

# 线性参数变化系统建模与控制研究进展

王东风<sup>1,2</sup> 朱为琦<sup>1</sup>

**摘要** 在描述实际系统的非线性和时变特性方面, 线性参数变化 (Linear parameter varying, LPV) 模型有着巨大的优越性, 对于使用一些成熟的线性系统控制理论来解决非线性系统的控制问题, 提供了良好的手段. 文章对 LPV 系统的模型结构和建模方法, 模型参数辨识方法, 控制方法以及应用领域等方面的近几年的研究成果, 做了比较全面的总结和概括, 最后对 LPV 系统建模和控制的未来研究方向进行了展望.

**关键词** 线性参数变化系统, 系统建模, 模型辨识, 变增益控制, 鲁棒控制, 预测控制

**引用格式** 王东风, 朱为琦. 线性参数变化系统建模与控制研究进展. 自动化学报, 2021, 47(4): 780–790

**DOI** 10.16383/j.aas.c180718

## Advances in Modeling and Control of Linear Parameter Varying Systems

WANG Dong-Feng<sup>1,2</sup> ZHU Wei-Qi<sup>1</sup>

**Abstract** Linear parameter varying (LPV) model has great advantages in describing the nonlinear and time-varying characteristics of practical systems. The LPV model can be used to solve the control problems of nonlinear systems by using some mature linear system control theories. In this paper, the research results of LPV system in recent years, such as model structure and modeling method, model parameter identification method, control method and application field, are summarized in an all-round way. Finally, the future research direction of LPV system modeling and control is prospected.

**Key words** Linear parameter varying (LPV) system, system modeling, model identification, varying gain control, robust control, predictive control

**Citation** Wang Dong-Feng, Zhu Wei-Qi. Advances in modeling and control of linear parameter varying systems. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(4): 780–790

由于工业过程固有的非线性, 当线性模型无法准确描述过程的动态特性时, 使用单一的线性模型设计的控制器的性能会大大缩减. 工业过程中, 经常遇到工作点由于经济考虑或环境变量的变化而不可避免地发生变化, 从而改变了工业过程的动态特性<sup>[1–2]</sup>. 通常, 由质量、动量、能量守恒等构建的机理模型可以描述非线性过程的全局特性. 然而, 由于机理建模的复杂性和难度, 导出的模型通常是非线性的并且难以求解, 这使得控制器的设计非常复杂, 甚至是不可行的. 因此, 众多学者在寻找描述非线性过程的相对简单的模型结构方面已经做出很大努力.

上世纪 90 年代, 变增益控制技术理论逐渐成熟,

但该技术局限于控制器参数的开环改变, 没有来自闭环系统性能的反馈作用, 并且缺乏严格的稳定性理论证明. 为此, Shamma 等<sup>[3]</sup>提出了 LPV 系统, 解决了传统变增益控制技术不足, 更重要的是可以从理论上证明系统的稳定性. 在众多文献的结果中, 线性参数变化 (Linear parameter varying, LPV) 模型由于其线性的模型结构和良好的描述复杂非线性系统的能力而引起了许多研究者的关注<sup>[4–7]</sup>. 由于 LPV 描述具有线性模型结构, 因此可以使用成熟的线性控制理论进行控制器设计. 通常选取一个或多个可测或可计算的时变信号作为可以反映系统动态特性的调度变量. LPV 模型可以看作是介于线性模型和非线性模型之间的一种模型描述, 它既具有简单的线性结构, 同时它的时变模型参数使之具有精确描述非线性或时变系统的能力<sup>[8]</sup>. 目前, LPV 系统的研究已成为国际学术界的一项重要热点领域. 然而, 随着 LPV 理论研究的不断深入, 对于 LPV 系统的辨识方法的研究却十分有限, 对于实际过程中普遍存在的问题 (时滞系统、多率系统等) 较少关注; 控制系统的保守性高, 计算量大, 系统复杂等问题凸显; 虽然 LPV 对非线性系统具有精确的描述能力, 但其目前的应用却主要在于航空航天、车辆控制等领域, LPV 的研究仍然存在着巨大的潜力.

收稿日期 2018-11-01 录用日期 2019-04-07  
Manuscript received November 11, 2018; accepted April 7, 2019  
国家自然科学基金 (71471060), 中央高校基本科研业务费专项资金 (2017MS130) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (71471060), Fundamental Research Funds for the Central Universities (2017MS130)  
本文责任编辑 付俊  
Recommended by Associate Editor FU Jun  
1. 华北电力大学自动化系 保定 071003 2. 华北电力大学河北省发电过程仿真与优化控制工程技术研究中心 保定 071003  
1. Department of Automation, North China Electric Power University, Baoding 071003 2. Hebei Engineering Research Center of Simulation & Optimized Power Generation, North China Electric Power University, Baoding 071003

本文旨在对 LPV 的基本结构、辨识方法、控制理论及其应用领域等方面的发展现状, 进行较为全面的总结, 重点综述 LPV 的一些代表性改进工作和应用研究, 并指出 LPV 在多方面的若干进一步的研究内容。

## 1 LPV 系统的模型描述

LPV 模型的参数是时变的, 在一定的模型结构下, 其参数通常表示为可测量调度信号的多项式函数, 便能够充分表达系统的非线性. 多数采用的是状态空间模型 (LPV-SS (Sterte space)) 和输入输出模型 (LPV-IO (Input output)) 两种结构形式. 其中连续 LPV-SS 模型通常描述为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x}(t)$  为状态向量,  $\mathbf{y}(t)$  为输出向量,  $\mathbf{u}(t)$  为输入向量,  $\boldsymbol{\rho}(t)$  为调度变量.

离散 LPV-SS 模型通常描述为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(k))\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(k))\mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\rho}(k))\mathbf{u}(k)\end{aligned}\quad (2)$$

式中,  $\mathbf{x}(k)$  为状态向量,  $\mathbf{y}(k)$  为输出向量,  $\mathbf{u}(k)$  为输入向量,  $\boldsymbol{\rho}(k)$  为调度变量.

在上述模型 (1) 和模型 (2) 中, 当调度变量为系统的状态变量时, 该模型则称为准 LPV 模型.

对于输入输出模型, 一般针对的是带随机干扰的离散时间最小二乘结构形式, 离散 LPV-IO 模型通常描述为

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i(\boldsymbol{\rho}(k))y(k-i) + \sum_{j=1}^{n_b} b_j(\boldsymbol{\rho}(k))u(k-j) + \xi(k)\quad (3)$$

式中,  $y(k)$  为  $k$  时刻的输出,  $u(k)$  为  $k$  时刻的输入,  $n_a$  和  $n_b$  分别为模型的自回归部分和滑动平均部分的阶次,  $\xi(k)$  代表均值为零方差有限的白噪声,  $\boldsymbol{\rho}(k)$  为调度变量.

通常, 根据控制对象的特性来选择 LPV-SS 或者 LPV-IO 模型. 对于系统特性认识清晰, 可通过机理分析建立系统模型的被控对象, 通常采用 LPV-SS 模型, 如文献 [2, 4, 6, 9-13], 而对于系统机理特性不够明确的被控对象, 如果能够定性的认识影响对象特性的主导参数, 通常根据其输入输出数据辨识得到 LPV-IO 模型, 如文献 [1, 5, 7-8, 14-17]. 在 LPV-IO 模型中, 一些学者将 LPV 模型与现有的一些特殊模型结构相结合, 分别提出了 LPV

Box-Jenkins 模型<sup>[14]</sup>, LPV-ARX 模型<sup>[5]</sup>, LPV-FIR 模型<sup>[15]</sup>, LPV-OE 模型<sup>[16]</sup> 和 LPV-HoKalman 模型<sup>[17]</sup>.

