

# 带有不匹配干扰的多智能体系统有限时间积分滑模控制

刘凡<sup>1</sup> 杨洪勇<sup>1</sup> 杨怡泽<sup>2</sup> 李玉玲<sup>1</sup> 刘远山<sup>1</sup>

**摘要** 针对动态多智能体系统协同控制问题, 本文研究了带有不匹配干扰的二阶多智能体系统的有限时间包容控制, 提出了基于非线性积分滑模控制 (Integral sliding-mode control, ISMC) 的复合分布式包容控制算法. 首先利用 Lyapunov 稳定性和齐次性定理, 分析了未受扰系统的有限时间包容控制问题; 然后针对存在不匹配干扰的多智能体动态系统, 设计非线性有限时间干扰观测器估算智能体的状态和干扰, 提出基于干扰观测器的复合分布式积分滑模控制协议, 结合现代控制理论和滑模控制理论, 研究了带有不匹配干扰的多智能体系统有限时间包容控制问题. 最后数值仿真证明了控制算法的有效性.

**关键词** 不匹配干扰, 多智能体系统, 积分滑模控制, 有限时间收敛, 包容控制

**引用格式** 刘凡, 杨洪勇, 杨怡泽, 李玉玲, 刘远山. 带有不匹配干扰的多智能体系统有限时间积分滑模控制. 自动化学报, 2019, 45(4): 749–758

**DOI** 10.16383/j.aas.c180315

## Finite-Time Integral Sliding-Mode Control for Multi-Agent Systems With Mismatched Disturbances

LIU Fan<sup>1</sup> YANG Hong-Yong<sup>1</sup> YANG Yi-Ze<sup>2</sup> LI Yu-Ling<sup>1</sup> LIU Yuan-Shan<sup>1</sup>

**Abstract** In this paper, the finite-time containment control problem is investigated for the second-order multi-agent systems with mismatched disturbances. A composite distributed containment control algorithm is proposed based on nonlinear integral sliding-mode control (ISMC). First of all, by using the Lyapunov stability and the homogeneity property, the finite-time containment control for the systems without disturbances is analyzed. Then for the multi-agent dynamic systems with mismatched disturbances, a nonlinear finite-time disturbance observer is constructed to estimate the states and mismatched disturbances. And then, a composite distributed control protocol is proposed based on disturbance observer. By using the modern control theory and sliding-mode control, the finite-time containment control for multi-agent systems with mismatched disturbances is studied. Finally, numerical simulation results illustrate the effectiveness of the proposed control algorithm.

**Key words** Mismatched disturbances, multi-agent systems, integral sliding-mode control (ISMC), finite-time convergence, containment control

**Citation** Liu Fan, Yang Hong-Yong, Yang Yi-Ze, Li Yu-Ling, Liu Yuan-Shan. Finite-time integral sliding-mode control for multi-agent systems with mismatched disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(4): 749–758

近年来, 随着计算机技术、网络通信、控制工程等新兴产业的相互融合与促进, 信息物理系统 (Cyber-physical system, CPS) 随之出现, 并朝着大规模、复杂化、智能化的方向发展. 多智能体系统

分布式协调控制问题作为 CPS 系统的典型问题, 引起了众多研究者的广泛关注. 分布式协同控制因效率高、鲁棒性强等优点, 被广泛应用于无人机编队控制<sup>[1]</sup>、多机器人协同控制<sup>[2]</sup>、多飞行器系统群集控制<sup>[3–4]</sup> 等领域.

一致性问题是多智能体协同控制领域的基本问题, 也是协调控制中的研究热点之一<sup>[5–13]</sup>. 多智能体系统通过各智能体之间互相协调合作进行信息传递, 按照控制协议改变自身的状态, 从而使各个智能体达到状态一致. 近年来诸多学者已经分别针对一阶、二阶、混合阶以及高阶多智能体系统展开了深入的研究<sup>[5–7]</sup>. 考虑到许多自然现象的动力学特性不能用整数阶方程描述, 分数阶 (非整数阶) 动力学的智能个体合作行为也引起了许多研究者的关注<sup>[8–9]</sup>. 此外, 在解决多智能体系统一致性问题时, 常常会遇到存在领导者的情况, 这被称为 Leader-follower (领导跟随型) 问题<sup>[10]</sup>. 在多个领导者情况下, 多智能体

收稿日期 2018-05-16 录用日期 2018-10-06  
Manuscript received May 16, 2018; accepted October 6, 2018  
国家自然科学基金 (61673200, 61771231, 61471185), 山东省自然科学基金 (ZR2018ZC0438, ZR2017MF010, ZR2017PF010), 烟台市重点研发项目 (2016ZH061) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (61673200, 61771231, 61471185), Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2018ZC0438, ZR2017MF010, ZR2017PF010), and Key Research and Development Program of Yantai City (2016ZH061)  
本文责任编辑 鲁仁全  
Recommended by Associate Editor LU Ren-Quan  
1. 鲁东大学信息与电气工程学院 烟台 264025 中国 2. 新南威尔士大学电气工程与电信学院 悉尼 NSW 2052 澳大利亚  
1. School of Information and Electrical Engineering, Ludong University, Yantai 264025, China 2. School of Electrical Engineering and Telecommunications, University of New South Wales, Sydney NSW 2052, Australia

系统的跟踪问题就变成包容控制问题<sup>[11-14]</sup>。这是领导跟随型一致性问题在多个领导者情况下的扩展,跟随者在通信协议的作用下最终收敛到由多个领导者围成的某一目标区域内。文献 [13] 分别研究了通信拓扑为动态联合联通且存在通信时延情况下二阶网络化系统的包容控制问题。文献 [14] 研究了具有时延的分数阶多智能体系统的包容控制问题,利用 Laplace 变换和频域定理,提出了无向网络分数阶多智能体系统包容控制协议。

上述研究成果均是假设多智能体系统中各个智能体的状态渐近达到稳定,即当时间趋于无穷大时,各个智能体的状态可以达到某一共同值。然而在实际应用中,特别是某些控制精度比较高的系统,往往要求系统在很短的时间内能够达成一致。与渐近收敛相比,有限时间一致性控制法不仅可以保证系统的收敛速度更快,在系统存在外部干扰时也表现出更好的鲁棒性<sup>[15]</sup>。因此研究多智能体系统的有限时间一致性是很有实际意义的。目前关于多智能体系统的有限时间一致性问题已取得比较丰富的研究成果<sup>[16-18]</sup>,文献 [16] 研究了二阶多智能体系统有限时间快速收敛问题。文献 [17] 研究了带有外部干扰的二阶多智能体系统分布式有限时间包容控制,提出了分布式有限时间包容控制算法使得跟随者的状态在有限时间内收敛到由领导者组成的动态区域内。文献 [18] 针对联合连通拓扑下具有多领导者的二阶多智能体系统群集运动问题,提出了一种有限时间收敛的包容控制算法。

由于复杂多变的工作环境,多智能体系统通常会受到各种干扰的影响。为了处理系统干扰,研究者提出了许多先进的控制方法,包括自适应控制<sup>[19]</sup>、鲁棒控制<sup>[20]</sup>、滑模控制<sup>[21-22]</sup>等。然而大多数方法仅考虑匹配干扰,即干扰与控制输入在同一通道中。在多智能体系统中,常常存在异于控制输入通道进入系统的干扰,即不匹配干扰。不匹配干扰广泛存在于实际工程系统中,例如多导弹系统<sup>[23]</sup>和工业磁悬浮列车控制系统<sup>[24]</sup>。由于不匹配干扰无法直接利用反馈控制器消除,因此对带有不匹配干扰系统的协同控制的研究意义重大。文献 [24] 以工业磁悬浮列车控制系统为例,详细介绍了不匹配干扰的成因和影响,基于干扰观测器方法,介绍了状态通道和输出通道不匹配不确定系统干扰主动控制方法。文献 [25] 提出基于控制的干扰观测器 (Disturbance observer based control, DOBC) 方法,利用干扰前馈补偿和输出反馈复合控制来消除干扰。文献 [26] 研究了带有不匹配干扰的高阶多智能体系统分布式主动抗干扰控制方法,结合滑模控制理论和 DOBC 方法,实现系统的输出一致性。但文中各智能体的状态最终渐近收敛,没有考虑有限时间收敛的情况。文献 [27] 研究了不匹配二阶多智能体受扰系统的输出一致性

