

# 集合约束下多智能体系统分布式固定时间优化控制

陈刚<sup>1</sup> 李志勇<sup>1</sup>

**摘要** 本文研究一类具有状态约束的多智能体系统优化控制问题, 提出了一种具有固定时间收敛特性的分布式优化控制算法. 该控制算法由局部投影模块、一致性模块和梯度模块构成, 其中局部投影模块确保智能体的状态在固定时间内收敛到局部约束集合, 基于时变增益的一致性模块实现所有智能体的状态在固定时间内收敛到一致值, 基于时变增益的梯度模块实现智能体的状态在固定时间内收敛到最优解. 利用凸优化理论和固定时间李雅普诺夫理论, 分析了算法的固定时间收敛特性. 算法收敛时间的上界值不依赖系统的初始条件, 因而可以根据任务需求来预先设计收敛时间. 最后通过数值仿真验证了理论结果的有效性.

**关键词** 分布式优化, 多智能体系统, 集合约束, 梯度法, 固定时间收敛

**引用格式** 陈刚, 李志勇. 集合约束下多智能体系统分布式固定时间优化控制. 自动化学报, 2022, 48(9): 2254–2264

**DOI** 10.16383/j.aas.c190416

## Distributed Fixed-time Optimization Control for Multi-agent Systems With Set Constraints

CHEN Gang<sup>1</sup> LI Zhi-Yong<sup>1</sup>

**Abstract** This paper studies a class of optimization problem with local constraints for multi-agent systems, and a distributed optimization algorithm with fixed-time convergence is proposed. The proposed distributed controller consists of local projection module, consensus module and gradient module. The local projection module is used to ensure that the states converge to the local constraint set in the fixed time; the consensus module with time-varying gain guarantees the fixed-time state consensus; the gradient module with time-varying gain ensures the states converge to the optimal solution in fixed-time. The fixed-time convergence of the proposed algorithm is analyzed by using the convex optimization and the fixed-time Lyapunov theory. Since the upper bound of convergence time for the proposed algorithm does not depend on the initial condition, it is possible to predesign the convergence time according to the task requirements. Finally, numerical simulations verify the effectiveness of the theoretical results.

**Key words** Distributed optimization, multiagent systems, set constraints, gradient method, fixed-time convergence

**Citation** Chen Gang, Li Zhi-Yong. Distributed fixed-time optimization control for multi-agent systems with set constraints. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(9): 2254–2264

分布式优化在多机器人系统、传感器网络、机器学习等领域应用前景广阔, 因此成为了当前的一个研究热点<sup>[1-2]</sup>. 基于多智能体系统框架的各种分布式算法被相继提出并用于解决各类优化问题<sup>[3-16]</sup>. 文献 [3] 利用离散时间一致性和次梯度法求解无约束分布式优化问题. 文献 [4] 采用分布式投影次梯度法解决带集合约束的优化问题. 基于原始对偶最优解的鞍点特征, 文献 [5] 设计分布式原始对偶次

梯度算法, 求解带等式和不等式约束的优化问题. 文献 [6] 采用一种近似梯度算法求解无精确梯度信息的受约束分布式凸优化问题. 文献 [7] 利用一种基于投影梯度的分布式分层算法求解受集合约束的大规模多簇优化问题. 文献 [8] 应用一种分布式优化最小化方法来解决拉普拉斯正则化问题. 利用连续时间动力学系统分析工具<sup>[9-16]</sup>, 分布式连续时间算法也得到广泛的关注. 文献 [10] 采用一种基于零梯度和原理的分布式连续时间算法求解无约束优化问题. 文献 [11] 给出一种分布式连续时间算法, 使得智能体状态量收敛到约束集合内的最优一致值. 基于拉格朗日乘子法和 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件, 文献 [12] 给出一种求解带局部不等式约束的分布式连续时间优化算法. 文献 [13] 采用基于神经动力学的分布式计算方法求解带全局耦合约束的凸

收稿日期 2019-05-29 录用日期 2019-09-02

Manuscript received May 29, 2019; accepted September 2, 2019

国家自然科学基金 (61673077) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61673077)

本文责任编辑 孙秋野

Recommended by Associate Editor SUN Qiu-Ye

1. 重庆大学自动化学院 重庆 400044

1. College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044

优化问题. 文献 [14] 采用分布式比例积分协议求解受约束最优化问题. 文献 [15] 研究时变目标函数下的分布式无约束优化问题.

收敛速率是评价算法性能的重要指标之一. 基于线性协议的分布式优化算法<sup>[3-16]</sup> 仅实现渐近或指数收敛, 理论上在时间趋于无穷时获得最优解, 这导致实际应用中只能得到次优解. 然而, 一些实际应用需要快速求取优化解, 例如燃料有限的宇宙飞船交会对接问题, 能源系统的在线实时调度等问题. 为加速算法的收敛速度, 近年来分布式有限时间收敛算法得到广泛关注<sup>[17-20]</sup>. 基于分布式零梯度和优化算法<sup>[10]</sup> 和有限时间一致性方法, 文献 [17] 给出一种有限时间分布式一致性优化算法. 文献 [18] 针对时变目标函数优化问题, 提出一种基于二阶多智能体系统的分布式有限时间算法. 文献 [19] 利用梯度符号信息, 提出一种分布式有限时间优化算法. 文献 [17-19] 仅考虑无约束优化问题. 文献 [20] 提出的分布式有限时间优化算法能处理非一致梯度增益和集合约束. 虽然有限时间控制拥有收敛速率快、干扰抑制性好、鲁棒性强等优点<sup>[21-23]</sup>, 但其收敛时间的上界取决于系统初始状态, 且随着初始值的增大而增大. 当系统初始状态未知时, 收敛时间难以预先估计.

为克服有限时间控制的不足, 文献 [24] 提出了固定时间稳定的概念, 固定时间控制使得收敛时间的上界不依赖系统初始状态, 仅与控制参数相关. 分布式固定时间一致性算法已得到广泛研究<sup>[25-29]</sup>. 对于带约束的优化问题, 分布式固定时间一致性算法往往不能直接用于求解. 目前关于分布式固定时间优化算法还未得到广泛研究. 对于无约束优化问题, 文献 [30] 的分布式算法能实现智能体状态量的固定时间一致性, 而最优解为渐近收敛. 文献 [31] 利用分布式固定时间算法求解带等式约束的优化问题.

受现有研究的启发, 本文利用时变增益法和固定时间投影法, 提出一类新的分布式算法, 用于求解集合约束下多智能体系统凸优化问题. 提出的固定时间投影法既能处理智能体相同局部集合约束的情况, 也易于处理智能体不同局部集合约束的情形. 不同于现有渐进收敛算法<sup>[3-16]</sup>, 本文的算法能在固定时间内收敛于最优解. 采用固定时间李雅普诺夫函数法严格证明了算法的固定时间收敛特性. 在满足全局目标函数强凸的条件下, 本算法允许局部目标函数是非凸的.

## 1 问题描述和预备知识

本文中,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_+$  和  $\mathbf{R}^n$  分别表示实数、非负实数和  $n$  维实空间. 对于两个实列向量  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T \in \mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]^T \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{yz} = [y_1 z_1, \dots, y_n z_n]^T \in \mathbf{R}^n$  表示它们对应的分量分别相乘. 令  $\text{sig}(\mathbf{y})^\gamma$  表示  $\text{sign}(\mathbf{y})|\mathbf{y}|^\gamma$ , 其中,  $\text{sign}(\mathbf{y}) = [\text{sign}(y_1), \dots, \text{sign}(y_n)]^T$ ,  $|\mathbf{y}|^\gamma = [|y_1|^\gamma, \dots, |y_n|^\gamma]^T$ ,  $\gamma > 0$ .  $\|\mathbf{y}\|_l$  表示向量  $\mathbf{y}$  的  $l$  范数 (即  $\|\mathbf{y}\|_l = (\sum_{i=1}^n |y_i|^l)^{\frac{1}{l}}$ ), 且  $\|\mathbf{y}\|_l^l$  表示  $(\|\mathbf{y}\|_l)^l = \sum_{i=1}^n |y_i|^l$ .  $\nabla f(\mathbf{y})$  表示函数  $f(\mathbf{y})$  在  $\mathbf{y}$  处的梯度.  $\mathbf{1}_n$  ( $\mathbf{0}_n$ ) 表示元素全为 1 (0) 的  $n$  维列向量,  $I_n$  表示  $n \times n$  维单位矩阵,  $\otimes$  表示克罗内克乘积.

