

# 单量子比特系统状态的在线估计

唐雅茹<sup>1</sup> 丛爽<sup>1</sup> 杨靖北<sup>1</sup>

**摘要** 针对具有退相干效应与测量反馈随机噪声的随机开放量子系统, 采用对状态影响较弱的连续弱测量在线获取一系列状态的部分信息, 实现量子状态的在线估计. 由泡利矩阵构造初始测量算符, 并推导出在线的随时间变化的测量算符; 基于压缩传感理论来减少测量次数; 采用最小二乘优化算法对自由演化中的量子密度矩阵状态进行重构, 完整地给出了量子态在线估计的过程. 所提出的在线量子态估计方案, 在一个量子位系统上进行了系统仿真实验. 数值仿真实验结果表明, 在满足压缩传感理论条件下, 仅需 2 次连续弱测量所得到的测量值之后, 就可以高精度地实现在线变化的单比特量子密度矩阵估计.

**关键词** 单量子比特系统, 量子连续弱测量, 压缩传感理论, 量子态在线估计

**引用格式** 唐雅茹, 丛爽, 杨靖北. 单量子比特系统状态的在线估计. 自动化学报, 2020, 46(8): 1592–1599

**DOI** 10.16383/j.aas.c180752

## On-line State Estimation of One-qubit System

TANG Ya-Ru<sup>1</sup> CONG Shuang<sup>1</sup> YANG Jing-Bei<sup>1</sup>

**Abstract** For a stochastic open quantum system with decoherence effect and measurement feedback random noise, the continuous weak measurement is used to obtain state information on the line to realize the online estimation of quantum state. The Pauli matrix is used to construct the initial measurement operator, and online time-varying measurement operator is derived. The compressed sensing theory is used to reduce the number of measurements. The least squares optimization algorithm is used to reconstruct the state of the quantum density matrix in free evolution, and the whole process of online estimation of quantum state is derived. The proposed online estimation scheme of quantum state is carried out on the one-qubit system. The numerical simulation results show that under the condition of satisfying the compressed sensing theory, the quantum density matrix estimation of high-precision online of one-qubit can be achieved only after 2 measurements of continuous weak measurement.

**Key words** One-qubit system, quantum continuous weak measurement, compressed sensing theory, online estimation of quantum state

**Citation** Tang Ya-Ru, Cong Shuang, Yang Jing-Bei. On-line state estimation of one-qubit system. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(8): 1592–1599

根据系统是否与环境相互作用, 可以将量子系统分为封闭量子系统和开放量子系统. 封闭量子系统是一个孤立的、与外界无相互作用或能量交换的系统. 开放量子系统与环境相互作用, 会产生诸如耗散、消相干等现象; 对量子状态进行测量, 会给量子状态引入随机性而成为随机开放量子系统<sup>[1]</sup>. 由于量子状态无法通过直接测量的结果来获得, 因此需要通过多次测量来对量子态进行重构. 量子层析就是一种确定未知量子状态的方法, 它是通过反复制备相同的量子态, 对量子态进行完备测量, 根据测量结果, 建立含有量子态元素的方程组, 求出

量子态的全部元素. 人们利用估计出的量子状态, 可以真正实现量子系统的状态反馈控制<sup>[2–6]</sup>. 为了能够准确估计出量子的状态, 量子层析需要测量获得该状态在一组完备观测算符下对应的测量值(投影均值). 对于  $n$  量子比特状态密度矩阵而言, 其维数为:  $d = 2^n$ , 对密度矩阵的完备测量的数目为:  $d \times d = 2^n \times 2^n = 4^n$ , 很显然随着量子位数  $n$  的增加, 量子层析所需要的测量次数呈指数增长<sup>[7]</sup>. 压缩传感理论为降低量子状态估计中的测量次数问题提供了新的解决问题的理论<sup>[8–11]</sup>. 该理论指出: 如果一个量子系统密度矩阵的秩  $r$  远小于其维度的  $d$ , 也就是  $r \ll d$ , 那么只需要  $O(rd \log d)$  个观测算符上的测量值, 就可以保证以高概率值重构出的密度矩阵  $\rho$ <sup>[12]</sup>. 将压缩传感引入量子态估计可以极大减少所需要的测量次数, 提高状态估计的效率. Smith 等首次将压缩传感理论用于量子系统中, 在完备测量的基础上随机选取观测值实现了状态到状态的量子映射的离线估计, 提供了一种利用压缩感知理论求

收稿日期 2018-11-12 录用日期 2019-04-07  
Manuscript received November 12, 2018; accepted April 7, 2019  
国家自然科学基金(61973290)资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (61973290)  
本文责任编辑 朱纪洪  
Recommended by Associate Editor ZHU Ji-Hong  
1. 中国科学技术大学自动化系 合肥 230027  
1. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027

解凸优化问题的新思路<sup>[13-14]</sup>. 根据观测算符、所对应的测量值、压缩传感理论以及优化算符来重构密度矩阵  $\rho$  的过程, 就是量子状态的估计过程.

我们考虑测量带来的退相干效应以及随机噪声的开放量子系统, 采用对估计状态影响较小的间接连续弱测量 (Continuous weak measurement), 通过连续不断地进行在线弱测量, 来实现量子态的在线估计 (Online estimation). 通过引入探测系统 (Probe system), 并与被测系统 (System measured) 发生关联, 然后通过对探测系统进行直接投影测量 (Projective measurement), 根据测量结果推导出作用在被测系统上的测量算符. 在测量与估计的过程中, 系统状态是随时间自由演化的变化状态, 导致测量算符不再是常数矩阵, 变成也是随时间变化的测量演化矩阵. 由此可以在线估计出随时间变化的量子系统状态. 同时, 我们基于压缩传感理论, 采用最小二乘 (Least square, LS) 优化算法, 将本文所提出的在线量子态估计方案, 在一个量子位系统中进行了状态在线估计的仿真实验. 并对系统在不同的外加控制场、测量强度, 以及弱测量观测算符的情况下, 对在线状态估计结果的影响进行了性能实验与结果分析.