问题,文献 [28] 研究了带有不匹配干扰的多智能体系统有限时间包容控制问题。这两篇文献对系统模型作了处理,将不匹配干扰转变成匹配干扰,从而可以利用常规的处理方式消除干扰。然而在实际应用中存在很多情况不能如此处理,因此该方法有一定的局限性。文献 [29] 研究了基于扰动观测器的复合积分滑模制导律设计,给出一种基于积分滑模控制理论和非线性扰动观测理论的复合制导律方法,但是该方法没有考虑到系统中存在不匹配干扰的情况。

本文以文献 [24] 介绍的不匹配干扰为研究对象,研究带有不匹配干扰的二阶多智能体系统的有限时间包容控制问题。相对于文献 [27-28],本文的创新点在于设计了主动有限时间干扰观测器直接估算智能体的不匹配干扰,并在控制协议中做出干扰补偿,提出了较为新颖的复合分布式积分滑模控制律。应用滑模控制和现代控制等相关理论,研究了具有不匹配干扰二阶多智能体系统的有限时间包容控制问题。

## 1 预备知识

### 1.1 代数图论

假设  $n$  个节点的权重连接图用  $G = (V, E, A)$  来表示,其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  为  $n$  个节点的集合,节点的下标集合  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $E \subseteq V \times V$  为边的集合,  $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为图  $G$  的权重邻接矩阵,其中矩阵元素  $a_{ij}$  表示节点  $v_i$  与节点  $v_j$  的连接权重。定义  $N_i = \{v_j \in V | (v_i, v_j) \in E\}$  为节点  $v_i$  的邻居集合。当  $v_j \in N_i$  时,  $a_{ij} > 0$ , 否则  $a_{ij} = 0$ 。若对  $\forall i \in N, a_{ij} = a_{ji}, j \in N$ , 则图  $G$  为无向拓扑图,且邻接矩阵  $A$  为对称矩阵。若对  $\forall i \in N, a_{ij} \neq a_{ji}, j \in N$ , 则图  $G$  为有向拓扑图,且邻接矩阵  $A$  为非对称矩阵。假设图  $G$  中任一节点无自环,即对于  $\forall i \in N, a_{ii} = 0$ 。定义  $D$  为图  $G$  的度对角矩阵  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , 其中节点  $v_i$  的度  $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ 。图  $G$  的 Laplacian 矩阵定义为  $L = D - A$ 。无向联通拓扑图的 Laplacian 矩阵为对称矩阵。

### 1.2 相关引理和定义

**引理 1 (Input-to-state stability theorem, ISS)**<sup>[30]</sup>。考虑非线性系统  $\dot{x} = f(x, u, t)$ , 如果系统  $\dot{x} = f(x, 0, t)$  是全局均一化指数型稳定,当  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$  时,系统的  $\dot{x} = f(x, u, t)$  状态渐近收敛到 0, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

**引理 2**<sup>[15]</sup>。考虑系统  $\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x \in \mathbf{R}^n$ , 假设存在一个正定连续函数  $V(x) : U \rightarrow \mathbf{R}$ , 且实数  $c > 0, \alpha \in (0, 1)$ , 在  $U_0 \subset U$  的邻域上满足  $\dot{V}(x) + cV^\alpha(x) \leq 0, x \in U_0 \setminus \{0\}$ , 则  $V(x)$  在有限时间内收敛到 0。此外有限时间  $T$  满足  $T \leq$

$$\frac{V^{1-\alpha}(x(0))}{c(1-\alpha)}.$$

**定义 1**<sup>[12-13]</sup>. 假设集合  $X$  是向量空间的子集, 集合  $X$  的凸包定义为  $Co(X) = \{\sum_{i=1}^k a_i x_i | x_i \in X, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^k a_i = 1\}$ .

**定义 2**<sup>[15, 18]</sup>. 考虑连续非线性系统:  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ , 其中连续向量流  $f(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T$  与带有扩张  $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_n]$ ,  $r_i > 0$  的度  $\kappa \in \mathbf{R}$  是齐次的, 如果对于任意的  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  都有  $f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{\kappa+r_i} f_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**引理 3**<sup>[15, 18]</sup>. 若系统  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$  与带有扩张  $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_n]$ ,  $r_i > 0$  的度  $\kappa \in \mathbf{R}$  是齐次的, 函数  $f(\mathbf{x})$  是连续的, 且  $\mathbf{x} = 0$  是其一个渐近稳定平衡点. 如果齐次度  $\kappa < 0$ , 则该系统是有限时间稳定的.

**定义 3**. 如果网络化系统中的一个自主体至少存在一个邻接成员, 则称之为跟随者, 否则称为领导者.

## 2 二阶多智能体系统的有限时间包容控制

假设一个具有  $n$  个跟随者和  $m$  个领导者的多智能体系统, 其中每个智能体可理解为加权无向图  $G$  中的一个顶点, 各智能体之间的信息传递可理解为图  $G$  的边. 考虑二阶多智能体系统未受到干扰时的动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $i = \{1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m\}$ ,  $n$  表示跟随者的个数,  $m$  表示领导者的个数, 跟随者和领导者集合分别表示为  $F = \{1, 2, \dots, n\}$  和  $L = \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$ .  $x_i(t)$  和  $v_i(t)$  分别表示系统第  $i$  个智能体在  $t$  时刻的位置和速度,  $u_i(t)$  是控制输入. 假设领导者为作匀速运动的动态领导者, 对于  $\forall i \in L$ , 其动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

多 Leader-follower 型多智能体系统 (1) 和 (2) 的通信拓扑图可描述成  $G_{n+m} = (V_{n+m}, E_{n+m}, A_{n+m})$ , 其中  $m$  表示领导者的个数,  $n$  表示跟随者的个数. 图  $G_{n+m}$  的邻接矩阵为  $A_{n+m} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ , Laplacian 矩阵为  $L_{n+m} = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ , 可描述成  $L_{n+m} = \begin{bmatrix} L_f & L_d \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}$ ,  $L_f \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $L_d \in \mathbf{R}^{n \times m}$ .

**假设 1**. 领导者相互间不通信, 领导者与跟随者之间单向通信, 跟随者之间为双向通信, 且每个智能

体都可接收到它邻居发送的状态信息和干扰估计信息.

**假设 2**. 多 Leader-follower 型多智能体系统的通信拓扑  $G_{n+m}$  包含至少一条有向生成树.

**引理 4**<sup>[12]</sup>. 如果假设 2 成立, 多 Leader-follower 型多智能体系统的  $L_f$  是正定的, 此外  $-L_f^{-1} L_d$  为非负的且行和为 1.

**引理 5**<sup>[12]</sup>. 令  $\mathbf{x}_F = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $\mathbf{x}_L = [x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}]^T$ , 若有  $\mathbf{x}_F \rightarrow -L_f^{-1} L_d \mathbf{x}_L$ , 则网络化系统可以实现包容控制.

为了简化, 令  $\mathbf{x}_F = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $\mathbf{v}_F = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ ,  $\mathbf{x}_L = [x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}]^T$ ,  $\mathbf{v}_L = [v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{n+m}]^T$ ,  $\mathbf{u}_F = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ .  $\mathbf{x}_c = [x_{c1}, x_{c2}, \dots, x_{cn}]^T = -L_f^{-1} L_d \mathbf{x}_L$ ,  $\mathbf{v}_c = [v_{c1}, v_{c2}, \dots, v_{cn}]^T = \dot{\mathbf{x}}_c$ . 由定义 1、引理 3 和引理 5 可知,  $\mathbf{x}_F \rightarrow \mathbf{x}_c$  ( $x_i \rightarrow x_{ci}$ ,  $i \in F$ ) 意味着  $x_i$ ,  $i \in F$  收敛到凸包  $Co\{x_j, j \in L\}$  内, 即实现包容控制.