### 1.1 问题描述

考虑由  $n$  个智能体组成的多智能体系统, 每个智能体的动力学模型由如下的连续时间单积分器描述

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_i \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^m$  表示第  $i$  个智能体的状态,  $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^m$  为第  $i$  个智能体的控制输入. 本文将设计控制输入  $\mathbf{u}_i$  使得多智能体系统在固定时间内求解如下带集合约束的优化问题

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } \mathbf{x} \in \Omega &= \bigcap_{i=1}^n \Omega_i \end{aligned} \quad (2)$$

其中, 全局目标函数  $f(\mathbf{x})$  为每个智能体的局部目标函数  $f_i(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  之和;  $\Omega_i \subset \mathbf{R}^m$  为闭凸集合, 表示第  $i$  个智能体的局部集合约束;  $f_i(\mathbf{x})$  和  $\Omega_i$  为第  $i$  个智能体的局部信息. 优化问题 (2) 等价于如下优化问题

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}_i) \\ \text{s.t. } \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j \in \Omega &= \bigcap_{i=1}^n \Omega_i \end{aligned} \quad (3)$$

优化问题 (2) 和 (3) 有广阔的工程应用范围. 例如, 智能电网中储能系统的优化管理和电力负载的最优分配<sup>[12, 30, 32]</sup>, 传感器网络中未知参数的估计和未知目标的定位<sup>[32-33]</sup>, 机器学习中基于损失函数最小化的模型拟合<sup>[1]</sup>.

在对目标函数进行描述前, 先介绍一些关于凸函数的概念<sup>[34-35]</sup>. 对于实函数  $g(\mathbf{z}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , 如果对任意的  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$  和  $0 < c < 1$ , 有  $g(c\mathbf{z}_1 + (1-c)\mathbf{z}_2) \leq cg(\mathbf{z}_1) + (1-c)g(\mathbf{z}_2)$ , 则称  $g(\mathbf{z})$  为凸函数; 此外, 若

存在常数  $\sigma > 0$ , 使得  $g(c\mathbf{z}_1 + (1-c)\mathbf{z}_2) \leq cg(\mathbf{z}_1) + (1-c)g(\mathbf{z}_2) - \frac{1}{2}\sigma c(1-c)\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_2^2$  成立, 则称  $g(\mathbf{z})$  为  $\sigma$  强凸函数. 当  $g(\mathbf{z})$  连续可微时,  $g(\mathbf{z})$  为凸函数当且仅当对任意的  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ , 有  $g(\mathbf{z}_1) \geq g(\mathbf{z}_2) + \nabla g(\mathbf{z}_2)^\top(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)$ ;  $g(\mathbf{z})$  为  $\sigma$  强凸函数当且仅当对任意的  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ , 有  $g(\mathbf{z}_1) - g(\mathbf{z}_2) - \nabla g(\mathbf{z}_2)^\top(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) \geq \frac{\sigma}{2}\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_2^2$ .

为实现多智能体系统 (1) 在固定时间内求解优化问题 (3), 本文给出如下假设.

**假设 1.** 局部目标函数  $f_i(\mathbf{x})$  是连续可微的, 全局目标函数  $f(\mathbf{x})$  是强凸的.

**假设 2.** 所有局部闭凸集合  $\Omega_i$  的交集是非空的, 即  $\Omega \neq \emptyset$ .

**注 1.** 假设 1 和假设 2 意味着优化问题 (2) 有唯一最优解<sup>[35]</sup>. 全局目标函数的强凸性不要求所有局部目标函数是强凸的 (或者凸), 这意味着本文的假设允许某些局部目标函数是非凸的, 仿真实例将进一步说明.

## 1.2 代数图论

多智能体系统的双向通信拓扑用加权无向图  $G = (V, E, A)$  来描述. 其中,  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  表示智能体的集合,  $E \subseteq V \times V$  表示智能体间的通信链路集合, 加权邻接矩阵  $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  表示通信权重. 一条边  $(i, j) \in E$  意味着智能体  $i$  和  $j$  能相互交换信息. 智能体  $i$  的通信邻居表示为  $N_i = \{j \in V | (i, j) \in E\}$ . 若存在一组边  $(i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_k, j)$ , 则称智能体  $i$  和  $j$  是连通的. 当任意两个智能体  $i$  和  $j$  都是连通的, 则称图  $G$  是连通的. 如果  $(i, j) \in E$ , 则  $a_{ij} = a_{ji} = 1$ , 否则  $a_{ij} = 0$ . 定义拉普拉斯矩阵  $L = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 其中  $l_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}, l_{ij} = -a_{ij}, \forall i \neq j$ . 对于一个无向连通图, 如果  $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{y} = 0$ , 则  $\mathbf{y}^\top L \mathbf{y} \geq \lambda_2(L) \mathbf{y}^\top \mathbf{y}$ , 其中  $\lambda_2(L)$  为拉普拉斯矩阵的最小非零特征值.

## 1.3 相关引理

定义连续函数  $h: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  的 Dini 导数为

$$D^+h(t) = \limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{h(t+s) - h(t)}{s} \quad (4)$$

如下引理可用于计算 Dini 导数.

**引理 1**<sup>[9]</sup>. 令  $V(t, \mathbf{x}) = \max_{i=1, \dots, n} V_i(t, \mathbf{x})$ , 其中  $V_i(t, \mathbf{x}): \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, i=1, \dots, n$ , 连续可微. 记  $\Gamma(t) = \{i: V(t, \mathbf{x}) = V_i(t, \mathbf{x})\}$ , 则

$$D^+V(t, \mathbf{x}) = \max_{i \in \Gamma(t)} \dot{V}_i(t, \mathbf{x})$$

对于给定的闭凸集  $\Theta \subset \mathbf{R}^n$  和点  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ , 令  $P_\Theta(\mathbf{y})$

表示  $\mathbf{y}$  在  $\Theta$  上的投影;  $|\mathbf{y}|_\Theta = \inf_{\mathbf{z} \in \Theta} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2$  表示  $\mathbf{y}$  和  $\Theta$  之间的距离. 对于任意点  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ , 存在唯一的投影点  $P_\Theta(\mathbf{y}) \in \Theta$  使得  $|\mathbf{y}|_\Theta = \|\mathbf{y} - P_\Theta(\mathbf{y})\|_2$ . 后续的分析需要如下的引理.

**引理 2**<sup>[11]</sup>. 对于给定的闭凸集  $\Theta \subset \mathbf{R}^n$  和向量  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ , 存在以下关系

$$(\mathbf{y} - P_\Theta(\mathbf{y}))^\top(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \leq |\mathbf{y}|_\Theta(|\mathbf{z}|_\Theta - |\mathbf{y}|_\Theta) \quad (5)$$

**引理 3**<sup>[25]</sup>. 令  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n \geq 0$ , 则有

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i^b \geq \left( \sum_{i=1}^n \zeta_i \right)^b, \quad \text{若 } 0 < b \leq 1 \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i^b \geq n^{1-b} \left( \sum_{i=1}^n \zeta_i \right)^b, \quad \text{若 } 1 < b < \infty \quad (7)$$

**引理 4**<sup>[24]</sup>. 考虑如下系统

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top \in \mathbf{R}^n$ . 如果非线性函数  $f: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  不连续, 则系统 (8) 的解为 Filippov 意义下的解. 假设原点是系统 (8) 的一个平衡点. 如果存在一个径向无界函数  $V: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$  使得满足: 1)  $V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_n$ ; 2) 存在常数  $\alpha, \beta, p, q, k > 0: pk < 1, qk > 1$ , 使得

$$D^+V(\mathbf{x}(t)) \leq -(\alpha V^p(\mathbf{x}(t)) + \beta V^q(\mathbf{x}(t)))^k$$

则系统 (8) 为全局固定时间稳定, 且收敛时间估计值  $T(\mathbf{x}_0)$  满足

$$T(\mathbf{x}_0) \leq \frac{1}{\alpha^k(1-pk)} + \frac{1}{\beta^k(qk-1)}, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n \quad (9)$$

下面的引理推广文献 [29] 中引理 1, 使得本文的控制参数不依赖拉普拉斯矩阵的最小非零特征值.