## 2 LPV 系统的建模方法与参数辨识

### 2.1 局部建模方法

局部建模方法最为常见且应用最为广泛, 目前多用于航天、能源等领域. LPV 系统的模型结构主要依赖于调度变量, 当调度变量为固定值时, 该模型可以看作是一个线性时不变 (Linear time-invariant, LTI) 系统模型. 根据这个思想, 局部建模一般先采用机理建模方法, 得到对象的动力学方程, 然后选取一定的工况点线性化, 得到一组固定参数的 LTI 模型集, 然后对该模型集进行插值, 最终得到 LPV 模型, 代表性的有文献 [9-12]. 该建模方法要求熟悉实际过程中所涉及到的基本定律, 需要对系统有全面的了解. Marcos 等<sup>[17]</sup> 分析了 3 种由系统线性模型转换为 LPV 模型的方法: 雅克比线性化 (Jacobain linearization)、状态变换 (State transformation) 和方程替换 (Function substution), 其中雅克比线性化方法最为普遍.

常用的插值方法有参数插值策略<sup>[18]</sup> 和输出插值策略<sup>[19]</sup>. Chen 等<sup>[20]</sup> 考虑了具有不确定调度变量的非线性系统的局部辨识问题, 引入状态空间模型来描述调度变量和测量过程变量之间的函数关系. 将期望最大化 (Expectation maximization, EM) 算法和粒子滤波器用于处理辨识问题. 该方法在文献 [21] 中进行了扩展, 以处理多个相关的调度变量. Mercere 等<sup>[18]</sup> 对换热器建立 LPV 模型, 采用参数插值策略, 将 LPV 模型参数写为调度变量的多项式函数, 利用预测误差方法辨识局部模型, 并通过求解最小二乘问题来计算参数多项式函数的系数. 但是, 参数插值策略要求所有局部模型具有相同的模型结构类型, 并且通过参数插值获得与局部模型结构相同的全局 LPV 模型. LPV 域中不同模型类型之间的转换可能导致参数估计的偏差和困难, 同时参数多项式函数的高阶次也会增加估计的难度. Xu 等<sup>[22]</sup> 提出了一种具有输出插值策略的局部 LPV 辨识方法, 根据若干工作点处的数据建立局部模型, 使用由过程数据估计出的加权函数来组合不同工作点处的局部模型.

### 2.2 全局建模方法

尽管局部建模方法的操作方便, 但是很多工业过程不允许调度变量或工作点在长时间内保持不变, 以保证能够收集足够的数据来进行局部模型辨识和解决模型过渡期的逼近和平滑问题. 同时, 局部工作点的选择, 以及插值引起的过渡区间的逼近误

差等,可能极大地影响局部建模方法的性能<sup>[23]</sup>. 为了避免这些问题,全局建模方法提供了一个很好的替代方案,并且可以生成一个能够准确描述整个工作范围内系统动态的模型. 在全局方法中,调度变量在整个调度空间中变化,并且全局 LPV 模型参数函数的系数是直接来自所有采集到的过程数据估计的. 因此,近年来全局建模方法得到了广泛的关注<sup>[13-14, 24-25]</sup>. 全局建模方法需要使用所有采样时刻的输入输出数据和调度变量数据,这意味着需要在整个过程中对系统进行持续激励. 因此, Bamieh 等<sup>[26]</sup> 根据输入和参数轨迹,给出了系统持续激励的基本条件. 在此基础上, Bamieh 等<sup>[27]</sup> 提出了一种全局 LPV 模型参数辨识方法,使用最小二乘法和递归最小二乘法来估计模型参数. Zhao 等<sup>[28]</sup> 将预测误差方法扩展到 LPV 系统辨识,通过使用数值优化算法优化预测误差函数来估计加权函数的参数. Golabi 等<sup>[29]</sup> 提出使用贝叶斯方法来辨识 LPV 模型. Marcos 等<sup>[17]</sup> 提出了一种具有静态仿射依赖结构的 LPV 离散时间状态空间模型的全局辨识方法,并提出了一种基于 LPV-HoKalman 的模型降阶方案. Wingerden 等<sup>[30]</sup> 提出了一种在开环和闭环条件下仿射参数依赖的 LPV 系统的子空间模型辨识方法. Paijmans 等<sup>[14]</sup> 提出了一种在有色噪声情况下辨识 LPV-OE 模型和 LPV-BJ 模型的最优精选工具变量方法. Cerone 等<sup>[31]</sup> 考虑输出和调度参数的测量都受有界噪声影响时的线性变参数模型的辨识问题,将参数不确定性区间的计算问题转化为非凸优化问题,采用半定优化的方法来估计 LPV 模型参数的不确定区间.

### 3 LPV 模型辨识的若干典型研究方向

目前,关于 LPV 的控制理论和工业应用的研究得到广泛的关注,但在实际的工业应用中存在着诸如参数变化时滞,不确定量测或数据缺失,多率系统,鲁棒参数估计等无法避免的问题,国内外学者对这些问题进行了细致的研究,提出了大量解决方案.

#### 3.1 时滞系统的 LPV 模型辨识

时滞现象在工业生产过程中广泛存在,时滞的存在会降低系统控制性能和稳定性,这就需要在系统设计时准确估计时滞参数. LPV 系统中的时滞多为定常时滞和参数变化时滞<sup>[32]</sup>. 现有的时滞系统辨识方法大多将模型参数和时滞参数分开辨识,而时滞参数估计误差极大的影响着系统的模型精度和控制性能. Jin 等<sup>[33]</sup> 将期望最大化算法 (EM) 引入 LPV 模型辨识,通过极大似然方法 (ML) 辨识模型未知参数. 在此基础上, Yang 等<sup>[34]</sup> 采用 EM 算法对具有变参数时滞和定常时滞的 LPV 系统进行

多模型辨识,同时处理该过程的参数变化特性和时滞特性. Yang 等<sup>[11]</sup> 考虑了具有输出误差 (Output error, OE) 的单输入单输出时滞系统的 LPV 模型参数估计问题. 采用多模型 LPV 结构,使用全局最大法为每个工况点估计出具有外部输入的自回归 (Auto-regressive model with extra inputs, ARX) 时滞模型,再根据这组模型和输入输出数据,采用极大似然法来辨识全局 LPV-OE 模型.

#### 3.2 带有不确定量测或数据缺失系统的 LPV 模型辨识

实际工业过程中,系统数据的测量和采集往往由于多种原因出现缺失或误差较大,这就导致难以获得准确的系统模型. 现有的研究成果大多采用局部辨识方法来处理具有不确定量测或数据缺失的 LPV 系统. Gopaluni 等<sup>[35]</sup> 等提出了一种非线性过程辨识方法,当系统的部分输出数据缺失时,通过使用 EM 算法用于处理丢失的数据,结合粒子滤波器,推导得到 LPV 模型. Deng 等<sup>[36]</sup> 在预先选择的工作点上确定几个局部非线性模型,并通过用归一化指数函数插值局部非线性模型,从而获得系统的全局 LPV 模型. Yang 等<sup>[10]</sup> 采用广义最大期望 (GEM) 算法来处理该问题,采用多模型 LPV 结构,通过局部模型来获得有限脉冲响应 (FIR) LPV 模型. 为了减轻潜在的过度参数化问题,通过 FIR 模型进行先验估计,改良 GEM 算法对多模 LPV-FIR 模型进行后验估计. Liu 等<sup>[37]</sup> 研究了一类带噪声 (不确定) 调度变量的 LPV-ARX 模型的辨识问题. 用 ARX 模型描述系统特性,用非线性状态空间模型对噪声调度变量进行建模,利用基于序列蒙特卡罗法 (SMC) 的粒子滤波器对不确定调度变量进行估计,在 EM 算法的框架下,根据输出数据辨识 LPV-ARX 模型中的所有未知参数.

#### 3.3 多率系统的 LPV 模型辨识

实际工业过程中,由于一些无法通过传感器直接获得的数据需进一步处理,或者由于过程中不同通道之间的特性差别较大等原因,使得系统中存在不同的采样周期,产生了多率数据. 现有的研究成果大多采用在线系统辨识方法. Yang 等<sup>[38]</sup> 通过建立输出误差模型来解决 LPV 双速率系统辨识问题,该系统由于随机的测量延迟导致低速输出数据损坏. Yan 等<sup>[39]</sup> 研究了具有缓慢采样输出的系统的辨识,使用具有多模型结构的 LPV 模型来解决该问题,将输出误差 (OE) 方法用于估计模型参数,提出了一种将过程知识与最终输出误差标准 (FOE) 相结合的工程方法来辨识系统参数. Hooshmandi 等<sup>[40]</sup> 解决了多率 LPV 系统的鲁棒性和稳定性问题,考虑输入延迟及实际参数和测量参数之间的误差,为任意

依赖于参数的 LPV 系统推导出新的稳定性条件.