基于上述描述, 本节首先考虑不存在干扰的情况, 设计分布式控制协议, 使得各个跟随者的状态在有限时间内实现包容控制, 即  $x_i \rightarrow Co\{x_j, j \in L\}$ .

首先令跟踪误差为

$$\begin{cases} \omega_i^x = \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j) + \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} (x_i - x_j) \\ \omega_i^v = \sum_{j=1}^n a_{ij} (v_i - v_j) + \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} (v_i - v_j) \end{cases} \quad (3)$$

基于跟踪误差 (3), 设计控制器如下:

$$u_i = -k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\omega_i^x) - k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(\omega_i^v) \quad (4)$$

其中, 控制增益  $k_1, k_2 > 0$ ,  $0 < \alpha_1 < 1$ ,  $\alpha_2 = 2\alpha_1/(\alpha_1 + 1)$ .  $\text{sig}^\alpha(x_i) = |x_i|^\alpha \text{sgn}(x_i)$ ,  $\text{sgn}(\cdot)$  表示符号函数. 假设  $\text{sig}^\alpha(x) = [\text{sig}^\alpha(x_1), \text{sig}^\alpha(x_2), \dots, \text{sig}^\alpha(x_n)]^T$ .

**定理 1**. 考虑由  $n$  个跟随者和  $m$  个领导者组成的二阶动态多智能体系统 (1) 和 (2), 其通信拓扑图可描述成  $G_{n+m} = (V_{n+m}, E_{n+m}, A_{n+m})$ , 如果假设 1 和假设 2 成立, 则多智能体系统基于分布式控制协议 (4) 可实现全局有限时间包容控制.

**证明**. 由引理 4 可知, 多智能体系统 (1) 和 (2) 的  $L_f$  是正定的. 令  $\bar{\mathbf{x}}_F = \mathbf{x}_F + L_f^{-1} L_d \mathbf{x}_L$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_F = \mathbf{v}_F + L_f^{-1} L_d \mathbf{v}_L$ , 则跟踪误差 (3) 转变成矩阵形式为

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = L_f \mathbf{x}_F + L_d \mathbf{x}_L = L_f \bar{\mathbf{x}}_F \\ \dot{\omega}_v = L_f \mathbf{v}_F + L_d \mathbf{v}_L = L_f \bar{\mathbf{v}}_F \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $\omega_x = [\omega_1^x, \omega_2^x, \dots, \omega_n^x]^T$ ,  $\omega_v = [\omega_1^v, \omega_2^v, \dots, \omega_n^v]^T$ , 且  $\dot{\omega}_x = \omega_v$ . 因此速度跟踪误差  $\bar{\mathbf{v}}_F$  的微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{v}}_F = -k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega}_x) - k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(\boldsymbol{\omega}_v) \quad (6)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{v}}_F^T L_f \bar{\boldsymbol{v}}_F + \frac{k_1 |\boldsymbol{\omega}_x|^{\alpha_1+1}}{\alpha_1+1} \quad (7)$$

对  $V_1$  函数沿着式 (6) 求一次导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \bar{\boldsymbol{v}}_F^T L_f \dot{\bar{\boldsymbol{v}}}_F + k_1 |\boldsymbol{\omega}_x|^{\alpha_1} \boldsymbol{\omega}_v^T \text{sgn}(\boldsymbol{\omega}_x) = \\ &= \boldsymbol{\omega}_v^T (-k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega}_x) - k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(\boldsymbol{\omega}_v)) + \\ &= k_1 \boldsymbol{\omega}_v^T \text{sig}^{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega}_x) = -k_2 |\boldsymbol{\omega}_v|^{\alpha_2+1} \leq 0 \end{aligned}$$

注意到, 当  $\dot{V}_1 = 0$  时,  $\boldsymbol{\omega}_v = 0$ , 由于  $\boldsymbol{\omega}_v = L_f \bar{\boldsymbol{v}}_F$ , 且  $L_f$  是正定的, 所以  $\bar{\boldsymbol{v}}_F = 0$ . 由式 (6) 可知  $\boldsymbol{\omega}_x = 0$ . 因此只有在平衡点  $\boldsymbol{\omega}_x = 0, \boldsymbol{\omega}_v = 0$  处才有  $\dot{V}_1 = 0$ . 根据 Lyapunov 第二稳定性定理可知, 该系统在平衡点处渐近稳定. 进一步由式 (5) 可得  $\boldsymbol{x}_F \rightarrow -L_f^{-1} L_d \boldsymbol{x}_L, \boldsymbol{v}_F \rightarrow -L_f^{-1} L_d \boldsymbol{v}_L$ , 由引理 5 可知系统可以实现渐近包容控制.

下面分析系统的齐次性. 假设原动力学系统为

$$\begin{cases} f_1(x_i, v_i) = v_i(t) \\ f_2(x_i, v_i) = u_i(t) \end{cases} \quad (8)$$

取  $r_1 = 2, r_2 = 1 + \alpha_1, \kappa = \alpha_1 - 1$ , 则有

$$\begin{aligned} f_1(\varepsilon^{r_1} x_i, \varepsilon^{r_2} v_i) &= \varepsilon^{r_2} v_i(t) = \varepsilon^{r_1+\kappa} f_1(x_i, v_i) \\ f_2(\varepsilon^{r_1} x_i, \varepsilon^{r_2} v_i) &= \\ &= -k_1 \text{sig}^{\alpha_1} \left( \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} (\varepsilon^{r_1} x_i - \varepsilon^{r_1} x_j) \right) - \\ &= k_2 \text{sig}^{\alpha_2} \left( \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} (\varepsilon^{r_2} v_i - \varepsilon^{r_2} v_j) \right) = \\ &= -k_1 \varepsilon^{r_1 \alpha_1} \text{sig}^{\alpha_1} \left( \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} (x_i - x_j) \right) - \\ &= k_2 \varepsilon^{r_2 \alpha_2} \text{sig}^{\alpha_2} \left( \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} (v_i - v_j) \right) = \\ &= \varepsilon^{2\alpha_1} \left( -k_1 \text{sig}^{\alpha_1} \left( \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} (x_i - x_j) \right) - \right. \\ &= k_2 \text{sig}^{\alpha_2} \left( \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} (v_i - v_j) \right) \left. \right) = \\ &= \varepsilon^{r_2+\kappa} f_2(x_i, v_i) \end{aligned}$$

由定义 2 可知, 多智能体系统 (1) 和 (2) 与带有扩张  $\left( \underbrace{2, 2, \dots, 2}_n, \underbrace{1 + \alpha_1, 1 + \alpha_1, \dots, 1 + \alpha_1}_n \right)$  的

度  $\kappa = \alpha_1 - 1 < 0$  是齐次的, 且由引理 3 可知, 系统 (8) 可在有限时间内收敛.

综上可知, 多智能体系统 (1) 和 (2) 可实现有限时间包容控制.  $\square$

### 3 带有不匹配干扰的多智能体系统的有限时间包容控制

本节考虑二阶多智能体系统中存在的不匹配干扰和匹配干扰等多源干扰的情况, 假设二阶受扰多智能体系统的动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) + d_{i1}(t) \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) + d_{i2}(t) \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $i \in F = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n$  表示跟随者的个数,  $x_i(t)$  和  $v_i(t)$  分别是智能体的位置和速度,  $u_i(t)$  是控制输入,  $d_{i1}(t)$  和  $d_{i2}(t)$  分别表示不匹配干扰和匹配干扰.

领导者的动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_j(t) = v_j(t) \\ \dot{v}_j(t) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $j \in L = \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$ ,  $m$  表示领导者的个数,  $x_j(t)$  和  $v_j(t)$  分别是领导者位置和速度.

为了解决系统 (9) 中的不匹配干扰并保持系统的标称性能, 本节将结合积分滑模控制和非线性干扰观测器给出复合分布式控制协议. 首先, 通过设计非线性干扰观测器, 在有限时间内估算出系统的状态和干扰信息. 然后, 基于干扰估计值, 设计出带有前馈补偿项的复合分布式积分滑模控制协议.

