

# 一种固定时间收敛模型参考终端滑模控制方法

张骁骏<sup>1</sup> 袁夏明<sup>2</sup> 王向阳<sup>2</sup> 朱纪洪<sup>3</sup> 李春文<sup>1</sup>

**摘要** 针对一类具有模型不确定性和外部扰动的时变非线性系统, 基于模型参考控制方法, 设计了具有固定时间收敛特性的终端滑模控制器. 首先, 提出一种带有输入饱和和限幅和补偿信号滤波的模型参考控制结构; 然后针对广义误差信号, 采用新型终端滑模面设计了补偿控制器, 较好地平衡靠近和远离平衡点的收敛速度. 基于李雅普诺夫方法证明了闭环系统的稳定性和固定时间收敛特性, 并给出了收敛时间上界. 最后将该方法应用到含有极限环的非线性系统跟踪控制中, 仿真结果验证了该方法的有效性.

**关键词** 固定时间收敛, 模型参考控制, 终端滑模控制, 时变非线性系统

**引用格式** 张骁骏, 袁夏明, 王向阳, 朱纪洪, 李春文. 一种固定时间收敛模型参考终端滑模控制方法. 自动化学报, 2022, 48(3): 712–723

**DOI** 10.16383/j.aas.c190273

## A Model Reference Terminal Sliding Mode Control Method With Fixed-time Convergence

ZHANG Xiao-Jun<sup>1</sup> YUAN Xia-Ming<sup>2</sup> WANG Xiang-Yang<sup>2</sup> ZHU Ji-Hong<sup>3</sup> LI Chun-Wen<sup>1</sup>

**Abstract** Based on model reference method, a nonsingular terminal sliding-mode control method with fixed time convergence is proposed for a class of time-varying nonlinear systems with model uncertainties and external disturbances. Firstly, a model reference controller structure considering input saturation and compensation signal filtering is proposed. Then a sliding mode controller based on a novel nonlinear terminal sliding mode manifold is constructed for generalized errors, which balances the convergence speed near and away from the equilibrium point. The fixed time convergence and stability of closed-loop system are proved with the Lyapunov method, and the upper bound of convergence time is obtained. Finally, the method proposed is applied to tracking control of nonlinear systems with limit cycle. The simulation results verify its effectiveness.

**Key words** Fixed-time convergence, model reference control, terminal sliding mode control, time-varying nonlinear systems

**Citation** Zhang Xiao-Jun, Yuan Xia-Ming, Wang Xiang-Yang, Zhu Ji-Hong, Li Chun-Wen. A model reference terminal sliding mode control method with fixed-time convergence. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(3): 712–723

滑模控制方法是一类控制行为不连续的非线性控制方法, 通过控制量切换迫使系统状态沿着预定的滑模面运动, 具有设计简单、对匹配不确定性和外部扰动鲁棒性强的特点, 因而在机器人<sup>[1]</sup>、飞行器<sup>[2]</sup>、伺服系统<sup>[3]</sup>、发电机组<sup>[4]</sup>等对象中得到了广泛的研究与应用. 滑模控制方法设计时首先根据期望系统轨迹选择滑模面, 然后设计反馈控制律, 使系统轨迹到达并驻留在滑模面上. 滑模控制方法的缺

点在于其控制律中包含不连续的高频切换项会导致“抖振现象”. 针对抖振现象, 相关文献提出了基于“边界层”的准滑模动态方法<sup>[5]</sup>、动态滑模方法<sup>[6]</sup>、高阶滑模方法<sup>[7]</sup>等解决方法.

传统的滑模设计方法通常选择线性超平面, 收敛速度可以通过参数调节, 但只能得到系统状态的渐近收敛特性. 终端滑模控制方法 (Terminal sliding mode control, TSMC) 在超平面设计中引入非线性函数, 实现了系统状态的有限时间收敛. Bhat 等<sup>[8]</sup>给出了基于李雅普诺夫函数的有限时间稳定性定理和收敛时间估计. 有限时间稳定理论的时间上界与初值有关, 学者们进一步研究了具有固定时间上界的固定时间稳定性理论. Polyakov 等研究了基于李雅普诺夫方法<sup>[9]</sup>和隐李雅普诺夫方法<sup>[10]</sup>的固定时间稳定性理论, 并应用于终端滑模控制器设计<sup>[9]</sup>. 标准的终端滑模控制在某些系统状态下会出现奇异问题, 限制了其实际应用. Feng 等<sup>[11]</sup>探讨了有限时间

收稿日期 2019-04-01 录用日期 2019-07-30

Manuscript received April 1, 2019; accepted July 30, 2019

国家自然科学基金 (61673240, 61603210) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61673240, 61603210)

本文责任编辑 曾志刚

Recommended by Associate Editor ZENG Zhi-Gang

1. 清华大学自动化系 北京 100084 2. 清华大学计算机科学与技术系 北京 100084 3. 清华大学精密仪器系 北京 100084

1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084 2. Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084 3. Department of Precision Instrument, Tsinghua University, Beijing 100084

非奇异终端滑模面的设计问题, 在此基础上, Yang 等<sup>[12]</sup> 研究了固定时间收敛非奇异终端滑模面. Zuo 等<sup>[13]</sup> 针对二阶非线性系统设计了新型固定时间终端滑模面, 并使用了倒立摆模型作为基准测试平台. 在此基础上, Li 等<sup>[14]</sup> 和 Corradini 等<sup>[15]</sup> 分别设计新型非奇异终端滑模面, 并使用该倒立摆模型进行了测试. Levant 等<sup>[16]</sup> 和 Andrieu 等<sup>[17]</sup> 研究了基于齐次性理论的有限/固定时间收敛理论, 并应用于观测器<sup>[18]</sup> 和鲁棒微分器<sup>[19]</sup> 设计. 由于其快速收敛性和鲁棒性, 固定时间终端滑模控制器在飞行控制<sup>[20]</sup>、潜航器控制<sup>[21]</sup>、多智能体控制<sup>[22]</sup>、电力混沌系统控制<sup>[23]</sup>、电机无位置控制<sup>[24]</sup> 等方面得到了广泛的应用.

模型参考控制的目标是设计补偿控制器使得被控对象的输出尽可能跟踪参考模型的输出, 使广义误差收敛至零<sup>[25]</sup>. 补偿控制器用来补偿被控对象与参考模型的状态误差、对象模型不确定性和外部扰动. 模型参考自适应<sup>[25]</sup> 基于稳定性理论设计自适应律调节补偿控制器参数. 在其基础上, L1 自适应<sup>[26]</sup> 引入低通滤波器使得自适应性能与鲁棒性能解耦, 保证闭环系统的鲁棒性和动态性能. 除此之外, 还可以通过信号补偿方法<sup>[27]</sup>、神经网络<sup>[28]</sup>、滑模控制<sup>[29]</sup> 等方法设计补偿控制器. 模型参考控制方法将跟踪问题转换为广义误差系统的镇定问题, 便于设计系统动态特性, 在机械臂控制<sup>[30]</sup>、飞行控制<sup>[31]</sup>、混沌系统控制<sup>[32]</sup> 等方面得到了广泛应用.

现有模型参考方法只能得到广义误差渐近收敛的结论, 本文将固定时间收敛终端滑模控制方法应用于模型参考方法的反馈控制器设计, 使得被控对象状态在固定时间内收敛到参考模型状态. 首先, 在模型参考控制基础上设计新的控制结构, 引入输入限幅和补偿信号滤波, 保证补偿信号无损地输入广义误差系统. 然后设计了一种新型的固定时间终端滑模面, 其可以较好地平衡远离和靠近平衡点收敛速度. 在其基础上针对广义误差系统设计终端滑模控制器, 使得广义误差信号在固定时间内收敛到零. 使用李雅普诺夫方法证明了闭环系统的稳定性并给出了收敛时间上界的估计. 最后, 将该方法应用于存在极限环的非线性对象控制中, 分别针对二阶<sup>[33]</sup> 和三阶<sup>[34]</sup> 对象进行了仿真, 并与现有算法进行了比较, 验证了该方法的控制效果和鲁棒性.

本文后续内容安排如下: 第 1 节给出预备知识和定理, 并介绍了被控对象; 第 2 节提出了新的控制器结构和滑模面, 针对误差动态设计了固定时间终端滑模控制器, 证明了闭环系统的稳定性并得到了收敛时间上界的估计; 第 3 节采用两种仿真模型进行仿真验证和比较; 最后对本文进行了总结.