### 3.4 LPV 模型鲁棒参数估计

实际工业过程收集的数据集通常并不理想, 并且诸如异常值, 缺失测量值和时间延迟等问题在工业过程中经常遇到并且是不可避免的<sup>[41-42]</sup>. 异常值可能是由传感器故障、数据写入或读取错误, 系统干扰、数据传输错误等引起的. 异常值也可以是从过程分布模型中抽取的真实数据. 当直接应用于具有异常值的数据集时, 诸如线性平方方法、工具变量方法和极大似然方法 (或 EM 算法) 之类的传统辨识方法可能遭受性能劣化. 这是因为这些方法基本上在正常数据点和异常值上分配等效权重, 从而导致参数估计的偏差甚至估计的模型无效. 因此, 在辨识过程中应特别注意处理异常值. Yang 等<sup>[43]</sup> 为了处理过程建模中的异常值, 用广义期望最大化 (GEM) 算法来处理鲁棒 LPV 建模问题. 在该算法中, 噪声建模采用学生氏  $t$  分布模型而不是使用传统的高斯分布, 通过 GEM 算法自适应地调整鲁棒性. 在此基础上, Yang 等<sup>[44]</sup> 讨论了 LPV 双速率系统的鲁棒全局辨识和快速速率输出估计问题, 其中输出测量受到随机时间延迟和系统外部因素的影响; 给出了 LPV 双速率模型, 并利用拉普拉斯分布处理鲁棒的全局辨识和输出估计问题. 在 GEM 算法框架中推导出用于估计所有未知参数和输出数据的鲁棒辨识算法, 并且在辨识过程中自适应地处理输出数据中的随机时间延迟和异常值.

## 4 LPV 系统的控制

在过去十几年中, 国内外学者都将 LPV 控制作为多变量系统的传统增益调度的替代方案. 增益调度是对大部分动态系统设计控制器的标准方法. 它是一个通过一系列局部线性化的控制器进行插值而得到的全局控制器. 这种方法的缺点在于工况点的选择, 不合理的工况点无法保证系统的稳定性和性能, 尤其在调度变量快速变化时尤为明显. 采用 LPV 模型的增益调度控制技术与传统增益控制先设计局部控制器, 然后不停切换控制器的方式不同, 该方法可以直接设计全局控制器, 这样能够在选定的参数变化范围内保证系统的稳定性和其他性能指标.

由于控制器基于动态的调度参数, 可以自行调节, 所以不必设计复杂的调度计划. 设计控制器时, 先固定调度参数, 为每一个线性系统设计控制器, 最后的控制器必须依赖于调度变量  $\rho(t)$ , 连续状态空间形式的控制器如下:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\rho(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\rho(t))\mathbf{y}(t)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}(\rho(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\rho(t))\mathbf{y}(t) \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{x}(t)$  为状态向量,  $\mathbf{y}(t)$  为测量输出向量,  $\mathbf{u}(t)$  为控制输入向量,  $\rho(t)$  为调度变量.

随着 LPV 控制理论不断发展, 保守性高, 计算量大, 系统设计复杂等问题凸显出来, 国内外学者对这些问题进行了细致的研究, 提出了多种解决方案.

### 4.1 LPV 鲁棒变增益控制

虽然传统的变增益控制已在实际工程应用中发挥着良好的效果, 但该方法只能在所选择的工作点上保证系统稳定, 而不能保证在整个工作区内有良好的稳定性和鲁棒性. 1994 年, Apkarian 等<sup>[45]</sup> 为保证全局  $H_\infty$  性能, 针对一类仿射参数依赖系统, 提出一种鲁棒变增益控制器, 引起了学者们的广泛关注. Bianchi 等<sup>[46]</sup> 提出基于 LPV 系统的增益调度控制来解决质子交换膜燃料电池的稳定性和高性能需求问题, 确保能源的高效转换的同时避免了对聚合物膜的损害. Dabiri 等<sup>[47]</sup> 针对具有输入饱和和约束的离散时间 LPV 系统, 开发了一种增益调度状态反馈控制器, 提出一种特殊的控制器结构及相应的求解方法, 并应用于匝道流量控制. Wang 等<sup>[48]</sup> 针对离散时滞系统设计 LPV 状态反馈控制器, 提出参数依赖的 Lyapunov 函数  $H_2/H_\infty$  性能标准, 通过引入松弛变量, 提出了改进的参数依赖的  $H_2/H_\infty$  性能标准. Robert 等<sup>[49]</sup> 针对一类具有时变采样周期的系统, 提出以采样周期为调度变量, 设计一种  $H_\infty$  LPV 控制器, 应用于 T 型倒立摆, 该方法不仅极大的降低了系统的保守性并且简化了系统的计算. Jiang 等<sup>[50]</sup> 针对一类同时具有参数不确定性和外界干扰的非线性系统, 设计连续时间多胞 LPV 系统变增益  $H_2/H_\infty$  输出反馈控制. 将满足期望性能的混合目标鲁棒动态输出反馈控制问题转化为线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 框架内的有限维凸优化问题, 进一步降低了系统的保守性.

### 4.2 多胞 LPV 控制

对 LPV 系统设计控制器时, 通常将问题转化为求解调度变量  $\rho(t)$  的变化轨迹上的一组 LMI, 当在参数变化范围内的所有 LMI 都有解时, 才能保证系统稳定. 然而, 调度参数通常是连续变化的, 这就意味着需要求解无穷个 LMI, 这显然很难实现. 将系统模型转化为多胞结构便是一种有效的解决方案. 多胞体集合属于一个多顶点的凸集合, 整个系统可以通过这些不同的顶点来描述. 这样, 对于整个系统的分析可以转化为对这些顶点的分析, 即可以将求解无穷多个 LMI 的问题简化为求解有限顶点的 LMI 问题. Jabali 等<sup>[51]</sup> 采用不确定的多胞 LPV 模

型, 在期望的 LMI 区域内, 利用极点配置约束来分配闭环系统的极点. 基于系统的期望状态轨迹, 利用拉格朗日方程, 建立了系统的不确定多胞 LPV 模型. 通过求解 LMI, 推导出控制器的控制增益矩阵, 使得  $H_2/H_\infty$  混合性能满足要求. 但该方法需要用到大量的 LMI, 使得计算量较大. 黄金杰等<sup>[52]</sup> 等针对输入电压和输出负载发生变化会影响 Buck 变换器动态特性的问题, 建立了 Buck 变换器多胞 LPV 模型, 同时引入多胞优化技术, 基于 LMI 最优化的方法, 利用状态反馈将闭环系统的极点配置到满足动态响应要求的特定区域, 设计了一种基于多胞 LPV 模型的 Buck 变换器的鲁棒变增益控制器. 该方法极大地简化了计算, 易于实现, 同时有较强的抑制干扰的能力, 鲁棒性更好.

### 4.3 切换 LPV 控制

实际情况中, 一个 LPV 系统往往具有较大的参数变化范围, 单一的控制并不能够保证系统的整体稳定性. 通常将参数范围进行划分, 每个区域设置单独的控制器, 通过控制的切换策略来保证系统的性能, 由此, 文献 [53] 提出了切换 LPV 的概念, 能够从理论上保证系统在整个参数轨迹上的鲁棒性及全局稳定性, 从而克服了传统变增益控制中由插值或切换引起的稳定性问题. 在此基础上, Xie 等<sup>[54]</sup> 研究了具有参数不确定性的切换 LPV 系统的模型参考自适应控制 (MRAC) 问题, 设计了具有自适应律的切换 LPV 控制器并给出了涡扇发动机 MRAC 的实际例子. Huang 等<sup>[55]</sup> 提出了一种用于柔性吸气式高超声速飞行器 (FAHV) 的 LPV 切换跟踪控制方案. 利用雅可比线性化和张量积 (T-P) 模型变换方法, 构造了描述 FAHV 复杂非线性纵向模型的多胞 LPV 模型. 为了降低控制器设计的保守性, 将飞行包线划分为 4 个子区域, 并针对每个参数子区域设计了一个 LPV 控制器. 然后切换这些 LPV 控制器, 以保证闭环 FAHV 系统渐近稳定并满足指定的性能指标. 利用 LMI 求解一个凸约束问题求得该控制器. 由于是基于多重 Lyapunov 函数, 比使用多参数依赖的 Lyapunov 函数具有更小的保守性. Zhu 等<sup>[56]</sup> 考虑了切换 LPV 系统的  $H_\infty$  跟踪控制问题, 提出了一种航空发动机的切换 LPV 模型. 将参数划分为若干个子区域, 为每个参数子区域设计 LPV 控制器, 以满足整体性能指标. 该方法充分表现出 LPV 系统在参数变化剧烈、大范围飞行情况下的可靠性和灵活性.