#### 3.1 非线性干扰观测器设计

**假设 3.** 干扰  $d_{ik}(t)$  和  $\dot{d}_{ik}(t), i = \{1, 2, \dots, n\}, k = 1, 2$ , 都是有界的.

**注 1.** 假设 3 在 DOBC 领域是很常见的假设. 一方面, 如果干扰具有很快时变, 那么干扰观测器很难进行估算; 另一方面, 在实际应用上, 有很多种干扰满足这种假设, 例如: 常值干扰, 谐波干扰等<sup>[27-29]</sup>.

**引理 6**<sup>[31]</sup>. 对于一般系统

$$\dot{x} = f + gu + d \quad (11)$$

其中,  $x$  为状态量,  $u$  为控制量,  $d$  为系统干扰,  $f, g$  已知. 设计的非线性干扰观测器如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f + gu + z \\ z = -\lambda_1 \text{sig}^{\frac{2}{3}}(\hat{x} - x) + \hat{d} \\ \dot{\hat{d}} = -\lambda_2 \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\hat{d} - z) \end{cases} \quad (12)$$

其中, 增益  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ,  $\hat{x}$  和  $\hat{d}$  分别是状态  $x$  和干扰  $d$  的估计值, 则该观测器是有限时间收敛的.

根据引理 6, 设计干扰观测器如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = v_i + z_{i1} \\ z_{i1} = -\lambda_{i1} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(\hat{x}_i - x_i) + \hat{d}_{i1} \\ \dot{\hat{d}}_{i1} = -\lambda_{i2} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\hat{d}_{i1} - z_{i1}) \\ \dot{\hat{v}}_i = u_i + z_{i2} \\ z_{i2} = -\lambda_{i3} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(\hat{v}_i - v_i) + \hat{d}_{i2} \\ \dot{\hat{d}}_{i2} = -\lambda_{i4} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\hat{d}_{i2} - z_{i2}) \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $i \in F$ ,  $\hat{x}_i$  和  $\hat{v}_i$  分别是系统中跟随者的位置状态和速度的估计值,  $\hat{d}_{i1}$  和  $\hat{d}_{i2}$  分别是干扰的估计量,  $z_{i1}$  和  $z_{i2}$  为中间量,  $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}, \lambda_{i4} > 0$  为观测增益.

设  $e_{x_i} = x_i - \hat{x}_i$ ,  $e_{d_{i1}} = d_{i1} - \hat{d}_{i1}$ ,  $e_{v_i} = v_i - \hat{v}_i$ ,  $e_{d_{i2}} = d_{i2} - \hat{d}_{i2}$ , 则

$$\begin{cases} \dot{e}_{x_i} = -\lambda_{i1} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(e_{x_i}) + e_{d_{i1}} \\ \dot{e}_{d_{i1}} = -\lambda_{i2} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(e_{d_{i1}} - \dot{e}_{x_i}) + \dot{d}_{i1} \\ \dot{e}_{v_i} = -\lambda_{i3} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(e_{v_i}) + e_{d_{i2}} \\ \dot{e}_{d_{i2}} = -\lambda_{i4} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(e_{d_{i2}} - \dot{e}_{v_i}) + \dot{d}_{i2} \end{cases} \quad (14)$$

其中,  $\dot{d}_{i1} = \lambda_{i2} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\lambda_{i1} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(e_{x_i}))$ . 由引理 6 可知, 存在大于零的增益  $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}, \lambda_{i4}$ , 使得观测器是有限时间收敛, 即存在一个时刻  $T^*$ , 当  $t \in [0, T^*]$  时,  $e_{x_i}, e_{d_{i1}}, e_{v_i}, e_{d_{i2}}$  均有界; 当  $t > T^*$  时,  $e_{x_i} = 0$ ,  $e_{d_{i1}} = 0$ ,  $e_{v_i} = 0$ ,  $e_{d_{i2}} = 0$ .

### 3.2 复合式分布式控制律设计

下面基于上述设计的有限时间干扰观测器, 结合滑模控制理论, 设计复合分布式控制协议消除干扰, 并使得系统 (9) 和系统 (10) 实现有限时间包容控制.

首先令跟踪误差为

$$\begin{cases} \omega_i^x = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i - x_j) + \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij}(x_i - x_j) \\ \omega_i^v = \sum_{j=1}^n a_{ij}((\hat{v}_i + \hat{d}_{i1}) - (\hat{v}_j + \hat{d}_{j1})) + \\ \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij}((\hat{v}_i + \hat{d}_{i1}) - v_j) \end{cases} \quad (15)$$

基于跟踪误差 (15), 设计复合分布式控制协议如下:

$$u_i = -k_0 \text{sgn} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(s_i - s_j) + \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij}s_j \right) - k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\omega_i^x) - k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(\omega_i^v) - \dot{d}_{i2} \quad (16)$$

其中,  $k_0, k_1, k_2 > 0$ ,  $\hat{v}_i, \hat{d}_{i1}, \hat{d}_{i2}$  分别是干扰观测器 (13) 对系统速度和干扰的估计值,  $i \in F$ , 非线性动态积分滑模面为

$$s_i = \hat{v}_i + \hat{d}_{i1} - (\hat{v}_i(0) + \hat{d}_{i1}(0)) + \int_0^t (k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\omega_i^x) + k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(\omega_i^v)) d\tau \quad (17)$$

其中,  $0 < \alpha_1 < 1$ ,  $\alpha_2 = 2\alpha_1/(1 + \alpha_1)$ . 当  $t = 0$  时,  $s_i(0) = 0$ , 表示各智能体的状态从初始时刻就位于非线性滑模面 (17) 上.

**定理 2.** 考虑由  $n$  个跟随者和  $m$  个领导者组成的二阶受扰多智能体系统 (9) 和 (10), 其通信拓扑图可描述成  $G_{n+m} = (V_{n+m}, E_{n+m}, A_{n+m})$ , 如果假设 1~3 成立, 当切换增益满足  $k_0 > \delta$  时, 基于有限时间干扰观测器 (13) 和非线性积分滑模面 (17) 的复合分布式非线性积分滑模控制协议 (16) 可使得系统实现全局有限时间包容控制. 其中  $\delta = \max_i \{\lambda_3^* \text{sig}^{\frac{2}{3}}(e_{v_i}^*) + \lambda_2^* \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\lambda_1^* \text{sig}^{\frac{2}{3}}(e_{x_i}^*))\}$ ,  $e_{x_i}^* = \sup_{t \in [0, T^*]} \{e_{x_i}\}$ ,  $e_{v_i}^* = \sup_{t \in [0, T^*]} \{e_{v_i}\}$ ,  $\lambda_k^* = \max\{\lambda_{ik}\}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**证明.** 首先对滑模面 (17) 求一次导, 得

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \dot{\hat{v}}_i + \dot{\hat{d}}_{i1} + k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\omega_i^x) + k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(\omega_i^v) = \\ &u_i - \lambda_{i3} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(\hat{v}_i - v_i) + \dot{d}_{i2} + \dot{d}_{i1} + \\ &k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\omega_i^x) + k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(\omega_i^v) = \\ &-k_0 \text{sgn} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(s_i - s_j) + \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij}s_j \right) - \\ &\lambda_{i3} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(\hat{v}_i - v_i) + \dot{d}_{i1} = \\ &-k_0 \text{sgn} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(s_i - s_j) + \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij}s_j \right) + \\ &\lambda_{i3} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(e_{v_i}) + \lambda_{i2} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\lambda_{i1} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(e_{x_i})) \end{aligned}$$

令  $\mathbf{S} = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$ , 将上式转换成矩阵形式

$$\dot{\mathbf{S}} = -k_0 \text{sgn}(L_f \mathbf{S}) + \lambda_3 \text{sig}^{\frac{2}{3}}(\mathbf{e}_v) + \lambda_2 \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\lambda_1 \text{sig}^{\frac{2}{3}}(\mathbf{e}_x)) \quad (18)$$

其中,  $L_f$  为系统的 Laplacian 矩阵,  $\lambda_1 = \text{diag}\{\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{n1}\}$ ,  $\lambda_2 = \text{diag}\{\lambda_{12}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{n2}\}$ ,  $\lambda_3 = \text{diag}\{\lambda_{13}, \lambda_{23}, \dots, \lambda_{n3}\}$ ,  $\mathbf{e}_x = [e_{x_1}, e_{x_2}, \dots, e_{x_n}]^T$ ,  $\mathbf{e}_v = [e_{v_1}, e_{v_2}, \dots, e_{v_n}]^T$ .