**引理 5.** 对于系统 (8), 如果存在径向无界连续可微函数  $V(\mathbf{x}): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$ , 以及常数  $b > 0$  和  $k > 0$ , 使得: 1)  $V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_n$ ; 2)  $\dot{V} = -bV - \frac{2}{k} \frac{\dot{\eta}}{\eta} V$ , 其中,  $\eta$  为如下时变函数

$$\eta(t, T) = \begin{cases} \frac{T^h}{(T+t_0-t)^h}, & t_0 \leq t < T+t_0 \\ 1, & t \geq T+t_0 \end{cases} \quad (10)$$

且  $\eta$  的导数为

$$\dot{\eta}(t, T) = \begin{cases} \frac{h}{T} \eta^{(1+\frac{1}{k})}, & t_0 \leq t < T+t_0 \\ 0, & t \geq T+t_0 \end{cases} \quad (11)$$

其中, 参数  $h > 2$ ,  $\eta$  在  $t_0 + T$  处的导数  $\dot{\eta}(t_0 + T)$  采用文献 [29] 所定义的右导数. 则系统 (8) 全局固定时间稳定且收敛时间为固定值  $T$ .

**证明.** 首先分析  $t \in [t_0, t_0 + T)$  时的情形. 根据  $\eta(t)$  的定义可知,  $\eta(t)^{-\iota}$  ( $\iota > 0$ ) 在  $[t_0, t_0 + T)$  是单调递减的, 且  $\lim_{t \rightarrow (t_0 + T)^-} \eta(t)^{-\iota} = 0$ . 在等式  $\dot{V} = -bV - \frac{2}{k} \frac{\dot{\eta}}{\eta} V$  的两边分别乘以  $k\eta^2$ , 得到

$$k\eta^2 \dot{V} = -bk\eta^2 V - 2\dot{\eta}\eta V \quad (12)$$

对  $\eta^2 V^k$  求导, 可得

$$\frac{d(\eta^2 V^k)}{dt} = V^{k-1} k\eta^2 \dot{V} + 2\dot{\eta}\eta V^k \quad (13)$$

将式 (12) 代入式 (13), 可得

$$\frac{d(\eta^2 V^k)}{dt} = -bk\eta^2 V^k \quad (14)$$

求解式 (14), 得到

$$V^k = \eta^{-2} e^{-bk(t-t_0)} V^k(t_0)$$

当  $t \in [t_0 + T, \infty)$  时, 应用文献 [29] 中引理 1 类似的分析得到, 当  $t \geq t_0 + T$  时,  $V \equiv 0$ . 即  $t \geq t_0 + T$  时,  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}_n$ .  $\square$

## 2 分布式固定时间优化控制算法

在本节, 首先解决智能体相同局部集合约束下的优化问题 (2), 即  $\Omega_i = \Omega_j = \Omega$  时的情形; 然后考虑局部约束集合不同的情形.

### 2.1 相同局部集合约束下的分布式优化

本小节将解决多智能体相同局部集合约束下的优化问题 (2), 即任意智能体  $i$  的集合约束为  $\Omega_i = \Omega$ . 智能体的控制输入  $\mathbf{u}_i$  设计为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i = & \rho_1 \sum_{j \in N_i} \boldsymbol{\delta}_{ij} + \rho_2 \left( k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\boldsymbol{\delta}_{ij}) - \boldsymbol{\beta}_i \right) + \\ & \rho_2 |k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\boldsymbol{\delta}_{ij}) - \boldsymbol{\beta}_i| \text{sign}(P_\Omega(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i) + \\ & k_4 \text{sig}(P_\Omega(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i)^\mu + k_5 \text{sig}(P_\Omega(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i)^\nu \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $k_3, k_4, k_5$  为正的增益,  $0 < \mu < 1, \nu > 1$  为控制参数,  $\boldsymbol{\delta}_{ij}, \boldsymbol{\beta}_i, \beta_{ij}$  分别表示  $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, \nabla f_i(\mathbf{x}_i), \|\boldsymbol{\beta}_i\|_2 + \|\boldsymbol{\beta}_j\|_2$ , 时变增益  $\rho_1$  和  $\rho_2$  设计为

$$\rho_1 = k_1 + c_1 \frac{\dot{\eta}(t, T_2)}{\eta(t, T_2)} \quad (16)$$

$$\rho_2 = k_2 + c_2 \frac{\dot{\eta}(t, T_3)}{\eta(t, T_3)} \quad (17)$$

其中,  $k_1, k_2, c_1, c_2$  为正的增益,  $T_2, T_3$  为设定的时间参数. 由引理 5 和后续的分析过程可知, 时变增益的时间参数  $T$  直接影响控制器的收敛时间. 理论上, 时间参数  $T_2, T_3$  可以设置为任意正常数以满足任务需求; 而实际应用中, 时间参数会受物理设备的约束. 因此, 该参数可在物理允许的范围根据期望的收敛时间值直接设置.

**引理 6.** 当假设 1 和假设 2 成立, 在控制协议 (15) 的作用下, 每个智能体的状态量在固定时间内收敛到约束集合, 即存在一个固定时间  $T_1$ , 当  $t \geq T_1$  时,  $\mathbf{x}_i = P_\Omega(\mathbf{x}_i), \forall i$ .

**证明.** 选择如下李雅普诺夫函数

$$V_1 = \max_{i=1, \dots, n} V^i \quad (18)$$

其中,  $V^i = \|\mathbf{x}_i - P_\Omega(\mathbf{x}_i)\|_2^2$ .

用  $I(t)$  表示  $t$  时刻取最大值  $V_1$  的智能体集合. 根据引理 1 可得

$$D^+ V_1 = \max_{i \in I(t)} \dot{V}^i \quad (19)$$

对  $V^i$  求导并根据式 (15), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}^i = & 2(\mathbf{x}_i - P_\Omega(\mathbf{x}_i))^T \dot{\mathbf{x}}_i = \\ & 2\rho_1 \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_i - P_\Omega(\mathbf{x}_i))^T \boldsymbol{\delta}_{ij} + \\ & 2\rho_2 (\mathbf{x}_i - P_\Omega(\mathbf{x}_i))^T \left( k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\boldsymbol{\delta}_{ij}) - \boldsymbol{\beta}_i \right) - \\ & 2\rho_2 |\mathbf{x}_i - P_\Omega(\mathbf{x}_i)|^T \left| k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\boldsymbol{\delta}_{ij}) - \boldsymbol{\beta}_i \right| - \\ & 2k_4 \|P_\Omega(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_{1+\mu}^{1+\mu} - 2k_5 \|P_\Omega(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_{1+\nu}^{1+\nu} \end{aligned} \quad (20)$$

注意到

$$\begin{aligned} & 2\rho_2 (\mathbf{x}_i - P_\Omega(\mathbf{x}_i))^T \left( k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\boldsymbol{\delta}_{ij}) - \boldsymbol{\beta}_i \right) - \\ & 2\rho_2 |\mathbf{x}_i - P_\Omega(\mathbf{x}_i)|^T \left| k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\boldsymbol{\delta}_{ij}) - \boldsymbol{\beta}_i \right| \leq 0 \end{aligned}$$

