

基于鲁棒正不变集传感器故障区间估计

张文瀚¹ 王振华¹ 沈毅¹

摘 要 针对具有传感器故障和未知扰动与测量噪声的线性离散系统, 提出了一种传感器故障区间估计方法. 将传感器故障视为增广状态, 原始系统转化为一个等效的广义系统. 为了得到故障的点估计同时抑制扰动和噪声的影响, 基于有界实引理设计了一个针对广义系统的鲁棒状态观测器. 然后, 通过中心对称多胞体技术实现对故障的区间估计并基于鲁棒正不变集给出了一种降低区间估计计算量的方法. 最后, 通过一个垂直起降 (Vertical take-off and landing, VTOL) 飞行器线性化模型的仿真算例验证了所提出方法的有效性与优越性.

关键词 故障估计, 观测器, 不变集, 中心对称多胞体, 区间估计

引用格式 张文瀚, 王振华, 沈毅. 基于鲁棒正不变集传感器故障

区间估计. 自动化学报, 2020, 46(9): 1986–1993

DOI 10.16383/j.aas.c180504

Interval Estimation for Sensor Fault Based on Robust Positive Invariant Set

ZHANG Wen-Han¹ WANG Zhen-Hua¹ SHEN Yi¹

Abstract This paper proposes an interval estimation method of sensor fault for linear discrete-time system with unknown disturbances and measurement noise. A descriptor system, which is equivalent to the original system is constructed by considering the fault as an auxiliary state. Based on the descriptor system, a robust augmented state observer is designed by using bounded real lemma to obtain the point-estimation of sensor fault and attenuate the effects of disturbances and measurement noise. Then, the zonotope technique is used to realize the interval estimation of fault. Moreover, a method to reduce the computational complexity of interval estimation is proposed based on robust positive invariant set. Finally, numerical simulation of a vertical take-off and landing (VTOL) aircraft linear model is given to illustrate the effectiveness and superiority of the proposed approach.

Key words Fault estimation, observer, invariant set, zonotope, interval estimation

Citation Zhang Wen-Han, Wang Zhen-Hua, Shen Yi. Interval estimation for sensor fault based on robust positive invariant set. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(9): 1986–1993

在实际的工程系统中, 安全性和可靠性是至关重要的, 但是系统故障会降低系统的可靠性甚至破坏系统的稳定

性. 对故障进行诊断并采取有效的处理措施可以降低故障的影响, 因此故障诊断与容错控制技术得到了国内外学者的广泛关注, 取得了很多研究成果^[1–9]. 由于故障的幅值信息是后续主动容错控制的重要基础^[6–7], 因此越来越多的学者开始研究能提供幅值信息的故障估计问题. 文献 [8] 通过使用状态增广方法设计了一个鲁棒观测器, 可以同时估计传感器故障和执行器故障, 文献 [9] 利用线性矩阵不等式技术提出了一种故障估计方法. 但是, 文献 [8] 和文献 [9] 中的方法没有考虑测量噪声对系统的影响, 而测量噪声在工程系统中是真实存在的. 为了解决这一问题, 文献 [10] 针对切换系统设计了一种基于李亚普洛夫函数方法的故障估计观测器, 可以在系统受到未知扰动和噪声的情况下估计执行器故障. 文献 [11] 通过使用广义 Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) 引理, 提出了基于降维观测器的故障估计方法, 能有效降低噪声对故障估计结果的影响. 此外, 文献中还出现了比例积分故障观测器^[12]、自适应故障观测器^[13]、滑模故障估计^[14] 等诸多故障估计方法.

需要说明的是, 上述的大部分方法都是对系统故障进行点估计, 即估计的故障值尽可能地接近真实故障值. 但是, 实际系统运行时总是受到未知干扰和测量噪声的影响, 这使得故障的点估计很难得到非常精确的估计结果. 因此, 对于存在未知扰动和测量噪声的系统, 故障区间估计方法得到了一定的重视. 同时, 故障估计的上下界信息对于容错控制环节也有重要的意义. 另一方面, 区间故障估计可以视为区间状态估计的推广. 近年来, 针对系统状态的区间估计得到了深入研究, 提出了很多的估计方法. 文献 [15] 针对一类非线性系统设计一种区间观测器, 能够根据观测器的输出给出系统状态的上下边界. 文献 [16] 基于坐标变换技术, 给出了广义系统区间观测器的设计方法, 可以实现广义系统的区间状态估计. 文献 [17] 通过使用中心对称多胞体技术, 针对存在参数不确定性的线性系统提出了一种区间状态估计的方法. 但是, 基于中心对称多胞体的状态区间估计的计算复杂度会随着多胞体维数的增大而指数增加, 不利于实际系统中的应用. 同时需要指出的是, 上述的这些方法都是在无故障情况下对系统状态进行区间估计, 无法直接运用到故障的区间估计上.

为了进行故障的区间估计, 文献 [18] 提出了一种先得到系统状态的区间估计再得到故障区间估计的方法, 该方法对系统和干扰都只有较为宽松的限制条件, 但是文献 [18] 只研究了无噪声情况下的故障区间估计方法. 最近, 文献 [19] 针对线性离散系统提出了一种鲁棒正不变集的概念并将其运用到容错控制中. 文献 [20] 和文献 [21] 将鲁棒正不变集运用到系统状态的估计中, 给出包含系统状态的集合和区间估计并提出了一种降低区间估计计算量的方法. 考虑到使用中心对称多胞体进行故障检测的研究方法很多^[22–27], 但是将其应用到故障区间估计上的研究还非常少见, 同时, 利用鲁棒正不变集方法可以有效降低区间估计过程中的计算量. 本文将两者相结合并将其推广到故障的区间估计上, 针对具有传感器故障和未知扰动与测量噪声的线性离散系统提出了一种故障区间估计方法. 首先基于有界实引理设计了一种具有非奇异形式的鲁棒状态观测器, 用于获得故障的点估计和抑制扰动与噪声对故障估计结果的影响. 然后, 利用中心对称多胞体技术给出故障的区间估计并基于鲁棒正不变集方法给出一种降低计算量的方法. 需要指出的是, 本文的研究方法对故障的具体形式并无限制, 也不要求获得扰动和噪声的概率分布等先验知识, 具有更好的适用性.