构造函数  $V_2 = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T L_f \mathbf{S}$ , 对  $V_2$  求一次导, 得

$$\dot{V}_2 = \mathbf{S}^T L_f \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^T L_f (-k_0 \text{sgn}(L_f \mathbf{S})) +$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}^T L_f \left( \lambda_3 \text{sig}^{\frac{2}{3}}(\mathbf{e}_v) + \lambda_2 \text{sig}^{\frac{1}{2}} \left( \lambda_1 \text{sig}^{\frac{2}{3}}(\mathbf{e}_x) \right) \right) = \\ & -k_0 \sum_{i=1}^n |[L_f \mathbf{S}]_i| + \sum_{i=1}^n \left( \lambda_{i3} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(e_{v_i}) + \right. \\ & \left. \lambda_{i2} \text{sig}^{\frac{1}{2}} \left( \lambda_{i1} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(e_{x_i}) \right) \right) |[L_f \mathbf{S}]_i| \leq \\ & -(k_0 - \delta) \|L_f \mathbf{S}\|_1 \leq -(k_0 - \delta) \|L_f \mathbf{S}\|_2 \end{aligned} \quad \begin{cases} \dot{x}_i = \tilde{v}_i + e_{v_i} + e_{d_{i1}} \\ \dot{\tilde{v}}_i = -k_1 \text{sig}^{\alpha_1} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j) + \right. \\ \left. \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} (x_i - x_j) \right) - k_2 \times \\ \left. \text{sig}^{\alpha_2} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j) + \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} (\tilde{v}_i - v_j) \right) \right) \end{cases} \quad (22)$$

其中,  $\delta = \max_i \{ \lambda_{i3}^* \text{sig}^{\frac{2}{3}}(e_{v_i}^*) + \lambda_{i2}^* \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\lambda_{i1}^* \text{sig}^{\frac{2}{3}}(e_{x_i}^*)) \}$ ,  $e_{x_i}^* = \sup_{t \in [0, T^*]} \{ e_{x_i} \}$ ,  $e_{v_i}^* = \sup_{t \in [0, T^*]} \{ e_{v_i} \}$ ,  $\lambda_k^* = \max \{ \lambda_{ik} \}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . 由有限时间观测器 (13) 可知, 在  $[0, T^*]$  内,  $e_{x_i}$ ,  $e_{v_i}$  是有界的, 因此  $\delta$  一定存在. 由于  $L_f$  是正定的,  $\mathbf{S}^T L_f^2 \mathbf{S} = (L_f^{\frac{1}{2}} \mathbf{S})^T L_f (L_f^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}) \geq \lambda_{\min}(L_f) \mathbf{S}^T L_f \mathbf{S} = 2\lambda_{\min}(L_f) V_2$ . 因此

$$\dot{V} \leq -\sqrt{2}(k_0 - \delta) \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(L_f) V_2^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

因此, 当  $k_0 > \delta$  时, 由引理 2 可知各智能体状态可在有限时间内到达非线性滑模面 (17) 上. 假设各智能体状态可在  $t_1$  时刻到达滑模面上, 由引理 2 可得

$$\begin{aligned} t_1 & \leq \frac{\sqrt{2} V_2^{\frac{1}{2}}(0)}{(k_0 - \delta) \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(L_f)} \leq \\ & \frac{\left( \mathbf{S}^T(0) L_f^2 \mathbf{S}(0) \right)^{\frac{1}{2}}}{(k_0 - \delta) \lambda_{\min}(L_f)} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

式 (20) 表明各智能体状态从初始时刻开始就一直发生在非线性滑模面上.

下面证明系统有限时间包容控制. 首先假设跟随者的状态跟踪误差为  $\bar{\mathbf{x}}_F = \mathbf{x}_F + L_f^{-1} L_d \mathbf{x}_L = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_F = \mathbf{v}_F + L_f^{-1} L_d \mathbf{v}_L = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n]^T$ .

由有限时间观测器 (13) 可知, 存在一个时刻  $T^*$ , 当  $t > T^*$  时,  $e_{x_i} = e_{d_{i1}} = e_{v_i} = e_{d_{i2}} = 0$ . 因此, 闭合系统 (9), (10), (16) 的有限时间稳定性可分两步证明, 即  $[0, T^*]$  上状态跟踪误差  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{v}_i$  有界, 及  $t > T^*$  时, 全局有限时间收敛.

1) 注意到系统的状态一直发生在非线性积分滑模面上, 因此

$$\dot{s}_i = \dot{\tilde{v}}_i + \dot{\hat{d}}_{i1} + k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\omega_i^x) + k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(\omega_i^v) = 0 \quad (21)$$

令  $\tilde{v}_i = \hat{v}_i + \hat{d}_{i1}$ , 则  $\dot{x}_i = v_i + d_{i1} = (\hat{v}_i + \hat{d}_{i1}) + v_i + d_{i1} - \hat{v}_i - \hat{d}_{i1} = \tilde{v}_i + e_{v_i} + e_{d_{i1}}$ , 因此

应用 ISS 稳定性引理, 假设  $e_{v_i}$ ,  $e_{d_{i1}} = 0$ , 则系统 (22) 转变为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \tilde{v}_i \\ \dot{\tilde{v}}_i = -k_1 \text{sig}^{\alpha_1} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j) + \right. \\ \left. \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} (x_i - x_j) \right) - k_2 \times \\ \left. \text{sig}^{\alpha_2} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j) + \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} (\tilde{v}_i - v_j) \right) \right) \end{cases} \quad (23)$$

由定理 1 可知, 系统 (23) 是有限时间包容控制的, 结合引理 1, 系统 (22) 是 ISS 稳定的. 由观测器可知, 在  $[0, T^*]$  内  $e_{v_i}$  和  $e_{d_{i1}}$  有界, 因此系统 (22) 状态跟踪误差  $\bar{x}_i$  和  $\bar{v}_i$  有界. 而假设 1 中说明  $d_{i1}$  是有界的, 因此  $\hat{d}_{i1}$  也是有界的, 所以速度跟踪误差  $\tilde{v}_i$  是有界的.

2) (全局有限时间包容控制) 当  $t > T^*$  时,  $e_{x_i} = e_{d_{i1}} = e_{v_i} = e_{d_{i2}} = 0$ . 令  $\tilde{v}_i = \hat{v}_i + \hat{d}_{i1} = v_i + d_{i1}$ , 则

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \tilde{v}_i \\ \dot{\tilde{v}}_i = -k_1 \text{sig}^{\alpha_1} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j) + \right. \\ \left. \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} (x_i - x_j) \right) - k_2 \times \\ \left. \text{sig}^{\alpha_2} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j) + \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} (\tilde{v}_i - v_j) \right) \right) \end{cases} \quad (24)$$

由定理 1 可知, 系统可实现全局有限时间包容控制, 即在有限时间内  $\mathbf{x}_F \rightarrow -L_f^{-1} L_d \mathbf{x}_L$ ,  $\mathbf{v}_F + d_1 \rightarrow -L_f^{-1} L_d \mathbf{v}_L$ .  $\square$

**注 2.** 文献 [26] 研究了带有不匹配干扰的高阶多智能体系统分布式主动抗干扰控制方法, 同时采用了滑模控制理论和 DOBC 方法, 然而文献 [26] 设计的是常规的线性滑模面, 会出现抖振现象, 而本文设计的非线性积分滑模面不仅能有效消除抖振, 而且能增强系统的鲁棒性能. 文献 [27-28] 在研究带有不匹配干扰的多智能体系统时对系统模型进行了处理, 假设不匹配干扰二阶可微, 则可将不匹配干扰

转变成匹配干扰, 然后利用常规的处理方式消除干扰. 但在实际应用中存在很多情况不能如此处理, 因此这种方法有一定的局限性. 本文则直接对干扰进行观测, 并在控制器中添加干扰补偿项, 可有效抵消干扰的影响, 而不影响系统的性能.

