

# 基于两阶段自适应 Gauss 配点重构伪谱法的 电力机车优化操纵

刘平<sup>1</sup> 胡云卿<sup>2</sup> 廖俊<sup>1</sup> 樊力<sup>1</sup> 黎向宇<sup>2</sup> 刘兴高<sup>3</sup>

**摘要** 针对中车株洲电力机车有限公司设计的 HXD1-C64 电力机车, 提出一种基于两阶段自适应 Gauss 配点重构的伪谱法, 用于列车优化操纵问题高效快速求解. 首先, 建立了 HXD1-C64 电力机车优化操纵数学模型; 然后, 在推导 Legendre-Gauss 配点公式的基础上, 给出控制变量两阶段自适应 Gauss 配点策略, 第 1 阶段采用对分配点, 第 2 阶段引入斜率变化分析对控制变量配点进行自适应细分和合并; 最后, 在运行时间最短目标下对 HXD1-C64 电力机车优化操纵进行仿真实验. 结果显示, 相较于控制变量参数化方法和传统高斯伪谱方法 (Gauss pseudospectral method, GPM), 改进方法获得了更优性能指标和牵引力控制品质, 计算时间分别减少 91.93% 和 33.88%, 表明了所提方法的有效性.

**关键词** HXD1-C64 电力机车, 优化操纵, 两阶段 Gauss 配点重构, Gauss 伪谱法

**引用格式** 刘平, 胡云卿, 廖俊, 樊力, 黎向宇, 刘兴高. 基于两阶段自适应 Gauss 配点重构伪谱法的电力机车优化操纵. 自动化学报, 2019, 45(12): 2344-2354

**DOI** 10.16383/j.aas.c190211

## Optimization Operation of Electric Locomotive Based on Two-stage Adaptive Gauss Re-Collocation Pseudospectral Approach

LIU Ping<sup>1</sup> HU Yun-Qing<sup>2</sup> LIAO Jun<sup>1</sup> FAN Li<sup>1</sup> LI Xiang-Yu<sup>2</sup> LIU Xing-Gao<sup>3</sup>

**Abstract** A two-stage adaptive Gauss re-collocation pseudospectral approach is proposed for solving optimization operation problems of HXD1-C64 electric locomotive designed by CRRC (China Railway Rolling Stock Corporation) Zhuzhou Institute Co., LTD. Firstly, the optimization operation mathematical model of HXD1-C64 electric locomotive is established. Next, the Legendre-Gauss collocation formula is derived and then a two-stage adaptive Gauss collocation strategy is given, where a dichotomy collocation is adopted in the first stage and a slope change rate analysis is introduced in the second stage to adaptively subdivide or eliminate control variable collocation points. Finally, the simulation tests are carried out on HXD1-C64 electric locomotive to achieve time minimum operation. Simulation results show that the improved method obtains better performance index and traction control quality, compared with the control variable parameterization algorithm and the traditional Gauss pseudospectral method (GPM), while the computational time decreases by 91.93% and 33.88%, respectively, revealing the effectiveness of the proposed approach.

**Key words** HXD1-C64 electric locomotive, optimization operation, two-stage Gauss re-collocation, Gauss pseudospectral approach

**Citation** Liu Ping, Hu Yun-Qing, Liao Jun, Fan Li, Li Xiang-Yu, Liu Xing-Gao. Optimization operation of electric locomotive based on two-stage adaptive Gauss re-collocation pseudospectral approach. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(12): 2344-2354

收稿日期 2019-03-20 录用日期 2019-07-17

Manuscript received March 20, 2019; accepted July 17, 2019

国家自然科学基金 (61803060, 51705050), 重庆市教委科学技术研究项目 (KJQN201800635, KJQN201804306), 工业控制技术国家重点实验室 (浙江大学) 开放课题 (ICT1900359) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61803060, 51705050), Science and Technology Research Program of Chongqing Municipal Education Commission (KJQN201800635, KJQN201804306), and Open Research Project of the State Key Laboratory of Industrial Control Technology of Zhejiang University (ICT1900359)

本文责任编辑 阳春华

Recommended by Associate Editor YANG Chun-Hua

1. 重庆邮电大学自动化学院工业物联网与网络化控制教育部重点实验室、智能空地协同控制重庆市高校重点实验室 重庆 400065  
2. 中车株洲电力机车研究所有限公司 株洲 412000 3. 浙江大学

电力机车对于我国铁路运输至关重要, 而机车优化操纵一直是铁路运营部门和国内外学者长期关注的热点问题<sup>[1]</sup>, 其不仅可以在安全、正点前提下为

控制科学与工程学院工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027

1. Key Laboratory of Industrial Wireless Network and Networked Control, Key Laboratory of Intelligent Air-Ground Cooperative Control for Universities in Chongqing, College of Automation, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065 2. China Railway Rolling Stock Corporation (CRRC) Zhuzhou Institute Co., LTD, Zhuzhou 412000 3. State Key Laboratory of Industry Control Technology, College of Control Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027

机车提供操控策略以最大限度节约能源<sup>[2]</sup>, 还可以建立司机模拟操纵指导系统, 寻找机车最优操作方法<sup>[3]</sup>. 迄今为止, 国内外铁路科研工作者针对机车优化操纵问题相继开展了一系列的研究<sup>[4-5]</sup>.

电力机车优化操纵, 其核心可以归结为一个最优控制问题<sup>[6]</sup>, 即通过建立性能指标函数, 选择不同的自变量, 在一定约束条件下寻找使性能指标最优的控制策略. 机车优化操纵研究最早可以追溯到 20 世纪 60 年代, Ichikawa<sup>[7]</sup> 基于 Pontryagin 极大值原理解决了简单的列车优化控制问题. 近年来, 随着计算机技术的不断发展, 采用数值方法实现列车优化操纵成为研究的热点和前沿<sup>[6, 8]</sup>. 如文献 [2] 基于控制参数化研究了列车节能操纵最优控制, 通过对列车牵引特性曲线光滑化近似, 有效获取了列车节能最优操纵序列及相应的参考速度曲线; 文献 [9] 针对具有时间需求地铁列车开展节能操纵控制研究, 设计了一种近似动态规划方法, 有效提升了优化问题求解效率; 文献 [10] 基于多目标粒子群优化算法研究了最少能耗下的机车自动驾驶速度曲线优化.

通常来讲, 最优控制问题的数值算法可以归纳为四类: 迭代动态规划算法、间接法、直接法和智能优化算法. 其中, 迭代动态规划算法源自于 Luus<sup>[11]</sup> 提出的动态优化理论; 间接法主要通过 Pontryagin 极大值原理将最优控制问题转化为两点边界问题求解<sup>[12]</sup>; 直接法则采用离散化手段将最优控制问题近似为非线性规划 (Nonlinear programming, NLP) 问题直接求解<sup>[13]</sup>; 智能优化算法的特点是通过智能化手段求解离散优化问题<sup>[14]</sup>. 与迭代动态规划算法和智能优化方法相比, 直接法具有计算量较小、计算效率高的优势, 而相较于间接法其收敛域更宽广, 且不需要高精度的初值<sup>[15]</sup>, 因此, 直接法也成为了当前最优控制问题数值求解法中的主流方法.