符号说明. \mathbf{R}^n 和 $\mathbf{R}^{n \times m}$ 分别表示 n 维欧氏空间及 $n \times m$ 维矩阵构成的集合, \mathbf{N}^+ 表示全体正整数构成的集

收稿日期 2018-07-20 录用日期 2018-10-09

Manuscript received July 20, 2018; accepted October 9, 2018

国家自然科学基金 (61773145, 61703296), 哈尔滨工业大学深空探测着陆与返回技术国防重点学科基金 (HIT.KLOF.2018.073) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61773145, 61703296) and the Key Laboratory Opening Funds of Harbin Institute of Technology (HIT.KLOF.2018.073)

本文责任编辑 杨浩

Recommended by Associate Editor YANG Hao

1. 哈尔滨工业大学航天学院 哈尔滨 150001

1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

合. I_n 表示 $n \times n$ 维的单位矩阵, 0 表示具有适当维数的零向量或零矩阵. 对于向量 $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda}^+(i)$ 和 $\boldsymbol{\lambda}^-(i)$ 分别表示向量 $\boldsymbol{\lambda}$ 第 i 个元素的上界与下界, $\Lambda = \text{diag}\{\boldsymbol{\lambda}\}$ 表示对角元素与向量 $\boldsymbol{\lambda}$ 元素相同的对角矩阵 Λ . A^{-1} 和 A^\dagger 分别代表矩阵 A 的逆和伪逆. 对于对称矩阵 $P, P \succ 0$ ($P \prec 0$) 表示矩阵 P 为正定 (负定) 矩阵. 对于离散系统的传递函数 $G(z)$, $\|G(z)\|_\infty$ 表示 $G(z)$ 的 H_∞ 范数, 即 $G(z)$ 的最大奇异值. 对于一个对称矩阵, 符号 \star 表示矩阵中由对称性得到的元素.

1 问题描述

考虑如下受传感器故障影响的线性离散系统:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k + D_1\boldsymbol{w}_k \\ \boldsymbol{y}_k = C\boldsymbol{x}_k + F\boldsymbol{f}_k + D_2\boldsymbol{v}_k \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\boldsymbol{x}_k \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{u}_k \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{y}_k \in \mathbf{R}^p$ 分别是状态向量, 控制输入和测量输出, $\boldsymbol{f}_k \in \mathbf{R}^s$ 表示传感器故障, $\boldsymbol{w}_k \in \mathbf{R}^r$, $\boldsymbol{v}_k \in \mathbf{R}^l$ 分别为系统受到的未知过程干扰和测量噪声; A, B, C, D_1, D_2, F 是具有适当维数的常数矩阵. 不失一般性, 本文假设 F 列满秩且 $s \leq p$.

另外, 本文假设系统 (1) 的状态变量初值和受到的过程干扰与测量噪声均为未知但有界的, 即

$$|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{p}_0| \leq \bar{\boldsymbol{x}}, \quad |\boldsymbol{w}_k| \leq \bar{\boldsymbol{w}}, \quad |\boldsymbol{v}_k| \leq \bar{\boldsymbol{v}} \quad (2)$$

其中, $\boldsymbol{p}_0, \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\bar{\boldsymbol{w}} \in \mathbf{R}^r$ 和 $\bar{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{R}^l$ 均为已知的向量.

本文的目标是基于中心对称多胞体表示的鲁棒正不变集给出系统 (1) 中传感器故障的区间估计结果, 即寻找到一个区间 $[\boldsymbol{f}_k^-, \boldsymbol{f}_k^+]$ 使其满足 $\boldsymbol{f}_k^- \leq \boldsymbol{f}_k \leq \boldsymbol{f}_k^+$, 其中 \boldsymbol{f}_k^- 和 \boldsymbol{f}_k^+ 分别表示 \boldsymbol{f}_k 的上界与下界. 为了实现这一目的, 本文需要用到如下的定义, 性质与引理.

定义 1^[28]. 对于两个集合 \boldsymbol{X} 和 \boldsymbol{Y} , 它们的闵科夫斯基和运算定义为

$$\boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}\} \quad (3)$$

其中, \oplus 表示闵科夫斯基和运算符号.

定义 2^[28]. 一个 s 阶中心对称多胞体 $\mathcal{Z} \subset \mathbf{R}^n$ 是超立方体 $B^s = [-1, +1]^s$ 的仿射变换, 即

$$\mathcal{Z} = \boldsymbol{p} \oplus H B^s = \{\boldsymbol{p} + H\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \in B^s\} \quad (4)$$

其中, 常向量 $\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^n$ 称为 \mathcal{Z} 的中心, $H \in \mathbf{R}^{n \times s}$ 称为 \mathcal{Z} 的生成矩阵. 为了简化符号, 用 $\mathcal{Z} = \langle \boldsymbol{p}, H \rangle$ 描述中心对称多胞体 \mathcal{Z} .

定义 3^[19]. 线性离散时间系统

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{w}_k \quad (5)$$

当 $\boldsymbol{x}_k \in \Omega$ 和 $\boldsymbol{w}_k \in \Delta$ 时, 若 $\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{w}_k \in \Omega$ 恒成立, 则 Ω 称之为系统 (5) 的一个鲁棒正不变集. Ω 为系统 (5) 的一个鲁棒正不变集的定义可等价为

$$A\Omega \oplus B\Delta \subseteq \Omega$$

其中, Δ 为包含 \boldsymbol{w}_k 的任意集合.

定义 4^[18]. 对于给定的两个向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$, 若存在如下关系成立

$$\boldsymbol{x}(i) \leq \boldsymbol{y}(i), \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

则说明向量 $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$, 其中, $\boldsymbol{x}(i)$ 和 $\boldsymbol{y}(i)$ 分别表示向量 \boldsymbol{x} 和 \boldsymbol{y} 的第 i 个元素.

引理 1^[29]. 对于如下矩阵 $X \in \mathbf{R}^{a \times b}$, $Y \in \mathbf{R}^{b \times c}$, $Z \in$

$\mathbf{R}^{a \times c}$. 如果 $\text{rank}(Y) = c$, 则方程

$$XY = Z \quad (7)$$

的通解为

$$X = ZY^\dagger + S [I_b - YY^\dagger] \quad (8)$$

其中, $S \in \mathbf{R}^{a \times b}$ 为任意矩阵.

引理 2^[30]. 线性离散时间系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k \\ \boldsymbol{y}_k = C\boldsymbol{x}_k + D\boldsymbol{u}_k \end{cases}$$

是稳定的并且其传递函数

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

满足 $\|G(z)\|_\infty < \gamma$ 的充分必要条件是存在一个对称矩阵 $P \succ 0$, 使得如下的矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} A^\top P A + C^\top C - P & \star \\ B^\top P A + D^\top C & B^\top P B + D^\top D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0$$

引理 3^[31]. 针对线性离散时间系统 (5), 对矩阵 A 进行约当分解 $A = UJU^{-1}$ 并考虑一个有界集合 Δ , 若 \boldsymbol{w}_k 满足对于任意的 $\boldsymbol{w}_k \in \Delta$, $|\boldsymbol{w}_k| \leq \bar{\boldsymbol{w}}$ 恒成立, 则具有如下的形式的集合

$$\Xi = \{\boldsymbol{x}_k : |U^{-1}\boldsymbol{x}_k| \leq (I - |J|)^{-1}|U^{-1}B|\bar{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{\theta}\}$$

是系统 (5) 的一个鲁棒正不变集, 其中, $\boldsymbol{\theta}$ 为任意小的元素全为正的向量.