因此, 式 (20) 可化简为

$$\begin{aligned} \dot{V}^i \leq & 2\rho_1 \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_i - P_\Omega(\mathbf{x}_i))^T \boldsymbol{\delta}_{ij} - \\ & 2k_4 \|P_\Omega(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_{1+\mu}^{1+\mu} - 2k_5 \|P_\Omega(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_{1+\nu}^{1+\nu} \end{aligned} \quad (21)$$

对式 (21) 右侧第 1 项应用引理 2, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}^i \leq & 2\rho_1 \sum_{j \in N_i} |\mathbf{x}_i|_{\Omega} (|\mathbf{x}_j|_{\Omega} - |\mathbf{x}_i|_{\Omega}) - \\ & 2k_4 \|P_{\Omega}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_{1+\mu}^{1+\mu} - 2k_5 \|P_{\Omega}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_{1+\nu}^{1+\nu} \end{aligned} \quad (22)$$

根据  $V_1$  的定义, 有

$$\begin{aligned} D^+ V_1 \leq & \max_{i \in I(t)} \left[ -2k_4 \|P_{\Omega}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_{1+\mu}^{1+\mu} - \right. \\ & \left. 2k_5 \|P_{\Omega}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_{1+\nu}^{1+\nu} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

对式 (23) 右侧应用引理 3, 可得

$$\begin{aligned} D^+ V_1 \leq & \max_{i \in I(t)} \left[ -2k_4 \|P_{\Omega}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_2^{1+\mu} - \right. \\ & \left. 2k_5 m^{\frac{1-\nu}{2}} \|P_{\Omega}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_2^{1+\nu} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

将式 (24) 进一步写为

$$\begin{aligned} D^+ V_1 \leq & \max_{i \in I(t)} \left[ -2k_4 \|P_{\Omega}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_2^{1+\mu} - \right. \\ & \left. 2k_5 m^{\frac{1-\nu}{2}} \|P_{\Omega}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_2^{1+\nu} \right] = \\ & -2k_4 \left[ \max_{i \in I(t)} \|P_{\Omega}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_2^2 \right]^{\frac{1+\mu}{2}} - \\ & 2k_5 m^{\frac{1-\nu}{2}} \left[ \max_{i \in I(t)} \|P_{\Omega}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_2^2 \right]^{\frac{1+\nu}{2}} = \\ & -2k_4 (V_1)^{\frac{1+\mu}{2}} - 2k_5 m^{\frac{1-\nu}{2}} (V_1)^{\frac{1+\nu}{2}} \end{aligned} \quad (25)$$

应用引理 4 可知,  $V_1$  在固定时间  $T_1 \leq \frac{1}{k_4(1-\mu)} + \frac{1}{k_5 m^{\frac{1-\nu}{2}}(\nu-1)}$  内收敛到 0, 即当  $t \geq T_1$  时, 有  $\mathbf{x}_i = P_{\Omega}(\mathbf{x}_i), \forall i$ . 这表明每个智能体的状态在  $t \geq T_1$  后始终满足约束.  $\square$

**引理 7.** 如果多智能体系统的无向通信拓扑是连通的, 且假设 1 和假设 2 成立, 多智能体系统 (1) 在控制协议 (15) 作用下, 且增益  $k_3 \geq 2n$  时, 所有智能体的状态量在固定时间  $T_1 + T_2$  内实现一致.

**证明.** 由引理 6 可知, 当  $t \geq T_1$  时, 有  $\mathbf{x}_i = P_{\Omega}(\mathbf{x}_i)$ . 因此当  $t \geq T_1$  时, 智能体的动态特性可描述为

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \rho_1 \sum_{j \in N_i} \delta_{ij} + \rho_2 \left( k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\delta_{ij}) - \beta_i \right) \quad (26)$$

选择如下李雅普诺夫函数

$$V_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}\|_2^2 \quad (27)$$

其中,  $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j$ . 显然,  $V_2 = 0$ , 当且仅当  $\mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}$ .

根据式 (26), 对  $V_2$  求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \left( \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \dot{\mathbf{x}}_j \right) = \\ & \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \dot{\mathbf{x}}_i = \\ & \underbrace{\rho_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \delta_{ij}}_{Item\ I} + \\ & \underbrace{\rho_2 k_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T (\beta_{ij} \text{sign}(\delta_{ij}))}_{Item\ II} - \\ & \underbrace{\rho_2 \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \beta_i}_{Item\ III} \end{aligned} \quad (28)$$

式 (28) 中, 第 2 个等式利用等式关系

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \dot{\mathbf{x}}_j \right) &= \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{x}} \right)^T \times \\ & \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \dot{\mathbf{x}}_j \right) = \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \right)^T \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \dot{\mathbf{x}}_j \right) = \\ & \mathbf{0}_m^T \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \dot{\mathbf{x}}_j \right) = 0 \end{aligned}$$

对式 (28) 右侧的第  $Item\ I$  项, 考虑到通信图  $G$  是无向且连通的, 可得

$$\begin{aligned} Item\ I = & \frac{\rho_1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \delta_{ij} + \\ & \frac{\rho_1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^T \delta_{ji} = \\ & \frac{\rho_1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \delta_{ij} - \\ & \frac{\rho_1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^T \delta_{ij} = \\ & - \frac{\rho_1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^T (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) = \\ & - \frac{\rho_1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \|(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) - (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})\|_2^2 = \\ & - \rho_1 \tilde{\mathbf{X}}^T (L \otimes I_m) \tilde{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (29)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{X}} = [\mathbf{x}_1^T - \bar{\mathbf{x}}^T, \mathbf{x}_2^T - \bar{\mathbf{x}}^T, \dots, \mathbf{x}_n^T - \bar{\mathbf{x}}^T]^T$ . 由于  $(\mathbf{1}_n^T \otimes I_m) \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{0}_m$  成立, 则有  $\tilde{\mathbf{X}}^T (L \otimes I_m) \tilde{\mathbf{X}} \geq \lambda_2(L) \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}}$ . 因此, 式 (29) 可化简为

$$\begin{aligned} \text{Item}_I &\leq -\rho_1 \lambda_2(L) \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}} = \\ &\quad -2\rho_1 \lambda_2(L) V_2 \end{aligned} \quad (30)$$

将式 (16) 代入式 (30), 可得

$$\text{Item}_I \leq -2k_1 \lambda_2(L) V_2 - 2c_1 \lambda_2(L) \frac{\dot{\eta}(t, T_2)}{\eta(t, T_2)} V_2 \quad (31)$$

对式 (28) 右侧的第  $\text{Item}_{II}$  项, 有

$$\begin{aligned} \text{Item}_{II} &= \frac{\rho_2}{2} k_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T (\beta_{ij} \text{sign}(\delta_{ij})) + \\ &\quad \frac{\rho_2}{2} k_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^T (\beta_{ji} \text{sign}(\delta_{ji})) = \\ &\quad \frac{\rho_2}{2} k_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T (\beta_{ij} \text{sign}(\delta_{ij})) - \\ &\quad \frac{\rho_2}{2} k_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^T (\beta_{ij} \text{sign}(\delta_{ij})) = \\ &\quad -\frac{\rho_2}{2} k_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^T \text{sign}(\delta_{ij}) = \\ &\quad -\frac{\rho_2}{2} k_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|_1 \end{aligned} \quad (32)$$

注意到  $\beta_{ij} = \|\beta_i\|_2 + \|\beta_j\|_2$ , 式 (32) 可进一步写为

$$\text{Item}_{II} \leq -\frac{\rho_2}{2} k_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \|\beta_i\|_2 \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|_1 \quad (33)$$

对式 (28) 右侧的第  $\text{Item}_{III}$  项, 有

$$\text{Item}_{III} \leq \rho_2 \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}\|_2 \|\beta_i\|_2 \quad (34)$$