## 1 问题描述

### 1.1 系统模型

考虑如下具有模型不确定性和外部扰动的时变 Byrnes-Isidori 标准型系统<sup>[35]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f(\mathbf{x}) + gu + \Delta f(\mathbf{x}, t) + d(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  为系统状态变量,  $f(\mathbf{x})$  为非线性光滑函数, 且  $f(\mathbf{0}) = 0$ .  $\Delta f(\mathbf{x}, t)$  和  $d(\mathbf{x}, t)$  分别表示模型不确定性和外部扰动, 且存在上界使得  $|\Delta f(\mathbf{x}, t)| < D_1$ ,  $|d(\mathbf{x}, t)| < D_2$ . 合并表示为等价干扰的形式为  $d_n(\mathbf{x}, t) = \Delta f(\mathbf{x}, t) + d(\mathbf{x}, t)$ , 则有  $|d_n(\mathbf{x}, t)| < D = D_1 + D_2$ .

参考模型可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_{mi} = x_{mi+1}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{mn} = f_m(\mathbf{x}_m) + gu_m \end{cases} \quad (2)$$

为了方便进行动态特性设计, 一般采用线性定常系统, 即  $f_m(\mathbf{x}_m) = [-a_{m1} \ \dots \ -a_{mn}] \mathbf{x}_m$ . 输入  $u_m = k_g r(t)$ , 其中  $r(t)$  为指令信号,  $k_g = -1/(A_m^{-1}[0 \ g]^T)$  为参考模型直流增益的逆. 本文的控制目标是使系统状态  $\mathbf{x}$  跟踪参考模型状态  $\mathbf{x}_m$ , 从而实现对输入信号  $r(t)$  的期望响应.

### 1.2 固定时间稳定预备知识

Bhat 等<sup>[8]</sup> 首先研究了有限时间收敛理论并给出了基于李雅普诺夫函数的判定条件

**定义 1**<sup>[8]</sup>. 若系统 (1) 满足: 1) 原点是渐近稳定平衡点; 2) 存在原点的开邻域  $D^n$  和正定函数  $T(\mathbf{x}_0) : D^n \rightarrow \mathbf{R}$  使得对于所有  $\mathbf{x}_0 \in D^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  有

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T(\mathbf{x}_0)} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \quad \forall t > T(\mathbf{x}_0) \end{cases} \quad (3)$$

则原点是有限时间稳定的. 当  $D^n = \mathbf{R}^n$  时, 原点是全局有限时间稳定的.

**定理 1**<sup>[8]</sup>. 若存在连续正定方程  $V(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  满足

$$\begin{cases} \dot{V}(\mathbf{x}) + \alpha(V(\mathbf{x}))^p \leq 0 \\ \dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \end{cases} \quad (4)$$

其中, 参数  $\alpha, p > 0$ ,  $p < 1$ . 则系统 (1) 是全局有限时间稳定的, 且收敛时间为  $T(\mathbf{x}_0) \leq 1/(p(1-\alpha))V(\mathbf{x}_0)^{1-\alpha}$ .

在有限时间收敛理论的基础上, Polyakov 等<sup>[9]</sup> 研究了固定时间收敛理论及其判定条件.

**定义 2**<sup>[9]</sup>. 若系统 (1) 满足: 1) 原点是全局有限时间稳定平衡点; 2) 存在一个与初始值无关的收敛时间上界, 即存在  $T_{\max} > 0$  使得  $T(\mathbf{x}_0) < T_{\max}$ ,  $\forall \mathbf{x}_0 \in$

$\mathbf{R}^n$ . 则原点是固定时间稳定的.

**定理 2<sup>[9]</sup>**. 若存在连续正定方程  $V(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  满足

$$\begin{cases} \dot{V}(\mathbf{x}) + \alpha(V(\mathbf{x}))^p + \beta(V(\mathbf{x}))^q \leq 0 \\ \dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \end{cases} \quad (5)$$

其中, 参数  $\alpha, \beta, p, q > 0, p < 1, q > 1$ , 则系统 (1) 是全局固定时间稳定的, 且收敛时间上界为  $T(\mathbf{x}_0) < T_{\max} = 1/(\alpha(1-p)) + 1/(\beta(q-1))$ .

## 2 控制器设计

### 2.1 模型参考结构

在传统的模型参考结构的基础上, 本文在补偿控制器通道加入低通滤波器, 在总输入通道加入限幅, 得到如图 1 所示的控制器结构.

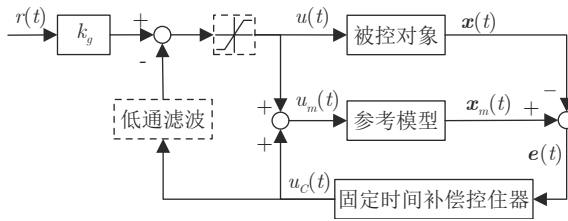


图 1 模型参考控制器结构

Fig.1 Structure of the model reference controller proposed

设计被控对象输入  $u(t)$  为

$$u = \text{sat}(k_g r(t) - C(u_C)) = k_g r(t) - \text{sat}_n(C(u_C)) \quad (6)$$

其中,  $\text{sat}(u)$  为限幅函数, 限幅值为被控对象输入饱和边界  $u_{\max}$ , 参考输入不会达到饱和边界, 引入函数  $\text{sat}_n(u)$  表示施加在补偿信号上的等效限幅函数,  $u_C$  为固定时间补偿控制器输出.

设计参考模型输入  $u_m(t)$  为

$$u_m = u_C + k_g r(t) - \text{sat}_n(C(u_C)) \quad (7)$$

补偿控制量没有达到饱和边界且高频信号弱时,  $u_m(t) \approx k_g r(t)$ .

将式 (6) 和式 (7) 分别输入被控对象 (1) 和参考模型 (2), 得到系统闭环广义误差信号  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}$  的方程为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{x}_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{\tilde{x}}_n = f_m(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}) - d_n(\mathbf{x}, t) + g u_C \end{cases} \quad (8)$$

对于误差系统, 补偿控制量  $u_C$  不受限幅和滤波的影响, 不影响误差状态收敛性; 同时通过限幅函数

$\text{sat}(u)$  和低通滤波器  $C(u)$ , 将超过  $u_{\max}$ 、高频的补偿信号输入到参考模型中, 避免输入长时间饱和和高频补偿信号激发被控对象的未建模动态, 导致系统不稳定. 本文采用固定时间终端滑模方法设计控制量  $u_C$ , 使得广义误差信号在给定时间上界内收敛到原点, 则被控对象实现了对参考模型状态的跟踪.

### 2.2 滑动模态设计

本节提出一种新型终端滑动模态设计方法, 该方法受到 Corradini 等<sup>[15]</sup> 所提出的一类终端滑动模态的启发.

**定理 3<sup>[15]</sup>**. 对一类标量系统  $\dot{x} = -\beta(h'(x))^{-1}$ , 其中参数  $\beta > 0, h(x)$  为非线性函数, 满足  $h(0) = 0, h'(x) \neq 0, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \lim_{x \rightarrow 0}(h'(x))^{-1} = 0$ . 若原点为全局渐近稳定平衡点, 则该系统有限时间稳定, 收敛时间为  $T = |h(x_0)|/\beta$ . 若存在上界  $H_{\max}$  使得  $|h(x)| < H_{\max}$ , 则  $T < H_{\max}/\beta$ , 系统固定时间收敛. 一种典型的非线性函数为

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{\arctan(|x|)} \\ \dot{x} &= -2\beta\sqrt{\arctan(|x|)}(1+x^2)\text{sign}(x) \\ T &< \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\beta} \end{aligned} \quad (9)$$

定理 3 中所述滑动模态的固定时间收敛特性是通过  $h(x)$  有界得到的, 在系统状态远离平衡点时收敛速度快, 但可能导致输入量过大; 在靠近平衡点时收敛速度下降, 慢于普通终端滑模. 与基于定理 2 的一般固定时间终端滑动模态  $\dot{x} = -\alpha\text{sig}^p x - \beta\text{sig}^q x, \text{sig}^p x = \text{sign}(x)|x|^p$  相比, 设计参数较少, 不便于平衡不同位置的收敛速度. 本文将传统终端滑动模态与定理 3 中的滑动模态 (9) 结合, 设计了一种新型终端滑动模态. 考虑一类标量系统

$$\dot{x} = -\alpha\text{sig}^p x - \beta(h'(x, q))^{-1} \quad (10)$$

其中, 参数  $\alpha, \beta, p, q > 0, p < 1$ , 选择非线性函数为

$$\begin{cases} h(x, q) = (\arctan(|x|))^q \\ (h'(x, q))^{-1} = \frac{\arctan(|x|)^{1-q}(1+x^2)}{q\text{sign}(x)} \end{cases} \quad (11)$$