性质 1^[32]. 对于中心对称多胞体 $\mathcal{Z} = \langle \boldsymbol{p}, H \rangle$, 引入如下性质:

$$\langle \boldsymbol{p}_1, H_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{p}_2, H_2 \rangle = \langle \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2, [H_1 \ H_2] \rangle \quad (9a)$$

$$\Upsilon \odot \langle \boldsymbol{p}, H \rangle = \langle \Upsilon \boldsymbol{p}, \Upsilon H \rangle \quad (9b)$$

$$\langle \boldsymbol{p}, H \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{p}, R_s(H) \rangle \quad (9c)$$

其中, $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \mathbf{R}^n$, $H, H_1, H_2 \in \mathbf{R}^{n \times s}$, \odot 表示线性映射符号, $\Upsilon \in \mathbf{R}^{l \times n}$ 为适当维数的矩阵, $R_s(H) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是对角矩阵, 其具体形式为

$$R_s(H) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m |H(1, j)| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m |H(n, j)| \end{bmatrix}$$

其中, $|H(n, j)|$ 表示矩阵 H 第 n 行第 j 列元素的绝对值.

性质 2^[19]. 针对线性离散时间系统 (5), 当其存在一个鲁棒正不变集 Ξ 且 $\boldsymbol{w}_k \in \Delta$ 恒成立时, 若令 $\boldsymbol{x}_0 \in \Xi_0$, $\Xi_0 = \Xi$, 并进行如下计算

$$\Xi_{k+1} = A \odot \Xi_k \oplus B \odot \Delta$$

则 Ξ_{k+1} 也是系统 (5) 的一个鲁棒正不变集, 且满足 $\Xi_{k+1} \subset \Xi_k$.

为了估计故障 \boldsymbol{f}_k , 将其视为增广状态, 可以得到如下的增广状态向量

$$\bar{\boldsymbol{x}}_k = [\boldsymbol{x}_k^\top \ \boldsymbol{f}_k^\top]^\top \quad (10)$$

并构造出如下的增广系统

$$\begin{cases} E\bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}u_k + \bar{D}_1w_k \\ y_k = \bar{C}\bar{x}_k + D_2v_k \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [C \quad F], \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

显然, 上述增广过程并未采用任何的假设, 所以广义系统 (11) 与原系统 (1) 完全等价. 因此, 若广义系统 (11) 存在一个状态观测器, 则可估计出广义系统 (11) 中的增广状态, 即实现对原始系统 (1) 中传感器故障 f_k 的估计 \hat{f}_k .

针对系统 (11) 构造如下形式的状态观测器

$$\begin{cases} \xi_{k+1} = T\bar{A}\hat{x}_k + T\bar{B}u_k + L(y_k - \bar{C}\hat{x}_k) \\ \hat{x}_k = \xi_k + N y_k \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\xi_k \in \mathbf{R}^{n+s}$ 是状态观测器的状态变量, $\hat{x}_k \in \mathbf{R}^{n+s}$ 是状态估计向量. $T \in \mathbf{R}^{(n+s) \times (n+s)}$, $N \in \mathbf{R}^{(n+s) \times p}$ 和 $L \in \mathbf{R}^{(n+s) \times p}$ 是待设计的参数矩阵, 且矩阵 T 和 N 需满足如下的等式约束:

$$TE + N\bar{C} = I_{n+s} \quad (13)$$

注 1. 需要说明的是, 状态观测器 (12) 估计出的传感器故障是点估计, 即 \hat{f}_k 是尽可能接近真实故障 f_k 的, 但其无法为故障提供一个估计区间 $[f_k^-, f_k^+]$. 为了实现故障的区间估计, 在设计状态观测器 (12) 得到故障的点估计 \hat{f}_k 后, 还需基于中心对称多胞体表示的鲁棒正不变集给出故障的区间估计结果.

2 状态观测器设计

本节介绍状态观测器 (12) 的设计方法, 具体的就是确定出状态观测器 (12) 中的未知参数矩阵 T , N 和 L .

首先, 由式 (1) 和式 (13) 可得

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= (TE + N\bar{C})\bar{x}_{k+1} = T\bar{A}\bar{x}_k + T\bar{B}u_k + \\ &N y_{k+1} + T\bar{D}_1w_k - ND_2v_{k+1} \end{aligned} \quad (14)$$

定义 $e_k = \bar{x}_k - \hat{x}_k$, 则由式 (12) 和式 (14) 可得如下的误差系统

$$e_{k+1} = (T\bar{A} - L\bar{C})e_k + T\bar{D}_1w_k - LD_2v_k - ND_2v_{k+1} \quad (15)$$

为了简化符号, 将式 (15) 写成如下形式:

$$e_{k+1} = \tilde{A}e_k + \tilde{B}d_k \quad (16)$$

其中

$$d_k = [w_k^T \quad v_k^T \quad v_{k+1}^T]^T \quad (17)$$

$$\tilde{A} = T\bar{A} - L\bar{C}, \tilde{B} = [T\bar{D}_1 \quad -LD_2 \quad -ND_2] \quad (18)$$

基于所得到的误差系统 (16), 本文给出如下求解参数矩阵 T , N 和 L 的定理.

定理 1. 对于给定的标量 $\gamma > 0$, 如果存在一个对称正定矩阵 $P \in \mathbf{R}^{(n+s) \times (n+s)}$, 一个矩阵 $W \in \mathbf{R}^{(n+s) \times p}$ 和

一个矩阵 $Y \in \mathbf{R}^{(n+s) \times (n+s+p)}$ 使得如下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -P + I_{n+s} & \star & \star & \star & \star \\ 0 & -\gamma^2 I_r & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I_l & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I_l & \star \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 & -P \end{bmatrix} \prec 0 \quad (19)$$

则系统 (16) 是稳定的且其传递函数 $G_{ed}(z) = (zI_{n+s} - \tilde{A})^{-1} \times \tilde{B}$ 满足 $\|G_{ed}(z)\|_\infty < \gamma$, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 和 Ω_4 的表达式为

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= P\Theta^\dagger\alpha_1\bar{A} + Y\Psi\alpha_1\bar{A} - W\bar{C} \\ \Omega_2 &= P\Theta^\dagger\alpha_1\bar{D}_1 + Y\Psi\alpha_1\bar{D}_1 \\ \Omega_3 &= -WD_2 \\ \Omega_4 &= -P\Theta^\dagger\alpha_2D_2 - Y\Psi\alpha_2D_2 \end{aligned}$$

其中, 矩阵 $\Theta \in \mathbf{R}^{(n+s+p) \times (n+s)}$, $\Psi \in \mathbf{R}^{(n+s+p) \times (n+s+p)}$, $\alpha_1 \in \mathbf{R}^{(n+s+p) \times (n+s)}$ 和 $\alpha_2 \in \mathbf{R}^{(n+s+p) \times p}$ 分别为

$$\begin{aligned} \Theta &= \begin{bmatrix} E \\ \bar{C} \end{bmatrix}, \quad \Psi = I_{n+s+p} - \Theta\Theta^\dagger \\ \alpha_1 &= \begin{bmatrix} I_{n+s} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

如果式 (19) 中的线性矩阵不等式可解的话, 则矩阵 T , N 和 L 可由下列等式求得

$$T = \Theta^\dagger\alpha_1 + P^{-1}Y\Psi\alpha_1 \quad (21)$$

$$N = \Theta^\dagger\alpha_2 + P^{-1}Y\Psi\alpha_2 \quad (22)$$

$$L = P^{-1}W \quad (23)$$

证明. 注意到式 (13) 可以改写为

$$[T \quad N] \begin{bmatrix} E \\ \bar{C} \end{bmatrix} = I_{n+s} \quad (24)$$

同时, 广义系统 (11) 中的 E 和 \bar{C} 满足

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \\ C & F \end{bmatrix} = n + s \quad (25)$$

则根据引理 1 可得矩阵 T 和 N 的通解为

$$\begin{cases} T = \Theta^\dagger\alpha_1 + S\Psi\alpha_1 \\ N = \Theta^\dagger\alpha_2 + S\Psi\alpha_2 \end{cases} \quad (26)$$

其中, $S \in \mathbf{R}^{(n+s) \times (n+s+p)}$ 是任意选取的矩阵, 矩阵 Θ , Ψ , α_1 和 α_2 的表达式如式 (20) 所示.