本文结构安排如下, 第 1 节为在随机开放量子系统在连续弱测量过程中, 作用在被测系统上的测量算符, 以及根据系统状态演化方程而随时间变化的测量算符的推导; 第 2 节为基于压缩传感理论, 利用 LS 优化算法的量子态在线估计的实现过程; 第 3 节为一个量子位系统状态在线估计的仿真实验, 以及各参数对估计性能影响的分析; 最后第 4 节为全文总结.

### 1 随机开放量子系统的连续弱测量

基于连续弱测量的量子态在线估计过程如图 1 所示, 其中, 通过引入的探测系统  $P$  与被测系统  $S$  的状态发生耦合关联, 在时间  $t$  时刻进行弱测量操作, 来获得含有系统  $S$  状态信息的测量值, 再基于压缩传感理论和 LS 优化算法对测量值进行在线估计, 并通过施加一定控制调节量来获得该时刻被测系统

状态的估计值. 在整个状态估计的过程中, 系统的状态是随时间自由演化的状态, 通过不断的连续弱测量, 对演化的系统状态进行估计, 实现对变化的量子状态的在线估计.

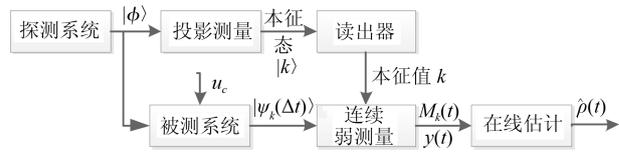


图 1 基于连续弱测量的量子态在线估计过程

Fig. 1 Structure of online quantum state estimation based on continuous weak measurement

在连续的每一次弱测量操作中, 对探测系统进行直接投影测量; 根据量子连续弱测量理论和所获得测量值, 可以推导出作用在被测系统上的测量算符; 根据所建立的状态优化求解方程, 采用优化算法进行量子状态的重构. 对被测系统  $S$  的一次完整的间接弱测量操作过程如图 2 所示, 其中, 量子弱测量是通过引入一个探测系统  $P$  与被测系统  $S$  发生短时间的关联, 使探测系统  $P$  包含被测系统  $S$  的部分信息, 然后对探测系统  $P$  进行投影测量, 根据此测量结果来推导出作用在被测系统  $S$  上的测量算符<sup>[15]</sup>. 图 2 中左边虚框为探测部分, 右边虚框为测量读出部分. 不同于投影测量等强测量会造成被测系统的瞬时塌缩, 弱测量是一个非瞬时的测量过程, 对量子系统造成的影响较弱.

当探测系统  $P$  作为输入量与被测系统  $S$  发生耦合时, 组成联合系统  $S \otimes P$ . 设探测系统  $P$  的初态为  $|\phi\rangle$ , 被测系统  $S$  的初态为  $\rho_0 = |\psi\rangle \langle \psi|$ ,  $H_S$  和  $H_P$  分别为  $S$  和  $P$  的哈密顿量, 联合系统  $S \otimes P$  的哈密顿量为  $H = H_P \otimes H_S$ . 此时, 联合系统  $S \otimes P$  的初态为:  $|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$ . 经过  $\Delta t$  时间的联合演化后,  $|\Psi\rangle$  变为  $|\Psi(\Delta t)\rangle$ , 将其作为探测部分的输出送入测量读数部分进行读数, 读数过程表现为利用投影算符  $\pi_k = |k\rangle \langle k| \otimes I$  对探测系统  $P$  进行的投影测量, 读出结果为探测系统  $P$  在希尔伯特空间上本征态  $|k\rangle$  的本征值. 在弱测量过程中, 当探测系统  $P$  与被测系统  $S$  间的相互作用强度  $\xi$  和作用时间  $\Delta t$

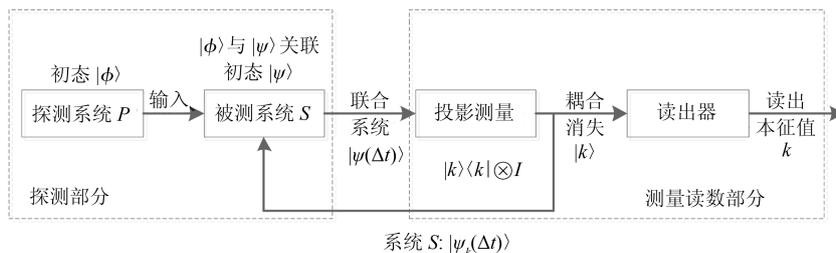


图 2 量子间接弱测量过程

Fig. 2 Process of quantum indirect weak measurement

都足够小时, 即弱测量强度  $\lambda = \xi\Delta t \rightarrow 0$ , 测量对被测系统  $S$  的影响很小时, 为量子弱测量.

在测量和在线估计的过程中, 系统状态是随时间不断演化成为新的状态, 所以需要不断变化的状态进行重构. 通过连续不断的测量、数据获取, 以及新状态的不断在线重构, 可以得到在线估计状态的连续变化轨迹. 下面我们将根据弱测量、连续弱测量以及在线估计全过程, 推导出在线估计所需要的随时间变化的、作用在被测系统上的测量算符.

### 1.1 量子弱测量下的测量算符的推导

在一次量子弱测量过程中, 联合系统初态  $|\Psi\rangle$  经过  $\Delta t$  的演化时间后, 变为  $|\Psi(\Delta t)\rangle$ :

$$|\Psi(\Delta t)\rangle = U(\Delta t)|\Psi\rangle = U(\Delta t)(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) \quad (1)$$

其中,  $U(\Delta t)$  为联合系统的联合演化算符:

$$U(\Delta t) = \exp(-i\xi_0\Delta tH/\hbar) \quad (2)$$

其中,  $\xi_0$  表示相互作用强度 (单位 1/s).