**定理 4.** 式 (10) 所表示的系统固定时间收敛到平衡点, 且收敛时间上界为

$$T < T_{\max} = \frac{(2\pi)^q - (\pi)^q}{4^q \beta} + \frac{1}{\alpha(1-p)} \quad (12)$$

**证明.** 令  $z = |x|$ , 可得

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{\text{sign}}(x) = \\ & -\alpha z^p - \beta \arctan(z)^{1-q} \frac{1+z^2}{q} = \\ & -\alpha z^p - \beta (h'(z, q))^{-1} < 0 \end{aligned} \quad (13)$$

若  $z_0 > 1$ , 设  $z$  在  $T_1$  时刻收敛到  $z = 1$ , 则由式 (13) 可得

$$\begin{aligned} \dot{z} < -\beta \arctan(z)^{1-q} \frac{1+z^2}{q} \Rightarrow \\ T_1 < \frac{h(z_0) - h(1)}{\beta} < \frac{(2\pi)^q - \pi^q}{4^q \beta} \end{aligned} \quad (14)$$

若  $z_0 \leq 1$ , 设  $z$  在  $T_2$  时刻收敛到  $z = 0$ , 则由式 (13), 可得

$$\begin{aligned} \dot{z} < -\alpha z^p \Rightarrow \\ T_2 < \frac{z_0}{\alpha(1-p)} \leq \frac{1}{\alpha(1-p)} \end{aligned} \quad (15)$$

$z$  收敛等价于  $x$  收敛, 则式 (10) 所表示的系统在固定时间内收敛到原点, 且收敛时间上界为

$$T_{\max} = T_1 + T_2 = \frac{(2\pi)^q - \pi^q}{4^q \beta} + \frac{1}{\alpha(1-p)} \quad (16)$$

□

选取不同的参数如表 1 所示, 考察参数对于标量系统收敛特性的影响. 式 (10) 系统收敛过程如图 2 所示.

表 1 标量系统参数和收敛时间 (s)  
Table 1 Coefficients and convergence time (s) of the scalar system

参数	$\beta$	$q$	$\alpha$	$p$	$T$
1	1	5/9	0	5/9	1.08
2	1	5/9	1	5/9	0.80
3	3	5/9	1	5/9	0.34
4	1	3/9	1	5/9	0.68
5	1	5/9	3	5/9	0.56
6	1	5/9	1	3/9	0.75

参数 1 等价于 Corradini 等<sup>[15]</sup> 采用的方法, 对比参数 1 和参数 2 可以看出, 本文的增加项提高了标量系统在靠近平衡点区域的收敛速度. 以参数 2 为基准, 参数 3~6 分别体现了  $\alpha, \beta, p, q$  对标量系统收敛速度的影响: 第 1 项参数  $\alpha, p$  主要影响靠近平衡点区域的收敛速度; 第 2 项参数  $\beta, q$  主要影响远离平衡点区域的收敛速度; 系数  $\alpha, \beta$  对下降速率影响较大, 系数越大, 收敛越快; 指数项  $p, q$  影响相对较小.

采用单级倒立摆基准测试模型<sup>[13-15]</sup> 对设计方法进行考察, 并与现有方法进行对比<sup>[12-15]</sup>. 由于系统收敛时间依赖于参数选择, 为便于比较, 调整参数使

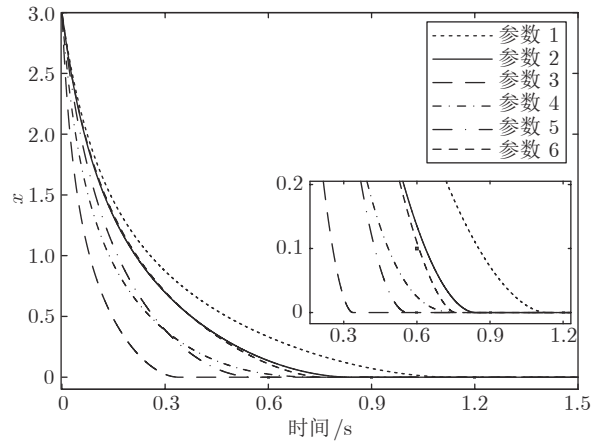


图 2 标量系统收敛过程

Fig. 2 Convergence process of the scalar system

得初始下降速率基本相同. 跟踪误差收敛曲线如图 3 所示. 可以看出, 本文所提出的滑动模态设计方法的收敛速度优于现有方法, 与 Corradini 等<sup>[15]</sup> 方法相比在靠近平衡点处收敛速度更快.

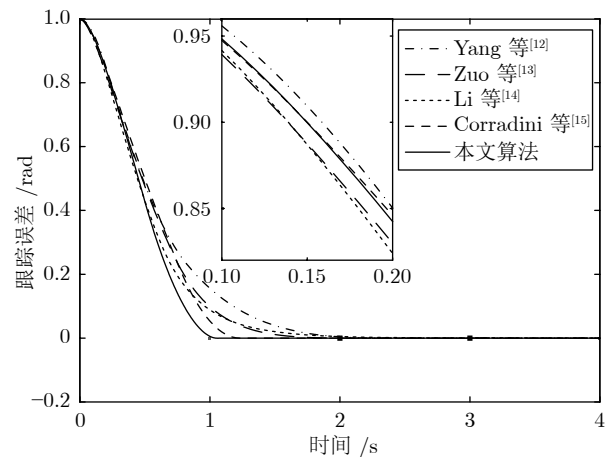


图 3 基准模型跟踪误差曲线

Fig. 3 Tracking error curve of the benchmark model

### 2.3 二阶系统控制器设计

首先以二阶系统为例设计控制器, 广义误差信号可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = f_m(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}) - d_n(\mathbf{x}, t) + g u_C \end{cases} \quad (17)$$

基于式 (10) 定义滑模变量和趋近律

$$\begin{aligned} s(\tilde{\mathbf{x}}) &= \tilde{x}_2(t) + \alpha_1 \text{sig}^{p_1} \tilde{x}_1 + \beta_1 (h'(\tilde{x}_1, q_1))^{-1} \\ \dot{s} &= -\alpha_2 \text{sig}^{p_2} s - \beta_2 (h'(s, q_2))^{-1} \end{aligned} \quad (18)$$

其中, 参数  $\alpha_i, \beta_i, p_i, q_i > 0, p_i < 1$ , 当广义误差信号到达滑模面时,  $s(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ , 则有  $\tilde{x}_2(t) = -\alpha_1 \text{sig}^{p_1} \tilde{x}_1 - \beta_1 (h'(\tilde{x}_1, q_1))^{-1}$ , 误差系统按照式 (10) 的设计滑动



模态收敛到原点.

针对式 (18) 所定义的滑模变量和趋近律, 设计非线性控制律 (19). 其中  $u_1$  用于抵消误差动态,  $u_2$  为滑模运动控制项,  $u_3$  为趋近运动控制项.

$$\begin{aligned} u_C &= -g^{-1}(u_1 + u_2 + u_3) \\ u_1 &= f_m(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}) \\ u_2 &= \alpha_1 p_1 \text{sig}^{p_1-1} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - \beta_1 \frac{h''(\tilde{x}_1, q_1)}{h'(\tilde{x}_1, q_1)^2} \tilde{x}_2 \\ u_3 &= \alpha_2 \text{sig}^{p_2} s + \beta_2 (h'(s, q_2))^{-1} + D \text{sign}(s) \end{aligned} \quad (19)$$

**定理 5.** 采用式 (19) 所述非线性控制律的二阶广义误差系统固定时间稳定, 且收敛时间上界为

$$T_{\max} = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{(2\pi)^{q_i} - \pi^{q_i}}{4^{q_i} \beta_i} + \frac{1}{\alpha_i (1 - p_i)} \right) \quad (20)$$

**证明.** 将输入式 (19) 代入式 (17), 得到滑模变量的导数如式 (21) 所示.

$$\begin{aligned} \dot{s}(\tilde{\mathbf{x}}) &= f_m(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}) + g u_C + d_n(\mathbf{x}, t) + \\ &\quad \alpha_1 p_1 \text{sig}^{p_1-1} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - \beta_1 \frac{h''(\tilde{x}_1, q_1)}{h'(\tilde{x}_1, q_1)^2} \tilde{x}_2 = \\ &\quad - \alpha_2 \text{sig}^{p_2} s - \beta_2 (h'(s, q_2))^{-1} - \text{sign}(s)(\varepsilon) \\ \varepsilon &= (D - d_n(\mathbf{x}, t) \text{sign}(s)) \geq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