#### 4 数值仿真

考虑 4 个跟随者和 3 个领导者组成的网络, 如图 1 所示.

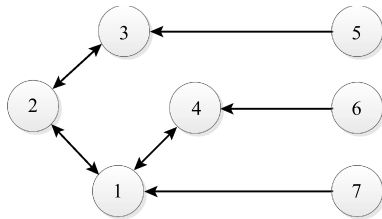


图 1 多智能体系统网络拓扑图

Fig. 1 The network topologies of multi-agent systems

图 1 中节点 1~4 是无向连通的跟随者, 节点 5~7 是单向发送信息的领导者. 假设拓扑图所有边的权重都是 1, 则系统的 Laplacian 矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中,

$$L_f = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, L_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

假设 4 个智能体都受到干扰影响: 智能体 1:  $d_{1,1} = 2 \tanh(2t)$ ,  $d_{1,2} = 2$ ; 智能体 2:  $d_{2,1} = 4 \tanh(t)$ ,  $d_{2,2} = 1$ ; 智能体 3:  $d_{3,1} = \text{sigmoid}(t)$ ,  $d_{3,2} = 2 \text{sigmoid}(2t)$ ; 智能体 4:  $d_{4,1} = 3 \text{sigmoid}(t)$ ,  $d_{4,2} = -\tanh(t)$ ,  $t > 0$ . 其中  $d_{i1}$ ,  $d_{i2}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 分别表示不匹配干扰和匹配干扰.

控制器的参数设置为  $k_0 = 10$ ,  $k_1 = 20$ ,  $k_2 = 30$ ,  $\alpha_1 = 0.8$ . 干扰观测器的参数设置为  $\lambda_{i,1} = 10$ ,  $\lambda_{i,2} = 20$ ,  $\lambda_{i,3} = 15$ ,  $\lambda_{i,4} = 32$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ; 假设 4 个跟随者的初始位置分别为  $x_1 = (2, 0)$ ,  $x_2 = (4, 0)$ ,  $x_3 = (0, 2)$ ,  $x_4 = (0, 4)$ , 领导者的初始坐标分别为  $x_5 = (6, 8)$ ,  $x_6 = (8, 8)$ ,  $x_7 = (8, 6)$ . 领导者为动态

领导者, 其初始速度为  $v_5 = (1, 1)$ ,  $v_6 = (1.2, 1.2)$ ,  $v_7 = (1, 1)$ . 仿真结果如图 2~4 所示.

图 2 是干扰观测器 (13) 对受扰系统 (9) 中各智能体的不匹配干扰和匹配干扰的观测量和估计误差, 从图 2(a) 和 2(c) 可以看出观测器可以快速估计出智能体所受的干扰, 在图 2(b) 和 2(d) 中各智能体所受干扰的观测误差很快的趋于 0, 说明观测器可准确地估算出系统中的干扰, 表现出较好的观测性能. 图 3 是智能体的位置和速度状态观测误差. 从图 3 可知, 在不到 1s 的时间误差曲线趋于 0, 直观地说明观测器可快速准确地估算出跟随者的状态信息, 从而确保控制器的有效作用.

图 4 是多智能体系统的位置状态轨迹图, 其中星号表示跟随者, 圆圈表示动态领导者, 可以看出 3 个动态领导者以一定的速度沿着某一方向移动, 而 4 个跟随者通过相互作用最终收敛到有领导者组成的几何体中. 特别地, 当  $t = 5\text{s}$  时, 跟随者还没有完全进入凸包内, 而当  $t = 10\text{s}$  时, 各跟随者均进入凸包内, 且跟随着领导者同步运动. 因此, 在控制律 (16) 下各智能体能够快速地跟踪到领导者, 并进入由领导者组成的几何体中, 实现了包容控制.

文献 [26] 研究的是带有不匹配干扰的多智能体系统滑模控制. 为了进一步说明本文方法的优越性, 本文将文献 [26] 所提方法拓展到多领导者情况. 利用上述数值参数, 得到图 5 所示的仿真图. 由图 5 可知, 当  $t = 10\text{s}$  时跟随者没有完全进入凸包内, 当  $t = 20\text{s}$  时, 系统才实现包容控制. 与文献 [26] 的实验结果比较, 说明本文方法可以更加快速地达到一致, 取得较好的结果.

综上, 带干扰的多智能体系统 (9) 和 (10) 通过有限时间干扰观测器 (13) 快速地估算干扰, 在复合分布式控制协议 (16) 下快速消除干扰, 使得各跟随者的状态收敛到由动态领导者组成的动态凸包内, 即  $x_i \rightarrow Co\{x_j, j \in L\}$ , 实现了包容控制.

#### 5 结论

本文研究带有不匹配干扰的二阶多智能体系统协同控制问题. 设计了非线性有限时间干扰观测器, 使得智能体的干扰可被观测和补偿. 利用滑模控制理论和基于控制的干扰观测器方法, 提出了复合分布式非线性积分滑模控制协议. 通过使用 Lyapunov 稳定性理论、代数图论、齐次性理论等方法, 研究了带有不匹配干扰的多智能体系统有限时间包容控制. 最后数值仿真表明了所提控制算法的有效性.

由于复杂多变的工作环境, 多智能体系统通常会受到各种干扰的影响. 在实际工程应用中, 不匹配干扰是十分常见的干扰, 因此本文所提方法具有一定的发展前景, 而且更具有普适性. 未来的研究方向