由引理 2 可知, 对于给定的标量 $\gamma > 0$, 当存在一个对称正定矩阵 P 使得如下不等式成立

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}P\tilde{A}^T - P + I_{n+s} & \star \\ \tilde{B}^T P \tilde{A} & \tilde{B}^T P \tilde{B} - \gamma^2 I_{r+2l} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (27)$$

则系统 (16) 是稳定的且满足 $\|G_{ed}(z)\|_\infty < \gamma$.

式 (27) 可以改写为

$$\begin{bmatrix} I_{n+s} - P & \star \\ 0 & -\gamma^2 I_{r+2l} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}^T \\ \tilde{B}^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (28)$$

注意到式 (28) 不是一个标准的线性矩阵不等式, 因此采用 Schur 补引理可将式 (28) 改写为

$$\begin{bmatrix} -P + I_{n+s} & \star & \star \\ 0 & -\gamma^2 I_{r+2l} & \star \\ P\tilde{A} & P\tilde{B} & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

将式 (18) 和式 (26) 代入到式 (29) 中可得

$$\begin{bmatrix} -P + I_{n+s} & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & -\gamma^2 I_r & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star & \star & \star \\ P\Theta^\dagger \alpha_1 \bar{A} + PS\Psi \alpha_1 \bar{A} - PL\bar{C} & P\Theta^\dagger \alpha_1 \bar{D}_1 + PS\Psi \alpha_1 \bar{D}_1 & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & -\gamma^2 I_l & \star & \star & \star & \star \\ -PLD_2 & -P\Theta^\dagger \alpha_2 D_2 - PS\Psi \alpha_2 D_2 & -P & \star & \star & \star \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

令 $W = PL$ 和 $Y = PS$, 即可得到式 (19).

因此, 当线性矩阵不等式 (19) 成立时, 所设计的状态观测器 (12) 是稳定的且满足 $\|G_{ed}(z)\|_\infty < \gamma$. 当式 (19) 有解时, 则矩阵 L 可由式 (23) 求得, 矩阵 S 可由下列等式求得

$$S = P^{-1}Y \quad (31)$$

将式 (31) 代入式 (26) 中, 由此可得式 (21) 和式 (22). □

至此, 已经确定出所有的待设计得参数矩阵, 完成了针对广义系统 (11) 的状态观测器设计.

3 传感器故障的区间估计

本节介绍基于中心对称多胞体表示的鲁棒正不变集给出系统 (1) 中传感器故障的区间估计的方法.

根据 e_k 的定义易得

$$\bar{x}_k = \hat{x}_k + e_k \quad (32)$$

其中, \hat{x}_k 由式 (12) 中的状态观测器给出. 因此, 可以将 \bar{x}_k 区间估计转换为误差的 e_k 区间估计, 只要得到了误差 e_k 的区间估计就可以得到系统状态 \bar{x}_k 的区间估计.

根据式 (2) 和定义 1, 可以得到

$$w_k \in \mathcal{W} = \langle 0, W \rangle, v_k \in \mathcal{V} = \langle 0, V \rangle$$

其中, \mathcal{W} 和 \mathcal{V} 为分别包含 w_k 和 v_k 的中心对称多胞体, $W = \text{diag}\{\bar{w}\}$, $V = \text{diag}\{\bar{v}\}$.

实际中的系统故障一般都是有界的, 即存在 $|f_0 - p_f| \leq \bar{f}$. 因此, 当假设 $|x_0 - p_0| \leq \bar{x}$ 时, 则可得

$$\left| \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_0 \\ p_f \end{bmatrix} \right| \leq \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{f} \end{bmatrix}$$

由此, 根据定义 2 可知, $\bar{x}_0 \in \bar{\mathcal{X}}_0 = \langle \bar{p}_0, \bar{H}_0 \rangle$, 其中, $\bar{p}_0 = [p_0^\top \ p_f^\top]^\top$, $\bar{H}_0 = \text{diag}\{\bar{x}^\top \ \bar{f}^\top\}^\top$.

选取 $\hat{x}_0 = \bar{p}_0$, 则可得 $\bar{x}_0 \in \bar{\mathcal{X}}_0 = \langle \hat{x}_0, \bar{H}_0 \rangle$. 再由式 (32) 和中心对称多胞体的性质 (9a), 可得

$$e_0 \in \mathcal{E}_0 = \langle \hat{x}_0, \bar{H}_0 \rangle \oplus -\hat{x}_0 = \langle 0, \bar{H}_0 \rangle$$

将式 (15) 进行迭代计算, 可得

$$e_k = (T\bar{A} - L\bar{C})^k e_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (T\bar{A} - L\bar{C})^i T\bar{D}_1 w_{k-1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} (T\bar{A} - L\bar{C})^i LD_2 v_{k-1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} (T\bar{A} - L\bar{C})^i ND_2 v_{k-i}$$

注意到 $w_k \in \langle 0, W \rangle$, $v_k \in \langle 0, V \rangle$ 和 $e_0 \in \langle 0, \bar{H}_0 \rangle$, 则可得

$$e_k \in \mathcal{E}_k = \langle 0, \bar{H}_k \rangle$$

由式 (15) 可知, $e_{k+1} \in \mathcal{E}_{k+1} = \langle 0, \bar{H}_{k+1} \rangle$ 且 \mathcal{E}_{k+1} 可被更新为

$$\mathcal{E}_{k+1} = \langle 0, \bar{H}_{k+1} \rangle = (T\bar{A} - L\bar{C}) \odot \hat{\mathcal{E}}_k \oplus$$

$$T\bar{D}_1 \odot \mathcal{W} \oplus LD_2 \odot \mathcal{V} \oplus ND_2 \odot \mathcal{V}$$

根据中心对称多胞体的性质 (9a) 与 (9b), 可得

$$\bar{H}_{k+1} = [(T\bar{A} - L\bar{C})\bar{H}_k \ T\bar{D}_1 W \ -LD_2 V \ -ND_2 V] \quad (33)$$

最后, 由中心对称多胞体的性质 (9c) 可求得一个能够包含中心对称多胞体的区间盒子, 因此可得增广状态向量 \bar{e}_k 的上界 \bar{e}_k^+ 和下界 \bar{e}_k^- 的表达式为

$$\begin{cases} \bar{e}_k^+(i) = \sum_{j=1}^s |\bar{H}_k(i, j)|, & i = 1, \dots, n+s \\ \bar{e}_k^-(i) = -\sum_{j=1}^s |\bar{H}_k(i, j)|, & i = 1, \dots, n+s \end{cases}$$

其中, $|\bar{H}_k(i, j)|$ 表示矩阵 \bar{H}_k 第 i 行第 j 列的元素的绝对值.