### 4.4 LPV 系统的预测控制

非线性模型预测控制在处理实际过程中的非线性特性时, 发挥着良好的作用, 但由于非线性模型预测控制在每个采样时刻, 需要求解一个非凸的非线

性优化问题, 在线计算量较大. 而使用 LPV 模型来描述系统, 不仅能够避免求解复杂的非凸非线性优化问题, 而且仍可以使用传统的模型预测控制方法设计控制器, 这吸引了众多学者的关注. Cao 等<sup>[57]</sup> 针对输入饱和的多胞型 LPV 系统提出一种新的模型预测控制 (MPC) 算法. 通过解决 LMI 的优化问题, 提出了 Min-Max MPC 算法和一种增益调度 MPC 算法, 用于设计参数依赖的控制器. 该方法在减少每一步的 LMI 计算量的同时, 保证了系统的快速响应和鲁棒性. Garone 等<sup>[58]</sup> 为了解决输入饱和和 LPV 系统的反馈调节问题, 提出了一种基于椭球体微积分和可行性理论的离线模型预测控制方法. 为了减少传统鲁棒 MPC 方案的计算负担和保守性, 提出了一种通过优化状态轨迹的线性调度控制律. Abbas 等<sup>[59]</sup> 针对输入输出 LPV 模型, 提出一种鲁棒模型预测控制器, 将控制器设计问题转化为求解 LMI, 并在连续搅拌反应釜实现应用. Li 等<sup>[60]</sup> 针对一类具有参数变化有界的 LPV 系统, 提出了反馈鲁棒模型预测控制 (FRMPC). 基于有界的参数变化速率和当前系统参数, 模型参数变化可以通过具有相同顶点数的多胞集合来描述. 该方法对未来模型参数变化进行预测, 能够获得更好的控制性能. 但是 LPV 预测控制中, 多步控制集所对应的每一步椭圆集均采用参数增益调度控制律, 使得在线计算量仍然较大.

### 4.5 LPV 系统与 T-S 模糊控制

T-S 模糊控制是一种模糊控制的重要设计方法, 已经成为处理非线性系统稳定性分析及控制器综合的有力工具. 事实上, LPV 模型与 T-S 模型有着极其相似的结构, 但是, LPV 和 T-S 系统被视为属于两个不同的领域, 对它们的研究都是独立进行的, 关于 LPV 的文献与 T-S 的文献之间的交叉引用也非常少见. 部分情况下, 如果将前者的“隶属度函数”视为后者的“调度函数”, 则 T-S 系统可以描述为 LPV 系统. 从分析和设计的角度来看, 很难发现两者之间的明显差异, 甚至可将 T-S 看做是 LPV 的特殊形式, 但 LPV 和 T-S 系统之间的关系仍然没有明确严格的描述. Rotondo 等<sup>[61]</sup> 比较了 LPV 模型和 T-S 模型之间的关系, 尝试建立两者之间的联系, 尝试将 T-S 模型转化为 LPV 模型, 不过只是在部分特殊情况下才能达成. Wu 等<sup>[62]</sup> 将 LPV 模型与模糊控制理论结合, 提出一种模糊 LPV 控制器来解决在稀燃点火发动机中存在固有时变延迟和模型参数的高度不确定性. Hu 等<sup>[63]</sup> 研究了低于额定风速的风力发电系统 (WTGS) 的 LPV T-S 模糊增益调度控制. 采用 T-S 模糊线性化方法处理 WTGS 的仿射非线性参数变化 (ANPV) 模型, 得到了具有所

需精度的 LPV T-S 模糊模型. 考虑到最大限度的利用风能并减轻机械载荷, 提出了基于 LPV T-S 模糊控制系统的  $H_\infty$  问题. 通过引入参数依赖的分段二次 Lyapunov 函数, 提出输出反馈  $H_\infty$  控制合成程序来处理该问题, 通过 LMI 形式给出了充分条件.

#### 4.6 LPV 系统的故障诊断与容错控制

故障诊断与容错控制为保证工业控制系统的可靠性与安全性提供了一种有效方案. 在第 16 届地中海控制会议 (16th Mediterranean Conference on Control and Automation) 中, 设立了基于 LPV 系统的故障诊断与容错控制的专题, 引起了学者广泛关注. Cui 等<sup>[64]</sup> 针对一类状态空间矩阵仿射依赖于时变参数向量的 LPV 系统, 提出了一种鲁棒  $H_\infty$  故障估计器的设计方法, 将故障诊断估计问题转化为鲁棒  $H_\infty$  控制问题, 通过同时设计鲁棒控制器和故障估计器来处理一类仿射参数依赖的不确定 LPV 系统. 该方法在减少系统的保守性的同时降低了系统的复杂程度. Houimli 等<sup>[65]</sup> 提出一种改进型多胞 LPV 系统控制器处理执行器的状态估计和故障检测问题. 利用 LMI 来计算设计控制器参数, 降低了二次逼近的保守性. 针对车辆半主动悬架系统中的阻尼器故障, 基于 LPV 控制策略, Nguyen 等<sup>[66]</sup> 提出了一种 2 步设计的容错控制: 1) 通过使用基于未知输入自适应观测器的快速自适应故障估计 (FAFE) 算法来估计快速时变故障; 2) 根据所估计的信息, 在半主动悬架的耗散区域进行调整, 基于 LPV 和  $H_\infty$  的框架设计控制器. 该方法保证了阻尼器的耗散性约束和系统的稳定性, 保证了乘客的舒适性, 具有良好的控制性能, 并且易于实现.

### 5 LPV 模型与控制系统的应用领域

LPV 模型作为一种良好的非线性系统的描述方法, 可以适用于众多的领域.

#### 5.1 航空航天领域

在航空航天领域, 飞行器的高度、马赫数、温度等参数直接影响着系统动态性能. 由于这种航空航天器的非线性特性, 正适合用 LPV 模型来描述<sup>[67-71]</sup>. 基于 LPV 系统的变增益控制克服了传统变增益控制的缺点, 不仅减少了繁杂的前期工作, 也使得系统的稳定性和性能分析在理论上变得简单易用. 大多飞行器都可将高度、马赫数等作为调度变量, 通过雅克比线性化的方法进行 LPV 建模. Tan 等<sup>[72]</sup> 通过状态变换的方法得到一种通用导弹的准 LPV 模型. Li 等<sup>[73]</sup> 等得到涡扇发动机控制系统的准 LPV 模型及改进模型. Pang<sup>[74]</sup> 针对高超声速飞行器具有模型不确定性和参数不确定性、阵风干

扰和大跨度机动飞行导致的系统参数剧烈变化等问题, 在 LPV 系统框架内, 将问题归结为标准的  $H_\infty$  问题, 根据多胞 LPV 系统的特性, 应用仿射参数依赖的 Lyapunov 方法, 得到了 LPV 鲁棒变增益控制器, 相较于传统变增益控制器和定常控制器, 具有更加良好的鲁棒性和稳定性. Shao<sup>[75]</sup> 基于鲁棒性能约束和多目标进化算法, 提出了鲁棒 LPV-PID 变增益控制方法来处理变形无人机变形过程的控制问题, 应用于在变形无人机的暂态控制, 与输出反馈控制器相比, 不仅可以保证整个过程中的鲁棒性和稳定性, 而且提高了控制的精准性.

