨迹跟踪控制. *自动化学报*, 2018, **44**(4): 685-695)
- 4 Song Z K, Sun K B. Adaptive compensation control for attitude adjustment of quad-rotor unmanned aerial vehicle. *ISA Transactions*, 2017, **69**: 242-255
- 5 SaiCharanSagar A, Vaitheeswaran S M, Shendge P D. Uncertainty estimation based approach to attitude control of fixed wing UAV. *IFAC-PapersOnLine*, 2016, **49**(1): 278-283

- 6 Derafa L, El Hadri A, Fridman L. External perturbation estimation based on super-twisting algorithm for attitude control of UAVs. *IFAC Proceedings Volumes*, 2012, **45**(13): 746–752
- 7 Humaidi A J, Hasan A F. Particle swarm optimization-based adaptive super-twisting sliding mode control design for 2-degree-of-freedom helicopter. *Measurement and Control*, 2019, **52**(9-10): 1403–1419
- 8 Zhong Y J, Zhang Y M, Zhang W, Zuo J Y, Zhan H. Robust actuator fault detection and diagnosis for a quadrotor UAV with external disturbances. *IEEE Access*, 2018, **6**: 48169–48180
- 9 Muñoz F, González-Hernández I, Salazar S, Espinoza E S, Lozano R. Second order sliding mode controllers for altitude control of a quadrotor UAS: Real-time implementation in outdoor environments. *Neurocomputing*, 2017, **233**: 61–71
- 10 Guzey H M, Dierks T, Jagannathan S, Acar L. Modified consensus-based output feedback control of quadrotor UAV formations using neural networks. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2019, **94**(1): 283–300
- 11 Xin Y, Qin Z C, Sun J Q. Input-output tracking control of a 2-DOF laboratory helicopter with improved algebraic differential estimation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, **116**: 843–857
- 12 Ouyang Y C, Dong L, Xue L, Sun C Y. Adaptive control based on neural networks for an uncertain 2-DOF helicopter system with input deadzone and output constraints. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2019, **6**(3): 807–815
- 13 Boukadida W, Benamor A, Messaoud H, Siarry H. Multi-objective design of optimal higher order sliding mode control for robust tracking of 2-DoF helicopter system based on metaheuristics. *Aerospace Science and Technology*, 2019, **91**: 442–455
- 14 Sadala S P, Patre B M. A new continuous sliding mode control approach with actuator saturation for control of 2-DOF helicopter system. *ISA Transactions*, 2018, **74**: 165–174
- 15 Han J Q. From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, **56**(3): 900–906
- 16 Dong L L, Zheng Q, Gao Z Q. On control system design for the conventional mode of operation of vibrational gyroscopes. *IEEE Sensors Journal*, 2008, **8**(11): 1871–1878
- 17 Sun L, Li D H, Lee K Y. Enhanced decentralized PI control for fluidized bed combustor via advanced disturbance observer. *Control Engineering Practice*, 2015, **42**: 128–139
- 18 Song K, Hao T Y, Xie H. Disturbance rejection control of air-fuel ratio with transport-delay in engines. *Control Engineering Practice*, 2018, **79**: 36–49
- 19 Kang Ying, Li Dong-Hai, Lao Da-Zhong. Performance comparison of active disturbance rejection control and sliding mode control in spacecraft attitude control. *Control Theory & Applications*, 2013, **30**(12): 1623–1629
(康莹, 李东海, 老大中. 航天器姿态的自抗扰控制与滑模控制的性能比较. 控制理论与应用, 2013, **30**(12): 1623–1629)
- 20 Ma Z Y, Zhu X P, Zhou Z. On-ground lateral direction control for an unswept flying-wing UAV. *The Aeronautical Journal*, 2019, **123**(1261): 416–432
- 21 Zhang S C, Xue X Y, Chen C, Sun Z, Sun T. Development of a low-cost quadrotor UAV based on ADRC for agricultural remote sensing. *International Journal of Agricultural and Biological Engineering*, 2019, **12**(4): 82–87
- 22 Yu B, Kim S, Suk J. Robust control based on ADRC and DOBC for small-scale helicopter. *IFAC-PapersOnLine*, 2019, **52**(12): 140–145
- 23 Freidovich L B, Khalil H K. Performance recovery of feedback-linearization-based designs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(10): 2324–2334
- 24 Chen Zeng-Qiang, Sun Ming-Wei, Yang Rui-Guang. On the stability of linear active disturbance rejection control. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 574–580
(陈增强, 孙明玮, 杨瑞光. 线性自抗扰控制器的稳定性研究. 自动化学报, 2013, **39**(5): 574–580)
- 25 Xue W C, Huang Y. Performance analysis of active disturbance rejection tracking control for a class of uncertain LTI systems. *ISA Transactions*, 2015, **58**: 133–154
- 26 Pu Z Q, Yuan R Y, Yi J Q, Tan X M. A class of adaptive extended state observers for nonlinear disturbed systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, **62**(9): 5858–5869
- 27 Shao S, Gao Z. On the conditions of exponential stability in active disturbance rejection control based on singular perturbation analysis. *International Journal of Control*, 2017, **90**(10): 2085–2097
- 28 Jiang T T, Huang C D, Guo L. Control of uncertain nonlinear systems based on observers and estimators. *Automatica*, 2015, **59**: 35–47
- 29 Jin Hui-Yu, Liu Li-Li, Lan Wei-Yao. On stability condition of linear active disturbance rejection control for second-order systems. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(9): 1725–1728
(金辉宇, 刘丽丽, 兰维瑶. 二阶系统线性自抗扰控制的稳定性条件. 自动化学报, 2018, **44**(9): 1725–1728)
- 30 Guo B Z, Zhao Z L. *Active Disturbance Rejection Control for Nonlinear Systems: An Introduction*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2016.
- 31 Fliess M, Levine J, Martin P, Rouchon P. A Lie-Backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(5): 922–937
- 32 She J H, Fang M X, Ohyama Y, Hashimoto H, Wu M. Improving disturbance-rejection performance based on an equivalent-input-disturbance approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2008, **55**(1): 380–389
- 33 Zhong Q C, Kuperman A, Stobart R K. Design of UDE-based controllers from their two-degree-of-freedom nature. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, **21**(17): 1994–2008
- 34 Chen W H, Yang J, Guo L, Li S H. Disturbance-observer-based control and related methods: An overview. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, **63**(2): 1083–1095
- 35 Li Jie, Qi Xiao-Hui, Xia Yuan-Qing, Gao Zhi-Qiang. On linear/nonlinear active disturbance rejection switching control. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(2): 202–212
(李杰, 齐晓慧, 夏元清, 高志强. 线性/非线性自抗扰切换控制方法研究. 自动化学报, 2016, **42**(2): 202–212)
- 36 Li Xiang-Yang, Ai Wei, Tian Sen-Ping. Active disturbance rejection control of cascade inertia systems. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(3): 562–568
(李向阳, 袁薇, 田森平. 惯性串联系统的自抗扰控制. 自动化学报, 2018, **44**(3): 562–568)