现在我们可以通过上述运算得到误差 e_k 的区间估计, 但是从式 (33) 中易知, 随着 k 值得不断增大, 中心对称多胞体 \mathcal{E}_k 的生成矩阵 \bar{H}_k 的阶数会不断增加, 由此就会造成估计 e_k 区间所需要的计算量不断增加, 带来巨大的计算成本甚至最终无法计算, 所以有必要找到一种降低区间估计计算量的方法, 为此本文给出如下定理.

定理 2. 对于误差系统 (16), 当其满足 $e_0 \in \mathcal{E}_0 = \langle 0, \bar{H}_0 \rangle$ 且 \mathcal{E}_0 为系统 (16) 的一个鲁棒正不变集, 则任意 k 时刻的误差变量 e_k 属于如下的集合

$$e_k \in \begin{cases} \mathcal{E}_k = \langle 0, \bar{H}_k \rangle, & k \leq k^* \\ B_p^n(\epsilon) \oplus \Omega_\infty, & k > k^* \end{cases}$$

其中, \bar{H}_k 满足式 (33) 中的递推形式, $\epsilon > 0$ 为任意的正常数, $B_p^n(\epsilon) = \{e_{k^*} \in \mathbf{R}^n : \|e_{k^*}\|_p \leq \epsilon\}$, $\|e_{k^*}\|_p$ 表示向量 e_{k^*} 的 p 范数, Ω_∞ 为一个中心对称多胞体, $k^* \in \mathbf{N}^+$ 为一个正整数. Ω_∞ 的具体形式和 k^* 的约束条件为

$$\Omega_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \tilde{A}^{i-1} \tilde{B} \odot \mathcal{D}, \quad k^* \geq \frac{\ln(\frac{\epsilon}{\|\mathcal{E}_0\|})}{\ln(\alpha)}, \quad k^* \in \mathbf{N}^+$$

其中, $d_k \in \mathcal{D} = \langle 0, D \rangle$, $D = \text{diag}\{W, V, V\}$, $\|\mathcal{E}_0\|$ 表示中心对称多胞体 \mathcal{E}_0 边界与其中心之间的最大距离, $0 < \alpha < 1$ 为一个常数且需满足下列不等式

$$\tilde{A}^\top P \tilde{A} - \alpha^2 P < 0$$

其中, P 为由线性矩阵不等式 (19) 求得的 P .

证明. 首先, 由 $\mathbf{d}_k = [\mathbf{w}_k^T \ \mathbf{v}_k^T \ \mathbf{v}_{k+1}^T]^T$, 同时根据式 (2) 和定义 1, 可得

$$\mathbf{d}_k \in \mathcal{D} = \langle 0, D \rangle, \quad |\mathbf{d}_k| \leq \bar{\mathbf{d}}$$

其中, \mathcal{D} 为包含 \mathbf{d}_k 的中心对称多胞体, $D = \text{diag}\{\bar{\mathbf{d}}\}$, $\bar{\mathbf{d}} = [\bar{\mathbf{w}}^T \ \bar{\mathbf{v}}^T \ \bar{\mathbf{v}}^T]^T$.

根据引理 2 可知, 误差系统 (16) 的存在一个如下形式的鲁棒正不变集

$$\tilde{\Xi} = \{\mathbf{e}_k : |\tilde{U}^{-1}\mathbf{e}_k| \leq (I - |\tilde{J}|)^{-1}|\tilde{U}^{-1}\tilde{B}|\bar{\mathbf{d}} + \tilde{\theta}\} \quad (34)$$

其中, \tilde{U} 为 \tilde{A} 的约当分解矩阵, 满足 $\tilde{A} = \tilde{U}\tilde{J}\tilde{U}^{-1}$, $\tilde{\theta}$ 为任意小的元素全为正数的向量.

令 $\Lambda = (I - |\tilde{J}|)^{-1}|\tilde{U}^{-1}\tilde{B}|\bar{\mathbf{d}} + \tilde{\theta}$, 则式 (34) 可改写为

$$\begin{aligned} |\tilde{U}^{-1}\mathbf{e}_k| \leq \Lambda &\Rightarrow -\Lambda \leq \tilde{U}^{-1}\mathbf{e}_k \leq \Lambda \Rightarrow \\ &-\tilde{U}\Lambda \leq \mathbf{e}_k \leq \tilde{U}\Lambda \Rightarrow |\mathbf{e}_k| \leq \tilde{U}\Lambda \end{aligned} \quad (35)$$

根据定义 1 和式 (35) 可知, 鲁棒正不变集 $\tilde{\Xi}$ 可以等价为一个中心对称多胞体:

$$\Xi = \mathcal{E} = \langle 0, \bar{H} \rangle, \quad \bar{H} = \text{diag}\{\tilde{U}\Lambda\}$$

令 $\mathbf{e}_0 \in \mathcal{E}_0 = \langle 0, \bar{H}_0 \rangle = \mathcal{E} = \langle 0, \bar{H} \rangle$, 由式 (16) 可得

$$\mathbf{e}_{k+1} \in \mathcal{E}_{k+1} = \langle 0, \bar{H}_{k+1} \rangle = \tilde{A} \odot \mathcal{E}_k \oplus \tilde{B} \odot \mathcal{D} \quad (36)$$

根据中心对称多胞体的性质 (9a), (9b) 和式 (18), 可得

$$\bar{H}_{k+1} = [(T\bar{A} - L\bar{C})\bar{H}_k \quad T\bar{D}_1W \quad -LD_2V \quad -ND_2V]$$

通过迭代可将式 (36) 写为

$$\mathcal{E}_k = \tilde{A}^k \odot \mathcal{E}_0 \oplus \sum_{i=1}^k \tilde{A}^{i-1}\tilde{B} \odot \mathcal{D}$$

令 $\Omega_k = \sum_{i=1}^k \tilde{A}^{i-1}\tilde{B} \odot \mathcal{D}$, 则可得

$$\begin{aligned} \Omega_\infty &= \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{A}^{i-1}\tilde{B} \odot \mathcal{D} = \\ &(\sum_{i=k+1}^{\infty} \tilde{A}^{i-1}\tilde{B} \odot \mathcal{D}) \oplus \Omega_k \end{aligned} \quad (37)$$

由式 (37) 可得

$$\Omega_k \subset \Omega_\infty \Rightarrow \mathcal{E}_k = \tilde{A}^k \odot \mathcal{E}_0 \oplus \Omega_k \subset \tilde{A}^k \odot \mathcal{E}_0 \oplus \Omega_\infty$$