令  $\|\mathbf{x}_{i'}(t) - \mathbf{x}_{j'}(t)\|_2 = \max_{i, j \in V} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\|_2$  表示  $t$  时刻两个智能体间的最大相对距离. 则有  $\|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}\|_2 \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2 \leq \|\mathbf{x}_{i'}(t) - \mathbf{x}_{j'}(t)\|_2$ . 由于通信图  $G$  是无向且连通的, 可得  $\|\mathbf{x}_{i'}(t) - \mathbf{x}_{j'}(t)\|_2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2$ . 因此, 式 (34) 可进一步写为

$$\begin{aligned} \text{Item}_{III} &\leq \rho_2 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2 \|\beta_i\|_2 \right) \leq \\ &\quad n\rho_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2 \|\beta_i\|_2 \leq \\ &\quad n\rho_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_1 \|\beta_i\|_2 \end{aligned} \quad (35)$$

由于  $k_3 \geq 2n$ , 结合式 (28), (31), (33), (35), 可得

$$\dot{V}_2 \leq -2k_1 \lambda_2(L) V_2 - 2c_1 \lambda_2(L) \frac{\dot{\eta}(t, T_2)}{\eta(t, T_2)} V_2 \quad (36)$$

应用引理 5 可知,  $V_2$  在固定时间  $T_2$  内收敛到 0, 即当  $t \geq T_1 + T_2$  时, 有  $\mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}, \forall i$ . 这表明所有智能体的状态在固定时间内实现一致.  $\square$

**定理 1.** 如果多智能体系统的无向通信拓扑是连通的, 且假设 1 和假设 2 成立, 多智能体系统 (1) 在控制协议 (15) 作用下, 且增益  $k_3 \geq 2n$  时, 智能体状态量在固定时间内收敛于相同局部集合约束下优化问题 (2) 的解.

**证明.** 由引理 7 可知, 当  $t \geq T_1 + T_2$ , 智能体的动力学特性为

$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\rho_2 \nabla f_i(\bar{\mathbf{x}}) \quad (37)$$

选取如下李雅普诺夫函数

$$V_3 = f(\bar{\mathbf{x}}) - f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^n [f_i(\bar{\mathbf{x}}) - f_i(\mathbf{x}^*)] \quad (38)$$

其中,  $\mathbf{x}^*$  表示问题 (2) 的最优解. 因为  $f(\mathbf{x})$  是强凸的, 因此  $V_3 = 0$  当且仅当  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*$ , 否则  $V_3 > 0$  [35]. 根据式 (37), 对  $V_3$  求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \sum_{i=1}^n (\nabla f_i(\bar{\mathbf{x}}))^T \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \dot{\bar{\mathbf{x}}}^T \sum_{i=1}^n \nabla f_i(\bar{\mathbf{x}}) = \\ &\quad \dot{\bar{\mathbf{x}}}^T \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{x}}_i \right)^T \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \\ &\quad \left( -\frac{\rho_2}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(\bar{\mathbf{x}}) \right)^T \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \\ &\quad -\frac{\rho_2}{n} \nabla f(\bar{\mathbf{x}})^T \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \\ &\quad -\frac{\rho_2}{n} \|\nabla f(\bar{\mathbf{x}})\|_2^2 \end{aligned} \quad (39)$$

由假设 1 可知, 存在  $\theta > 0$ , 使得 [35]

$$f(\mathbf{x}^*) - f(\bar{\mathbf{x}}) \geq \nabla f(\bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{\theta}{2} \|\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}\|_2^2 \quad (40)$$

式 (40) 右侧是关于  $\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}$  的二次函数, 其最小值为  $-\frac{\|\nabla f(\bar{\mathbf{x}})\|_2^2}{2\theta}$ . 由式 (38) 和式 (40), 有

$$V_3 \leq \frac{1}{2\theta} \|\nabla f(\bar{\mathbf{x}})\|_2^2 \quad (41)$$

结合式 (39), (41) 和 (17), 可得

$$\dot{V}_3 \leq -\frac{2\theta\rho_2}{n} V_3 = -\frac{2\theta k_2}{n} V_3 - \frac{2\theta c_2}{n} \frac{\dot{\eta}(t, T_3)}{\eta(t, T_3)} V_3 \quad (42)$$

应用引理 5 可知,  $V_3$  在固定时间  $T_3$  内收敛到 0, 即当  $t \geq T_1 + T_2 + T_3$  时, 有  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}^* (\forall i)$ , 这表明智能体的状态量在固定时间内收敛到最优解. 因此控制协议 (15) 作用下的多智能体系统 (1) 在固定时间内求解相同局部集合约束下的优化问题 (2).  $\square$

## 2.2 不同局部集约束下的分布式优化

本小节进一步推广控制协议 (15) 以处理不同局部集约束下的优化问题 (2). 此时, 控制协议  $\mathbf{u}_i$  设计为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i = & \rho_1 \sum_{j \in N_i} \boldsymbol{\delta}_{ij} + \rho_1 \left| \sum_{j \in N_i} \boldsymbol{\delta}_{ij} \right| \text{sign}(P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i) + \\ & \rho_2 \left( k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\boldsymbol{\delta}_{ij}) - \boldsymbol{\beta}_i \right) + \\ & \rho_2 \left| k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\boldsymbol{\delta}_{ij}) - \boldsymbol{\beta}_i \right| \text{sign}(P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i) + \\ & k_4 \text{sig}(P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i)^\mu + k_5 \text{sig}(P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i)^\nu \end{aligned} \quad (43)$$

其中, 各个参数的定义与式 (15) 一致. 不同于协议 (15) 只能解决所有智能体具有相同局部集约束下的优化问题, 协议 (43) 通过等式右侧第 2 项来处理不同局部约束投影的影响, 使得协议 (43) 能解决不同智能体具有不同局部集约束下的优化问题. 因此协议 (43) 解决的问题比协议 (15) 更广泛. 而从另一方面看, 由于协议 (15) 比协议 (43) 少一项, 在解决相同局部集约束下的优化问题 (2) 时, 协议 (15) 有相对少的计算量.

**引理 8.** 当假设 1 和假设 2 成立, 在控制协议 (43) 作用下, 每个智能体状态量在固定时间内收敛到约束集合, 即存在一个固定时间  $T_1$ , 当  $t \geq T_1$  时,  $\forall i, \mathbf{x}_i = P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i)$ .

**证明.** 选取如下李雅普诺夫函数

$$V_4 = \|\mathbf{x}_i - P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i)\|_2^2 \quad (44)$$

根据式 (43), 对  $V_4$  求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 = & 2(\mathbf{x}_i - P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i))^\top \dot{\mathbf{x}}_i = \\ & 2\rho_1(\mathbf{x}_i - P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i))^\top \sum_{j \in N_i} \boldsymbol{\delta}_{ij} - \\ & 2\rho_1|\mathbf{x}_i - P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i)|^\top \left| \sum_{j \in N_i} \boldsymbol{\delta}_{ij} \right| + \\ & 2\rho_2(\mathbf{x}_i - P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i))^\top \left( k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\boldsymbol{\delta}_{ij}) - \boldsymbol{\beta}_i \right) - \\ & 2\rho_2|\mathbf{x}_i - P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i)|^\top \left| k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\boldsymbol{\delta}_{ij}) - \boldsymbol{\beta}_i \right| - \\ & 2k_4\|P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_{1+\mu}^{1+\mu} - 2k_5\|P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_{1+\nu}^{1+\nu} \end{aligned} \quad (45)$$

注意到

$$\begin{aligned} & \rho_1(\mathbf{x}_i - P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i))^\top \sum_{j \in N_i} \boldsymbol{\delta}_{ij} - \\ & \rho_1|\mathbf{x}_i - P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i)|^\top \left| \sum_{j \in N_i} \boldsymbol{\delta}_{ij} \right| \leq 0 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} & \rho_2(\mathbf{x}_i - P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i))^\top \left( k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\boldsymbol{\delta}_{ij}) - \boldsymbol{\beta}_i \right) - \\ & \rho_2|\mathbf{x}_i - P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i)|^\top \left| k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\boldsymbol{\delta}_{ij}) - \boldsymbol{\beta}_i \right| \leq 0 \end{aligned}$$

因此, 式 (45) 可化简为

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 \leq & -2k_4\|P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_{1+\mu}^{1+\mu} - \\ & 2k_5\|P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i\|_{1+\nu}^{1+\nu} - \\ & -2k_4(V_4)^{\frac{1+\mu}{2}} - 2k_5m^{\frac{1+\nu}{2}}(V_4)^{\frac{1+\nu}{2}} \end{aligned} \quad (46)$$

应用引理 4 可知,  $V_4$  在固定时间  $T_1 \leq \frac{1}{k_4(1-\mu)} + \frac{1}{k_5m^{\frac{1+\nu}{2}}(\nu-1)}$  内收敛到 0, 即当  $t \geq T_1$  时,  $\forall i, \mathbf{x}_i = P_{\Omega_i}(\mathbf{x}_i)$ , 这表明智能体的局部集约束  $t \geq T_1$  后始终满足.  $\square$

**定理 2.** 如果多智能体系统的无向通信拓扑是连通的, 且假设 1 和假设 2 成立, 多智能体系统 (1) 在控制协议 (43) 作用下, 且增益  $k_3 \geq 2n$  时, 智能体的状态量在固定时间内收敛于不同局部集约束下优化问题 (2) 的解.