- 37 Li S H, Yang J, Chen W H, Chen X S. *Disturbance Observer-Based Control: Methods and Applications*. Boca Raton: CRC Press, 2014.
- 38 Bai W Y, Chen S, Huang Y, Guo B Z, Wu Z H. Observers and observability for uncertain nonlinear systems: A necessary and sufficient condition. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, **29**(10): 2960–2977
- 39 Guo B Z, Wu Z H, Zhou H C. Active disturbance rejection control approach to output-feedback stabilization of a class of uncertain nonlinear systems subject to stochastic disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, **61**(6): 1613–1618
- 40 Zhao Z L, Guo B Z. A nonlinear extended state observer based on fractional power functions. *Automatica*, 2017, **81**: 286–296
- 41 Bhat S P, Bernstein D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2005, **17**(2): 101–127
- 42 Zhao Z L, Jiang Z P. Finite-time output feedback stabilization of lower-triangular nonlinear systems. *Automatica*, 2018, **96**: 259–269
- 43 Zhao Z L, Guo B Z. Active disturbance rejection control approach to stabilization of lower triangular systems with uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, **26**(11): 2314–2337
- 44 Xue W C, Bai W Y, Yang S, Song K, Huang Y, Xie H. ADRC with adaptive extended state observer and its application to air-fuel ratio control in gasoline engines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, **62**(9): 5847–5857



王怡怡 陕西师范大学数学与统计学院硕士研究生. 主要研究方向为非线性系统控制.

E-mail: wang11@snnu.edu.cn

(WANG Yi-Yi Master student at the School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University. Her main research interest is nonlinear systems control.)



赵志良 陕西师范大学数学与统计学院教授, 2012年获中国科学技术大学数学科学学院博士学位. 主要研究方向为非线性系统控制, 有限时间控制, 自抗扰控制. 本文通信作者.

E-mail: zhiliangzhao@snnu.edu.cn

(ZHAO Zhi-Liang Professor at the School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University. He received his Ph. D. degree from the School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China in 2012. His research interest covers nonlinear system control, finite-time control, and active disturbance rejection control. Corresponding author of this paper.)