因为误差系统 (15) 是稳定的, 故有 $\text{eig}(\tilde{A}) < 1$, 则可得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{A}^k \odot \mathcal{E}_0 = 0 &\Rightarrow \exists k^* \in \mathbf{N}^+, \tilde{A}^{k^*} \odot \mathcal{E}_0 \subseteq B_p^n(\epsilon) \Rightarrow \\ &\exists k^* \in \mathbf{N}^+, \mathcal{E}_{k^*} \subseteq B_p^n(\epsilon) \oplus \Omega_\infty \end{aligned}$$

根据性质 2 可知, 下列从属关系成立:

$$\mathcal{E}_{k+1} \subset \mathcal{E}_k \subset \dots \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_0$$

则当 $k > k^*$ 时, 有 $\mathbf{e}_k \in \mathcal{E}_k \subseteq B_p^n(\epsilon) \oplus \Omega_\infty$ 恒成立, 故当 $k > k^*$ 时可使用集合 $B_p^n(\epsilon) \oplus \Omega_\infty$ 来表示中心对称胞体 \mathcal{E}_k , 而不需要直接计算 \mathcal{E}_k , 从而可解决估计 \mathbf{e}_k 过程中中心对称多胞体阶数增长带来的高计算量问题, 所提出的方法可写为

$$\mathbf{e}_k \in \begin{cases} \mathcal{E}_k = \langle 0, \bar{H}_k \rangle, & k \leq k^* \\ B_p^n(\epsilon) \oplus \Omega_\infty, & k > k^* \end{cases}$$

其中, \bar{H}_k 满足式 (33) 中的递推形式.

至此, 已经证明了定理 2 中 \mathbf{e}_k 的集合取值问题, 现在开始证明 k^* 的取值约束条件. 因为 $\tilde{A}^{k^*} \odot \mathcal{E}_0$ 的边界不易描述, 使得寻找 k^* 的取值范围很困难, 因此考虑选取参数 α 使得下式成立

$$\tilde{A}^{k^*} \odot \mathcal{E}_0 \subseteq \alpha^{k^*} \mathcal{E}_0 \subseteq B_p^n(\epsilon) \quad (38)$$

其中, α 为一个常数且需满足下列不等式

$$\tilde{A}^T P \tilde{A} - \alpha^2 P < 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (39)$$

易知, 满足式 (39) 条件的 α 能够保证 $\tilde{A}^{k^*} \odot \mathcal{E}_0 \subseteq \alpha^{k^*} \mathcal{E}_0$ 恒成立. 同时, $\alpha^{k^*} \mathcal{E}_0 \subseteq B_p^n(\epsilon)$ 成立的一个充分条件是 $\alpha^{k^*} \|\mathcal{E}_0\| \leq \epsilon$, 则由此可求得 k^* 的取值范围为

$$k^* \geq \frac{\ln(\frac{\epsilon}{\|\mathcal{E}_0\|})}{\ln(\alpha)}, \quad k^* \in \mathbf{N}^+ \quad (40)$$

式 (40) 即为 k^* 的约束条件. \square

因此可得误差向量 \mathbf{e}_k 的上界 \mathbf{e}_k^+ 和下界 \mathbf{e}_k^- 的表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{e}_k^+(i) = \sum_{j=1}^s |\bar{H}_k(i, j)|, & i=1, \dots, n+s, \\ \mathbf{e}_k^-(i) = -\sum_{j=1}^s |\bar{H}_k(i, j)|, & i=1, \dots, n+s, & k \leq k^* \\ \mathbf{e}_k^+(i) = \sum_{j=1}^s |\Omega_\infty(i, j)| + \epsilon, & i=1, \dots, n+s, \\ \mathbf{e}_k^-(i) = -\sum_{j=1}^s |\Omega_\infty(i, j)| - \epsilon, & i=1, \dots, n+s, & k > k^* \end{cases}$$

其中, $|\bar{H}_k(i, j)|$ 和 $|\Omega_\infty(i, j)|$ 表示矩阵 \bar{H}_k 和 Ω_∞ 第 i 行第 j 列的元素的绝对值.

根据式 (32), 可得增广状态向量 $\bar{\mathbf{x}}_k$ 的上界 $\bar{\mathbf{x}}_k^+$ 和下界 $\bar{\mathbf{x}}_k^-$ 的表达式为

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}_k^+(i) = \hat{\mathbf{x}}_k(i) + \mathbf{e}_k^+(i), & i=1, \dots, n+s \\ \bar{\mathbf{x}}_k^-(i) = \hat{\mathbf{x}}_k(i) + \mathbf{e}_k^-(i), & i=1, \dots, n+s \end{cases}$$

最后, 由式 (10) 可得系统 (1) 中的传感器故障 \mathbf{f}_k 的上界 \mathbf{f}_k^+ 和下界 \mathbf{f}_k^- 的表达式为

$$\mathbf{f}_k^+ = \beta \bar{\mathbf{x}}_k^+, \quad \mathbf{f}_k^- = \beta \bar{\mathbf{x}}_k^-$$

其中, $\beta = [0 \ I_s]$, s 是 \bar{H}_k 的列数

4 仿真结果

本节通过文献 [33] 中的一个垂直起降 (Vertical take-off and landing, VTOL) 飞行器线性化模型来验证所提出方法的有效性和优越性, 该模型的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_t \mathbf{x}(t) + B_t \mathbf{u}(t) + D_{1t} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_t \mathbf{x}(t) + D_{2t} \mathbf{v}(t) \end{cases} \quad (41)$$

其中, 状态变量 $\mathbf{x}(t) = [V_h(t) \ V_v(t) \ q \ \theta]^T$, 各分量分别为水平速度、垂直速度、俯仰角速率、俯仰角; 输入量 $\mathbf{u}(t) = [\delta_c \ \delta_l]^T$, 各分量分别为总桨距和纵向周期桨距. 仿真采样周期设为 $dt = 0.1 \text{ s}$, 对系统 (41) 利用欧拉一步法进行离散化并考虑传感器加性故障后得到如式 (1) 形式的离散系统, 相关的参数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0.00523 & -0.07476 & 0.02632 & 0.50337 \\ 5.21659 & 1.27452 & 0.55532 & -2.44221 \\ 2.60922 & 0.26361 & 0.58025 & -1.92774 \\ 0 & 0 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.04422 & 0.01761 \\ 0.35446 & -0.75922 \\ -0.55200 & 0.44900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \\ 0.3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.5 \\ 1.2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

则可得广义系统 (11) 的矩阵参数为

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0.00523 & -0.07476 & 0.02632 & 0.50337 & 0 \\ 5.21659 & 1.27452 & 0.55532 & -2.44221 & 0 \\ 2.60922 & 0.26361 & 0.58025 & -1.92774 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0.04422 & 0.01761 \\ 0.35446 & -0.75922 \\ -0.55200 & 0.44900 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1.2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1.5 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \\ 0.3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