由于弱测量过程是对探测系统  $P$  进行投影测量, 根据正交投影测量公式, 可知联合系统第  $k$  个本征值所对应的状态  $|\Psi_k(\Delta t)\rangle$  为:

$$|\Psi_k(\Delta t)\rangle = (|k\rangle\langle k| \otimes I \cdot U(\Delta t)|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) / \Theta_k \quad (3)$$

其中,  $\Theta_k$  为标准化参数  $\Theta_k = \sqrt{\langle\Psi(\Delta t)|\Pi_k|\Psi(\Delta t)\rangle}$ , 代表测得结果为  $|k\rangle$  的概率.

弱测量的读出部分为探测系统测量后的某个本征态, 测量后的被测系统  $S$  的状态为  $|\psi_k(\Delta t)\rangle$ . 根据完备正映射原理<sup>[16]</sup> 可知, 联合系统在  $\Delta t$  时间后的状态还可表示为:

$$|\Psi_k(\Delta t)\rangle = |k\rangle \otimes |\psi_k(\Delta t)\rangle \quad (4)$$

比较式 (3) 和式 (4), 可以得出整个测量过程前后被测系统  $S$  状态变化的关系式:

$$|\psi_k(\Delta t)\rangle = \langle k| \otimes I \cdot U(\Delta t)|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle / \Theta_k \quad (5)$$

为了表示方便, 定义 Kraus 算符  $M_k$ :

$$M_k = \langle k| \otimes I \cdot U(\Delta t)|\phi\rangle \otimes I \quad (6)$$

标准化参数  $\Theta_k$  可由  $M_k$  表示为:

$$\Theta_k = \sqrt{\langle\psi|M_k^\dagger M_k|\psi\rangle} \quad (7)$$

将式 (6) 和 (7) 代入式 (5), 可得:

$$|\psi_k(\Delta t)\rangle = \frac{M_k}{\sqrt{\langle\psi|M_k^\dagger M_k|\psi\rangle}}|\psi\rangle \quad (8)$$

式 (8) 就是被测系统  $S$  测量前后状态之间的关系式. 由式 (8) 可以看出, 如果将整个弱测量过程看作是对被测系统  $S$  的一次测量操作, 那么式 (8) 中的  $M_k$  就是作用在系统  $S$  上的测量算符, 它是由探测系统  $P$  的初态  $|\phi\rangle$ , 读出的投影算符  $\pi_k = |k\rangle\langle k|$ , 以及联合系统的演化算符  $U(\Delta t)$  构成的广义测量算符.

在量子态在线估计中, 一次弱测量操作无法获得重构量子态的足够信息, 需要足够的测量次数, 才能估计出系统  $S$  的状态密度矩阵. 由于在线测量过程中, 量子系统的状态是随时间进行自由演化, 所要估计的状态不再是一个定常不变的状态, 导致作用在被测系统上的测量算符也不再是定常矩阵. 因此就要求出连续弱测量下随时间变化的测量算符  $M_k(t)$ .

### 1.2 连续弱测量下的测量算符的演化

在薛定谔绘景下, 图 1 中被测量子系统随机主方程 (SME)<sup>[17]</sup> 可以写为:

$$\begin{aligned} \rho(t + \Delta t) - \rho(t) = & -\frac{i}{\hbar}[H(t), \rho(t)]\Delta t + \\ & \sum \left[ L\rho(t)L^\dagger - \frac{1}{2}(L^\dagger L\rho(t) + \rho(t)L^\dagger L) \right] \Delta t + \\ & \sqrt{\eta} \sum [L\rho(t) + \rho(t)L^\dagger] dW \\ \rho_0 = & \rho(0) \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $\rho(t)$  为密度矩阵,  $\hbar$  为普朗克常量, 通常取  $\hbar = 1$ ,  $H(t) = H_0 + u_x H_x$ ,  $H(t)$  为总哈密顿量,  $H_0$  为被测系统哈密顿量,  $H_x$  为控制哈密顿量,  $u_x$  是外加控制调节量;  $\eta$  是测量效率, 且满足  $0 < \eta \leq 1$ ; 令  $D[L, \rho] = L\rho L^\dagger - \frac{1}{2}(L^\dagger L\rho + \rho L^\dagger L)$ , 表示测量过程带来的确定性退相干作用, 表现为 Lindblad 形式的漂移项; 令  $H[L, \rho] = L\rho + \rho L^\dagger$ , 表示测量过程带来的随机扩散项, 表现为对量子系统状态产生的干扰, 也称为反向效应 (Back-action). 在零差测量情况下,  $dW$  为零差测量时测量输出带来的噪声, 是一维 Wiener 过程, 满足:  $E(dW) = 0$ ,  $E[(dW)^2] = \Delta t$ .

在连续弱测量过程中, 我们对  $U(\Delta t)$  进行 Talyor 展开, 并舍去三阶以上微小量, 可得:

$$U(\Delta t) \approx I \otimes I - i\xi_0\Delta tH - (\xi_0\Delta t)^2 H^2 / 2 \quad (10)$$

将式 (10) 代入到式 (6) 中, 可以得到弱测量算符  $M_k(t)$  的表达式为:

$$\begin{aligned} M_k(\Delta t) \approx & I \langle k| \phi\rangle - i\xi_0\Delta t H_S \langle k| H_P | \phi\rangle - \\ & (\xi_0\Delta t)^2 H_S^2 \langle k| H_P^2 | \phi\rangle / 2 \end{aligned} \quad (11)$$

若令  $r_k = (\xi_0 \Delta t) H_S^2 \langle k | H_P^2 | \phi \rangle$ ,  $k = 1, 2, \dots, d$ , 则弱测量算符  $M_k(t)$  的一般形式为:

$$M_k(\Delta t) = I \langle k | \phi \rangle - [r_k \lambda / 2 + i \lambda H_S \langle k | H_P | \phi \rangle] \quad (12)$$