近几年, 作为直接法中的一种, 高斯伪谱法 (Gauss pseudospectral method, GPM) 因具有求解精度高、计算量少、结构简单、求解效率高等优点在航空航天、化工领域最优控制问题求解上得到众多学者的青睐<sup>[16-17]</sup>, 同时也在机车轨迹规划中得到了应用<sup>[18]</sup>. 该方法的思想是: 在正交配点处将连续最优控制问题离散化, 并通过全局插值多项式逼近状态变量和控制变量, 从而将最优控制问题转化为非线性规划 NLP 问题进行求解<sup>[19]</sup>. 随着电力机车智能化控制需求的不断提升, 列车优化操纵对最优控制问题求解效率提出了更高的要求. 然而, 传统 GPM 方法全局统一配点离散状态变量和控制变量, 为了得到精确结果, 通常需要大量增加配点数, 然而却降低了计算效率<sup>[20]</sup>, 影响其在列车高效优化操

纵计算上的应用; 另一方面, 统一配点容易引起控制曲线的震荡, 影响控制品质<sup>[21]</sup>. 因此, 如何有效解决 GPM 方法离散配点和计算效率之间的矛盾, 进一步提升 GPM 方法在机车优化操纵中的应用已经成为国内外众多学者探索的课题<sup>[18, 22]</sup>.

为了实现列车优化操纵问题高效数值优化求解, 本文以中车株洲电力机车有限公司设计的 HXD1-C64 电力机车为对象在 Gauss 伪谱法框架下提出两阶段自适应 Gauss 配点重构伪谱法. 首先, 结合 HXD1-C64 电力机车动力学方程, 建立 Bolza 形式优化操纵数学模型; 其次, 结合 Legendre 多项式, 推导 Legendre-Gauss 配点求解公式; 进一步, 针对控制变量离散配点引入斜率变化提出两阶段自适应 Gauss 配点重构策略, 通过自适应配点细分、合并, 优化控制变量配点数进而提升求解效率; 最后, 在算法实现的基础上, 对 HXD1-C64 电力机车单阶段运行时间最短优化操纵问题进行仿真实验, 并与控制向量参数化 (Control vector parameterization, CVP) 方法和传统 GPM 方法对比以验证所提方法的有效性.

本文的组织结构安排如下: 第 1 节是对 HXD1-C64 电力机车优化操纵数学模型的描述; 第 2 节介绍了 Gauss 伪谱法基本框架; 第 3 节给出了两阶段自适应 Gauss 配点重构策略过程; 第 4 节分析了本文算法实现过程; 第 5 节进行仿真实验以测试所提算法的性能; 第 6 节对本文工作进行总结.

## 1 机车优化操纵数学模型

由 HXD1 电力机车头和 C64 重车构成的电力机车 (简称 HXD1-C64 电力机车) 如图 1 所示, 其在实际运行过程中, 一般包括起动车加速、保速、惰行和制动几个阶段<sup>[3]</sup>, 各阶段速度曲线用图 2 描述.

根据图 2 运行过程, 建立 HXD1-C64 电力机车优化操纵数学模型. 首先, 作如下假设:

- 1) 牵引力为理想牵引力, 不考虑牵引力曲线;
- 2) 机车在平直道或具有一定坡道的轨道上运行;
- 3) 只考虑机车头、重车基本阻力以及坡道阻力.

结合牛顿力学定理, 分析得到 HXD1-C64 电力机车动力学方程为



图 1 HXD1-C64 电力机车

Fig. 1 HXD1-C64 electric locomotive

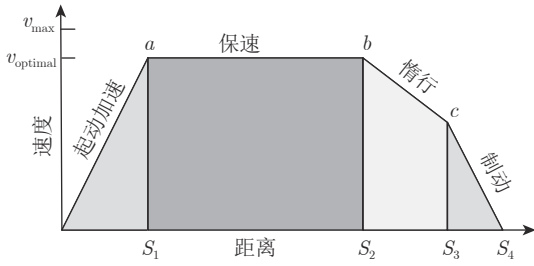


图 2 机车牵引、惰行、制动组合运行示意图

Fig. 2 Traction, coasting, brake composite sketch map of electric locomotive

$$\begin{aligned}
 \dot{s}(t) &= v(t), \quad \dot{v}(t) = a(t) \\
 F(t) &= Ma(t), \quad M = M_1 + M_2 \\
 F(t) &= F_u(t) - F_o(t) \\
 F_o(t) &= F_{o_1}(t) + F_{o_2}(t) + F_s(t) \\
 F_s(t) &= Mg \sin \theta
 \end{aligned} \tag{1}$$

其中,  $s(t)$  表示机车行驶路程,  $v(t)$  表示机车行驶速度,  $a(t)$  是机车的加速度,  $M_1$  表示 HDX1 机车头的质量,  $M_2$  表示 C64 重车的质量,  $\theta$  表示轨道坡度,  $g$  是重力加速度. 机车所受外力之和  $F(t)$  为粘着牵引力  $F_u(t)$  与阻力  $F_o(t)$  之差, 阻力由机车头基本阻力  $F_{o_1}(t)$ 、重车基本阻力  $F_{o_2}(t)$  和坡道阻力  $F_s(t)$  构成, 其中机车头基本阻力  $F_{o_1}(t)$  计算式为

$$M_1 \times (2.23 + 0.0053v(t) + 0.000675v^2(t))g \tag{2}$$

重车基本阻力  $F_{o_2}(t)$  由下式计算

$$M_2 \times (0.92 + 0.0048v(t) + 0.000125v^2(t))g \tag{3}$$

定义  $\mathbf{x}(t) := [s(t) \ v(t)]^T$ ,  $u(t) := F_u(t)$ , 结合 HXD1-C64 电力机车动力学方程和运行约束条件建立 Bolza 形式电力机车优化操纵数学模型为

$$\begin{aligned}
 \text{Min } J &= \phi(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{x}_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), u(t), t) dt \\
 \text{s.t. } \dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), u(t), t) \\
 E(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) &= 0 \\
 C(\mathbf{x}(t), u(t), t) &\leq 0, \quad t \in [t_0, t_f]
 \end{aligned} \tag{4}$$

其中,  $J$  表示机车优化操纵问题的性能指标, 通常为运行时间最短、牵引能耗最少、牵引力与制动力变化频率最小以及速度曲线最优等, 可以由终值项和积分项构成;  $f(\mathbf{x}(t), u(t), t)$  表示 HXD1-C64 电力机车动力学方程;  $E(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) = 0$  表示机车运行过程中初值和终值约束条件;  $C(\mathbf{x}(t), u(t), t) \leq 0$  表示机车运行过程中定时、变坡道、任意线路限速、牵引力和制动力限制等约束条件;

$t \in [t_0, t_f]$  表示机车运行时间区间.