选取 $\gamma = 1.0$, 则求解式 (19) 可以得到矩阵 T , N 和 L 分别为

$$T = \begin{bmatrix} 0.8586 & 0.0298 & 0.0218 & -0.0823 & 0 \\ 0.8745 & 0.0911 & -0.1136 & -0.3753 & 0 \\ 0.4506 & -0.2306 & 0.4179 & -0.4197 & 0 \\ -0.2335 & 0.0540 & -0.0015 & 0.8325 & 0 \\ -0.6603 & 0.0253 & -0.1153 & 0.0894 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0.1414 & -0.1121 & -0.1042 & 0.0823 \\ -0.8745 & 0.5337 & -0.2617 & 0.3753 \\ -0.4506 & -0.1891 & 0.1623 & 0.4197 \\ 0.2335 & -0.2215 & -0.1660 & 0.1675 \\ 0.6603 & 0.0641 & 0.2047 & -0.0894 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.1773 & -0.2460 & -0.0991 & 0.1934 \\ 0.1177 & -0.0843 & -0.0713 & 0.0609 \\ -0.0741 & 0.1328 & 0.2464 & -0.2956 \\ 0.2330 & -0.4344 & -0.2342 & 0.4613 \\ -0.1321 & 0.1689 & 0.0278 & -0.0924 \end{bmatrix}$$

选取 $\tilde{\theta} = 10^{-5}[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, $\epsilon = 0.0001$, 通过求解式 (39) 和式 (40), 可得 $\alpha = 0.4767$, $k^* \geq 9$, $k^* \in \mathbf{N}^+$. 在本文中取输入向量 $\mathbf{u}_k = [2\sin(k) \ 3\sin(k)]^T$, 设系统所受干扰和噪声满足 $|\mathbf{w}_k| \leq [0.5 \ 0.5]^T$ 和 $|\mathbf{v}_k| \leq [0.01 \ 0.01]^T$, 取系统的初始状态向量为 $\mathbf{x}_0 = [0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2]^T$. 假设系统传感器故障 f_k 的形式为

$$f_k = \begin{cases} 0, & 0 \leq k < 40 \\ 0.5(0.1k - 4), & 40 \leq k < 80 \\ 2, & 80 \leq k \leq 100 \end{cases}$$

区间估计的仿真结果如图 1 所示. 仿真结果表明本文提出的方法能够在系统传感器发生故障时, 快速地对故障做出一个较为精确的区间估计.

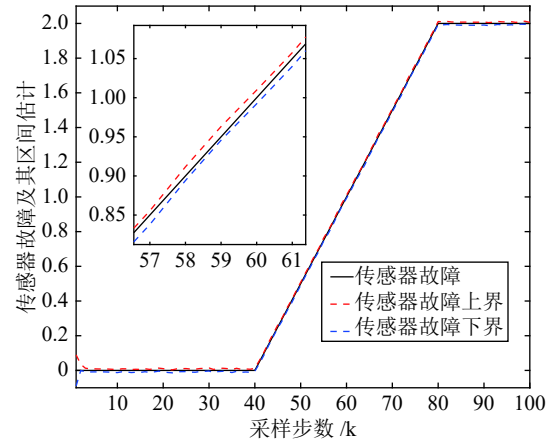


图 1 垂直起降飞行器线性化模型的传感器故障及其区间估计结果
Fig.1 Sensor fault and its interval estimation results of the VTOL aircraft linear model

需要说明的是, 本文提出的方法除了可以得到故障的区间估计, 也可以得到较为准确的故障点估计. 为了说明本文所提方法的优越性, 我们将所提方法与文献 [34] 中提出的故障点估计方法进行对比. 为了更直观的显示比较结果, 我们采用故障估计的误差信息来进行仿真, 故障估计误差定义为

$$r_k = |\hat{f}_k - f_k|$$

令 r_{k1} 为本文方法得到的故障估计值与实际值之间的误差, r_{k2} 为文献 [34] 中方法得到的故障估计值与实际值之间的误差, 由此可以得到如图 2 所示的仿真结果, 仿真结果表明本文提出的方法相较于文献 [34] 中的方法能够在系统传感器发生故障时, 给出更加精确的点估计结果.

5 结论

本文针对具有传感器故障的和未知扰动与测量噪声的线性离散系统, 提出了一种新的传感器故障区间估计方法. 通过将传感器故障视为增广状态, 将原始系统转换为一个不受传感器故障影响的等效广义系统. 基于有界实引理设计了鲁棒状态观测器用于得到故障的近似估计同时抑制系统受到的干扰和噪声, 并且将状态观测器的设计问题转化为易于求解的线性矩阵不等式形式. 基于设计出的状态观测器, 使用中心对称多胞体来对传感器故障进行区间估计.

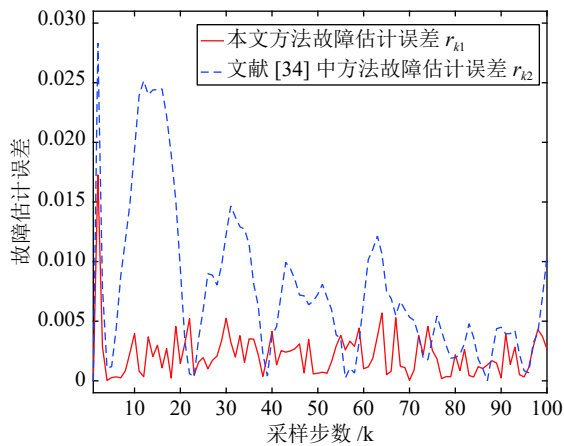


图 2 传感器故障估计误差对比结果

Fig.2 Sensor fault estimation error comparison result

同时,利用鲁棒正不变集给出了一种降低中心对称多胞体区间估计过程中的计算量的可行方法.最后,通过一个垂直起降飞行器线性化模型的仿真算例来验证所提出方法的有效性.同时,目前针对非线性系统故障区间估计的研究成果并不多,但本文中所提出线性系统故障区间估计的方法可以通过线性变参数模型近似的方式推广到非线性系统,这将是我们的下一步的研究工作.