**证明.** 由引理 8 可知, 当  $t \geq T_1$  时, 智能体的动态特性可描述为

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \rho_1 \sum_{j \in N_i} \boldsymbol{\delta}_{ij} + \rho_2 \left( k_3 \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} \text{sign}(\boldsymbol{\delta}_{ij}) - \boldsymbol{\beta}_i \right) \quad (47)$$

对式 (47) 应用引理 7 可知, 智能体的状态在固定时间  $T_1 + T_2$  内实现一致, 即  $\mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}} \in \Omega$ . 因此当  $t \geq T_1 + T_2$ , 智能体的动力学特性为

$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\rho_2 \nabla f_i(\bar{\mathbf{x}}) \quad (48)$$

最后, 采用与定理 1 相同的分析可得, 在固定时间  $T_1 + T_2 + T_3$  后, 所有智能体的状态满足  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}^*$ . 因此控制协议 (43) 下的多智能体系统 (1) 在固定时间求解不同局部集约束下的优化问题 (2).  $\square$

**注 2.** 文献 [29] 固定时间一致性协议的增益参数依赖于拉普拉斯矩阵的最小非零特征值; 而本文的控制协议放宽了该条件. 基于改进的引理 5, 控制协议 (15) 和 (43) 的控制增益参数  $k_3$  只与智能体的

个数有关. 如果智能体个数是未知的, 可以利用固定时间一致性协议来估计. 例如, 每个智能体赋予一个辅助变量, 令一个智能体的辅助变量初值为 1 且其余智能体的辅助变量初值为 0, 应用固定时间平均一致性协议, 可得到平均值  $1/n$ , 从而获得智能体的个数. 因此, 本文提出的算法能以全分布式的方式实现.

**注 3.** 注意到本文证明过程中所选择的李雅普诺夫函数  $V_1, V_2, V_3, V_4$  均不依赖通信拓扑. 因此, 这些函数能作为公共李雅普诺夫函数来分析固定时间优化算法在时变拓扑下的稳定性.

**注 4.** 本文研究的分布式固定时间优化问题假设通信拓扑是无向连通的, 该假设在现有分布式优化问题的研究中是普遍的, 如文献 [7–20, 30–31] 也使用相同的假设. 我们未来将进一步考虑更一般的通信拓扑情况, 如文献 [3–5] 考虑的联合连通图、文献 [6] 考虑的强连通有向图.

**注 5.** 时变增益  $\frac{\dot{\eta}}{\eta}$  在  $[t_0, t_0 + T)$  上为  $\frac{h}{T}\eta^{\frac{1}{h}}$ , 该项对增益参数  $\rho_1$  和  $\rho_2$  控制的一致性过程和梯度优化过程实现固定时间控制中有着至关重要的作用. 注意到基于李雅普诺夫理论估计的收敛时间是建立在比较原理之上的, 即估计的收敛时间是保守的. 对于  $\rho_1$  控制的一致性过程, 虽然  $\eta(t, T_2)^{\frac{1}{h}}$  在  $t \rightarrow (t_0 + T_2)^-$  时趋于  $\infty$ , 但由于局部状态误差  $\delta_{ij}$  在  $(t_0 + T_2)^-$  前收敛到 0, 因此能保证控制输入是有界的. 详细的证明可参考文献 [29] 的推导过程得到. 对于  $\rho_2$  控制的梯度优化过程,  $\eta(t, T_3)^{\frac{1}{h}}$  在  $t \rightarrow (t_0 + T_3)^-$  时趋于  $\infty$ , 而  $\nabla f_i$  在最优点通常不为 0, 可能会导致控制无界. 一个简单的处理办法是将  $\eta(t, T_3)$  的时间参数设置为比期望时间  $T_3$  稍大的  $T'_3 = T_3 + \epsilon$  ( $0 < \epsilon \ll 1$ ), 即

$$\eta(t, T_3) = \begin{cases} \frac{T_3^h}{(T'_3 + t_0 - t)^h}, & t_0 \leq t < T_3 + t_0 \\ 1, & t \geq T_3 + t_0 \end{cases} \quad (49)$$

这样的处理方法能保证  $\eta(t, T_3)^{\frac{1}{h}}$  在  $t \rightarrow (t_0 + T_3)^-$  时是有界的, 从而保证控制输入有界, 但付出的代价是智能体的状态只能在固定时间内收敛到最优点的一个可调节的邻域. 由于增益  $\rho_2$  中还有常数项  $k_2$ , 该项保证智能体的状态以指数速率收敛到最优点.

### 3 数值仿真

本节首先用两个数值仿真例子来验证分布式固定时间优化算法的有效性. 考虑由 4 个智能体构成

的多智能体系统来求解优化问题 (2). 仿真中, 控制参数的值设置为  $\mu = 0.5, \nu = 2, k_3 = 10, k_4 = 10, k_5 = 10, T_2 = 0.5 \text{ s}, T_3 = 1.0 \text{ s}$ , 智能体间的通信拓扑设置为无向环图:  $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1$ . 智能体的局部目标函数分别为  $f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \sin(x_1) + \frac{1}{5} \cos(x_2)$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1 + 1)^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ ,  $f_3(\mathbf{x}) = 10e^{0.1x_1} + (x_2 + 1)^2$ ,  $f_4(\mathbf{x}) = \frac{10}{4}(0.3x_1 + 1)^4 + \frac{10}{4}(0.3x_2 + 1)^4$ . 注意到局部目标函数  $f_1$  是非凸的, 但全局目标函数  $f(\mathbf{x})$  是强凸的, 因此优化问题 (2) 有唯一最优解.

首先进行相同局部集合约束下的优化仿真研究. 仿真中, 所有智能体的局部集合约束均设置为  $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 | 5 \leq x_1 \leq 13, 5 \leq x_2 \leq 13\}$ . 为说明分布式算法的正确性, 通过 MATLAB 的 `fmincon` 函数求得最优解为  $[x_1, x_2] \approx [5.00, 5.00]$ . 根据定理 1, 对任意初始状态, 控制协议 (15) 在固定时间 1.9 s 内求解优化问题. 由图 1 的仿真结果可见, 所提出的分布式协议 (15) 在 1.9 s 内使得所有智能体的状态到达集合约束内的最优点, 即在固定时间内求解优化问题.