#### 5.2 能源电力领域

LPV 控制系统在风力发电领域中有着广泛的应用<sup>[3, 76-85]</sup>. 通常将风速作为调度变量, 通过泰勒展开公式, 将转矩通过风速、转速和转矩角等变量的多项式表示, 从而得到线性模型, 再通过插值得到 LPV 模型. Inthamoussou 等<sup>[79]</sup> 提出了一种采用有功功率控制 (APC) 的可变桨距风力涡轮机的新型 LPV 控制器, 同时考虑了抗饱和和补偿, 使得控制器可以应用于整个风速变化范围. 采用标准解耦螺距和扭矩控制结构代替常规的多变量方法, 从而易于实际应用. 与采用 LTI 方法的 APC 对比, 具有更加良好的调节速度和稳定性. Liu 等<sup>[86]</sup> 将 LPV 技术用于同步电机 (SG) 和柔性交流输电系统 (FACTS) 的鲁棒控制, 通过在几个工况点周围使用多组线性化模型来增强转子角度稳定性. 相对于传统的变增益控制器, 在更大参数范围内, 优化了插值策略, 提高了系统的可靠性, 同时保证了系统的稳定性和鲁棒性. 但这种方法很大程度上取决于工况点的选择, 并且原始动力学也没有准确的表示. 在此基础上, He 等<sup>[87]</sup> 得出了 SG 的多胞 LPV 模型, 只要参数保持在规定范围内, 就可以保证稳定性, 具有很好的鲁棒性. 由于 LPV 模型包括调度变量的函数, 导致模型复杂, 难以应用于更复杂的情况. 为此, Schaab 等<sup>[88]</sup> 通过导出 SG 的分散且精确的 LPV 模型来控制转子角度. 将电网内的变化和电力系统的 SG 之间的互连映射到参数范围中, 使得所得到的控制器对所考虑的电网变化具有鲁棒性. Jabli 等<sup>[89]</sup> 提出一种基于不确定多胞 LPV 的电力系统建模和控制方法, 使用参数集映射和主成分分析 (PCA), 将电力系统的极点配置在 LMI 区域中, 使得电力系统的响应对于所有不同的振荡模式具有适当的阻尼比, 相较于其他建模方法更加便利, 但计算量较大.

火力发电具有非常复杂的非线性, 基于 LPV 模型的控制有着优良的表现, 尤其在蒸汽温度控制和锅炉汽轮机协调控制中, 由于系统状态的变化往往取决于发电机组的变化这一特性, LPV 系统展

现出特有的优势. Wang 等<sup>[7]</sup>提出了一种以机组负荷为调度变量的过热蒸汽温度系统非线性模型辨识方法. 利用历史输入输出数据建立 LPV 模型. 在解决高维模型参数估计时, 将演化加速因子引入量子粒子群优化算法中, 对模型参数进行优化辨识.

### 5.3 车辆控制领域

在车辆控制领域, 一般采用主动控制与 LPV 模型相结合, 来解决车辆的稳定运行和转角控制等问题<sup>[90-100]</sup>. 大多将车速、角速度等作为调度变量. Alcalá 等<sup>[101]</sup>提出了一种基于 Lyapunov 理论和 LMI 优化算法的车辆自动驾驶控制策略. 为了得到最优的 Lyapunov 控制器参数, 基于 LPV 系统模型, 提出一种优化算法来解决 LQR-LMI 问题, 最终确定控制器参数, 所获得的控制器与轨迹生成模块一起负责车辆的自主引导. Cauet 等<sup>[102]</sup>提出了一种混合动力电动汽车 (HEV) 传动系统的持续谐波主动控制策略. 主动控制适用于由单缸柴油发动机与永磁同步电机 (PMSM) 耦合组成的混合动力系统. 将速度作为调度变量, 通过对 PMSM 的扭矩控制证明了 LPV 控制对减小发动机扭矩波动的适用性. Boshe 等<sup>[103]</sup>采用基于 LPV 系统的主动控制策略来处理车辆转向角饱和和约束, 通过最小化横向位移和速度误差来解决参考跟踪问题. 采用具有输入饱和的 LPV 模型, 同时考虑多胞和范数有界的不确定性, 提出了一种基于 LMI 的矩阵分解方法, 用于计算构造鲁棒 PID 控制器参数的控制律增益矩阵, 相较于传统的主动控制策略, 基于 LPV 系统的主动控制策略具有更好的安全性和稳定性.

LPV 系统已广泛应用于其他诸多领域, 如高纯度精馏塔<sup>[104]</sup>、异步电机<sup>[105]</sup>、磁轴承系统<sup>[106]</sup>、电液伺服系统<sup>[107]</sup>、船舶运动<sup>[108]</sup>、低温余热发电<sup>[109]</sup>等.

## 6 LPV 系统的未来研究展望

当前, LPV 模型作为一种良好的非线性系统的描述方式, 在国内外的研究已日益广泛而受到重视. 但是, 仍有许多工作有待深入开展.

1) 在 LPV 系统建模时, 如何合理地选取特征点是今后要重点研究解决的一个理论问题. 现有的 LPV 系统建模过程, 都对原非线性系统的特征点有严重依赖, 但特征点的选择目前仍主要依赖于经验, 没有具体的理论或者系统的依据, 过多的特征点使得计算量成倍增加. 所以, 如何选取合适的特征点值得深入研究.

2) 现有的 LPV 建模方法中都存在不足之处. 例如函数替换法和状态变换法等虽然与原始非线性模型近似程度高, 但是调度参数不能自由选取, 而且有的对系统的形式有特殊要求, 不具备通用性; 雅克

比线性化方法虽然调度参数可以自由选取, 但是在系统具有较强非线性时线性化误差较大. 一种通用而且建模误差小的 LPV 系统建模方法是完善 LPV 系统控制理论的基础. 局部建模方法中, 研究降低模型过度区间的逼近误差的新型参数插值策略是未来的研究课题之一; 全局建模方法中, 研究具有更高精度更高效率的模型辨识方法将是未来的一个研究方向.

3) 时滞广泛存在于各种实际的工业系统中. 对于 LPV 时滞系统, 模型参数和时滞参数的联合辨识问题还没有得到很好的解决. 分别针对输入时滞、输出时滞和状态时滞的 LPV 时滞系统参数辨识, 以及模型参数和时滞参数的联合辨识, 将是今后的一个研究方向. 另外, 分别针对时滞独立和时滞依赖的 LPV 时滞系统的控制问题, 尤其是后者, 也是值得深入研究的, 这方面的成果目前基本还是空白.

4) 针对来自现场数据的辨识问题. 由于数据的噪声污染问题不可避免, 因此, 针对存在数据噪声情况下, 具有更强鲁棒性的 LPV 模型辨识问题仍然是未来需要关注的一项研究内容.

5) 国内外在 LPV 系统的理论研究方面仍然差距较大. 国内对 LPV 控制理论的研究起步较晚, 多数集中于应用研究. 理论研究方面, 未来的工作需要重点关注: 减小预测控制在线优化的计算量; 降低多胞 LPV 系统和切换 LPV 系统在稳定性分析和控制器求解方面的保守性. 国内外虽已取得了一定的成果, 但仍然是未来的重要课题, 也将是未来 LPV 系统研究的热门课题.

6) LPV 系统鲁棒变增益控制的现有研究成果集中于  $H_\infty$  动态输出反馈和状态反馈控制, 而状态反馈由于实际系统中某些状态不可观测而限制了实际应用, 输出反馈与 LTI 系统的输出反馈一样, 存在控制器阶数过高的问题, 从而限制了实际应用. 因此, LPV 系统的鲁棒变增益控制如何克服实际应用中存在的问题是未来的重要课题, 其中之一就是降低控制器阶数的设计问题.

7) LPV 与 T-S 模糊系统具有相似结构, 近年来, 已有学者提出了一些两者之间的转换方法, 但仍不具备通用性. 对两者之间的结构等价性分析, 以及两者之间转化方法的深入探索, 是未来的一个研究方向.