选取李雅普诺夫函数  $V(s) = s^2$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= 2s\dot{s} = \\ 2|s| &\left( -\alpha_2 |s|^{p_2} - \frac{\beta_2 \arctan(|s|^{1-q_2} (1+s^2))}{q_2} - \varepsilon \right) \leq \\ 2|s| &\left( -\alpha_2 |s|^{p_2} - \frac{\beta_2 \arctan(|s|^{1-q_2} (1+s^2))}{q_2} \right) < 0 \end{aligned} \quad (22)$$

则误差系统全局渐近稳定,  $s$  最终收敛到 0. 又由式 (21) 和定理 4, 可得系统趋近滑模面的到达时间为

$$T_r < T_2 = \frac{(2\pi)^{q_2} - \pi^{q_2}}{4^{q_2} \beta_2} + \frac{1}{\alpha_2 (1 - p_2)} \quad (23)$$

系统到达滑模面后  $s = 0$ , 随后沿着滑模面收敛到原点, 由式 (18) 和定理 4 可得收敛时间为

$$T_s < T_1 = \frac{(2\pi)^{q_1} - \pi^{q_1}}{4^{q_1} \beta_1} + \frac{1}{\alpha_1 (1 - p_1)} \quad (24)$$

综上所述, 系统在固定时间内收敛到原点, 收敛时间上界为

$$\begin{aligned} T &= T_r + T_s < T_1 + T_2 = \\ &\sum_{i=1}^2 \left( \frac{(2\pi)^{q_i} - \pi^{q_i}}{4^{q_i} \beta_i} + \frac{1}{\alpha_i (1 - p_i)} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

□

误差系统的相平面图如图 4 所示.

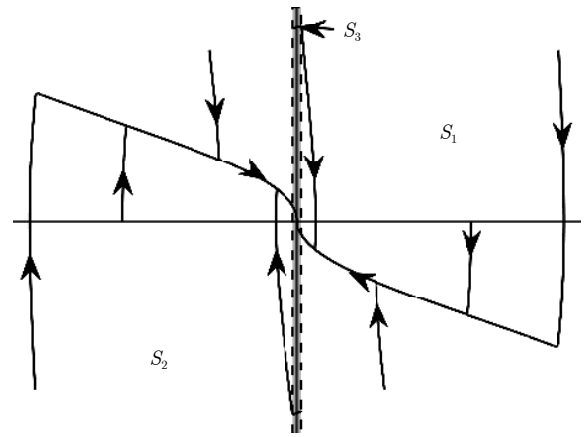


图 4 误差系统相平面图

Fig. 4 Phase plane plots of error dynamic

需要指出, 当系统状态出现  $\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 \neq 0$  时, 上述控制器会奇异, 参考文献 [15] 所采用的方法, 对在纵轴邻域  $S_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : x_1 \in (-\sigma_1, \sigma_1), |x_2| > \sigma_2\}$  中的控制输入进行修改, 使得误差动态穿过纵轴进入非奇异区. 如图 4 中  $S_3$  区域轨迹所示. 当  $\mathbf{x} \in S_3$  时, 取  $u = u_\sigma = -g^{-1}(f_m(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}) - D \text{sign}(\tilde{x}_2))$ , 此时误差动态为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = D \text{sign}(\tilde{x}_2) + d_n(\mathbf{x}, t) = \text{sign}(\tilde{x}_2)(\varepsilon) \end{cases} \quad (26)$$

则有  $\tilde{x}_2 \dot{\tilde{x}}_2 \geq 0$ , 故  $|\dot{\tilde{x}}_1| \geq |\tilde{x}_2(t_0)|$ , 系统在  $S_3$  停留时间为

$$T_\sigma \leq \frac{2\sigma_1}{|\tilde{x}_2(t_0)|} < \frac{2\sigma_1}{\sigma_2} \quad (27)$$

相轨迹穿过  $S_3$  后沿着预定轨迹运动, 不会再次进入奇异区, 因此, 系统仍然是固定时间稳定的, 收敛时间上界为

$$\begin{aligned} T_{\max} &= T_r + T_s + T_\sigma < \\ &\sum_{i=1}^2 \left( \frac{(2\pi)^{q_i} - \pi^{q_i}}{4^{q_i} \beta_i} + \frac{1}{\alpha_i (1 - p_i)} \right) + \frac{2\sigma_1}{\sigma_2} \end{aligned} \quad (28)$$

系统动态到达滑模面后, 控制量中的不连续项可能会导致抖振问题, 引入连续函数 (29) 近似切换函数以减少抖振影响, 参数  $\rho$  越大越接近切换函数.

$$\psi(\rho, s) = \frac{e^{\rho s} - 1}{e^{\rho s} + 1}, \quad \rho > 0 \quad (29)$$

## 2.4 高阶系统控制器设计

高阶系统广义误差信号可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{x}_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{\tilde{x}}_n = f_m(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}) + g u_C + d_n(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (30)$$

由于第 2.2 节所述终端滑动模态适用于相对阶为 1 的系统, 因此高阶系统需要设计具有递归结构的滑动模态

$$\begin{cases} s_1 = \dot{s}_0 + \alpha_1 \text{sig}^{p_1} s_0 + \beta_1 (h'(s_0, q_1))^{-1} \\ s_2 = \dot{s}_1 + \alpha_2 \text{sig}^{p_2} s_2 + \beta_2 (h'(s_1, q_2))^{-1} \\ \vdots \\ s_{n-1} = \dot{s}_{n-2} + \alpha_{n-1} \text{sig}^{p_{n-1}} s_{n-2} + \\ \beta_{n-1} (h'(s_{n-2}, q_{n-1}))^{-1} \end{cases} \quad (31)$$

其中, 参数  $\alpha_i, \beta_i, p_i, q_i > 0, p_i < 1$ . 将误差动态代入式 (31), 得到滑模变量  $s_{n-1}$  的导数如式 (32) 所示

$$\begin{aligned} \dot{s}_{n-1} = & \dot{\tilde{x}}_n + F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ & \alpha_{n-1} p_{n-1} \text{sig}^{p_{n-1}-1} s_{n-2} \dot{s}_{n-2} - \\ & \beta_{n-1} \frac{h''(s_{n-2}, q_{n-1})}{h'(s_{n-2}, q_{n-1})^2} \dot{s}_{n-2} \end{aligned} \quad (32)$$

其中,  $F(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  表示由于递归产生的附加项. 以 3 阶系统为例, 表达式如式 (33) 所示

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = & \alpha_1 p_1 \text{sig}^{p_1-1} \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 + \\ & \alpha_1 p_1 (p_1 - 1) \text{sig}^{p_1-2} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^2 - \\ & \beta_1 \left( \frac{h'''(\tilde{x}_1, q_1) h'(\tilde{x}_1, q_1) - 2h''(\tilde{x}_1, q_1)^2}{h'(\tilde{x}_1, q_1)^3} \tilde{x}_2^2 + \right. \\ & \left. \frac{h''(\tilde{x}_1, q_1)}{h'(\tilde{x}_1, q_1)^2} \tilde{x}_3 \right) \end{aligned} \quad (33)$$

设计式 (34) 形式的控制输入为

$$\begin{aligned} u_C = & -g^{-1} (F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) + D \text{sign}(s_{n-1}) + \\ & \alpha_n \text{sig}^{p_n} s_{n-1} + \beta_n (h'(s_{n-1}, q_n))^{-1}) - \\ & g^{-1} \left( \alpha_{n-1} p_{n-1} \text{sig}^{p_{n-1}-1} s_{n-2} \dot{s}_{n-2} - \right. \\ & \left. \beta_{n-1} \frac{h''(s_{n-2}, q_{n-1})}{h'(s_{n-2}, q_{n-1})^2} \dot{s}_{n-2} + f_m(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}) \right) \end{aligned} \quad (34)$$

将其代入式 (32), 可得滑模变量  $s_{n-1}$  的导数为

$$\begin{aligned} \dot{s}_{n-1} = & -\alpha_n \text{sig}^{p_n} s_{n-1} - \text{sign}(s_{n-1}) (\varepsilon) - \\ & \frac{\beta_n \arctan(|s_{n-1}|)^{1-q_n} (1+s_{n-1}^2)}{q_n \text{sign}(s_{n-1})} \\ \varepsilon = & D - d(\mathbf{x}, t) \text{sign}(s) \geq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

取李雅普诺夫函数  $V(s) = s_{n-1}^2$ , 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) = & 2s_{n-1} \dot{s}_{n-1} = \\ & 2|s_{n-1}| (-\alpha_n \text{sig}^{p_n} s_{n-1} - (\varepsilon)) - \\ & 2|s_{n-1}| \frac{\beta_n \arctan(|s_{n-1}|)^{1-q_n} (1+s_{n-1}^2)}{q_n} < 0 \end{aligned} \quad (36)$$

则闭环系统渐近稳定, 各阶滑模变量依次收敛, 收敛时间上界为

$$T_{\max} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{(2\pi)^{q_i} - (\pi)^{q_i}}{4^{q_i} \beta_i} + \frac{1}{\alpha_i (1-p_i)} \right) \quad (37)$$

### 3 仿真实验

#### 3.1 二阶翼摇模型验证

翼摇是大后掠角飞机在大迎角时出现的一种滚转通道自激振荡的现象. Capello 等<sup>[33]</sup> 通过风洞实验建立了两种飞机机型的翼摇运动模型, 并使用 L1 自适应算法实现了对于该现象的抑制. 在此基础上, 学者们使用基于扩张状态观测器的鲁棒控制<sup>[36]</sup>、自适应控制<sup>[37]</sup> 等方法对该模型进行研究.