## 2 Gauss 伪谱法

采用 Gauss 伪谱法对 HXD1-C64 电力机车优化操纵问题进行求解, 其主要过程为: 将状态和控制变量在 Legendre-Gauss 点处离散, 然后通过 Lagrange 插值多项式逼近状态变量和控制变量, 从而将系统状态方程和性能指标函数积分项转化为代数运算, 最后将优化操纵问题转化为以节点处状态、控制变量为待优化参量的 NLP 问题.

### 2.1 Lagrange 插值多项式逼近

本文中, 状态变量和控制变量的离散逼近采用 Lagrange 插值方法完成. 已知  $N + 1$  组离散点及相应的函数值为  $\{(\tau_1, y_1), (\tau_2, y_2), \dots, (\tau_{N+1}, y_{N+1})\}$ , 则变量  $y(\tau)$  经  $N$  次多项式插值后可以得到:

$$y(\tau) \approx Y(\tau) = \sum_{i=1}^{N+1} \hat{L}_i(\tau) y_i \tag{5}$$

其中,  $Y(\tau)$  是  $N$  次多项式近似,  $\hat{L}_i(\tau)$  是  $N$  次 Lagrange 插值多项式, 用如下公式求取:

$$\hat{L}_i(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N+1} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \tag{6}$$

定义  $\hat{L}_i(\tau_j) = \delta_{ij}$ , 分析可知 Lagrange 插值多项式具有以下特点:

$$\hat{L}_i(\tau_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{7}$$

结合式 (5) 和 (7) 可知, 插值多项式在离散点上满足  $Y(\tau_i) = y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N + 1$ , 因而需要选择合适的离散点来求取  $y_i$  的值. 然而, 传统的方法一般将时间区间等分为  $N$  段, 然后采用 Lagrange 插值多项式的线性组合来近似, 但是这种等距离分隔容易造成龙格 (Runge) 现象. 因此, 本文选择逼近效果更好的 Legendre 多项式在  $[-1, 1]$  区间进行离散配点的选择, 其  $N$  次 Legendre 多项式为

$$\begin{aligned}
 P_{n+1}(\tau) &= (\tau - \alpha_n) P_n(\tau) - \beta_n^2 P_{n-1}(\tau) \\
 P_0(\tau) &= 1, \quad P_{-1}(\tau) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{8}$$

进而, 通过求解式 (8) 的根则可以得到  $N$  个位于开区间  $(-1, 1)$  内的离散点, 记为  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , 称为 Legendre Gauss (LG) 配点. 分析可知,  $\tau_i$  为式 (8) 的根, 其求解式可由定理 1 给出.

**定理 1.** 已知  $N$  次 Legendre 多项式为

$$\begin{aligned}
 P_{n+1}(\tau) &= (\tau - \alpha_n) P_n(\tau) - \beta_n^2 P_{n-1}(\tau) \\
 P_0(\tau) &= 1, \quad P_{-1}(\tau) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

该多项式的根可由矩阵  $H$  的特征值求解, 其中,

$$H = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} & \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \end{bmatrix}$$

**证明.** 根据定义,  $N$  次 Legendre 多项式的根为以下方程的解

$$P_{n+1}(\tau) = (\tau - \alpha_n)P_n(\tau) - \beta_n^2 P_{n-1}(\tau) = 0 \quad (9)$$

当  $n=0$  时, 有

$$P_1(\tau) = (\tau - \alpha_0)P_0(\tau) - \beta_0^2 P_{-1}(\tau) \quad (10)$$

又因为  $P_{-1}(\tau) = 0$ ,  $P_0(\tau) = 1$ , 所以  $P_1(\tau) = (\tau - \alpha_0)$ .

当  $n=1$  时, 有

$$P_2(\tau) = (\tau - \alpha_1)P_1(\tau) - \beta_1^2 P_0(\tau) \quad (11)$$

根据  $P_0(\tau) = 1$ , 得  $P_2(\tau) = (\tau - \alpha_1)P_1(\tau) - \beta_1^2$ , 则  $P_2(\tau) = 0$  的根为  $(\tau - \alpha_1)(\tau - \alpha_0) - \beta_1^2 = 0$  的解. 令  $A_0 = \alpha_0$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} A_0 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix}$ , 则  $A_1$  的特征值为

$$|\lambda I - A_1| = (\lambda - A_0)(\lambda - \alpha_1) - \beta_1^2 = 0 \quad (12)$$

分析可知,  $P_2(\tau) = 0$  的根为矩阵  $A_1$  的特征值.

同理,  $P_3(\tau) = 0$  的根为

$$(\tau - \alpha_2)|\tau I - A_1| - \beta_2^2|\tau I - A_0| = 0 \quad (13)$$

的解. 令  $A_2 = \begin{bmatrix} A_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ , 则  $A_2$  的特征值为

$$|\lambda I - A_2| = \begin{vmatrix} \lambda I - A_1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & \lambda - \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha_0 & -\beta_1 & -\beta_2 \\ -\beta_1 & \lambda - \alpha_1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & -\beta_2 & \lambda - \alpha_2 \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha_2)|\lambda I - A_1| + \beta_2(-\beta_2)|\lambda I - A_0| = 0 \quad (14)$$

因此,  $P_3(\tau) = 0$  的根为矩阵  $A_2$  的特征值. 递推可得,  $N$  次 Legendre 多项式的根为矩阵  $H$  的特征值.  $\square$

## 2.2 状态与控制变量离散化

结合第 2.1 节 Lagrange 插值方法, 采用 Legendre 多项式对状态变量和控制变量进行离散逼近. 首先, 引入时间变量  $\tau$ , 结合下式对问题 (4) 中的时间区间进行尺度变换

$$t = \frac{t_f - t_0}{2}\tau + \frac{t_f + t_0}{2} \quad (15)$$

这样, 时间区间  $[t_0, t_f]$  就转化到  $[-1, 1]$  区间上. 将式 (15) 代入问题 (4), 得到转化后机车优化操纵问题为

$$\begin{aligned} \min J &= \phi(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{x}_f, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 g(\mathbf{x}(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \\ \text{s.t. } \frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau} &= \frac{t_f - t_0}{2} f(\mathbf{x}(\tau), u(\tau), \tau) \\ E(\mathbf{x}(-1), t_0, \mathbf{x}(1), t_f) &= 0 \\ C(\mathbf{x}(\tau), u(\tau), \tau) &\leq 0, \quad \tau \in [-1, 1] \end{aligned} \quad (16)$$

进一步, 将状态变量在 LG 配点上进行 Lagrange 插值近似

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\tau) &\approx \mathbf{X}(\tau) = \sum_{i=1}^{N+1} L_i(\tau) \mathbf{X}(\tau_i) = \sum_{i=1}^{N+1} L_i(\tau) \mathbf{X}_i \\ L_i(\tau) &= \prod_{j=1, j \neq i}^{N+1} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} = \frac{b(\tau)}{(\tau - \tau_i) \dot{b}(\tau_i)} \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $b(\tau) = \prod_{i=1}^{N+1} (\tau - \tau_i)$ . 同时, 将状态变量导数也进行离散化, 得到