8) 国内的应用研究的领域范围较小, 最早应用于飞行控制领域, 而且一直在飞行控制领域应用的最多. 在陆地上、水中和太空中运动的机器都可以通过变增益控制实现. 然而, 现有的文献大多集中于航天、能源等几个领域, LPV 系统在其他领域的应用有着巨大的潜力, 因此, LPV 系统的领域拓展具有广阔的应用前景, 如电池、发动机、船舶等领域将

是未来的拓展方向。

## References

- 1 Yuan Shi-Tong. Research on Modeling Theory and Method for 1000 MW Ultra Supercritical Unit [Ph. D. dissertation], North China Electric Power University, China, 2015 (袁世通. 1000 MW 超超临界机组建模理论与方法的研究 [博士学位论文], 华北电力大学, 中国, 2015)
- 2 Yin S, Luo H, Ding S X. Real-time implementation of fault-tolerant control systems with performance optimization. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, **61**(5): 2402–2411
- 3 Shamma J S, Athans M. Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants. *Automatica*, 1991, **27**(3): 559–564
- 4 Chang H, Krieger A, Astolfi A, Pistikopoulos E N. Robust multi-parametric model predictive control for LPV systems with application to anaesthesia. *Journal of Process Control*, 2014, **24**(10): 1538–1547
- 5 Toth R, Lyzell C, Enqvist M, Heuberger P S C, Van den Hof P M J. Order and structural dependence selection of LPV-ARX models using a nonnegative garrote approach. In: Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) Held Jointly with 2009 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 7406–7411
- 6 Lipták G, Luspay T, Péni T, Takarics B, Vanek B. LPV model reduction methods for aeroelastic structures. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, **50**(1): 6344–6349
- 7 Wang D F, Yuan S T. Identification of LPV model for superheated steam temperature system using A-QPSO. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 2016, **69**: 1–13
- 8 Yang Xian-Qiang. Identification of Linear Parameter Variation System [Ph. D. dissertation], Harbin Institute of Technology, China, 2014 (杨宪强. 线性参数变化系统辨识方法研究 [博士学位论文], 哈尔滨工业大学, 中国, 2014)
- 9 Laurain V, Gilson M, Tóth R, Garnier H. Refined instrumental variable methods for identification of LPV Box-Jenkins models. *Automatica*, 2010, **46**(6): 959–967
- 10 Yang X Q, Huang B, Zhao Y J, Lu Y J, Xiong W L, Gao H J. Generalized expectation-maximization approach to LPV process identification with randomly missing output data. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 2015, **148**: 1–8
- 11 Wang Y, Bevely D M, Rajamani R. Interval observer design for LPV systems with parametric uncertainty. *Automatica*, 2015, **60**(1): 79–85
- 12 Schulz E, Cox P B, Toth R, Werner H. LPV state-space identification via IO methods and efficient model order reduction in comparison with subspace methods. In: Proceedings of the IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC). Melbourne, Australia: IEEE, 2017. 3575–3581
- 13 Felici F, van Wingerden J W, Verhaegen M. Subspace identification of MIMO LPV systems using a periodic scheduling sequence. *Automatica*, 2007, **43**(10): 1684–1697
- 14 Paijmans B, Symens W, van Brussel H, Swevers J. Identification of interpolating affine LPV models for mechatronic systems with one varying parameter. *European Journal of Control*, 2008, **14**(1): 16–29
- 15 Goos J, Lataire J, Pintelon R. Estimation of linear parameter-varying affine state space models using synchronized periodic input and scheduling signals. In: Proceedings of the 2014 American Control Conference. Portland, USA: IEEE, 2014. 3754–3759
- 16 Wassink M G, van de Wal M, Scherer C, Bosgra O. LPV control for a wafer stage: Beyond the theoretical solution. *Control Engineering Practice*, 2005, **13**(2): 231–245
- 17 Marcos A, Balas G J. Development of linear-parameter-varying models for aircraft. *Journal of Guidance Control Dynamics*, 2004, **27**(2): 218–228
- 18 Mercère G, Palssson H, Poinot T. Continuous-time linear parameter-varying identification of a cross flow heat exchanger: A local approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, **19**(1): 64–76
- 19 Zhu Y C, Xu Z H. A method of LPV model identification for control. *IFAC Proceedings Volumes*, 2008, **41**(2): 5018–5023
- 20 Lei C, Tulsyan A, Huang B, Liu F. Multiple model approach to nonlinear system identification with an uncertain scheduling variable using EM algorithm. *Journal of Process Control*, 2013, **3**(10): 1480–1496
- 21 Chen L, Khatibisepehr S, Huang B, Liu F, Ding Y S. Nonlinear process identification in the presence of multiple correlated hidden scheduling variables with missing data. *AIChE Journal*, 2015, **61**(10): 3270–3287
- 22 Xu Z H, Zhao J, Qian J X, Zhu Y C. Nonlinear MPC using an identified LPV model. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2009, **48**(6): 3043–3051
- 23 Toth R, Abbas H S, Werner H. On the state-space realization of LPV input-output models: Practical approaches. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, **20**(1): 139–153
- 24 Duarte R F M, Pool D M, van Paassen M M, Mulder M. Experimental scheduling functions for global LPV human controller modeling. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, **50**(1): 15853–15858
- 25 De Caigny J, Pintelon R, Camino J F, Swevers J. Interpolated modeling of LPV systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014, **22**(6): 2232–2246
- 26 Bamieh B, Giarré L. Identification of linear parameter varying models. In: Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. Phoenix, USA: IEEE, 1999. 1505–1510
- 27 Bamieh B, Giarré L. Identification of linear parameter varying models. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2002, **12**(9): 841–853
- 28 Zhao Y, Huang B, Su H Y, Chu J. Prediction error method for identification of LPV models. *Journal of Process Control*, 2012, **22**(1): 180–193
- 29 Golabi A, Meskin N, Tóth R, Mohammadpour J. A Bayesian approach for LPV model identification and its application to complex processes. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017, **25**(6): 2160–2167
- 30 van Wingerden J W, Verhaegen M. Subspace identification of Bilinear and LPV systems for open- and closed-loop data. *Automatica*, 2009, **45**(2): 372–381
- 31 Cerone V, Piga D, Regruto D. Convex relaxation techniques for set-membership identification of LPV systems. In: Proceedings of the 2011 American Control Conference. San Francisco, USA: IEEE, 2011. 171–176