令  $k = j$ , 即  $\langle j | \phi \rangle = 1$ , 此时弱测量算符  $M_k$  为:

$$M_j(\Delta t) = I - (\xi_0 r_{k=j} / 2 + i \xi_0 H_S) \Delta t \quad (13)$$

根据完备算符条件:  $(M_{j\perp})^2 + (M_j)^2 = I$ , 可得,

$$M_{k \neq j}(\Delta t) = M_{j\perp}(\Delta t) = \sqrt{r_{k \neq j} \Delta t} \quad (14)$$

对于一个二能级量子系统进行弱测量时, 测量算符组仅包含  $M_0(\Delta t)$  和  $M_1(\Delta t)$  两个算符, 通过选择合适的算符  $L$ , 可以构建出相应的弱测量算符  $M_0(\Delta t)$  与  $M_1(\Delta t)$  分别为:

$$\begin{aligned} M_0(\Delta t) &= M_j - i(1 - \xi_0) H_S \Delta t = \\ &I - (L^\dagger L / 2 + i H(t)) \Delta t \\ M_1(\Delta t) &= L \cdot \sqrt{\Delta t} \end{aligned} \quad (15)$$

根据构建的弱测量算符, 可得连续弱测量过程中测量算符的演化方程为:  $M(t + \Delta t) = M_0(\Delta t)^\dagger M(t) M_0(\Delta t) + M_1(\Delta t)^\dagger M(t) M_1(\Delta t)$ . 通过令:  $t = \Delta t \cdot k$ , 可以得到测量算符的演化方程的离散形式为:

$$\begin{aligned} M(k+1) &= M_0(\Delta t)^\dagger M(k) M_0(\Delta t) + \\ &M_1(\Delta t)^\dagger M(k) M_1(\Delta t) \end{aligned} \quad (16)$$

其中,  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  为仿真实验系统演化次数.

将式 (15) 代入式 (9) 系统动力学方程中, 并定义系统演化算符为:

$$\begin{aligned} A_0 &= M_0(\Delta t) + \sqrt{\eta} L \cdot dW = \\ &I - (L^\dagger L / 2 + i H(t)) \Delta t + \sqrt{\eta} L \cdot dW \\ A_1 &= M_1(\Delta t) + \sqrt{\eta} L \cdot dW = \\ &L \cdot \sqrt{\Delta t} + \sqrt{\eta} L \cdot dW \end{aligned} \quad (17)$$

根据式 (17) 的系统演化算符, 可以得到离散形式的随机开放量子系统演化方程为:

$$\rho(k+1) = A_0 \rho(k) A_0^\dagger + A_1 \rho(k) A_1^\dagger \quad (18)$$

## 2 基于压缩传感的量子态在线估计

压缩传感 (Compressed sensing, CS) 理论指出: 如果量子状态的密度矩阵  $\rho$  为低秩矩阵, 那么只需要  $O(rd \log d)$  随机观测量的测量值, 将系统状态的估计问题转化为一个优化问题来重构出密度矩阵, 其中  $d$  和  $r$  分别为状态密度矩阵  $\rho$  的维度与秩<sup>[12]</sup>.

基于量子连续弱测量和压缩感知理论可知, 在线量子状态估计过程是测量一次, 估计一次, 当测量次数达到或超过  $m$  ( $m \leq d$ ) 时, 可以获得满足性能指标的估计值. 根据式 (16), 可以根据测量算符构造出不断随时间和测量次数变化的采样矩阵:

$$A = [\text{vec}(M_1), \text{vec}(M_2), \dots, \text{vec}(M_m)]^T \quad (19)$$

其中, 在测量次数小于  $m$  情况下, 采样矩阵的维数为测量次数, 当测量次数大于  $m$  后, 采样矩阵的维数保持  $m$  个, 并且每增加一次新测量列向量, 将去掉最前面的一次的测量列向量, 以保证采样矩阵的不断更新.

对应于采样矩阵所获得的测量值是:  $y = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ . 理论上, 可以通过计算密度矩阵  $\rho$  和采样矩阵  $A$  的内积值来获得测量值为:

$$y_l = \langle \rho, M_l \rangle = \text{tr}(\rho M_l), l = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

基于压缩传感理论, 量子态估计过程中所用到的测量次数仅需要  $m$  次, 其估计误差为:

$$\varepsilon = y - A \hat{\rho} \quad (21)$$

根据压缩传感理论可知, 只要采样矩阵  $A$  满足限制等距条件 (Restricted isometry property, RIP):

$$(1 - \delta) \|\hat{\rho}\|_F \leq \|A \hat{\rho}\|_2 \leq (1 + \delta) \|\hat{\rho}\|_F \quad (22)$$

其中,  $\delta \in (0, 1)$  为等距常数,  $\|\cdot\|_F$  为 Frobenius 范数, 那么, 在估计误差允许范围内, 就可通过求解满足带有约束条件的最优范数的问题唯一确定  $d^2$  个待估计的密度矩阵元素:

$$\begin{aligned} &\arg \min \|\hat{\rho}\|_* \\ &\text{s. t. } \hat{\rho} \geq 0, \text{tr}(\hat{\rho}) = 1, \|y - A \text{vec}(\hat{\rho})\|_2 \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (23)$$

其中,  $\hat{\rho}$  为利用压缩传感重构出的估计密度矩阵,  $\|\hat{\rho}\|_*$  表示  $\hat{\rho}$  的核范数,  $\varepsilon$  表示估计误差,  $\text{vec}(\cdot)$  为变换算符, 表示任意矩阵的每一列按顺序首尾相连变换成的矢量, 上述核范数优化问题等价于在正定约束下目标为  $\hat{\rho}$  的二范数最小的优化问题:

$$\begin{aligned} &\arg \min \|A \cdot \text{vec}(\hat{\rho}) - y\|_2 \\ &\text{s. t. } \hat{\rho} \geq 0, \text{tr}(\hat{\rho}) = 1 \end{aligned} \quad (24)$$

根据本文所给出的量子连续弱测量过程, 单量子比特系统状态在线估计的算法过程为:

1) 给定系统自由哈密顿量  $H_0$ , 系统控制哈密顿量  $H_x$ , 系统外加的恒定控制量  $u_x$ , 系统 Lindblad 算符  $L$ , 计算系统哈密顿量:  $H = H_0 + u_x H_x$ , 根