References

- Zhou Dong-Hua, Hu Yan-Yan. Fault diagnosis techniques for dynamic systems. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(6): 748–758 (周东华, 胡艳艳. 动态系统的故障诊断技术. 自动化学报, 2009, **35**(6): 748–758)
- Jiang Bin, Mao Ze-Hui, Yang Hao, Zhang You-Min. *Fault Diagnosis and Fault Accommodation for Control Systems*. Beijing: National Defense Industry Press, 2009. (姜斌, 冒泽慧, 杨浩, 张友民. 控制系统的故障诊断与故障调节. 北京: 国防工业出版社, 2009.)
- Li Y Y, Karimi H R, Zhang Q, Zhao D, Li Y B. Fault detection for linear discrete time-varying systems subject to random sensor delay: A Riccati equation approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2018, **65**(5): 1707–1716
- Wang Z H, Shi P, Lim C C. H_∞/H_∞ fault detection observer in finite frequency domain for linear parameter-varying descriptor systems. *Automatica*, 2017, **86**: 38–45
- Yu X, Fu Y, Zhang Y M. Aircraft fault accommodation with consideration of actuator control authority and gyro availability. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, **26**(4): 1285–1299
- Zhang Ke, Jiang Bin. Fault diagnosis observer-based output feedback fault tolerant control design. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(2): 274–281 (张柯, 姜斌. 基于故障诊断观测器的输出反馈容错控制设计. 自动化学报, 2010, **36**(2): 274–281)
- Liu L J, Shen Y, Dowell E H, Zhu C H. A general H_∞ fault tolerant control and management for a linear system with actuator faults. *Automatica*, 2012, **48**(8): 1676–1682
- Li X H, Zhu F L, Xu L Y. Actuator and sensor fault reconstructions for uncertain Lipschitz nonlinear systems based on H_∞ observers. *Asian Journal of Control*, 2015, **17**(6): 2206–2217
- Wang Z H, Shen Y, Zhang X L. Actuator fault estimation for a class of nonlinear descriptor systems. *International Journal of Systems Science*, 2014, **45**(3): 487–496
- Du D S, Xu S Y, Cocquemot V. Actuator fault estimation for discrete-time switched systems with finite-frequency. *Systems & Control Letters*, 2017, **108**: 64–70
- Zhang K, Jiang B, Shi P, Xu J F. Fault estimation observer design for discrete-time systems in finite-frequency domain. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, **25**(9): 1379–1398
- Gao Z W, Ding S X. Fault estimation and fault-tolerant control for descriptor systems via proportional, multiple-integral and derivative observer design. *IET Control Theory & Applications*, 2007, **1**(5): 1208–1218
- Liu G S, Zhang K, Jiang B. Adaptive observer-based fast fault estimation of a leader-follower linear multi-agent system with actuator faults. In: Proceedings of the 34th Chinese Control Conference. Hangzhou, China: IEEE, 2015. 6340–6344
- Liu M, Shi P. Sensor fault estimation and tolerant control for Itô stochastic systems with a descriptor sliding mode approach. *Automatica*, 2013, **49**(5): 1242–1250
- Raïssi T, Efimov D, Zolghadri A. Interval state estimation for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(1): 260–265
- Guo Sheng-Hui, Zhu Fang-Lai. Interval observers design for descriptor systems. *Control and Decision*, 2016, **31**(2): 361–366 (郭胜辉, 朱芳来. 广义系统区间观测器设计. 控制与决策, 2016, **31**(2): 361–366)
- Le V T H, Stoica C, Alamo T, Camacho E F, Dumur D. Zonotopic guaranteed state estimation for uncertain systems. *Automatica*, 2013, **49**(11): 3418–3424
- Guo S H, Zhu F L. Actuator fault detection and interval reconstruction based on interval observers. In: Proceedings of the 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control. Toulouse, France: IEEE, 2017. **50**(1): 5061–5066
- Olaru S, De Doná J A, Seron M M, Stoican F. Positive invariant sets for fault tolerant multisensor control schemes. *International Journal of Control*, 2010, **83**(12): 2622–2640
- Martínez J J. Minimal RPI sets computation for polytopic systems using the bounded-real lemma and a new shrinking procedure. *International Federation of Automatic Control*, 2015, **48**(26): 182–187
- Meslem N, Loukkas N, Martínez J J. Using set invariance to design robust interval observers for discrete-time linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, **28**(11): 3623–3639
- Blesa J, Puig V, Saludes J. Identification for passive robust fault detection using zonotope-based set-membership approaches. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2011, **25**(9): 788–812
- Tang Wen-Tao, Wang Zhen-Hua, Wang Ye, Shen Yi. Fault diagnosis for uncertain systems based on unknown input setmembership filters. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(9): 1717–1724 (汤文涛, 王振华, 王烨, 沈毅. 基于未知输入集员滤波器的不确定系统故障诊断. 自动化学报, 2018, **44**(9): 1717–1724)
- Li Ji-Tao, Wang Zhen-Hua, Shen Yi. Set-membership fault detection observer design in finite-frequency domain for linear discrete-time system. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(7): 1531–1538 (李佶桃, 王振华, 沈毅. 线性离散系统的有限频域集员故障检测观测器设计. 自动化学报, 2020, **46**(7): 1531–1538)
- Combastel C. Merging Kalman filtering and zonotopic state bounding for robust fault detection under noisy environment. *International Federation of Automatic Control*, 2015, **48**(21): 289–295
- Blesa J, Puig V, Saludes J. Robust identification and fault diagnosis based on uncertain multiple input-multiple output linear parameter varying parity equations and zonotopes. *Journal of Process Control*, 2012, **22**(10): 1890–1912

- 27 Scott J K, Raimondo D M, Marseglia G R, Richard Braatz R D. Constrained zonotopes: A new tool for set-based estimation and fault detection. *Automatica*, 2016, **69**: 126–136
- 28 Combastel C. An extended zonotopic and Gaussian Kalman filter (EZGKF) merging set-membership and stochastic paradigms: Toward nonlinear filtering and fault detection. *Annual Reviews in Control*, 2016, **42**: 232–243
- 29 Wang Z H, Shen Y, Zhang X L, Wang Q. Observer design for discrete-time descriptor systems: An LMI approach. *Systems & Control Letters*, 2012, **61**(6): 683–687
- 30 Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1995, **37**(3): 479–481
- 31 Kofman E, Haimovich H, Seron M M. A systematic method to obtain ultimate bounds for perturbed systems. *International Journal of Control*, 2007, **80**(2): 167–178
- 32 Combastel C. Zonotopes and Kalman observers: Gain optimality under distinct uncertainty paradigms and robust convergence. *Automatica*, 2015, **55**: 265–273
- 33 Zhou M, Wang Z H, Shen Y. Fault detection and isolation method based on H_2/H_∞ unknown input observer design in finite frequency domain. *Asian Journal of Control*, 2017, **19**(5): 1777–1790
- 34 Jia Q X, Li H Y, Zhang Y C, Chen X Q. Robust observerbased sensor fault reconstruction for discrete-time systems via a descriptor system approach. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2015, **13**(2): 274–283

张文瀚 哈尔滨工业大学航天学院博士研究生. 主要研究方向为故障诊断和区间估计.

E-mail: wenhan.zhang@hit.edu.cn

(ZHANG Wen-Han Ph.D. candidate at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology. His research interest covers fault diagnosis and interval estimation.)

王振华 哈尔滨工业大学航天学院副教授. 主要研究方向为故障诊断与容错控制技术.

E-mail: zhenhua.wang@hit.edu.cn

(WANG Zhen-Hua Associate professor at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology. His research interest covers fault diagnosis and fault-tolerant control.)

沈毅 哈尔滨工业大学航天学院教授. 主要研究方向为故障诊断, 飞行器控制, 超声信号处理. 本文通信作者. E-mail: yishen_hit@126.com

(SHEN Yi Professor at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology. His research interest covers fault diagnosis, flight vehicle control, and ultrasound signal processing. Corresponding author of this paper.)