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) \approx \dot{\mathbf{X}}(\tau) = \sum_{i=1}^{N+1} \dot{L}_i(\tau) \mathbf{X}_i \quad (18)$$

只考虑 LG 配点处状态变量的导数值, 令  $\tau = \tau_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N+1$ , 代入式 (18) 可得

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau_k) \approx \dot{\mathbf{X}}(\tau_k) = \sum_{i=1}^{N+1} \dot{L}_i(\tau_k) \mathbf{X}_i = \sum_{i=1}^{N+1} D_{k,i} \mathbf{X}_i \quad (19)$$

其中,

$$D_{k,i} = \dot{L}_i(\tau_k) = \begin{cases} \frac{\dot{b}(\tau_k)}{(\tau_k - \tau_i) \dot{b}(\tau_i)}, & k \neq i \\ \frac{\ddot{b}(\tau_k)}{2\dot{b}(\tau_k)}, & k = i \end{cases} \quad (20)$$

同理, 将控制变量在时间区间  $[-1, 1]$  上采用 LG 配点 Lagrange 插值近似, 即

$$u(\tau) \approx U(\tau) = \sum_{i=1}^{N+1} L_i(\tau) U(\tau_i) = \sum_{i=1}^{N+1} L_i(\tau) U_i \quad (21)$$

进而, 状态方程可由如下约束条件代替

$$\sum_{i=1}^{N+1} D_{k,i} \mathbf{X}_i = \frac{t_f - t_0}{2} f(\mathbf{X}_k, U_k, \tau_k) \quad (22)$$

同时, Lagrange 项的积分项可以近似表示为

$$\int_{-1}^1 g(\mathbf{x}(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \approx \sum_{k=1}^{N+1} w_k g(\mathbf{x}(\tau_k), u(\tau_k), \tau_k) \quad (23)$$

其中,  $w_k$  是 Gauss 积分公式中的积分权重.

最终, 问题 (16) 转化为如下形式 NLP 问题

$$\begin{aligned} \min J &= \phi(\mathbf{X}_0, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) + \\ &\frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^{N+1} w_k g(\mathbf{X}_k, U_k, \tau_k) \\ \text{s.t. } &\sum_{i=1}^{N+1} D_{k,i} \mathbf{X}_i - \frac{t_f - t_0}{2} f(\mathbf{X}_k, U_k, \tau_k) = 0 \\ &E(\mathbf{X}_1, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) = 0 \\ &C(\mathbf{X}_k, U_k, \tau_k) \leq 0 \\ &\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_1 - \sum_{i=1}^{N+1} \mathbf{X}_i \sum_{i=2}^{N+1} w_i D_{k,i} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

分析可知, 经过 LG 配点离散化后, 问题 (24) 是一个有限维数 NLP 问题. 因此, 基于梯度的非线性优化求解方法, 比如序列二次规划 (Sequential quadratic programming, SQP) 方法、内点法等可以用于该问题的求解.

### 3 两阶段自适应 Gauss 配点重构

在传统 GPM 方法中, 状态变量和控制变量均采用相同 LG 配点进行多项式插值, 因此 NLP 问题 (24) 中需要优化的参数个数为

$$NUM = (r_u + r_x) \times N \quad (25)$$

其中,  $r_x, r_u$  分别表示状态变量、控制变量维数. 为了保证优化问题的求解精度, 通常需要增加 LG 配点数. 然而大量增加配点会成倍增加优化参数  $NUM$  的个数, 降低计算效率<sup>[20]</sup>, 从而影响 GPM 方法在机车优化操纵中的应用. 另一方面, Xiao 等<sup>[21]</sup>也指出统一配点容易引起控制曲线震荡, 特别是含有跳变节点的优化问题. 因此, 为了解决上述问题, 本文提出两阶段自适应 Gauss 配点重构策略. 第 1 阶段, 控制变量采用对分 LG 配点降低优化参数个数并全局优化计算; 第 2 阶段引入斜率变化自适应重构控制变量配点. 该两阶段自适应 Gauss 配点重构过程如图 3 所示.

第 1 阶段: 状态变量采用式 (17) 进行 LG 配点

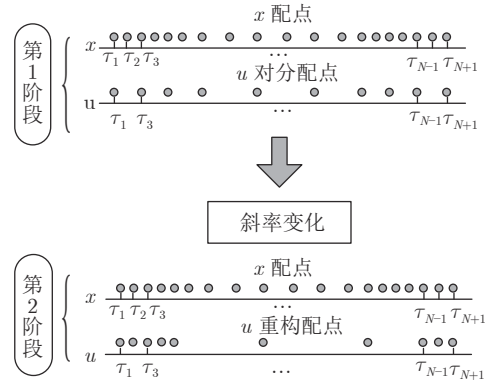


图 3 两阶段自适应 Gauss 配点重构过程

Fig. 3 Process of two-stage adaptive Gauss re-collocation

离散化, 控制变量在时间区间  $[-1, 1]$  上采用对分 LG 配点离散, 即

$$U_{2l-1} = U_{2l}, \quad l = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2} \quad (26)$$

其中,  $N$  为奇数. 从而控制变量配点数减少为  $(N+1)/2$  个, 其逼近公式为

$$u(\tau) \approx U(\tau) = \sum_{i=1}^{N+1} L_i(\tau) U(\tau_i) = \sum_{l=1}^{\frac{N+1}{2}} \sum_{i=1}^{2l} L_i(\tau) U_l \quad (27)$$

将对分配点得到的控制变量代入式 (24) 后分析可知, 此时优化参数个数降低为  $(r_u/2 + r_x) \times N$  个.

第 2 阶段: 在第 1 阶段求解的基础上, 对控制变量配点重构. 首先, 定义第  $r$  个控制变量在  $\tau_{2l+1}$  配点处斜率变化为

$$S_{r,l+1} = \frac{U_{l+1}^r - U_l^r}{\tau_{2l+1} - \tau_{2l-1}}, \quad l = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2} - 1 \quad (28)$$

其中,  $U_{l+1}^r, U_l^r$  分别表示第  $r$  个控制变量在  $\tau_{2l+1}$  和  $\tau_{2l-1}$  配点处的值. 设斜率变化上下限阈值参数为  $\varepsilon_U$  和  $\varepsilon_L$ , 分别进行对分细化和配点合并判断. 如果

$$S_{r,l+1} \geq \varepsilon_U \quad (29)$$

则控制变量  $U_{l+1}^r$  和  $U_l^r$  形成突变, 需要对分细化, 在区间  $[\tau_{2l-1}, \tau_{2l+1}]$  增加配点个数. 如果

$$S_{r,l+1} \leq \varepsilon_L \quad (30)$$

则控制变量  $U_{l+1}^r$  和  $U_l^r$  在区间  $[\tau_{2l-1}, \tau_{2l+1}]$  光滑, 设置

$$U_{l+1}^r = U_l^r \quad (31)$$

进而, 适当减少光滑区域配点数以提高计算效率.