据式 (15), 计算单量子比特系统的两个弱测量算符  $M_0(\Delta t)$  和  $M_1(\Delta t)$ ;

2) 根据式 (16), 计算  $k$  时刻系统连续弱测量下的测量算符  $M(k)$ ;

3) 基于压缩传感理论选择合适的测量次数  $m$ , 根据式 (19), 构造采样矩阵  $A(k)$ ; 根据式 (20) 获得系统的测量值  $y(k)$ ;

4) 根据非负 LS 算法来求解正定约束下的二范数最小的优化问题:  $\arg \min \|A \cdot \text{vec}(\hat{\rho}) - y\|_2$  s.t.  $\hat{\rho} \geq 0, \text{tr}(\hat{\rho}) = 1$ , 求出  $k$  时刻下的估计密度矩阵  $\hat{\rho}(k)$ ;

5) 循环步骤 2)~4), 可以得到连续演化系统的估计状态.

### 3 量子态在线估计仿真实验及其结果分析

本节我们将在 MATLAB 环境下进行了单量子比特系统状态在线估计的数值仿真实验, 考虑随机开放量子系统的退相干效应和随机噪声, 研究二能级量子系统状态的演化轨迹与所对应的在线估计状态的性能, 并通过对比仿真实验结果, 分析当系统参数在不同的外加控制场、相互作用强度、弱测量观测算符下, 对状态在线估计结果性能的影响.

我们选择处于  $z$  方向恒定外加磁场  $B_z$  与  $x$  方向控制磁场  $B_x = A \cos \phi$  中的  $\frac{1}{2}$  自旋粒子系综  $S$  的状态  $\rho(t)$  作为被估计对象, 系统的初始状态为:  $\rho(0)$ , 随时间演化的状态为  $\rho(k)$ . 对系统  $S$  施加连续的弱测量, 初始观测算符为  $M(0)$ . 系统演化方程为式 (18), 其中, 被测系统的本征频率为:  $\omega_0 = \gamma B_z$ ;  $\gamma$  是粒子系综的自旋磁比满足:  $\Omega = \gamma A$  为系统的 Rabi 频率:  $\Omega \in \mathbf{R}$ . 我们采用保真度  $f$  来表示系统状态在线估计的性能指标, 保真度的计算公式定义为:

$$f(k) = \text{tr} \sqrt{\hat{\rho}^{\frac{1}{2}}(k) \rho(k) \hat{\rho}^{\frac{1}{2}}(k)} \quad (25)$$

其中,  $\rho(k)$  为  $k$  时刻下的真实密度矩阵,  $\hat{\rho}(k)$  为在线估计的密度矩阵. 系统的哈密顿量为:

$$H = H_0 + u_x H_x \quad (26)$$

其中,  $H_0 = -\frac{\hbar}{2} \omega_0 \sigma_z$  为系统自由哈密顿量,  $\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  为  $z$  方向的 Pauli 矩阵,  $H_x = -\frac{\hbar \Omega}{2} (e^{-i\phi} \sigma^- + e^{i\phi} \sigma^+) = -\gamma A \sigma_x$  为控制哈密顿量,  $\sigma^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\sigma^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $u_x$  为常值控制量,  $u_x = \gamma A$ . 在仿真实验中, 系统初态为:  $\rho(0) = [\frac{3}{4} \quad -\frac{\sqrt{3}}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \frac{1}{4}]$ , 对应 Bloch 球坐标为:  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$ . 实验参数:  $\frac{\hbar}{2} \omega_0 = \Omega = 2.5 \times 10^{-18}$ ,

控制场初始相位  $\phi = 0$ , 测量效率取  $\eta = 0.5$ , 连续弱测量时间间隔取  $\Delta t = 0.4 \times \frac{\hbar}{2} \omega_0 = 1 \times 10^{-18} \text{s} \approx 4 \text{ a. u.}$ . 实验中的采样次数 (Sampling times) 为:  $N = 200$ , 也就是连续测量与估计的总次数. 系统随机噪声:  $dW = \sigma \cdot \text{randn}(2, 2)$ , 其中,  $\sigma$  为随机噪声幅值; CVX 优化算法中, 取迭代误差为  $\text{tol} = 10^{-7}$ , 优化算法中的最大迭代次数为:  $\text{maxite} = 30$ ; 控制量  $u_x$  分别取两种不同常值:  $u_{x1} = 0$ ,  $u_{x2} = 2$ , 每种控制量下分别选择两种初始观测算符:  $M_z(0) = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , 以及

$M_x(0) = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 以及两种 Lindblad 算符:  $L_z = \xi \sigma_z$ ,  $L_x = \xi \sigma_x$ , 其中,  $\xi$  表示系统相互作用强度, 且满足:  $\xi^2 = \xi_0$ .

#### 3.1 无外加控制作用下系统状态自由演化仿真实验

本节主要研究单比特开放量子系统在外加控制磁场作用下的状态自由演化及其状态在线估计的数值仿真实验. 图 3 为  $u_x = 0$  时不同观测算符下系统真实状态  $\rho(k)$  及其在线估计状态  $\hat{\rho}(k)$  在 Bloch 球上的演化轨迹, 其中, 实线对应系统真实状态的演化轨迹, 虚线对应系统在线估计状态的演化轨迹, “o” 表示真实状态的初态  $\rho(0)$ , “\*” 表示在线估计状态的初态  $\hat{\rho}(0)$ . 图 3(a), 3(b) 和 3(c) 分别对应  $L_z = \xi \sigma_z$ ,  $M_z(0) = \sigma_z$ ;  $L_x = \xi \sigma_x$ ,  $M_x(0) = \sigma_x$ ; 以及  $L_x = \xi \sigma_x$ ,  $M_z(0) = \sigma_z$  情况下的系统状态估计结果, 其中,  $\xi = 0.3$ .