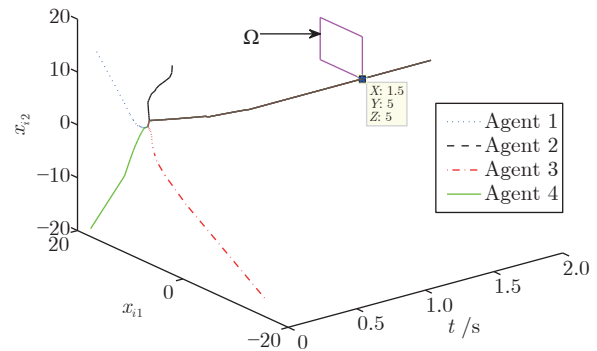


图 1 相同局部集合约束下优化问题 (2) 的仿真结果  
Fig.1 Simulation results for optimization problem (2) with a common constraint set

接下来, 进行智能体局部集合约束不同情形下的优化仿真研究. 4 个智能体的局部集合约束分别设置为  $\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 | 0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 8\}$ ,  $\Omega_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 | -4 \leq x_1 \leq 12, 1 \leq x_2 \leq 10\}$ ,  $\Omega_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 | 2 \leq x_1 \leq 14, -4 \leq x_2 \leq 12\}$ ,  $\Omega_4 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 | 4 \leq x_1 \leq 16, 3 \leq x_2 \leq 14\}$ . 通过 `fmincon` 函数求得最优解为  $[x_1, x_2] \approx [4.00, 4.29]$ . 图 2 给出控制协议 (43) 下智能体的状态轨迹. 由图可知, 所有智能体的状态在 1.9 s 内收敛到公共约束集合内的最优点.

为展示本文提出的优化控制算法的优越性, 下面进行本文算法与文献 [17, 30] 算法的比较研究. 为方便, 文献 [17] 提出的分布式有限时间零梯度和优化算法与文献 [30] 提出的基于固定时间一致性



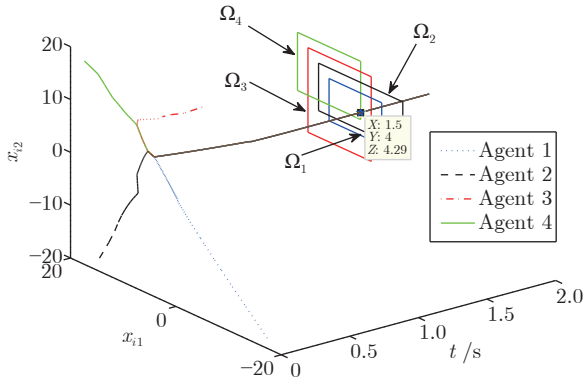


图 2 不同局部集约束下优化问题 (2) 的仿真结果  
Fig.2 Simulation results for optimization problem (2) with nonidentical local constraint sets

的分布式优化算法分别写为

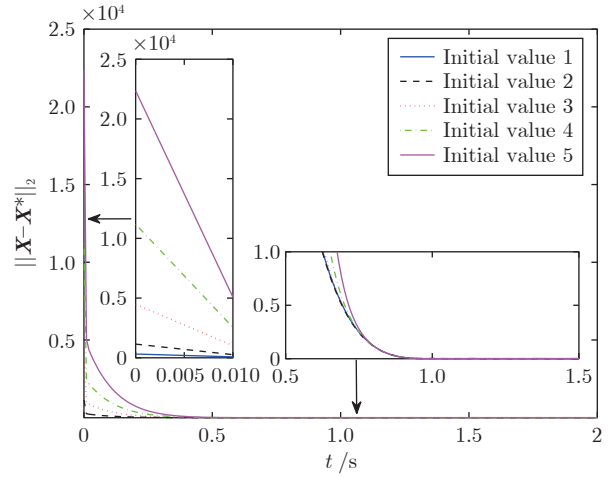
$$\dot{\mathbf{x}}_i = \gamma(\nabla^2 f_i(\mathbf{x}_i))^{-1} \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^\mu \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i = & \xi_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^{1-\frac{b}{a}} + \\ & \xi_2 \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^{1+\frac{b}{a}} + \\ & \xi_3 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sign}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) - \xi_4 \nabla f_i(\mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (51)$$

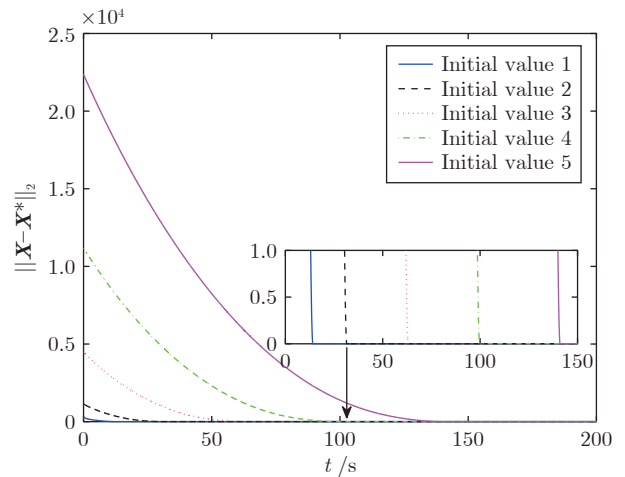
正如引言中所述, 传统有限时间一致性算法 (如文献 [21–23, 25–29]) 通常无法直接解决优化问题. 从式 (50) 和式 (51) 可知, 文献 [17] 的算法是一种基于时变权重的有限时间加权一致性优化算法, 文献 [30] 的算法是一种结合固定时间一致性和梯度法的渐近优化算法. 在这个仿真中, 采用前一个案例研究的通信拓扑, 算法的增益参数设置为相同值, 每个智能体的成本函数为

$$f_i(\mathbf{x}) = i(x_1 + 2 \cdot i)^2 + 2 \cdot i(x_2 - i)^2 \quad (52)$$

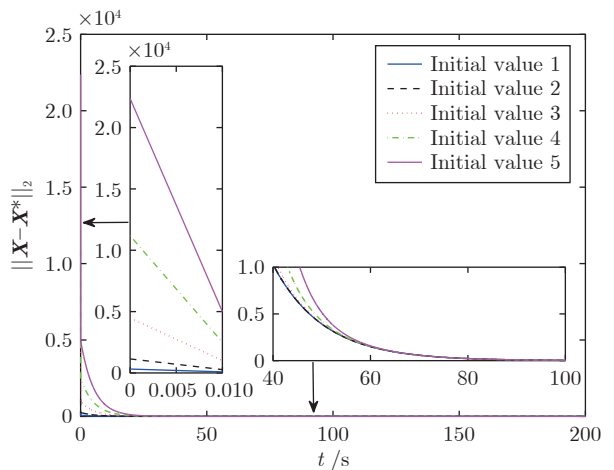
图 3 展示了几种算法在不同初始条件下状态误差范数  $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^*\|_2$  随时间的变化过程, 其中  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_n^T]^T$ ,  $\mathbf{X}^* = [\mathbf{x}^{*T}, \mathbf{x}^{*T}, \dots, \mathbf{x}^{*T}]^T$ . 由图 3 可知, 本文提出的分布式优化算法在设计的固定时间内从任意初始点收敛到最优点; 文献 [17] 的分布式优化算法在有限时间内收敛到最优点, 但收敛时间随初值的增长而增长; 文献 [30] 的分布式优化算法渐近的收敛到最优点. 因此, 固定时间优化比渐近时间优化和有限时间优化有优势. 此外应注意两点: 一是文献 [17] 和文献 [30] 的算法仅解决无约束优化问题, 而本文提出的算法解决带集约束的优化问题; 二是文献 [17] 的算法需要每个局部目标函数



(a) 本文所提出算法  
(a) The proposed algorithm



(b) 文献 [17] 所提出算法  
(b) The algorithm of [17]



(c) 文献 [30] 所提出算法  
(c) The algorithm of [30]

图 3 几种算法在不同初始条件下状态误差范数  $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^*\|_2$  随时间的变化

Fig.3 The state errors norm of several algorithms  $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^*\|_2$  with time for various initial conditions

是二次连续可微的强凸函数, 文献 [30] 的算法需要每个局部目标函数是类二次型的, 而本文提出的算法仅需要连续可微的全局目标函数是强凸的, 允许局部目标函数是非凸的.