- 32 Wang Hong-Ru. Study on Robust Fault Detection and Isolation for Dynamic Systems [Ph.D. dissertation], Harbin Institute of Technology, China, 2006  
(王红茹. 动态系统的鲁棒故障检测与分离方法研究 [博士学位论文], 哈尔滨工业大学, 中国, 2006)
- 33 Jin X, Huang B, Shook D S. Multiple model LPV approach to nonlinear process identification with EM algorithm. *Journal of Process Control*, 2011, **21**(1): 182–193
- 34 Yang X Q, Huang B, Gao H J. A direct maximum likelihood optimization approach to identification of LPV time-delay systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2016, **353**(8): 1862–1881
- 35 Gopaluni R B. A particle filter approach to identification of nonlinear processes under missing observations. *Canadian Journal of Chemical*, 2008, **86**(6): 1081–1092
- 36 Deng J, Huang B. Identification of nonlinear parameter varying systems with missing output data. *AIChE Journal*, 2012, **58**(11): 3454–3467
- 37 Liu X, Wang Z Y, Yang X Q. EM-based global identification of LPV ARX models with a noisy scheduling variable. In: Proceedings of the 43rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. Beijing, China: IEEE, 2017. 6875–6880
- 38 Yang X Q, Yang X B. Local identification of LPV dual-rate system with random measurement delays. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, **65**(2): 1499–1507
- 39 Yan W G, Zhu Y C, Zhu L Y, Liu X. Identification of systems with slowly sampled outputs using LPV model. *Computers & Chemical Engineering*, 2018, **112**: 316–330
- 40 Hooshmandi K, Bayat F, Jahed-Motlagh M R, Jalali A A. Robust sampled-data control of non-linear LPV systems: Time-dependent functional approach. *IET Control Theory & Applications*, 2018, **12**(9): 1318–1331
- 41 Sun W C, Zhao Y, Li J F, Zhang L X, Gao H J. Active suspension control with frequency band constraints and actuator input delay. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, **59**(1): 530–537
- 42 Ferdowsi H, Jagannathan S, Zawodniok M. An online outlier identification and removal scheme for improving fault detection performance. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, **5**(5): 908–919
- 43 Yang X Q, Lu Y J, Yan Z B. Robust global identification of linear parameter varying systems with generalised expectation - maximisation algorithm. *IET Control Theory & Applications*, 2015, **9**(7): 1103–1110
- 44 Yang X Q, Sun H, Bai L F, Liu X. Identification of linear parameter varying system with dual-rate sampled data and uncertain measurement delay. In: Proceedings of the IEEE 25th International Symposium on Industrial Electronics (ISIE). Santa Clara, USA: IEEE, 2016. 95–99
- 45 Apkarian P, Gahinet P, Becker G. Self-scheduled  $H_\infty$  linear parameter-varying systems. In: Proceedings of the 1994 American Control Conference. Baltimore, USA: IEEE, 1994. 856–860
- 46 Bianchi F D, Kunusch C, Ocampo-Martinez C, Sánchez-Peña R S. A gain-scheduled LPV control for oxygen stoichiometry regulation in PEM Fuel Cell systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014, **22**(5): 1837–1844
- 47 Dabiri A, Kulcsár B, Kőroglu H. Distributed LPV state-feedback control under control input saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(5): 2450–2456
- 48 Wang J L, Wang C H, Li Y H, Gao H J. Novel  $l_2$ - $l_\infty$  controller design for LPV discrete time-delay systems. *Systems Engineering and Electronics*, 2005, **16**(1): 128–133
- 49 Robert D, Sename O, Simon D. An  $H_\infty$  LPV design for sampling varying controllers: Experimentation with a T-Inverted pendulum. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, **18**(3): 741–749
- 50 Jiang Wei, Wang Hong-Li, Lu Jing-Hui, Qin Wei-Wei, Cai Guang-Bin. Gain-scheduled  $H_\infty/H_2$  output feedback controller synthesis for continuous-time polytopic linear parameter varying systems. *Control Theory & Applications*, 2016, **33**(9): 1225–1235  
(姜伟, 王宏力, 陆敬辉, 秦伟伟, 蔡光斌. 连续时间多胞线性变参数系统变增益  $H_\infty/H_2$  输出反馈控制. 控制理论与应用, 2016, **33**(9): 1225–1235)
- 51 Jabali M B A, Kazemi M H. A new polytopic modeling with uncertain vertices and robust control of robot manipulators. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 2017, **28**(8): 349–357
- 52 Huang Jin-Jie, Pan Xiao-Zhen. Robust gain scheduling control for Buck converter based on polytopic LPV model. *Electric Machines and Control*, 2018, **22**(1): 93–99  
(黄金杰, 潘晓真. 多胞 LPV 模型的 Buck 变换器鲁棒增益调度控制. 电机与控制学报, 2018, **22**(1): 93–99)
- 53 Lim S. Analysis and control of linear parameter varying systems. *Dissertation Abstracts International*, 1998, **60**(4): 1718–1720
- 54 Xie J, Zhao J. Model reference adaptive control for switched LPV systems and its application. *IET Control Theory & Applications*, 2016, **10**(17): 2204–2212
- 55 Huang Y Q, Sun C Y, Qian C S, Wang L. Non-fragile switching tracking control for a flexible air-breathing hypersonic vehicle based on polytopic LPV model. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2013, **26**(4): 948–959
- 56 Zhu K W, Zhao J, Dimirovski G M.  $H_\infty$  tracking control for switched LPV systems with an application to aero-engines. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2018, **5**(3): 699–705
- 57 Cao Y Y, Lin Z L. Min-max MPC algorithm for LPV systems subject to input saturation. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 2005, **152**(3): 266–272
- 58 Casavola A, Famularo D, Franzé G, Garone E. An off-line MPC scheme for discrete-time linear parameter varying systems. In: Proceedings of the 2009 European Control Conference (ECC). Budapest, Hungary: IEEE, 2015. 23–26
- 59 Abbas H S, Tóth R, Meskin N, Mohammadpour J, Hanema J. A robust MPC for input-output LPV models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, **61**(12): 4183–4188
- 60 Li D W, Xi Y G. The feedback robust MPC for LPV systems with bounded rates of parameter changes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(2): 503–507
- 61 Rotondo D, Puig V, Nejari F, Witczak M. Automated generation and comparison of Takagi-Sugeno and polytopic quasi-LPV models. *Fuzzy Sets and Systems*, 2015, **277**: 44–64

- 62 Wu H M, Tafreshi R. Air-fuel ratio control of lean-burn SI engines using the LPV-based fuzzy technique. *IET Control Theory & Applications*, 2018, **12**(10): 1414–1420
- 63 Hu Y, Liu J Z, Lin Z W. LPV T-S fuzzy gain scheduling control of WTGS below rated wind speed. In: Proceedings of the 26th Control and Decision Conference (2014 CCDC). Changsha, China: IEEE, 2014. 3328–3333
- 64 Cui Ping. Robust Fault Estimation and Active Fault Tolerant Control for Linear Parameter Varying Systems [Ph. D. dissertation], Shanghai Jiao Tong University, China, 2008 (崔平. LPV 系统的鲁棒故障估计与主动容错控制 [博士学位论文], 上海交通大学, 中国, 2008)
- 65 Houimli R, Bedioui N, Besbes M. An improved polytopic adaptive LPV observer design under actuator fault. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2018, **16**(1): 168–180
- 66 Nguyen M Q, Sename O, Dugard L. An LPV fault tolerant control for semi-active suspension - scheduled by fault estimation. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, **48**(21): 42–47
- 67 Li Wen-Qiang, Ma Jian-Jun, Li Peng, Zheng Zhi-Qiang. Variable gain control based on LPV and the application in Aerospace. *Aero Weaponry*, 2009, (2): 8–12, 17 (李文强, 马建军, 李鹏, 郑志强. 基于 LPV 的变增益控制技术及其在航空航天领域的应用. *航空兵器*, 2009, (2): 8–12, 17)
- 68 Zhao Xing-Feng. Research and Realization on Robustness Analysis of Flight Control Laws [Ph. D. dissertation], National University of Defense Technology, China, 2014 (赵兴锋. 飞行控制律鲁棒性分析与实现 [博士学位论文], 国防科学技术大学, 中国, 2014)
- 69 He Yue-Bang. Research on Robust Nonlinear Control for Small-Scale Unmanned Helicopter [Ph. D. dissertation], South China University of Technology, China, 2013 (贺跃帮. 小型无人直升机鲁棒非线性控制研究 [博士学位论文], 华南理工大学, 中国, 2013)
- 70 Yang Guan-Tong. Research on Modeling and Control of Morphing Flight Vehicles [Ph. D. dissertation], Beijing Institute of Technology, China, 2015 (杨贯通. 变外形飞行器建模与控制方法研究 [博士学位论文], 北京理工大学, 中国, 2015)
- 71 Bai Yu-Liang. Research on the Dynamics and Nonlinear Control of the Submarine-Launched Missile in Multimedia Environment [Ph. D. dissertation], Harbin Institute of Technology, China, 2013 (白瑜亮. 多介质环境下潜射导弹动力学及非线性控制方法研究 [博士学位论文], 哈尔滨工业大学, 中国, 2013)
- 72 Tan W, Packard A K, Balas G J. Quasi-LPV modeling and LPV control of a generic missile. In: Proceedings of the 2000 American Control Conference. Chicago, USA: IEEE, 2000. 3692–3696
- 73 Li S Q, Zhang S X. A modified LPV modeling technique for turbofan engine control system. In: Proceedings of the 2010 International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCSM 2010). Taiyuan, China: IEEE, 2010. 99–102
- 74 Pang Hong-Jun. Aeroelasticity Modeling and Robust Gain-Scheduling Control of Hypersonic Vehicle [Ph. D. dissertation], Harbin Institute of Technology, China, 2015 (逢洪军. 高超声速飞行器气动弹性建模与鲁棒变增益控制 [博士学位论文], 哈尔滨工业大学, 中国, 2015)
- 75 Shao Peng-Yuan. Robust Gain-Scheduling Control of UAV with Parameter Varying in Large Scale [Ph. D. dissertation], Northwestern Polytechnical University, China, 2016 (邵朋元. 大尺度变参数无人机鲁棒变增益控制方法研究 [博士学位论文], 西北工业大学, 中国, 2016)
- 76 Bianchi F D, Battista H D, Mantz R J. Robust multivariable gain-scheduled control of wind turbines for variable power production. *International Journal of Systems Control*, 2010, **1**(3): 103–112
- 77 Ruiz F, Vuelvas J, Novara C. LPV model identification for a web winding system. *IFAC Proceedings Volumes*, 2012, **45**(16): 1779–1784
- 78 Shi F M, Patton R. An active fault tolerant control approach to an offshore wind turbine model. *Renewable Energy*, 2015, **75**: 788–798
- 79 Inthamoussou F A, De Battista H, Mantz R J. LPV-based active power control of wind turbines covering the complete wind speed range. *Renewable Energy*, 2016, **99**: 996–1007
- 80 Castro R S, Salton A T, Flores J V, Kinnaert M, Coutinho D F. Variable frequency resonant controller for load reduction in wind turbines. *Control Engineering Practice*, 2017, **66**: 76–88
- 81 Schaab K, Hahn J, Wolkov M, Stursberg O. Robust control for voltage and transient stability of power grids relying on wind power. *Control Engineering Practice*, 2017, **60**: 7–17
- 82 Tong X, Zhao X W. Power generation control of a monopile hydrostatic wind turbine using an  $H_\infty$  loop-shaping torque controller and an LPV Pitch controller. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, **26**(6): 2165–2172
- 83 van der Veen G, van Wingerden J W, Verhaegen M. Global identification of wind turbines using a hammerstein identification method. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, **21**(4): 1471–1478
- 84 Ali H S, Darouach M, Zasadzinski M, Alma M. An  $H_\infty$  LPV control for a class of LPV systems using a descriptor approach: Application to a wind turbine mode. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, **48**(26): 213–217
- 85 Hu Yang. Research on Gain Scheduling Control of Wind Turbine Generation System based on T-S Fuzzy Linearization [Ph. D. dissertation], North China Electric Power University, China, 2015 (胡阳. 基于 T-S 模糊线性化的风力发电系统增益调度控制研究 [博士学位论文], 华北电力大学, 中国, 2015)
- 86 Liu Q, Vittal V, Elia N. Expansion of system operating range by an interpolated LPV FACTS controller Using multiple Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2006, **21**(3): 1311–1320
- 87 He R, Liu K Z, Mei S W. LPV modelling and gain-scheduled control approach for the transient stabilization of power systems. *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering*, 2010, **5**(1): 87–95
- 88 Schaab K, Stursberg O. Decentralized robust control of power grids using LPV-models of DAE-systems. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, **48**(26): 218–223
- 89 Jabali M B A, Kazemi M H. A new LPV modeling approach using PCA-based parameter set mapping to design a PSS. *Journal of Advanced Research*, 2017, **8**(1): 23–32
- 90 Fergani S, Sename O, Dugard L. An LPV/ $H_\infty$  integrated vehicle dynamic controller. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2016, **65**(4): 1880–1889