从图 3 中的实线轨迹可以看出: 当系统外加控制量  $u_x = 0$  时, 系统状态处于自由演化过程. 图 3(a) 中当系统 Lindblad 算符取  $L_z = \xi \sigma_z$  时, 系统状态自由演化轨迹为  $x-y$  平面上的投影轨迹; 图 3(b) 和 3(c) 中当  $L_x = \xi \sigma_x$  时, 系统状态自由演化轨迹向球心处耗散. 另一方面, 当初始测量算符取:  $M_z(0) = \sigma_z$  时, 量子态估计结果为系统状态  $\rho(t)$  向  $z$  轴上投影的混合态; 当测量算符为:  $M_x(0) = \sigma_x$  时, 量子态估计结果为系统状态在  $x-y$  平面上的投影轨迹. 此时, 由于所选初始观测算符  $M_z(0)$  (图 3(c)) 或  $M_x(0)$  (图 3(b)) 与系统自由哈密顿重合或正交, 导致在线连续测量无法测量到系统状态的足够有效信息, 因此无法实现量子态的正确在线估计结果.

#### 3.2 外加恒定控制作用下量子态在线估计仿真实验

本节通过适当外加常值控制, 改变测量算符与系统自由哈密顿的重合或正交情况, 获得有效的测量值, 实现系统状态正确的在线估计. 进一步地还进行量子系统在不同随机噪声幅值大小, 以及不同相

相互作用强度下对在线状态估计性能的影响的研究。

图 4 和图 5 为  $u_x = 2$  时不同参数下系统真实状态  $\rho(k)$ , 以及在线估计状态  $\hat{\rho}(k)$  在 Bloch 球中的演化轨迹. 其中, 图 4(a)、4(b) 和 4(c) 分别对应当相互作用强度为  $\xi_1 = 0.3$  时,  $L_z = \xi_1\sigma_z, M_z(0) = \sigma_z; L_x = \xi_1\sigma_x, M_x(0) = \sigma_x$ ; 以及  $L_x = \xi_1\sigma_x, M_z(0) = \sigma_z$  情况下的系统状态的在线估计结果. 图 5(a)、5(b) 和 5(c) 分别对应当相互作用强度为  $\xi_2 = 0.5$  时,  $L_z = \xi_2\sigma_z, M_z(0) = \sigma_z; L_x = \xi_2\sigma_x, M_x(0) = \sigma_x$ ; 以及  $L_x = \xi_2\sigma_x, M_z(0) = \sigma_z$

$\sigma_z$  情况下的量子态在线估计结果, 其中, 随机噪声幅值为:  $\sigma = 0.02$ .

由图 4 和图 5 可以看出: 当外加磁场控制量  $u_x = 2$  时, 系统的状态演化轨迹为 Bloch 球上与  $x-y$  平面具有一定夹角的运动轨迹, 由于此时所选初始观测算符  $M_z(0)$  或  $M_x(0)$  与系统哈密顿不重合或正交, 能够获得有效的测量值, 因而可以得到量子态的精确估计结果. 从图 4 和图 5 中还可以看出: 改变环境对系统的影响强度, 即相互作用强度  $\xi$  的大小, 也会使系统的演化轨迹发生变化, 强度越大, 演

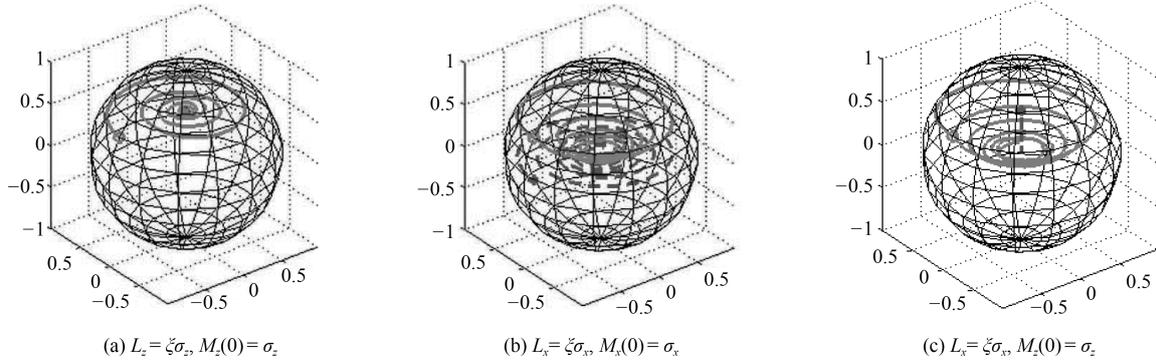


图 3 无外加控制作用下系统的自由演化轨迹及其在线状态估计

Fig. 3 Free evolution trajectory and online state estimation of the system without external control

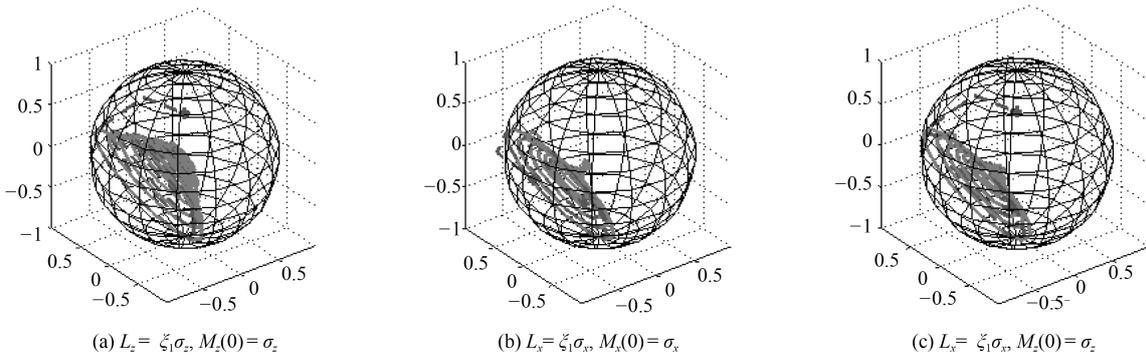


图 4 相互作用强度为 0.3 情况下, 外加恒定控制下系统的状态演化轨迹

Fig. 4 State evolution trajectory of system under external constant control under interaction strength of 0.3