翼摇运动模型可以表示为

$$\begin{aligned} \phi''(t) + \frac{\hat{a}_0}{t_s^2} \phi(t) + \frac{\hat{a}_1}{t_s^2} \phi'(t) + \frac{\hat{\omega}}{t_s^2} u(t) + \\ \frac{\hat{a}_2}{t_s^2} |\phi'(t)| \phi'(t) + \frac{\hat{a}_3}{t_s^2} \phi^3(t) + \\ \frac{\hat{a}_4}{t_s^2} \phi^2(t) \phi'(t) + \hat{d}(t, \phi(t), \phi'(t)) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

其中,  $\hat{\omega} = 0.9$ ,  $t_s = b_w / (2V_f)$ , 翼展  $b_w = 169$  mm, 空速  $V_f = 30$  m/s. 令  $\mathbf{x} = [\phi(t) \ \phi'(t)]^T$ , 则系统方程可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + d(t, \mathbf{x}) = \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\hat{a}_0}{t_s^2} & -\frac{\hat{a}_1}{t_s^2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\hat{\omega}}{t_s^2} \end{bmatrix} u + d(t, \mathbf{x}) \\ d(t, \mathbf{x}) = - \left( \frac{\hat{a}_2}{t_s^2} |x_2| x_2 + \frac{\hat{a}_3}{t_s^2} x_1^3 \right) - \\ \left( \frac{\hat{a}_4}{t_s^2} x_1^2 x_2 + \hat{d}(t, \mathbf{x}) \right) \end{aligned} \quad (39)$$

两种机型的模型参数如表 2 和表 3 所示<sup>[33]</sup>.

迎角  $\alpha_{\text{AOA}} = 0.57$  时的模型 C 开环响应相平面

表 2 模型 A 的气动数据

Table 2 Aerodynamic coefficients for Model A

$\alpha$ (rad)	$\hat{a}_0$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$
0.4363	0.00543	-0.01426	0.41336	-0.00465	0.00263
0.4800	0.00594	-0.01765	0.38793	-0.00487	0.01689
0.5236	0.00657	-0.02040	0.38008	-0.00537	0.02596
0.5672	0.00732	-0.03104	0.53884	-0.00623	0.04189
0.6109	0.00794	-0.03137	0.53455	-0.00751	0.05144
0.6545	0.00914	-0.00246	0.00105	-0.01059	0.03736
0.6981	0.00902	-0.01881	0.62351	-0.01187	0.06119
0.7418	0.00999	-0.03219	1.51180	-0.02862	0.06867
0.7854	0.01135	-0.03712	2.42520	-0.08113	0.02935

表 3 模型 C 的气动数据  
Table 3 Aerodynamic coefficients for Model C

$\alpha$ (rad)	$\hat{a}_0$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$
0.4363	0.00615	-0.02644	0.82603	-0.00940	0.04934
0.4800	0.00310	-0.00057	1.00250	-0.01157	-1.19080
0.5236	0.00523	-0.00406	0.09998	-0.00167	-0.00183
0.5672	0.00729	-0.01260	0.33063	-0.00506	-0.00378
0.6109	0.00591	-0.03024	1.07030	-0.00285	-0.03726
0.6545	-0.00406	-0.00588	1.0840	0.03646	-0.15374
0.6981	0.00574	-0.00771	-0.03172	-0.01095	0.16302
0.7418	-0.0040	-0.03261	2.3447	0.13848	0.90542
0.7854	-0.00089	-0.02071	0.8361	0.13752	2.8685

如图 5 所示, 系统开环响应存在极限环。

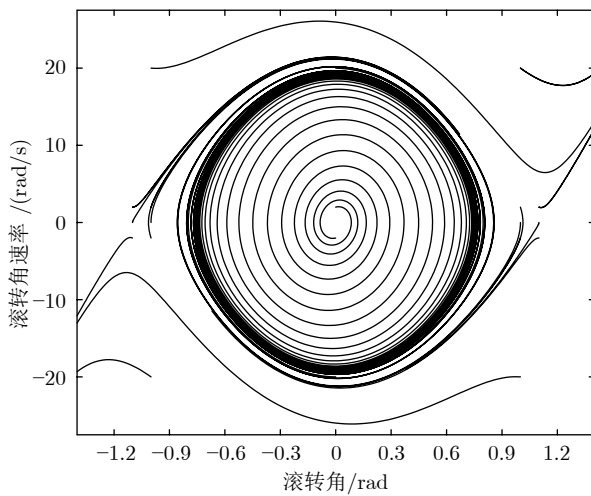


图 5 模型 C 开环响应极限环

Fig. 5 Open-loop response of Model C exhibiting limit cycle

参考模型选择为

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -14.14 \end{bmatrix} \mathbf{x}_m + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\hat{\omega}}{t_s^2} \end{bmatrix} u_m \quad (40)$$

采用第 2.1 节所述控制结构, 则广义误差信号可以表示为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A_m \mathbf{x}_m - A \mathbf{x} + B u_C - d(t, \mathbf{x}) \quad (41)$$

采用第 2.3 节所述方法设计固定时间收敛终端滑模控制器为

$$u_C = \frac{t_s^2}{\hat{\omega}} \left( [0 \ 1] (A_m \mathbf{x}_m - A \mathbf{x}) + D \psi(\rho, s) + \right.$$

$$\left. \alpha_2 \text{sig}^{p_2} s + \beta_2 (h'(s, q_2))^{-1} \right) +$$

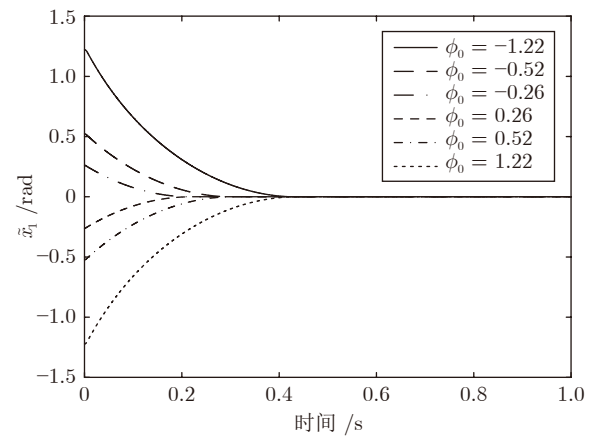
$$\frac{t_s^2}{\hat{\omega}} \left( \alpha_1 p_1 \text{sig}^{p_1-1} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - \right.$$

$$\left. \beta_1 \frac{q_1 - 1 - 2\tilde{x}_1 \arctan\left(\frac{|\tilde{x}_1|}{q_1}\right)}{q_1 \arctan\left(\frac{|\tilde{x}_1|}{q_1}\right)^{q_1}} \tilde{x}_2 \right), \quad |d(t, \mathbf{x})| \leq D \quad (42)$$

选取控制器参数为  $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $p_1 = q_1 = 5/9$ ,  $p_2 = q_2 = 3/9$ , 收敛时间估计为  $T_{\max} = 1.9$  s.

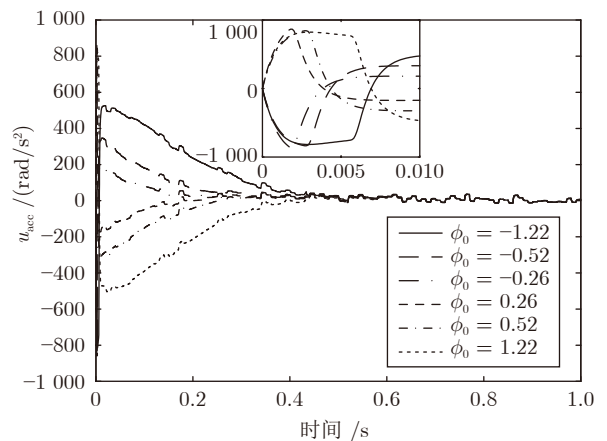
外部扰动  $\dot{d}(t, \phi(t), \phi'(t)) = 10 \sin(2\pi t) + 20 \sin(\pi t) + w$ ,  $w$  为白噪声. 采用 simulink 搭建模型, 龙格库塔方法进行仿真, 步长为 0.0001 s. 分别仿真不同初始滚转角收敛特性、不同迎角情况下的滚转角收敛特性和对阶跃信号的跟踪. 采用  $u_{\text{acc}} = \hat{\omega} u / t_s^2$  绘制输入曲线.