最终, 通过自适应迭代得到配点对分细化和合并后的控制变量配点个数. 进一步, 两阶段自适应 Gauss 配点重构后可以分别得到状态变量和控制变量在时间区间  $[-1, 1]$  上的 LG 配点, 从而实现配点的自适应调整.

#### 4 算法实现

基于上述算法推导, 给出 HXD1-C64 电力机车优化操纵问题两阶段自适应 Gauss 配点伪谱法实现过程, 其算法流程如图 4 所示, 主要包括以下几个步骤:

**步骤 1.** HXD1-C64 电力机车优化操纵问题数学模型导入;

**步骤 2.** 设置算法优化参数;

**步骤 3.** 第 1 阶段状态变量 LG 配点、控制变量

对分 LG 配点, 得到有限维 NLP 问题;

**步骤 4.** 求解 NLP 问题, 如果求解成功则进入步骤 5, 否则判断是否需要 LG 配点重选, 如果需要则进入步骤 3, 否则结束;

**步骤 5.** 第 2 阶段配点重构, 根据第 1 阶段求解结果计算斜率变化, 重构控制变量 LG 配点并得到新的有限维 NLP 问题, 进入步骤 6;

**步骤 6.** 求解有限维 NLP 问题, 如果求解成功则结束, 否则判断是否需要 LG 配点重选, 如果需要选则进入步骤 3, 否则结束.

在算法实施过程中, Legendre 多项式参数  $\alpha_n$  和  $\beta_n$  的取值为

$$\alpha_n = 0, \beta_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2-1}} \quad (32)$$

Gauss 积分权重因子  $w_k$  由拉格朗日多项式插值公式的积分求取, 采用 Abramowitz 提出的方法<sup>[23]</sup>进行求解

$$w_k = \frac{2}{(1 - \tau_k^2)(\dot{P}_N(\tau_k))^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (33)$$

此外, 为了得到精确的结果, 本文设置斜率变化阈值参数  $\varepsilon_U$  和  $\varepsilon_L$  相等.

#### 5 优化仿真实验

以 HXD1-C64 电力机车为对象, 考虑单阶段 (即运行固定路程) 时间最短优化操纵进行仿真实验. 分析可知, 时间最短优化操纵即运行时间  $t_f$  最小, 因此可只采用终值项表示, 因此问题 (4) 中优化性能指标函数为

$$\min J = \phi(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{x}_f, t_f) = t_f \quad (34)$$

同时, HXD1-C64 电力机车相关参数取值如表 1 所示. 本文选取胡云卿等<sup>[24-25]</sup>实现的 CVP 方法、传统 GPM 法同本文两阶段自适应 Gauss 配点重构伪谱法进行对比测试, 其中 CVP 方法采用统一网格控制变量离散, 状态变量通过四级五阶龙格库塔方法进行求解; 传统 GPM 方法控制变量、状态变量采

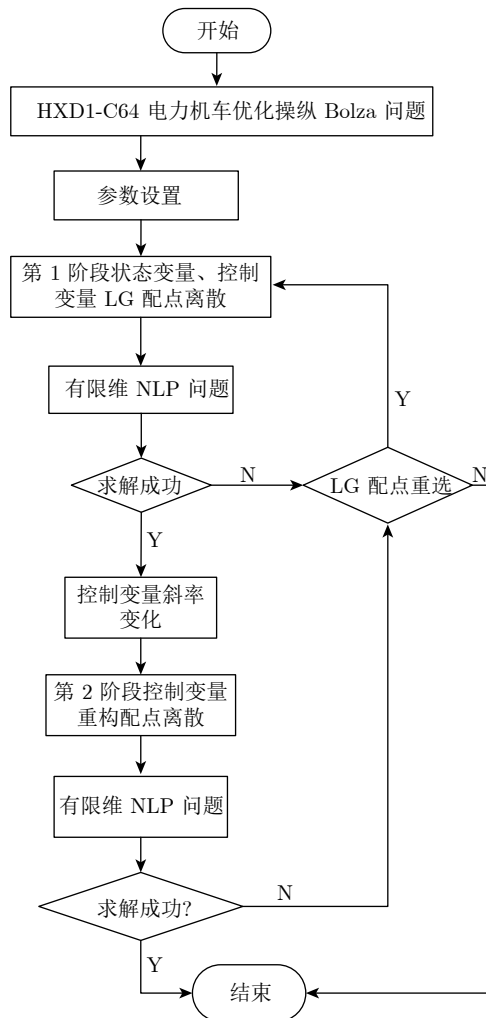


图 4 两阶段自适应 Gauss 配点伪谱法算法流程图

Fig. 4 Flow chart of two-stage adaptive Gauss re-collocation pseudospectral approach

表 1 HXD1-C64 电力机车参数

Table 1 Parameters of HXD1-C64 electric locomotive

参数项	参数值
HXD1 机车头质量	$200 \times 10^3 \text{ kg}$
C64 重车质量	$84 \times 10^3 \text{ kg}$
粘着牵引力约束	$-461 \text{ kN} \leq F_u(t) \leq 532 \text{ kN}$
路程约束	$s(t) = 1500 \text{ m}$
速度约束	$0 \leq v(t) \leq 11.1 \text{ m/s}$

用全局 LG 配点. 仿真实验在 Intel CORE i5/2.3 GHz CPU 和 DDR3/1600 MHz 8 GB 内存组成的计算机上进行.

### 5.1 仿真实验 1

本实验在平直道 (即坡道为零) 且只考虑基本阻力轨道上进行. 初始条件为  $\boldsymbol{x}(0) = [0, 0]^T$ , 初始控制参数统一设置为  $\mathbf{0}$ , 重力加速度取  $g = 9.8 \text{ m}^2/\text{s}$ , 斜率变化阈值取  $\varepsilon_U = \varepsilon_L = 0.04$ . 实验过程中, CVP 方法、传统 GPM 法和本文两阶段自适应 Gauss 配点伪谱法均在两种不同控制变量配点数下进行, 其中 CVP 方法为 20、40, 传统 GPM 法为 34、48, 本文方法为 17、24, 三种方法优化结果对比如表 2 所示.

结果显示, 三种方法均获得了相近优化性能指标. 但是相比于其他两种方法, 提出方法在 17 个控制变量配点数下, 性能指标更优, 为 141.59 s. 此外,

相较于 CVP 方法, 两次测试下本文方法分别减少 88.55% 和 94.26% 计算时间. 同时, 与传统 GPM 法相比, 采用两阶段自适应 Gauss 配点后, 控制变量配点数明显减少, 求解时间也得到有效降低, 两次测试分别节省 28.94% 和 37% 计算耗时, 显示了本文方法在提升求解效率方面的有效性.