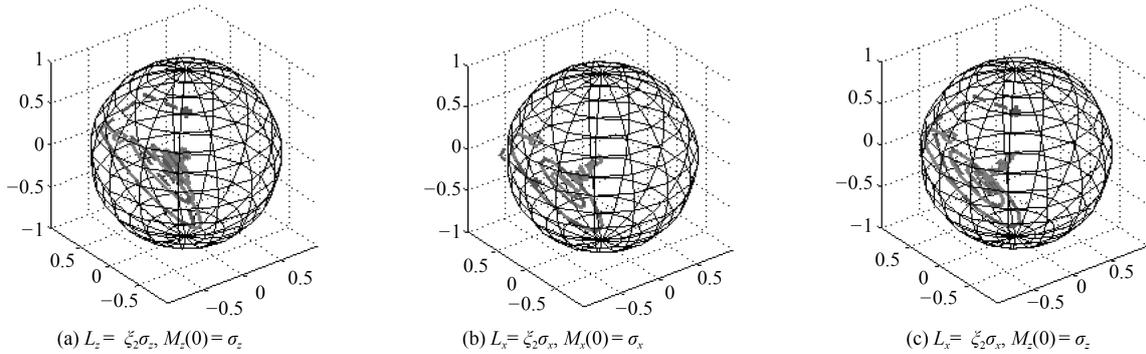


图 5 相互作用强度为 0.5 情况下, 外加恒定控制下系统的状态演化轨迹

Fig. 5 State evolution trajectory of system under external constant control under interaction strength of 0.5

化轨迹变化越快;另外,图 4 和图 5 中估计状态与实际状态均在测量次数  $k = 2$  及之后的轨迹重合,换句话说,在  $k = 2$  次以及之后可以获得精确的在线状态估计.此结果与基于压缩传感理论所给出的当秩  $r = 1$ ,获得精确状态估计的最少测量次数为  $r \times d = 1 \times 2 = 2$  是完全吻合的.

为了进一步研究随机开放量子系统中噪声对系统演化轨迹以及在线估计性能的影响,我们还进行了不同噪声幅值下系统状态在线估计的仿真实验.图 6(a) 为当系统随机噪声幅值取  $\sigma = 0.02$  时的保真度曲线,图 6(b) 为不同随机噪声幅值下的量子态在线估计的系统保真度曲线,图 6(c) 为不同随机噪声幅值下系统状态密度矩阵中元素  $\rho_{11}$  的变化曲线,实线,虚线,点划线分别对应噪声幅值取 0, 0.02 和 0.04 时的变化曲线.

由图 6(a) 可以看出,基于连续弱测量和压缩传感理论可以高精度地实现量子态的在线估计,并且本文所采用的优化算法可以对系统噪声进行一定程度的去噪处理.从图 6(a) 和 6(b) 可以看出,当开放量子系统无随机噪声时,系统保真度可以达到 99.3% 以上,系统估计误差小于 0.7%,系统状态密度矩阵在 150 次自由演化后到达球心的最大混合态;当开放量子系统具有随机噪声时,系统保真度曲线抖动现象更为明显,并且随着噪声幅值的增大,系统估计误差随之增大,状态密度矩阵在系统演化过程中的抖动幅度也随之增加.

在现有量子态估计的研究中, Silberfarb 等<sup>[4]</sup> 提出了一种基于  $N$  个连续测量集合的量子态重建方案,该方案仅考虑一个特定的未知初始状态,并需要制备该状态的诸多全同副本,然后通过引入一组明确的控制参数实现将初始测量状态映射到所有可能的测量状态上,之后利用探测器来获取测量结果,再利用贝叶斯滤波器和极大似然估计法重构出系统状

态.由于方案中需要引入一组明确的控制参数,当控制参数存在 1% 的不确定性时,系统保真度仅有 85%.因此,控制参数的不确定性和全局优化策略需要进一步完善.本文与之最大的不同点是,我们对不断演化的系统状态进行在线估计,通过连续不断地进行在线弱测量来实现量子态的实时在线估计.数值仿真实验结果表明,基于本文所提出的方案,在外加恒定控制量作用下,系统保真度高于 95%,更高精度地实现了量子状态估计.

Smith 等<sup>[13]</sup> 首次将压缩传感理论用于量子系统中,根据系统的动力学特性,利用物理实验生成一组具有足够精确度的已知可观察量,然后分别采用压缩传感 (CS) 和最小二乘 (LS) 算法进行状态重构.实验中根据随机选择的测试状态的平均值来观察 CS 和 LS 算法的性能好坏,实验结果表明,利用 CS 算法重构系统状态的保真度高于 LS 算法,并且具有较好的鲁棒性.与之不同的是,本文对不断变化的系统状态进行在线估计,利用压缩传感理论来减少在线的测量次数,确定单量子比特状态在线估计所需要的最少测量次数.通过系统仿真实验,给出了一个量子位在线估计的完整过程,揭示了对在线量子态估计性能的影响因素包括开放量子系统的内部参数  $L$  以及初始测量算符  $M(0)$ ,并且,通过施加外加常数控制获得高精度的状态估计性能.

## 4 结论

本文基于压缩传感理论和连续弱测量,对单比特随机开放量子系统中的量子态进行在线估计的研究.数值仿真实验结果表明,在外加常值控制作用下,任意初始观测算符与系统自由哈密顿不重合或不正交,连续弱测量可以获得系统的有效信息,实现量子态的精确在线估计.