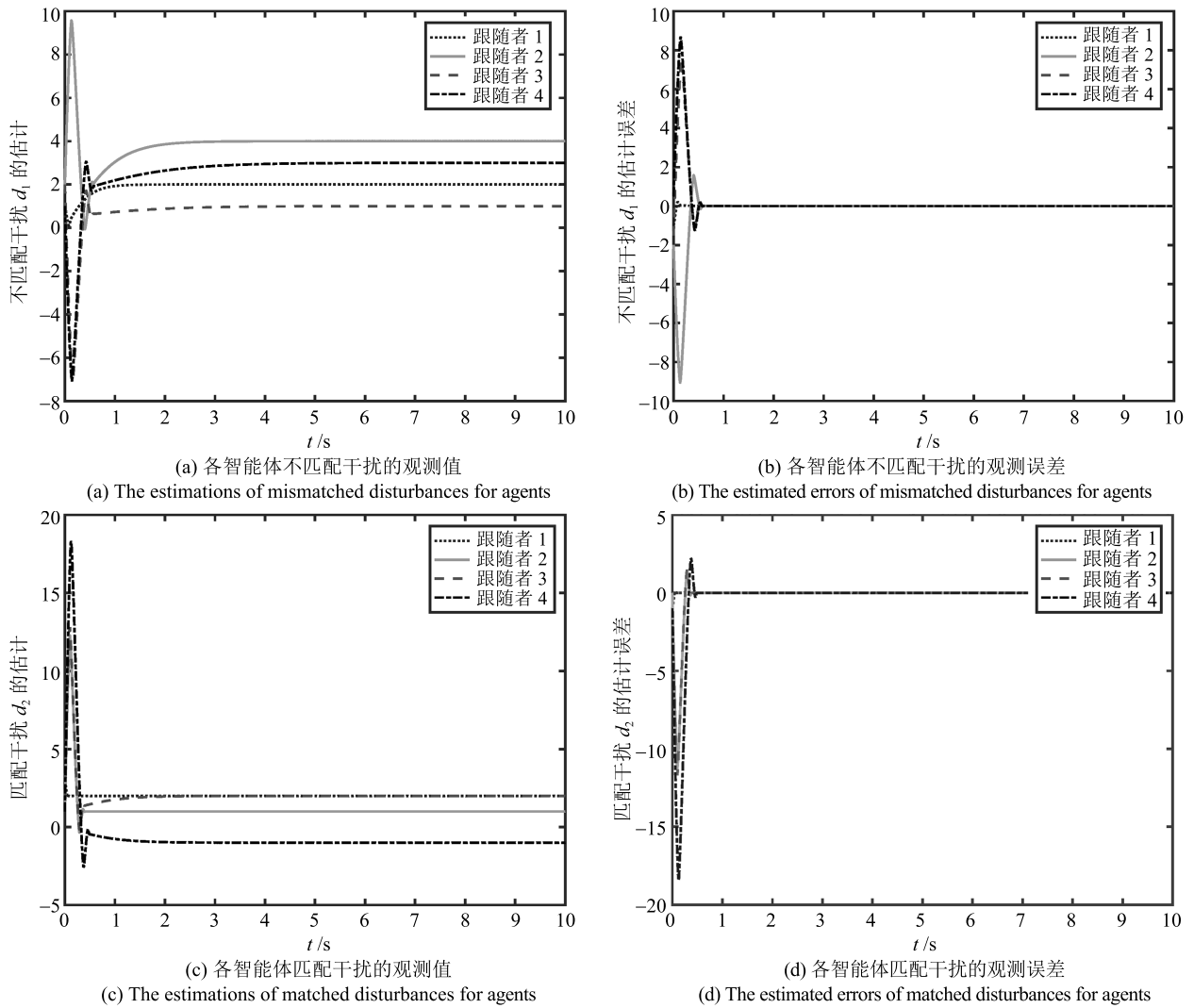


图 2 干扰观测器 (14) 的观测值及观测误差

Fig. 2 The estimations and estimated errors of DO (14)

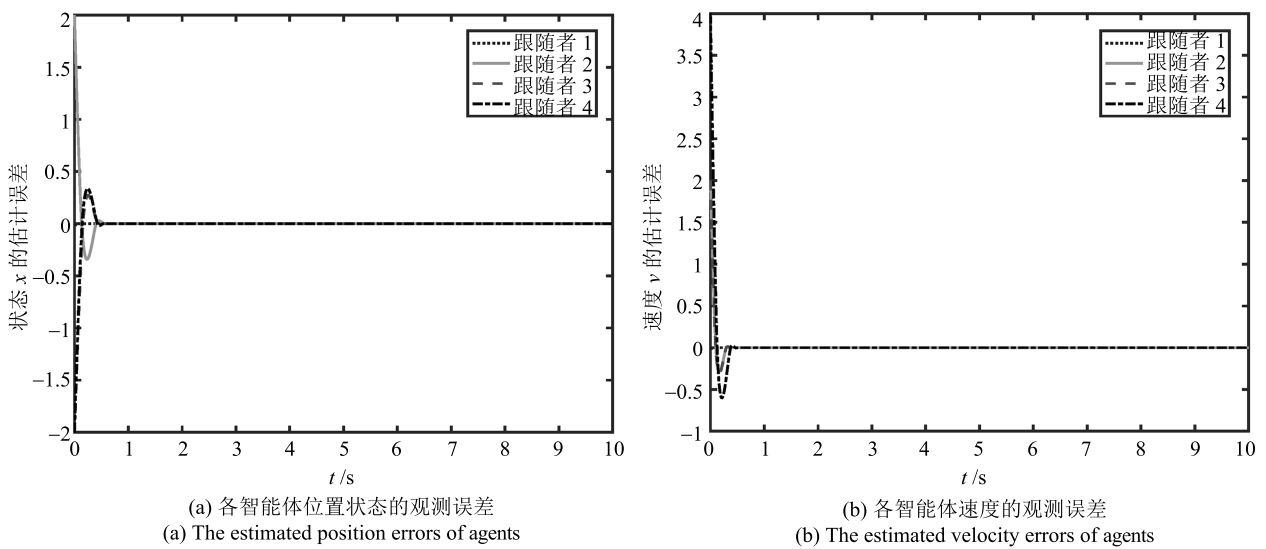


图 3 各智能体状态观测误差

Fig. 3 The estimated state errors of each agent



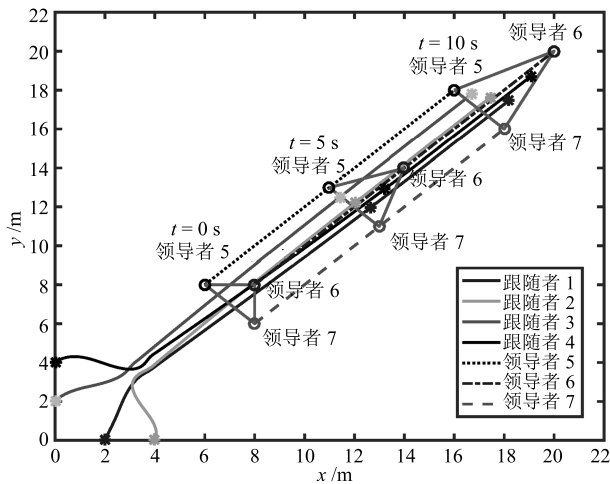


图4 跟随者与动态领导者的位置关系

Fig. 4 The trajectories of position for the followers and dynamic leaders

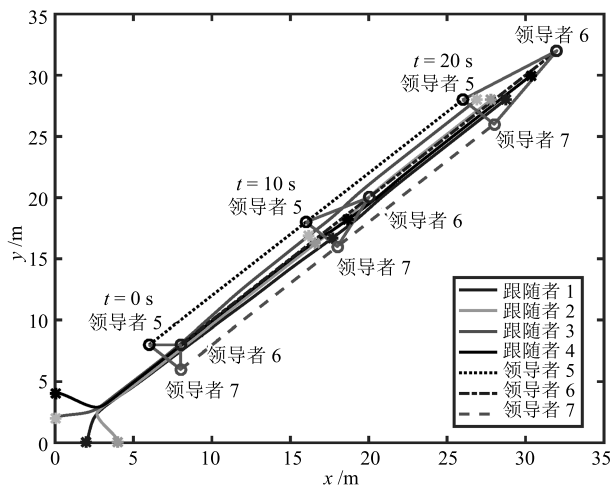


图5 文献[26]中跟随者与动态领导者的位置关系

Fig. 5 The trajectories of position for the followers and dynamic leaders in [26]

将针对更为复杂的环境, 设计新型的干扰观测器, 研究多智能体系统的协同控制问题.