1) 使用模型 A 测试不同初始滚转角下控制器的收敛性能. 固定迎角  $\alpha_{\text{AOA}} = 0.61$ , 初始滚转角选择为  $\phi_0 = -1.22, -0.52, -0.26, 0.26, 0.52, 1.22$ . 参考信号恒为零, 得到仿真结果如图 6 所示.



(a) 滚转角广义误差

(a) Generalized error of roll angle



(b) 控制输入等效角加速度

(b) Equivalent angular acceleration of control input

图 6 不同初值模型 A 闭环响应

Fig. 6 Closed-loop response of Model A for several initial

可以看出, 控制器 (42) 可以实现对不同初始角

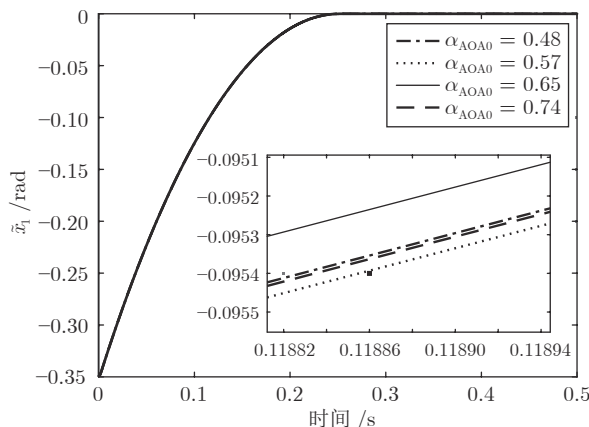
度的镇定. 随着初值增加, 收敛时间增加不大, 在 0.4 s 以内, 远小于估计上界, 体现了控制器的固定时间收敛特性.

2) 使用模型 C 测试不同状态下控制器的鲁棒性, 以迎角  $\alpha_{AOAm} = 0.61$  时的模型参数作为已知模型, 初始滚转角  $\phi_0 = 0.35$ , 初始迎角分别设置为  $\alpha_{AOA0} = 0.48, 0.57, 0.65, 0.74$ . 实际仿真迎角在已知迎角附近变化, 取  $\alpha_{AOA} = \alpha_{AOA0} + 0.044 \sin(2t)$ . 仿真结果如图 7 所示, 不同迎角下滚转角误差响应(图 7(a)) 几乎相同, 输入(图 7(b)) 补偿了不同迎角下的模型误差和扰动, 体现了控制器对于模型不确定性和外部扰动的鲁棒性.

3) 使用模型 A 考察控制器对阶跃信号的跟踪性能. 并与现有的模型参考类方法(L1 自适应<sup>[26]</sup>, 信号补偿<sup>[27]</sup>) 和基于现有非奇异固定时间终端滑模面(Corradini 等<sup>[15]</sup>, Li 等<sup>[14]</sup>, Yang 等<sup>[12]</sup>) 的模型参考方法进行比较. 以  $\alpha_{AOAm} = 0.61$  时的模型参数作为已知模型, 初始滚转角  $\phi_0 = 0.70$ , 实际仿真迎角为  $\alpha_{AOA} = (0.61 + 0.087 \sin(2t))$ . 仿真结果如图 8 所示. 从仿真结果可以看出, 本文所采用的控制器收敛时间最短, 可以一直保持较快的下降速度, 并且初始阶段输入量较小, 没有达到饱和边界. 文献 [15] 和文献 [14] 所设计的滑模面在初始阶段下降较快, 但误差接近原点时收敛速度减缓; 文献 [12] 和 L1 自适应<sup>[26]</sup> 整体收敛速度较慢; 信号补偿<sup>[27]</sup> 方法收敛速度较快, 但会出现误差超调, 整体收敛时间慢于本文算法.

### 3.2 三阶模型验证

采用文献 [34] 所用的 3 阶非线性模型进行验证, 被控对象如式 (43) 所示



(a) 滚转角广义误差  
(a) Generalized error of roll angle

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -10 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + 100(\sin(x_1) + e^{-|x_2|} + \arctan(x_3) + \sin(t)) + w(t) \quad (43)$$

其开环特性如图 9 所示, 存在三维空间极限环. 选取参考模型参数  $[-1 \ -2.414 \ -2.414]$ . 广义误差信号表示为

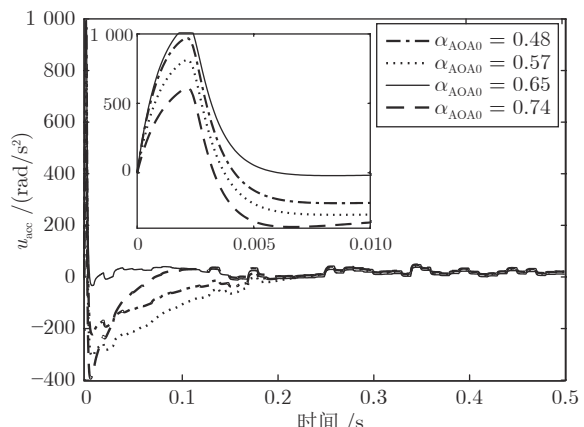
$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A_m \mathbf{x}_m - A \mathbf{x} + B u_C(t) - d(t, \mathbf{x}) \quad (44)$$

采用第 2.4 节所述方法设计控制器 (45) 为

$$u = - \left( F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) + D\psi(\rho, s_2) + \alpha_2 p_2 \text{sig}^{p_2-1} s_1 \dot{s}_1 - \beta_2 \frac{q_2 - 1 - 2s_1 \arctan(|s_1|)}{q_2 \arctan(|s_1|)^{q_2}} \dot{s}_1 \right) - \left( \alpha_3 \text{sig}^{p_3} s_2 + \beta_3 \left( (\arctan(|s_2|)^{q_3})' \right)^{-1} + [0 \ 0 \ 1] (A_m \mathbf{x}_m - A \mathbf{x}) \right) \quad (45)$$

选取控制器参数为  $\alpha = [0.8 \ 2.1 \ 2.1]$ ,  $\beta = [0.04 \ 0.4 \ 0.4]$ ,  $p = [7/9 \ 5/9 \ 5/9]$ ,  $q = [5/9 \ 4/9 \ 4/9]$ , 收敛时间上界估计为  $T_{\max} = 19.7$  s, 初始状态  $\mathbf{x}_0 = [4 \ -2 \ -1]^T$ . 文献 [15] 方法参数为  $[0.12 \ 0.55 \ 0.6]$ .

图 10 为期望输入为阶跃信号时的仿真结果. 从仿真结果可以看出, 本文算法可以一直保持较快的下降速度, 收敛时间  $T = 2.8$  s. 从输入曲线可以看出, 基于文献 [15] 终端滑模面所设计的控制器在收敛时间相近的情况下, 初始输入较大, 达到了限