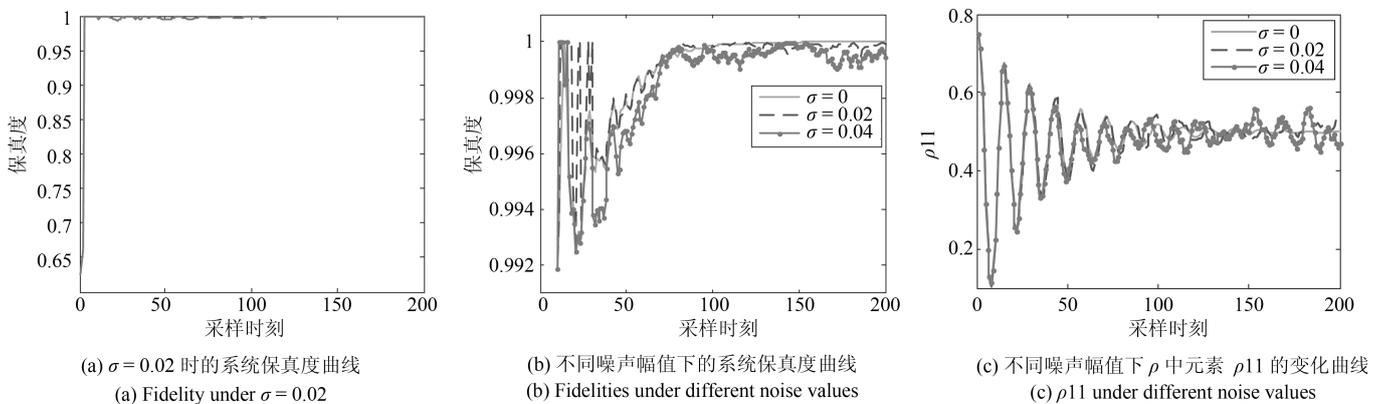


图 6 量子态在线估计的性能曲线

Fig. 6 Performances of online quantum state estimation

## References

- 1 Cong Shuang, Hu Long-Zhen, Yang Fei, Liu Jian-Xiu. Characteristics analysis and state transfer for non-markovian open quantum systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 360–370  
(丛爽, 胡龙珍, 杨霏, 刘建秀. Non-Markovian 开放量子系统的特性分析与状态转移. *自动化学报*, 2013, **39**(4): 360–370)
- 2 Vogel K, Risken H. Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase. *Physical Review A*, 1989, **40**: 2847–2849
- 3 Gambetta J, Wiseman H M. State and dynamical parameter estimation for open quantum systems. *Physical Review A*, 2001, **64**: 042105
- 4 Silberfarb A, Jessen P S, Deutsch I H. Quantum state reconstruction via continuous measurement. *Physical Review Letters*, 2005, **95**: 030402
- 5 Zhang J, Liu Y X, Wu R B, Jacobs K, Nori F. Quantum feedback: theory, experiments, and applications. *Physics Reports*, 2017, **679**: 1–60
- 6 Harraz S, Cong S. State transfer via on-line state estimation and Lyapunov-based feedback control for a N-qubit system. *Entropy*, 2019, **21**(8): 751
- 7 D’Alessandro D. On quantum state observability and measurement. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2003, **36**(37): 9721–9735
- 8 Chuang I L, Gershenfeld N, Kubinec M. Experimental implementation of fast quantum searching. *Physical Review Letters*, 1998, **80**(15): 3408–3411
- 9 Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on information theory*, 2006, **52**(2): 489–509
- 10 Zheng K, Li K Z, and Cong S. A reconstruction algorithm for compressive quantum tomography using various measurement sets. *Scientific Reports*, 2016, **6**: 38497
- 11 Yang J B, Cong S, Shuang F, Rabitz H. Manipulations between eigenstates of 2-level quantum system based on the optimal measurement. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2016, **3**(1): 35–41
- 12 Gross D. Recovering low-rank matrices from few coefficients in any basis. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2011, **57**(3): 1548–1566
- 13 Smith A, Riofrío, C. A, Anderson B E, et al. Quantum state tomography by continuous measurement and compressed sensing. *Physical Review A*, 2012, **87**(3): 184–191
- 14 Youssry A, Ferrie C, Tomamichel M. Efficient online quantum state estimation using a matrix-exponentiated gradient method. *New Journal of Physics*, 2019, **21**: 033006
- 15 Wiseman H M, Miburn G J. *Quantum measurement and control*. Cambridge University Press, 2010
- 16 D’Ariano G M, Paris M G A, Sacchi M F. Quantum tomographic methods. *Lecture Notes in Physics*, 2004, **649**: 7–58
- 17 Cahill K E, Glauber R J. Density operators and quasiprobability distributions. *Physical Review*, 1969, **177**(5): 1882–1902



**唐雅茹** 中国科学技术大学自动化系硕士研究生. 2017 年获得合肥工业大学学士学位. 主要研究方向为量子态估计以及开放量子系统控制.

E-mail: yrtang@mail.ustc.edu.cn

(**TANG Ya-Ru** Master student in the Department of Automation, University of Science and Technology of

China. She received her bachelor degree from Hefei University of Technology in 2017. Her research interest covers online quantum state estimation and open quantum systems control.)



**丛爽** 中国科学技术大学自动化系教授. 1995 年获得意大利罗马大学系统工程博士学位. 主要研究方向为运动控制中的先进控制策略, 模糊逻辑控制, 神经网络设计与应用, 机器人协调控制以及量子系统控制. 本文通信作者.

E-mail: scong@ustc.edu.cn

(**CONG Shuang** Professor in the

Department of Automation, University of Science and Technology of China. She received her Ph.D. in system engineering from the University of Rome “La Sapienza”, Rome, Italy, in 1995. Her research interest covers advanced control strategies for motion control, fuzzy logic control, neural networks design and applications, robotic coordination control, and quantum systems control. Corresponding author of this paper.)



**杨靖北** 中国科学技术大学自动化系博士. 2018 年获得中国科技大学自动化系博士学位. 主要研究方向为量子测量, 以及量子系统控制.

E-mail: banbei99@mail.ustc.edu.cn

(**YANG Jing-Bei** Ph.D. in the Department of Automation, University of Science and Technology of China. He

received his Ph.D. degree from the Department of Automation, University of Science and Technology of China in 2018. His research interest covers quantum measurement and quantum systems control.)