## 4 结束语

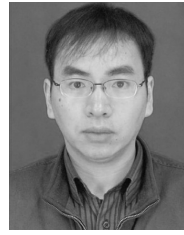
本文研究带集合约束优化问题的分布式快速求解算法. 首先, 对于智能体相同局局部集合约束下的优化问题, 基于固定时间投影和时变增益技术, 提出一个分布式固定时间优化算法. 接着, 该算法推广到智能体不同局局部集合约束情形. 所提出的分布式算法使得多智能体系统在固定时间内解决带集合约束的优化问题, 算法的收敛时间能根据任务需求来预先设计. 在后续研究中, 我们将进一步考虑有向通信拓扑和高阶动态系统下的分布式固定时间优化问题.

## References

- Nedić A, Olshevsky A, Rabbat M G. Network topology and communication-computation tradeoffs in decentralized optimization. *Proceedings of the IEEE*, 2018, **106**(5): 953–976
- Xie Pei, You Ke-You, Hong Yi-Guang, Xie Li-Hua. A survey of distributed convex optimization algorithms over networks. *Control Theory and Applications*, 2018, **35**(7): 918–927  
(谢佩, 游科友, 洪奕光, 谢立华. 网络化分布式凸优化算法研究进展. *控制理论与应用*, 2018, **35**(7): 918–927)
- Nedić A, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(1): 48–61
- Nedić A, Ozdaglar A, Parrilo P A. Constrained consensus and optimization in multi-agent networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(4): 922–938
- Zhu M H, Martínez S. On distributed convex optimization under inequality and equality constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(1): 151–164
- Zhang Y Q, Lou Y C, Hong Y G. An approximate gradient algorithm for constrained distributed convex optimization. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2014, **1**(1): 61–67
- Guo F H, Wen C Y, Mao J F, Li G Q, Song Y D. A distributed hierarchical algorithm for multi-cluster constrained optimization. *Automatica*, 2017, **77**: 230–238
- Tuck J, Hallac D, Boyd S. Distributed majorization-minimization for laplacian regularized problems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2019, **6**(1): 45–52
- Shi G D, Johansson K H, Hong Y G. Reaching an optimal consensus: Dynamical systems that compute intersections of convex sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(3): 610–622
- Lu J, Tang C Y. Zero-gradient-sum algorithms for distributed convex optimization: The continuous-time case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(9): 2348–2354
- Qiu Z R, Liu S, Xie L H. Distributed constrained optimal consensus of multi-agent systems. *Automatica*, 2016, **68**: 209–215
- Yi P, Hong Y G, Liu F. Distributed gradient algorithm for constrained optimization with application to load sharing in power systems. *Systems and Control Letters*, 2015, **83**: 42–52
- Le X Y, Chen S J, Yan Z, Xi J T. A neurodynamic approach to distributed optimization with globally coupled constraints. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, **48**(11): 3149–3158
- Yang S F, Liu Q S, Wang J. A multi-agent system with a proportional-integral protocol for distributed constrained optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(7): 3461–3467
- Rahili S, Ren W. Distributed continuous-time convex optimization with time-varying cost functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(4): 1590–1605
- Zhang Qing, Gong Zhi-Kun, Yang Zheng-Quan, Chen Zeng-Qiang. Distributed optimization for adaptive flocking of multi-agent systems. *Control Theory and Applications*, 2019, **36**(4): 666–672  
(张青, 弓志坤, 杨正全, 陈增强. 多智能体系统的自适应群集分布式优化. *控制理论与应用*, 2019, **36**(4): 666–672)
- Song Y F, Chen W S. Finite-time convergent distributed consensus optimisation over networks. *IET Control Theory and Applications*, 2016, **10**(11): 1314–1318
- Hu Z L, Yang J Y. Distributed finite-time optimization for second order continuous-time multiple agents systems with time-varying cost function. *Neurocomputing*, 2018, **287**(11): 173–184
- Santilli M, Marino A, Gasparri A. A finite-time protocol for distributed continuous-time optimization of sum of locally coupled strictly convex functions. In: *Proceedings of the 2018 IEEE Conference on Decision and Control*. Florida, USA: IEEE, 2018. 993–998
- Lin P, Ren W, Farrell J A. Distributed continuous-time optimization: Nonuniform gradient gains, finite-time convergence, and convex constraint set. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(5): 2238–2253
- Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(4): 950–955
- Li S H, Du H B, Lin X Z. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics. *Automatica*, 2011, **47**(8): 1706–1712
- Liu Fan, Yang Hong-Yong, Yang Yi-Ze, Li Yu-Ling, Liu Yuan-Shan. Finite-time integral sliding-mode control for multi-agent systems with mismatched disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2019, **45**(4): 749–758  
(刘凡, 杨洪勇, 杨怡泽, 李玉玲, 刘远山. 带有不匹配干扰的多智能体系统有限时间积分滑模控制. *自动化学报*, 2019, **45**(4): 749–758)
- Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(8): 2106–2110
- Zuo Z Y, Han Q L, Ning B D, Ge X, H Zhang X M. An overview of recent advances in fixed-time cooperative control of multi-agent systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, **14**(6): 2322–2334
- Fu J J, Wang J Z. Finite-time consensus for multi-agent systems with globally bounded convergence time under directed communication graphs. *International Journal of Control*, 2017, **90**(9): 1807–1817
- Ni J K, Liu L, Liu C X, Liu J. Fixed-time leader-following consensus for second-order multiagent systems with input delay. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, **64**(11):

8635–8646

- 28 Chen Gang, Li Zhi-Yong, Wei Meng-Li. Distributed fixed-time secondary coordination control of islanded microgrids. *Control and Decision*, 2019, **34**(1): 205–212  
(陈刚, 李志勇, 韦梦立. 孤岛微电网的分布式固定时间二次协调控制. *控制与决策*, 2019, **34**(1): 205–212)
- 29 Wang Y J, Song Y D, Hill D J, Krstic M. Prescribed-time consensus and containment control of networked multiagent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, **49**(4): 1138–1147
- 30 Ning B D, Han Q L, Zuo Z Y. Distributed optimization for multiagent systems: An edge-based fixed-time consensus approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, **49**(1): 122–132
- 31 Chen G, Li Z Y. A fixed-time convergent algorithm for distributed convex optimization in multi-agent systems. *Automatica*, 2018, **95**: 539–543
- 32 Sun Q Y, Han R K, Zhang H G, Zhou J G, Guerrero J M. A multiagent-based consensus algorithm for distributed coordinated control of distributed generators in the energy internet. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2015, **6**(6): 3006–3019
- 33 Droge G, Kawashima H, Egerstedt M B. Continuous-time proportional-integral distributed optimisation for networked systems. *Journal of Control and Decision*, 2014, **1**(3): 191–213
- 34 Yi Peng, Hong Yi-Guang. Distributed cooperative optimization and its applications. *Scientia Sinica Mathematica*, 2016, **46**(10): 1547–1564  
(衣鹏, 洪奕光. 分布式合作优化及其应用. *中国科学: 数学*, 2016, **46**(10): 1547–1564)
- 35 Boyd S, Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 1–716

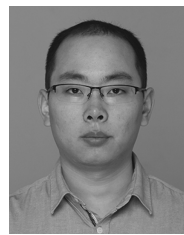


陈刚 重庆大学自动化学院教授. 2006 年获得浙江大学控制科学与工程博士学位. 主要研究方向为分布式协调控制, 分布式优化控制, 多智能体系统. 本文通信作者.

E-mail: chengang@cqu.edu.cn

(CHEN Gang Professor at the Col-

lege of Automation, Chongqing University. He received his Ph.D. degree in control science and technology from Zhejiang University in 2006. His research interest covers distributed cooperative control, distributed optimization control, and multi-agent systems. Corresponding author of this paper.)



李志勇 重庆大学自动化学院博士研究生. 2018 年获得重庆大学控制科学与工程硕士学位. 主要研究方向为分布式优化与控制.

E-mail: lizhiyong@cqu.edu.cn

(LI Zhi-Yong Ph.D. candidate at the College of Automation, Chong-

qing University. He received his master degree in control science and engineering from Chongqing University in 2018. His research interest covers distributed optimization and control.)