- 91 Ifqir S, Oufroukh N A, Ichalal D, Mammar S. Interval observer for LPV systems: Application to vehicle lateral dynamics. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, **50**(1): 7572–7577
- 92 Nguyen A T, Chevrel P, Claveau F. On the effective use of vehicle sensors for automatic lane keeping via LPV static output feedback control. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, **50**(1): 13808–13815
- 93 Jia F J, Liu Z Y. A LPV traction control approach for independent in-wheel electric motor vehicle. In: Proceedings of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation. Shenyang, China: IEEE, 2014. 1992–1997
- 94 Kang C M, Lee S H, Chung C C. Discrete-time LPV  $H_2$  observer with nonlinear bounded varying parameter and its application to the vehicle state observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, **65**(11): 8768–8777
- 95 Yang S, Sultan C. LPV control of a tensegrity-membrane system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, **95**: 397–424
- 96 Fleps-Dezasse M, Bünte T, Svaricek F, Brembeck J. LPV feedforward control of semi-active suspensions for improved roll stability. *Control Engineering Practice*, 2018, **78**(1): 1–11
- 97 Alaridh I, Aitouche A, Zemouche A, Boulkroune B. LPV unknown input observer for vehicle lateral dynamics. In: Proceedings of the 17th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA). Sousse, Tunisia: IEEE, 2016. 187–192
- 98 Wang Gang. Study on Active Control Strategy for Suspension Systems of Electric Vehicle [Ph.D. dissertation], Shenyang University of Technology, China, 2017  
(王刚. 电动汽车悬架系统主动控制策略研究 [博士学位论文], 沈阳工业大学, 中国, 2017)
- 99 Zhang Rong-Yun. Research on the Stability of the Automobile Lateral Motion and Its Chaos Control Based on EPS/ESP [Ph.D. dissertation], Hefei University of Technology, China, 2015  
(张荣芸. 基于 EPS/ESP 的汽车横向运动稳定性及其混沌控制研究 [博士学位论文], 合肥工业大学, 中国, 2015)
- 100 Zhang Yong-Chao. Study on Robust Control for Vehicle Active Electromagnetic Suspension [Ph.D. dissertation], Shanghai Jiao Tong University, China, 2012  
(张勇超. 车辆电磁主动悬架鲁棒控制研究 [博士学位论文], 上海交通大学, 中国, 2012)
- 101 Alcalá E, Puig V, Quevedo J, Escobet T, Comasolivas R. Autonomous vehicle control using a kinematic Lyapunov-based technique with LQR-LMI tuning. *Control Engineering Practice*, 2018, **73**: 1–12
- 102 Cauet S, Coirault P, Njeh M. Diesel engine torque ripple reduction through LPV control in hybrid electric vehicle powertrain: Experimental results. *Control Engineering Practice*, 2013, **21**(12): 1830–1840
- 103 Bosche J, Rabhi A, El Hajjaji A. A robust stabilization method for a saturated LPV system: Application to the lateral dynamics of vehicles. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, **50**(1): 3732–3737
- 104 Bachnas A A, Tóth R, Ludlage J H A, Mesbah A. A review on data-driven linear parameter-varying modeling approaches: A high-purity distillation column case study. *Journal of Process Control*, 2014, **24**(4): 272–285
- 105 Prempain E, Postlethwaite I, Benchaib A. A linear parameter variant  $H_\infty$  control design for an induction motor. *Control Engineering Practice*, 2002, **10**(6): 633–644
- 106 Lu B, Choi H, Buckner G D, Tammi K. Linear parameter-varying techniques for control of a magnetic bearing system. *Control Engineering Practice*, 2008, **16**(10): 1161–1172
- 107 Wijnheijmer F, Naus G, Post W, Steinbuch M, Teerhuis P. Modelling and LPV control of an electro-hydraulic servo system. In: Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control. Munich, Germany: IEEE, 2006. 3116–3121
- 108 Yuan Shi-Chun. A Study on the Integrated Control of Ship Motion and Main Propulsion Using Linear Parameter-varying [Ph.D. dissertation], Dalian Maritime University, China, 2007  
(袁士春. 船舶运动与主推进线性变参数联合控制的研究 [博士学位论文], 大连海事大学, 中国, 2007)
- 109 Lin Ming-Ming. Research on Modeling and Advanced Control for Low Temperature Waste Heat Power Generation Process [Ph.D. dissertation], North China Electric Power University (Beijing), China, 2016  
(林明明. 低温余热发电过程建模与先进控制策略研究 [博士学位论文], 华北电力大学 (北京), 中国, 2016)



**王东风** 博士, 华北电力大学控制与计算机工程学院教授。主要研究方向为群智能优化算法和智能控制, 线性参数变化系统建模与控制。本文通信作者。

E-mail: wangdongfeng@ncepu.edu.cn  
(**WANG Dong-Feng** Ph.D., professor at the School of Control and Computer Engineering, North China

Electric Power University. His research interest covers swarm intelligence-based optimization and intelligent control, modeling and control of linear parameter-varying system. Corresponding author of this paper.)



**朱为琦** 华北电力大学控制与计算机工程学院硕士研究生。主要研究方向为线性参数变化系统建模与控制。

E-mail: xcc951@163.com  
(**ZHU Wei-Qi** Master student at the School of Control and Computer Engineering, North China Electric Power University. His research interest covers modeling and control of linear parameter-varying system.)