图 5 给出了三种方法各自在 20、34 和 15 个控制变量配点数下得到的控制曲线, 图中控制变量采用分段线性参数化方式逼近. 由图可知, 传统 GPM 方法控制曲线在零值附近出现了振荡现象, 而本文方法控制曲线更加平稳, 显示本文方法解决传统 GPM 方法振荡问题的有效性. 同时, 通过配点重构, 本文方法在跳变点附近控制也比另外两种方法更加精细, 实现了在更少配点数和求解时间下取得更优控制品质和性能指标. 图 6 给出了本文方法在图 5 控制策略下得到的系统状态曲线, 图中路

表 2 HXD1-C64 电力机车仿真实验 1 结果对比  
Table 2 Numerical results comparison of Test 1 for HXD1-C64 electric locomotive

方法	测试	$u(t)$ 配点数	$\boldsymbol{x}(t)$ 配点数	离散方法	NLP 求解器	性能指标 (s)	求解时间 (s)
CVP	1	20	-	统一网格	内点法	142.25	50.41
	2	40	-	统一网格	内点法	141.81	210.63
传统 GPM	1	34	34	LG 配点	内点法	141.81	8.12
	2	48	48	LG 配点	内点法	141.62	19.19
本文方法	阶段 1	17	34	两阶段自适应 LG 配点	内点法	141.74	5.77
	阶段 2	15	34				
	阶段 1	24	48	两阶段自适应 LG 配点	内点法	141.59	12.09
	阶段 2	17	48				

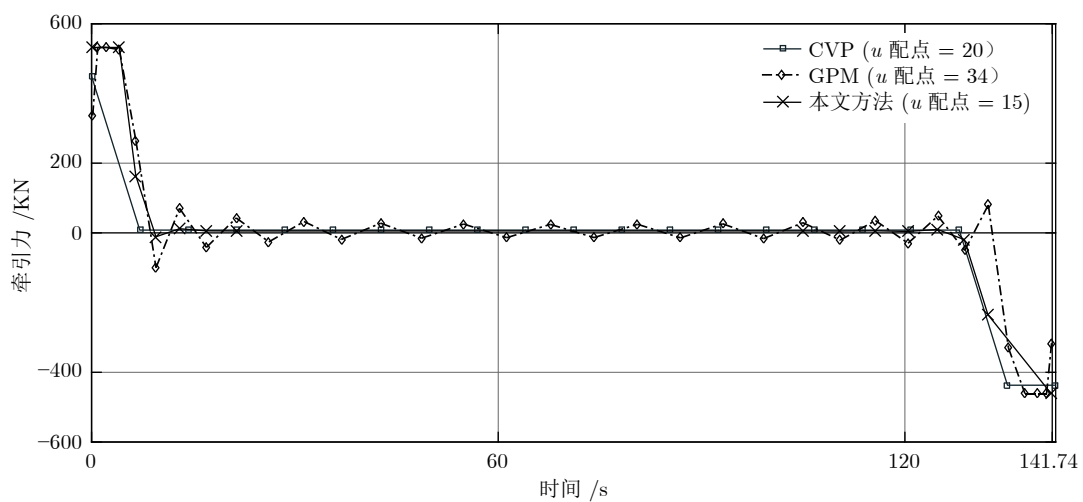


图 5 仿真实验 1 三种方法牵引力控制曲线  
Fig. 5 Control curves of three methods for Test 1

程和速度状态变量均满足表 1 中的约束条件, 表明了所得控制策略的有效性. 因而, 本文算法在平直道上得到的控制策略可以为列车司机牵引力操纵提供有效指导, 进一步还可以集成到列车操纵系统中为自动驾驶提供算法支撑.

## 5.2 仿真实验 2

结合我国电气化铁路区间线路最大坡度限制要求, 本实验在 30‰ 坡道, 考虑基本阻力与坡道阻力的轨道上进行, 参数设置与仿真实验 1 一致. 三种方法均在两种不同控制变量配点数下进行测试, 结果如表 3 所示. 结果显示, 本文方法在两次测试中取得了 141.75 s 和 141.67 s 的性能指标, 均优于 CVP 方法和传统 GPM 方法, 同时求解时间也大大减少, 与 CVP 方法相比平均减少 92.98%, 相比于与传统 GPM 方法平均降低 35.71%, 进一步表明了提出方法在 HXD1-C64 电力机车优化操纵问题中

的优势和改进算法的有效性.

图 7 给出了三种方法各自在 20、34 和 15 个控制变量配点数下得到的控制曲线. 由图可知, 坡道的存在, 使得机车在保速阶段需要提供 90 kN 左右的牵引力来克服坡道阻力, 而本文方法在该阶段由于自适应 Gauss 配点重构作用, 细化了控制变量在跳变点处的配点, 有效消除了振荡, 改善了控制品质进而提升了性能指标. 图 8 给出了本文方法在图 7 控制曲线下得到的路程和速度状态曲线, 比较图 6 (b) 和图 8 (b) 可知, 相比于平直道, 坡道的存在使得加速阶段速度有所降低, 基于此, 本文算法还可以为列车坡道行驶提供精准的机车牵引力控制方案, 提升列车优化控制水平.

## 6 结论

本文提出一种用于 HXD1-C64 电力机车优化操纵问题计算的两阶段自适应 Gauss 配点重构伪

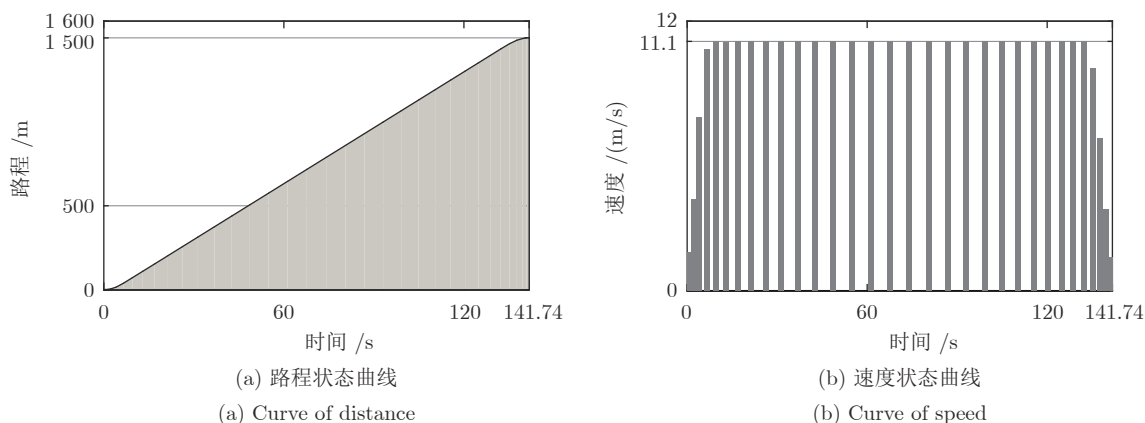


图 6 仿真实验 1 两阶段自适应 Gauss 配点法状态曲线

Fig. 6 State profiles of two-stage adaptive Gauss collocation method for Test 1

表 3 HXD1-C64 电力机车仿真实验 2 结果对比

Table 3 Numerical results comparison of Test 2 for HXD1-C64 electric locomotive

方法	测试	$u(t)$ 配点数	$x(t)$ 配点数	离散方法	NLP 求解器	性能指标 (s)	求解时间 (s)
CVP	1	20	—	统一网格	内点法	142.26	63.01
	2	40	—	统一网格	内点法	141.83	238.79
传统GPM	1	34	34	LG 配点	内点法	141.97	8.10
	2	48	48	LG 配点	内点法	141.76	21.47
本文方法	阶段 1	17	34	两阶段自适应 LG 配点	内点法	141.75	5.66
	阶段 2	15	34				
	阶段 1	24	48	两阶段自适应 LG 配点	内点法	141.67	12.60
	阶段 2	15	48				