(b) 控制输入等效角加速度  
(b) Equivalent angular acceleration of control input

图 7 不同迎角模型 C 闭环响应

Fig. 7 Closed-loop response of Model C for several angle of attack



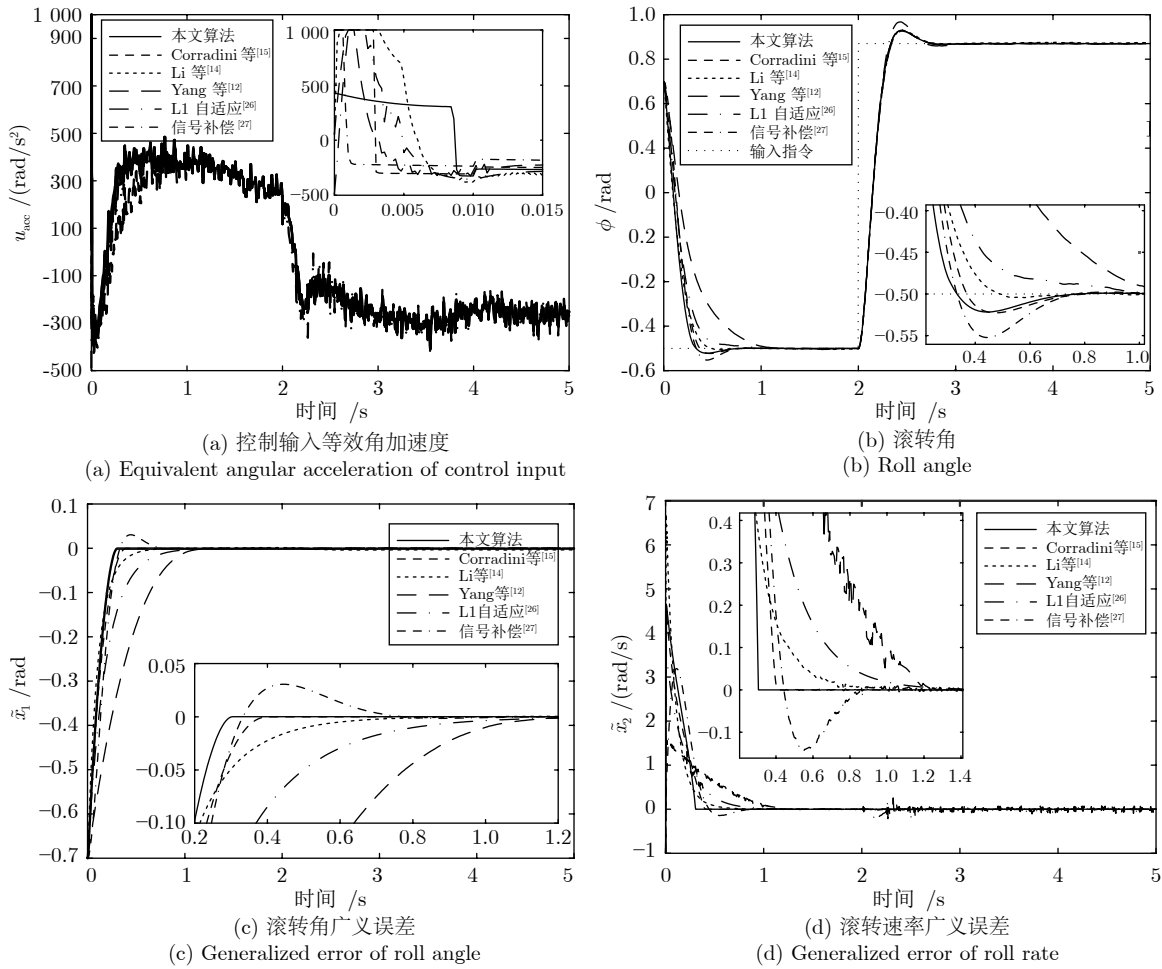


图 8 模型 A 对阶跃信号跟踪响应

Fig.8 Closed-loop response to step signal tracking of Model A

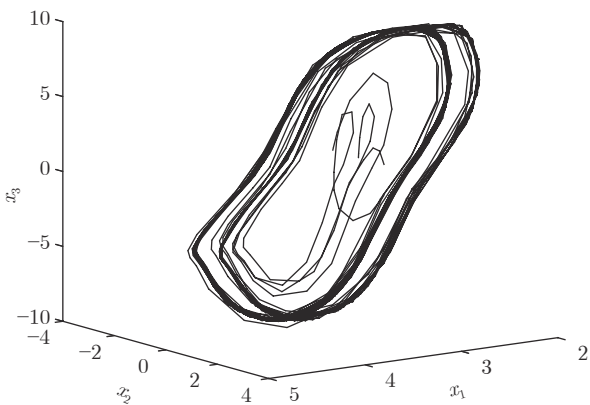


图 9 模型 (43) 开环响应特性

Fig.9 Open-loop response of model (43)

幅值, 因此导致补偿信号输入参考模型中, 使得参考模型状态向被控对象实际状态逼近. 虽然导致最终跟踪期望输入  $r(t)$  较慢, 但保证了广义误差信号收敛速度不变, 避免了长时间饱和可能导致的系

统不稳定, 体现了本文所采用的控制结构的优势. 信号补偿算法<sup>[27]</sup>和 L1 自适应<sup>[26]</sup>的特性与二阶系统仿真结果基本相同.

综上所述, 本文所采用的控制结构可以避免长时间饱和和高频补偿信号输入被控对象, 引起系统不稳定; 所设计的终端滑模面在整个下降过程中可以保持较快的下降速度, 较好地平衡了远离平衡点处和靠近平衡点处的收敛特性, 避免了初始状态误差较大时补偿输入过大; 可以保证被控对象的状态在固定时间内跟踪参考模型状态.

#### 4 结束语

本文针对存在模型不确定性和外部扰动的时变非线性系统研究了固定时间终端滑模模型参考控制方法: 1) 设计了新型模型参考控制结构, 在加入输入限幅和补偿信号滤波的同时, 保证了广义误差系统收敛特性; 2) 设计了新型终端滑模面, 较好地平

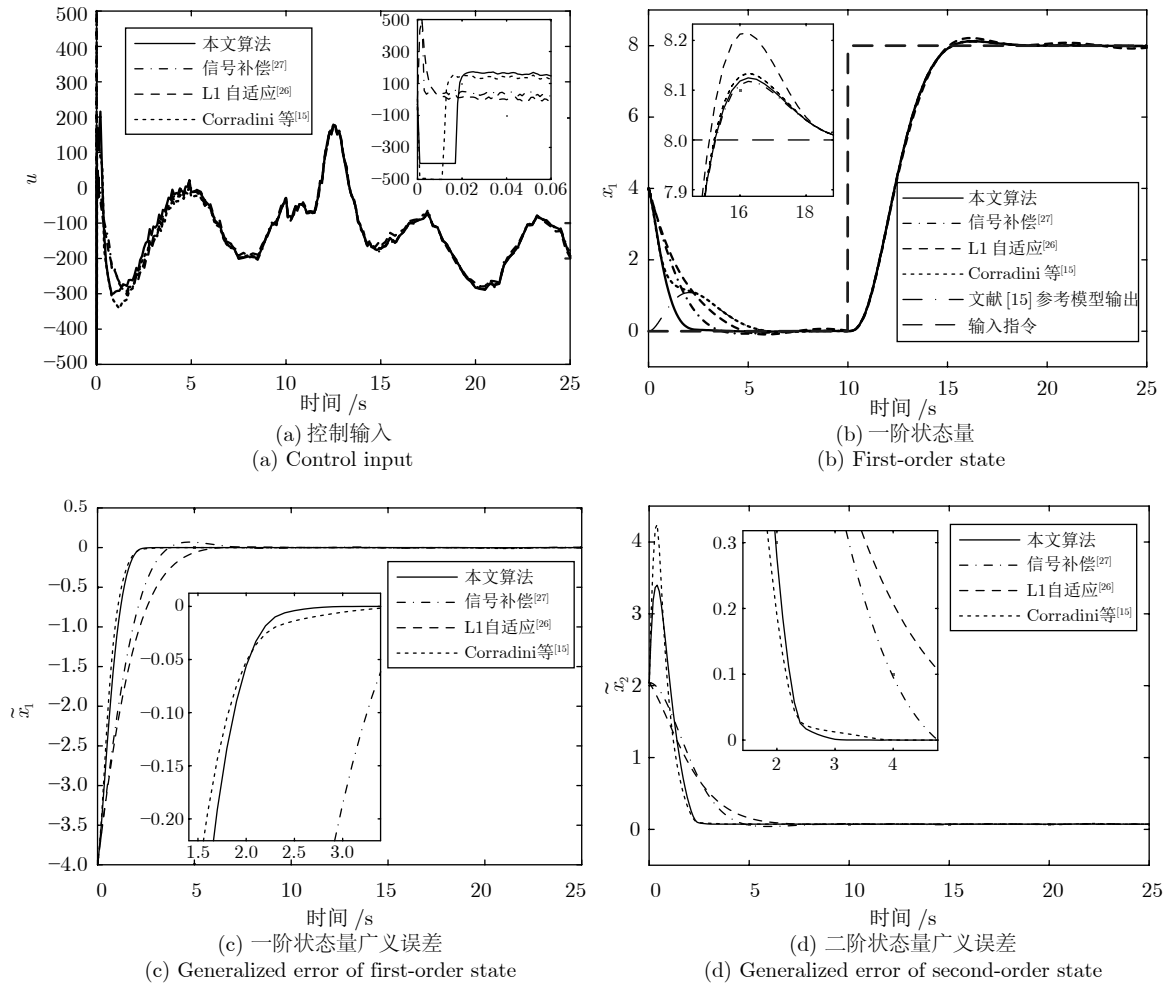


图 10 闭环系统对阶跃信号跟踪响应

Fig. 10 Response to step signal tracking of closed-loop system

衡了远离平衡点和靠近平衡点的收敛特性; 3) 针对高阶系统设计了递归结构终端滑模控制器。本文控制器保证了误差动态在固定时间内收敛到原点, 使得被控对象能够在固定时间内收敛并跟踪参考模型动态, 便于进行闭环系统动态设计。后续工作考虑采用自适应算法或扰动观测器动态调整切换项增益以减少控制量抖振, 考虑结合鲁棒微分器和反步法设计高阶系统控制器, 避免解析求解导致高阶系统控制器过于复杂。