## References

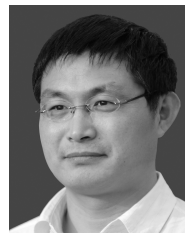
- Mondal A, Behera L, Sahoo S R, Shukla A. A novel multi-agent formation control law with collision avoidance. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2017, **4**(3): 558–568
- Wang Q, Chen Z, Liu P, Hua Q. Distributed multi-robot formation control in switching networks. *Neurocomputing*, 2017, **270**: 4–10
- Yang Hong-Yong, Chu Fu-Fang. Flocking motion of multi-agent system based weakly connected network. *Journal of Henan Polytechnic University (Natural Science)*, 2015, **34**(2): 231–235  
(杨洪勇, 褚福芳. 基于弱连通网络的多自主体系统群集运动. 河南理工大学学报(自然科学版), 2015, **34**(2): 231–235)
- Chu Fu-Fang, Yang Hong-Yong. Flocking motion and speed synchronization of multi-agent system with disturbance. *Complex Systems and Complexity Science*, 2015, **12**(1): 85–91  
(褚福芳, 杨洪勇. 具有干扰的多自主体系统的群集运动与速度同步. 复杂系统与复杂性科学, 2015, **12**(1): 85–91)
- Lin P, Ren W, Song Y. Distributed multi-agent optimization subject to nonidentical constraints and communication delays. *Automatica*, 2016, **65**: 120–131
- Dong L, Li J, Liu Q. Relay tracking control for second-order multi-agent systems with damaged agents. *ISA Transactions*, 2017, **71**: 25–31
- Wang Q, Fu J, Wang J. Fully distributed containment control of high-order multi-agent systems with nonlinear dynamics. *Systems and Control Letters*. 2017, **99**: 33–39
- Yang Hong-Yong, Guo Lei, Zhang Yu-Ling, Yao Xiu-Ming. Movement consensus of complex fractional-order multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(3): 489–496  
(杨洪勇, 郭雷, 张玉玲, 姚秀明. 复杂分数阶多自主体系统的运动一致性. 自动化学报, 2014, **40**(3): 489–496)
- Yang Hong-Yong, Guo Lei, Zhang Yu-Ling, Yao Xiu-Ming. Delay consensus of fractional-order multi-agent systems with sampling delays. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(9): 2022–2028  
(杨洪勇, 郭雷, 张玉玲, 姚秀明. 离散时间分数阶多自主体系统的时延一致性. 自动化学报, 2014, **40**(9): 2022–2028)
- Zhang D, Xu Z, Wang Q G, Zhao Y B. Leader-follower  $H_\infty$  consensus of linear multi-agent systems with aperiodic sampling and switching connected topologies. *ISA Transactions*, 2017, **68**: 150–159
- Li W, Xie L, Zhang J F. Containment control of leader-following multi-agent systems with Markovian switching network topologies and measurement noises. *Automatica*, 2015, **51**: 263–267
- Wang F Y, Yang H Y, Zhang S N, Han F J. Containment control for first-order multi-agent systems with time-varying delays and uncertain topologies. *Communications in Theoretical Physics*, 2016, **66**(8): 249–255
- Wang F Y, Yang H Y, Liu Z X, Chen Z Q. Containment control of leader-following multi-agent systems with jointly-connected topologies and time-varying delays. *Neurocomputing*, 2017, **260**: 341–348
- Yang H Y, Wang F Y, Han F J. Containment control of fractional order multi-agent systems with time delays. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2016, **99**: 1–6
- Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, **38**(3): 751–766
- Xiao Q Y, Wu Z H, Peng L. Fast finite-time consensus tracking of second-order multi-agent systems with a virtual leader. *Journal of Networks*, 2014, **9**(12): 3268–3274
- Wang X, Li S, Shi P. Distributed finite-time containment control for double-integrator multiagent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, **44**(9): 1518–1528

- 18 Zhuang Hao, Yang Hong-Yong. Finite-time containment control of second-order multi-agent systems with jointly connected topologies. *CAAI transactions on intelligent systems*, 2017, **12**(2): 188–195  
(庄昊, 杨洪勇. 联合连通拓扑下的二阶多自主系统有限时间包容控制. 智能系统学报, 2017, **12**(2): 188–195)
- 19 Liu Yuan, Min Hai-Bo, Wang Shi-Cheng, Zhang Jin-Sheng, Liu Zhi-Guo. Distributed adaptive synchronization of networked euler-lagrange systems with communication delays. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(8): 1270–1279  
(刘源, 闵海波, 王仕成, 张金生, 刘志国. 时延网络中 Euler-Lagrange 系统的分布式自适应协调控制. 自动化学报, 2012, **38**(8): 1270–1279)
- 20 Wang M, Ren X, Chen Q. Robust tracking and distributed synchronization control of a multi-motor servomechanism with  $H_\infty$  performance. *ISA Transactions*, 2017, **72**: 147–160
- 21 Sun Z, Zhang G, Lu Y, Zhang W. Leader-follower formation control of underactuated surface vehicles based on sliding mode control and parameter estimation. *ISA Transactions*, 2017, **72**: 15–24
- 22 Zhang Q, Li L, Yan X G, Spurgeon S K. Sliding mode control for singular stochastic Markovian jump systems with uncertainties. *Automatica*, 2017, **79**: 27–34
- 23 Zhao Q, Dong X, Liang Z, Ren Z. Distributed cooperative guidance for multiple missiles with fixed and switching communication topologies. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2017, **30**(4): 1570–1581
- 24 Yang J, Zolotas A, Chen W H, Michail K, Li S. Robust control of nonlinear MAGLEV suspension system with mismatched uncertainties via DOBC approach. *ISA Transactions*, 2011, **50**(3): 389–396
- 25 Li S H, Yang J, Chen W H, Chen X. *Disturbance Observer-Based Control: Methods and Applications*. Boca Raton, Florida, USA: CRC Press, Inc. 2014. 52–85
- 26 Wang X Y, Li S H, James Lam. Distributed active anti-disturbance output consensus algorithms for higher-order multi-agent systems with mismatched disturbances. *Automatica*, 2016, **74**: 30–37
- 27 Liu Fan, Li Yu-Ling, Yang Hong-Yong. Consensus for leader-follower multi-agent systems with mismatched disturbance and correlated uncertainties. *Information and control*, 2018, **47**(1): 111–118, 128  
(刘凡, 李玉玲, 杨洪勇. 基于多源干扰的 Leader-follower 多智能体系统的一致性. 信息与控制, 2018, **47**(1): 111–118, 128)
- 28 Li Yu-Ling, Yang Hong-Yong, Liu Fan, Yang Yi-Ze. Finite-time containment control of second-order multi-agent systems with unmatched disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2018. <https://doi.org/10.16383/j.aas.2018.c170571>, August 25, 2018  
(李玉玲, 杨洪勇, 刘凡, 杨怡泽. 带有不匹配干扰的二阶多自主系统有限时间包容控制. 自动化学报, 2018. <https://doi.org/10.16383/j.aas.2018.c170571>, August 25, 2018)
- 29 Zhang Z, Li S, Luo S. Terminal guidance laws of missile based on ISMC and NDOB with impact angle constraint. *Aerospace Science and Technology*, 2013, **31**(1): 30–41
- 30 Khalil H K. *Nonlinear Systems (3rd ed)*. New York, USA: Prentice Hall. 2002. 120–125

- 31 Bu Xiang-Wei, Wu Xiao-Yan, Chen Yong-Xing, Bai Rui-Yang. Nonlinear-disturbance-observer-based sliding mode backstepping control of hypersonic vehicles. *Control Theory and Applications*, 2014, **31**(11): 1473–1479  
(卜祥伟, 吴晓燕, 陈永兴, 白瑞阳. 基于非线性干扰观测器的高超声速飞行器滑模反演控制. 控制理论与应用, 2014, **31**(11): 1473–1479)



刘凡 鲁东大学信息与电气工程学院硕士研究生. 主要研究方向为多智能体编队控制. E-mail: jsgyliufan@163.com  
(LIU Fan Master student at the School of Information and Electrical Engineering, Ludong University. His main research interest is formation control of multi-agent systems.)



杨洪勇 鲁东大学信息与电气工程学院教授. 主要研究方向为复杂网络, 多智能体编队控制, 智能控制, 非线性系统控制. 本文通信作者.

E-mail: hyyang@yeah.net

(YANG Hong-Yong Professor at the School of Information and Electrical Engineering, Ludong University. His research interest covers complex network, multi-agent systems, intelligence control, and nonlinear system control. Corresponding author of this paper.)



杨怡泽 新南威尔士大学电气工程与信息学院硕士研究生. 主要研究方向为多智能体群集运动.

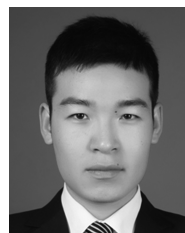
E-mail: yangyz1994@126.com

(YANG Yi-Ze Master student at the School of Electrical Engineering and Telecommunications, University of New South Wales, Australia. His main research interest is flocking motion of multi-agent systems.)



李玉玲 鲁东大学信息与电气工程学院硕士研究生. 主要研究方向为多智能体编队控制. E-mail: liyuling822@163.com

(LI Yu-Ling Master student at the School of Information and Electrical Engineering, Ludong University. Her main research interest is formation control of multi-agent systems.)



刘远山 鲁东大学信息与电气工程学院硕士研究生. 主要研究方向为多智能体编队控制.

E-mail: liuyuanshan@163.com

(LIU Yuan-Shan Master student at the School of Information and Electrical Engineering, Ludong University. His main research interest is formation control of multi-agent systems.)