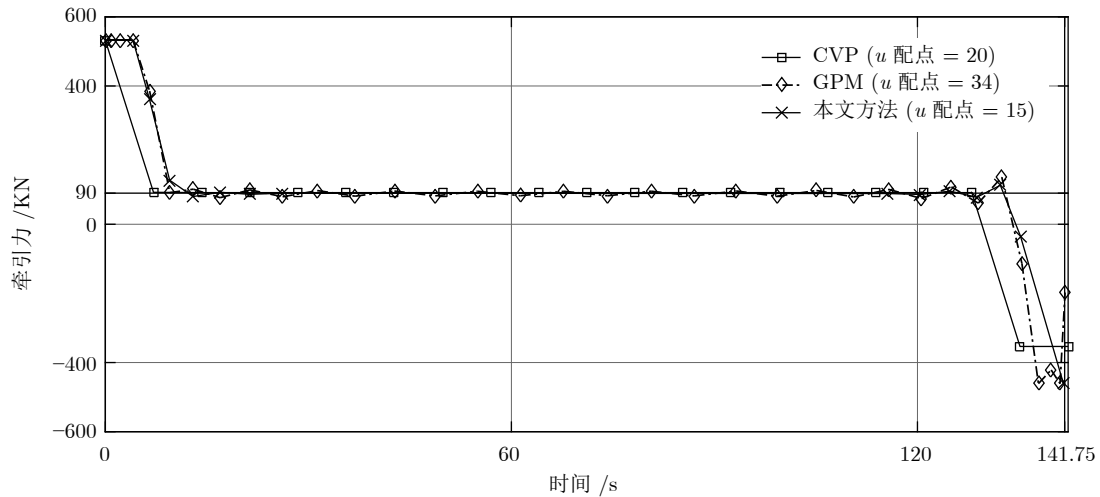


图 7 仿真实验 2 三种方法牵引力控制曲线

Fig. 7 Control curves of three methods for Test 2

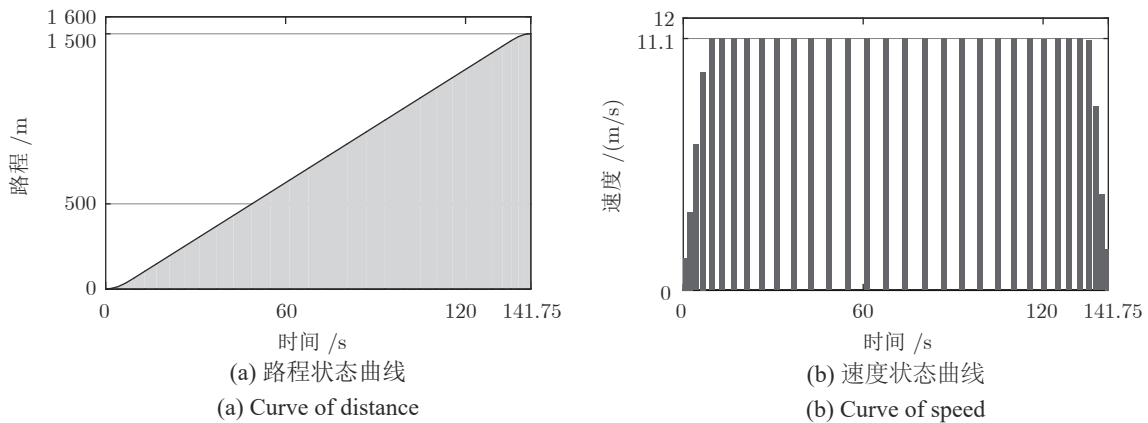


图 8 仿真实验 2 两阶段自适应 Gauss 配点法状态曲线

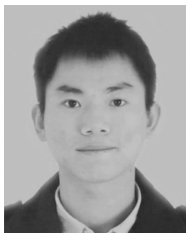
Fig. 8 State profiles of two-stage adaptive Gauss collocation method for Test 2

谱法, 在 Gauss 伪谱法框架下, 给出了 Legendre Gauss 配点求解公式, 提出了控制变量两阶段自适应 Gauss 配点重构策略, 可以有效减少优化配点个数, 提升求解效率. 通过对 HXD1-C64 电力机车在平直道和 30% 坡道上进行优化操纵仿真测试发现, 与 CVP 方法与传统 GPM 法相比, 改进方法能够在更少优化配点数下求得更优性能指标, 同时求解时间平均降低 91.93% 和 33.88%, 显示了本文方法在机车优化操纵问题计算上的有效性和实际应用价值. 需要说明的是, 本文研究中牵引力假设为理想牵引力, 下一步将引入牵引力曲线在多阶段多性能指标要求下开展 HXD1-C64 电力机车优化操纵算法研究.

## References

- 1 González-Gil A, Palacin R, Batty P, Powell J P. A systems approach to reduce urban rail energy consumption. *Energy Conversion and Management*, 2014, **80**: 509–524
- 2 Zhong Wei-Feng, Xu Hong-Ze. Energy-efficient train operation optimization using control parameterization Method. *Journal of the China Railway Society*, 2017, **39**(6): 72–79  
(仲维锋, 徐洪泽. 基于控制参数化方法的列车节能操纵优化研究. 铁道学报, 2017, **39**(6): 72–79)
- 3 Zhou Ji-Xu, He De-Qiang, Yao Xiao-Yang, Xiang Wei-Bin, Chen Er-Heng. Domestic and international algorithm analysis of electric locomotive operation optimization. *Journal of Railway*