## References

- 1 Fukushima H, Muro K, Matsuno F. Sliding-mode control for transformation to an inverted pendulum mode of a mobile robot with wheel-arms. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, **62**(7): 4257–4266
- 2 Ríos H, Falcon R, Gonzalez O A, Dzul A. Continuous sliding-mode control strategies for quadrotor robust tracking: real-time application. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, **66**(2): 1264–1272
- 3 Yan Z, Jin C X, Utkin V I. Sensorless sliding-mode control of induction motors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2000, **47**(6): 1286–1297
- 4 Liu X J, Wang C C, Han Y Z. Second-order sliding mode control of DFIG based variable speedwind turbine for maximum power point tracking. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(8): 1434–1442
- 5 Yang Yun-Jie, Zhu Ji-Hong, He Yang. Multi-mode position control strategy with approximate time-optimal for actuator. *Control Theory and Applications*, 2018, **35**(4): 468–474  
(杨贇杰, 朱纪洪, 和阳. 近似时间最优的舵机多模位置控制策略. *控制理论与应用*, 2018, **35**(4): 468–474)
- 6 Sira-Ramirez H. On the dynamical sliding mode control of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 1993, **57**(5): 1039–1061
- 7 Li Xue-Bing, Ma Li, Ding Shi-Hong. A new second-order sliding mode control and its application to inverted pendulum. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 193–202  
(李雪冰, 马莉, 丁世宏. 一类新的二阶滑模控制方法及其在倒立摆控制中的应用. *自动化学报*, 2015, **41**(1): 193–202)
- 8 Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous

- autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, **38**(3): 751–766
- 9 Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(8): 2106–2110
- 10 Polyakov A, Efimov D, Perruquetti W. Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach. *Automatica*, 2015, **51**: 332–340
- 11 Feng Y, Yu X H, Man Z H. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 2002, **38**(12): 2159–2167
- 12 Yang L, Yang J Y. Nonsingular fast terminal sliding-mode control for nonlinear dynamical systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, **21**(16): 1865–1879
- 13 Zuo Z Y. Non-singular fixed-time terminal sliding mode control of non-linear systems. *IET Control Theory and Applications*, 2014, **9**(4): 545–552
- 14 Li H J, Cai Y L. On SFTSM control with fixed-time convergence. *IET Control Theory and Applications*, 2017, **11**(6): 766–773
- 15 Corradini M L, Cristofaro A. Nonsingular terminal sliding-mode control of nonlinear planar systems with global fixed-time stability guarantees. *Automatica*, 2018, **95**: 561–565
- 16 Levant A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 2003, **76**(9–10): 924–941
- 17 Andrieu V, Praly L, Astolfi A. Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2008, **47**(4): 1814–1850
- 18 Tian B L, Lu H C, Zuo Z Y, Zong Q. Multivariable finite-time output feedback trajectory tracking control of quadrotor helicopters. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, **28**(1): 281–295
- 19 Levant A, Yu X H. Sliding-mode-based differentiation and filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, **63**(9): 3061–3067
- 20 Hua C C, Wang K, Chen J N, You X. Tracking differentiator and extended state observer-based nonsingular fast terminal sliding mode attitude control for a quadrotor. *Nonlinear Dynamics*, 2018, **94**(1): 343–354
- 21 Zhang L, Wei C Z, Jing L, Cui N G. Fixed-time sliding mode attitude tracking control for a subfarine-launched missile with multiple disturbances. *Nonlinear Dynamics*, 2018, **93**(4): 2543–2563
- 22 Zuo Z Y, Han Q L, Ning B, Ge X H, Zhang X M. An overview of recent advances in fixed-time cooperative control of multi-agent systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, **14**(6): 2322–2334
- 23 Ni J K, Liu L, Liu C X, Hu X Y, Li S L. Fast fixed-time nonsingular terminal sliding mode control and its application to chaos suppression in power system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2017, **64**(2): 151–155
- 24 Li S H, Zhou M M, Yu X H. Design and implementation of terminal sliding mode control method for pmsm speed regulation system. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2013, **9**(4): 1879–1891
- 25 Chai Tian-You, Yue Heng. Adaptive Control. Beijing: Tsinghua University Press, 2016, 127–165  
(柴天佑, 岳恒. 自适应控制, 北京: 清华大学出版社, 2016, 127–165)
- 26 Hovakimyan N, Cao C Y, Kharisov E, Xargay E, Gregory I M. L1 adaptive control for safety-critical systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 2011, **31**(5): 54–104
- 27 Zhong Yi-Sheng. Robust control based on signal compensation. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 2003, **43**(4): 536–542  
(钟宜生. 基于信号补偿的鲁棒控制方法. 清华大学学报(自然科学版), 2003, **43**(4): 536–542)
- 28 Patino H D, Liu D R. Neural network-based model reference adaptive control system. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2000, **30**(1): 198–204
- 29 Wang W, Nonami K, Ohira Y. Model reference sliding mode control of small helicopter X.R.B based on vision. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2008, **5**(3): 235–242
- 30 Zhang D, Wei B. A review on model reference adaptive control of robotic manipulators. *Annual Reviews in Control*, 2017, **43**: 188–198
- 31 Rotondo D, Cristofaro A, Gryte K, Johansen T A. LPV model reference control for fixed-wing UAVs. In: Proceedings of the 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control. Toulouse, France: IFAC, 2017, **50**(1): 11559–11564
- 32 Ucar A. Model-reference control of chaotic systems. *Chaos Solitons and Fractals*, 2007, **31**(3): 712–717
- 33 Capello E, Guglieri G, Sartori D. Performance evaluation of an L1 adaptive controller for wing-body rock suppression. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, **35**(6): 1702–1708
- 34 Luo J, Cao C Y. L1 adaptive control with sliding-mode based adaptive law. *Control Theory and Technology*, 2015, **13**(3): 221–229
- 35 Isidori A. *Nonlinear Control Systems*. London: Springer Science and Business Media, 2013.
- 36 Kori D K, Kolhe J P, Talole S E. Extended state observer based robust control of wing rock motion. *Aerospace Science and Technology*, 2014, **33**(1): 107–117
- 37 Lee K W, Singh S N. Immersion and invariance-based adaptive wing rock control with nonlinear terminal manifold. *Nonlinear Dynamics*, 2017, **88**(2): 955–972



张晓骏 清华大学自动化系硕士研究生. 主要研究方向为非线性控制和飞行控制.

E-mail: z-xj17@mails.tsinghua.edu.cn

(ZHANG Xiao-Jun Master student in the Department of Automation, Tsinghua University. His research interest covers nonlinear control and flight control.)



**袁夏明** 清华大学博士后. 2015 年于清华大学计算机科学与技术系获得博士学位. 主要研究方向为飞行控制, 非线性控制, 信息融合.

E-mail: summersbright@126.com

(**YUAN Xia-Ming** Postdoctoral at Tsinghua University. He received his Ph.D. degree in the Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University in 2015. His research interest covers flight control, nonlinear control, and information fusion.)



**王向阳** 清华大学博士后. 2014 年于清华大学航天航空学院获得博士学位. 主要研究方向为飞/推综合控制, 非线性控制, 动力学建模.

E-mail: wangxy668@rtsinghua.edu.cn

(**WANG Xiang-Yang** Postdoctoral at Tsinghua University. He received his Ph.D. degree at the School of Aerospace, Tsinghua University in 2014. His research interest covers integrated flight/propulsion control, dynamic modeling, and nonlinear control.)



**朱纪洪** 清华大学计算机科学与技术系教授. 主要研究方向为飞行控制与导航, 鲁棒控制和非线性控制. 本文通信作者.

E-mail: jihong\_zhu@hotmail.com

(**ZHU Ji-Hong** Professor in the Department of Precision Instrument, Tsinghua University. His research interest covers flight control and navigation, robust control, and nonlinear control. Corresponding author of this paper.)



**李春文** 清华大学自动化系教授. 主要研究方向为非线性控制和逆系统控制. E-mail: lcw@tsinghua.edu.cn

(**LI Chun-Wen** Professor in the Department of Automation, Tsinghua University. His research interest covers nonlinear control and inverse system control.)