- Science and Engineering*, 2015, **12**(1): 177–183  
(周继续, 贺德强, 姚晓阳, 向伟彬, 陈二恒. 电力机车优化操纵国内外研究算法综述. 铁道科学与工程学报, 2015, **12**(1): 177–183)
- 4 Zhao X H, Ke B R, Lian K L. Optimization of train speed curve for energy saving using efficient and accurate electric traction models on the mass rapid transit system. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, 2018, **4**(4): 922–935
- 5 Azpilicueta L, Astrain J J, Lopez-Iturri P, Granda F, Vargas-Rosales C, Villadangos J, et al. Optimization and design of wireless systems for the implementation of context aware scenarios in railway passenger vehicles. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2017, **18**(10): 2838–2850
- 6 Xun Jing, Yang Xin, Ning Bin, Wang Yi-Hui, Li Kun-Fei. Survey on trajectory optimization for train operation. *Journal of the China Railway Society*, 2014, **36**(4): 14–20  
(荀径, 杨欣, 宁滨, 王义惠, 李坤妃. 列车节能操纵优化求解方法综述. 铁道学报, 2014, **36**(4): 14–20)
- 7 Ichikawa K. Application of optimization theory for bounded state variable problems to the operation of train. *Bulletin of JSME*, 1968, **11**(47): 857–865
- 8 Ying W, Yuan G, Yu X, Hansen I A, Miao J. Optimization models for high-speed train unit routing problems. *Computers and Industrial Engineering*, 2019, **127**: 1273–1281
- 9 Liu R M, Li S K, Yang L X, Yin J T. Energy-efficient subway train scheduling design with time-dependent demand based on an approximate dynamic programming approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Systems*, 2019, DOI: 10.1109/TSMC.2018.2818263
- 10 Domínguez M, Fernández-Cardador A, Cucala A P, Gonsalves T, Fernández A. Multi objective particle swarm optimization algorithm for the design of efficient ATO speed profiles in metro lines. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2014, **29**(3): 43–53
- 11 Luus R. Time-optimal control of state constrained linear systems. *AIChE Journal*, 1973, **19**(6): 1262–1263
- 12 Liu P, Li X Y, Liu X G, Hu Y Q. An improved smoothing technique-based control vector parameterization method for optimal control problems with inequality path constraints. *Optimal Control Applications and Methods*, 2017, **38**(4): 586–600
- 13 Lin Q, Loxton R, Teo K L. The control parameterization method for nonlinear optimal control: a survey. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2014, **10**(1): 275–309
- 14 Zhang P, Chen H, Liu X, Zhang Z. An iterative multiobjective particle swarm optimization-based control vector parameterization for state constrained chemical and biochemical engineering problems. *Biochemical Engineering Journal*, 2015, **103**: 138–151
- 15 Yong En-Mi, Chen Lei, Tang Guo-Jin. A survey of numerical methods for trajectory optimization of spacecraft. *Journal of Astronautics*, 2008, **29**(2): 397–406  
(雍恩米, 陈磊, 唐国金. 飞行器轨迹优化数值方法综述. 宇航学报, 2008, **29**(2): 397–406)
- 16 Xiao L, Liu X, Ma L, Zhang Z. An effective pseudospectral method for constraint dynamic optimisation problems with characteristic times. *International Journal of Control*, 2017, **91**(3): 1–11
- 17 Han F, Wang Z L, He L, Wu H L, Yang G, Duan G R. Trajectory plan for an ultra-short distance on-orbit service based on the Gaussian pseudo-spectral method. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2018, DOI: 10.1109/JAS.2017.7510892
- 18 Wang Y, Schutter B D, Boom T, Ning B. Optimal trajectory planning for trains-A pseudospectral method and a mixed integer linear programming approach. *Transportation Research Part C Emerging Technologies*, 2013, **29**: 97–114
- 19 Darby C L, Hager W W, Rao A V. An hp-adaptive pseudospectral method for solving optimal control problems. *Optimal Control Applications and Methods*, 2011, **32**(4): 476–502
- 20 Xu Shao-Bing, Li Sheng-Bo, Cheng Bo. Theory and application of Legendre pseudo-spectral method for solving optimal control problem. *Control and Decision*, 2014, **29**(12): 2113–2120  
(徐少兵, 李升波, 成波. 最优控制问题的 Legendre 伪谱法求解及其应用. 控制与决策, 2014, **29**(12): 2113–2120)
- 21 Xiao L, Liu P, Liu X, Zhang Z, Wang Y, Yang C, et al. Sensitivity-based adaptive mesh refinement collocation method for dynamic optimization of chemical and biochemical processes. *Bioprocess and Biosystems Engineering*, 2017, **40**(9): 1375–1389
- 22 Wang P, Goverde R M. Multi-train trajectory optimization for energy-efficient timetabling. *European Journal of Operational Research*, 2019, **272**(2): 621–635
- 23 Lide D R. *Handbook of Mathematical Functions*. Florida: CRC Press, 2018.
- 24 Liu X, Hu Y, Feng J, Liu K. A novel penalty approach for nonlinear dynamic optimization problems with inequality path constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, **22**(2): 141–145
- 25 Hu Yun-Qing, Liu Xing-Gao, Xue An-Ke. A penalty method for solving inequality path constrained optimal control problems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(12): 1996–2001  
(胡云卿, 刘兴高, 薛安克. 带不等式路径约束最优控制问题的惩罚函数法. 自动化学报, 2013, **39**(12): 1996–2001)



**刘 平** 重庆邮电大学自动化学院副教授. 2017 年获浙江大学控制科学与工程博士学位. 主要研究方向为复杂系统最优控制与动态优化, 轨迹优化. 本文通信作者.

E-mail: liuping\_cqupt@cqupt.edu.cn

(**LIU Ping** Associate professor at the College of Automation, Chongqing University of Posts and Telecommunications. He received his Ph.D. degree in control science and engineering from Zhejiang University in 2017. His research interest covers optimal control and dynamic optimization of complex systems, trajectory optimization. Corresponding author of this paper.)



**胡云卿** 中车株洲电力机车研究所有限公司高级工程师. 2013 年获得浙江大学控制科学与工程博士学位. 主要研究方向为机车车辆动力学控制和智能控制.

E-mail: huyq1@csrzc.com

(**HU Yun-Qing** Senior engineer at CRRC Zhuzhou Institute Co., LTD. He received his Ph.D. degree in control science and engineering from Zhejiang University in 2013. His research interest covers locomotive dynamics control and intelligent control.)



**廖 俊** 重庆邮电大学自动化学院本科生. 主要研究方向为复杂过程动态优化与最优控制.

E-mail: 2016212658@stu.cqupt.edu.cn

(**LIAO Jun** Undergraduate student at the College of Automation, Chongqing University of Posts and Telecommunications. His research interest covers dynamic optimization and optimal control of complex

systems.)



**樊 力** 重庆邮电大学自动化学院硕士研究生. 主要研究方向为无人系统轨迹优化和最优控制.

E-mail: s180301082@stu.cqupt.edu.cn

(**FAN Li** Master student at the College of Automation, Chongqing University of Posts and Telecommunications. His research interest covers trajectory optimization and optimal control of unmanned systems.)



**黎向宇** 中车株洲电力机车研究所有限公司工程师. 2017 年获得浙江大学控制科学与工程硕士学位. 主要研究方向为电力机车最优化与最优控制.

E-mail: lixy20@csrzc.com

(**LI Xiang-Yu** Engineer at CRRC Zhuzhou Institute Co., LTD. She received her master degree in control science and engineering from Zhejiang University in 2017. Her research interest covers optimization and optimal control of electric locomotive.)



**刘兴高** 浙江大学控制科学与工程学院教授. 分别于 1996 年、2000 年获得浙江大学控制科学与工程硕士学位、博士学位. 主要研究方向为复杂系统建模, 优化与控制.

E-mail: lxxg@zju.edu.cn

(**LIU Xing-Gao** Professor at the College of Control Science and Engineering, Zhejiang University. He received his master and Ph.D. degrees in control science and engineering from Zhejiang University in 1996 and 2000, respectively. His research interest covers modelling, optimization and control of complex systems.)