

基于单向耦合法的 uncertain 复杂网络间有限时间同步

张檬¹ 韩敏²

摘要 针对具有不确定性的复杂网络有限时间同步问题, 提出一种新颖的单向耦合控制方法. 构建含有未知参量及未知拓扑结构的驱动-响应复杂网络模型, 考虑两个网络具有不同的节点数, 同时受到时变耦合时滞的影响, 并且网络内部分别具有不同的节点系统. 基于有限时间稳定性理论和线性矩阵不等式变换, 通过在响应网络中引入单向耦合项, 实现两个网络间的有限时间同步, 同时准确辨识未知参量及未知拓扑结构. 仿真实验验证所提同步方法的有效性, 对比实验结果表明所提方法在减少耦合数量的同时具有更快的同步速率及更小的波动范围.

关键词 复杂网络, 有限时间同步, 单向耦合, 未知参量

引用格式 张檬, 韩敏. 基于单向耦合法的 uncertain 复杂网络间有限时间同步. 自动化学报, 2021, 47(7): 1624-1632

DOI 10.16383/j.aas.c180102

Finite-time Synchronization Between Uncertain Complex Networks Based on Unidirectional Coupling Method

ZHANG Meng¹ HAN Min²

Abstract To solve the problem of finite-time synchronization of uncertain complex networks, a novel unidirectional coupling control method is proposed. First, a drive-response complex network model with unknown parameters and unknown topological structure is constructed. The two networks have different sizes, and each of which contains two types of nonidentical nodes and time-varying coupling delay. Based on the finite-time stability theory and the linear matrix inequality, the finite-time synchronization between two networks is realized by adding a unidirectional coupling term in the response network, the unknown parameters and the unknown topological structure can be identified, simultaneously. The simulation experiments verify the validity of the proposed scheme. Moreover, the comparison experiments show that the proposed method achieves faster synchronization rate and smaller fluctuation range as well as reduced coupling quantity.

Key words Complex networks, finite-time synchronization, unidirectional coupling, unknown parameter

Citation Zhang Meng, Han Min. Finite-time synchronization between uncertain complex networks based on unidirectional coupling method. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(7): 1624-1632

复杂网络在现实世界中普遍存在, 如互联网、神经网络、电力网络等^[1-2]. 复杂网络一般由大量节点及连接边构成, 并具有小世界及无标度等特性^[3-4]. 近年来, 由于许多复杂的实际问题都可以被抽象为复杂网络模型进行研究而备受各学科领域的关注^[5-6].

同步现象是复杂网络的典型动力学行为之一, 其通常指通过自身耦合或施加外力等策略使网络节点从不同的初始状态出发, 随着网络的演化按照某种方式逐渐趋于一致的状态^[7-8]. 对于网络同步问题, 许多学者做了深入研究, 先后提出了多种有效的控制技术, 包括: 自适应控制^[9]、脉冲控制^[10]、牵制控制^[11]、输出反馈控制^[12]和耦合控制^[13]等. 其中, 耦合控制不同于大多数依赖外部控制器 $u_i(t)$ 的控制方法, 它是通过网络间的耦合关系实现同步控制的. 文献 [13] 利用自适应原理及双向耦合的同步方法, 实现了两个复杂网络间的同步控制, 并辨识得到未知参量及未知拓扑结构. 在已有研究中, 双向耦合控制方法是较为常见的^[13-15], 但利用单向耦合方法实现网络同步的研究却相对较少.

目前, 大多数关于复杂网络同步的理论方法只能实现网络的渐近^[16]或指数渐近同步^[17], 保证在 $t \rightarrow \infty$ 时, 误差 $e(t) \rightarrow 0$, 即在无限时间内, 实现渐

收稿日期 2018-02-22 录用日期 2018-05-07

Manuscript received February 22, 2018; accepted May 7, 2018

国家自然科学基金 (61773087), 中央高校基本科研业务费专项资金 (DUT20LAB114, DUT2018TB06), 沈阳航空航天大学引进人才科研启动基金 (19YB70) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61773087), the Special Funds for Fundamental Research Funds of the Central Universities (DUT20LAB114, DUT2018TB06), the Scientific Research Started Foundation for Introduced Talents of Shenyang Aerospace University (19YB70)

本文责任编辑 刘艳军

Recommended by Associate Editor LIU Yan-Jun

1. 沈阳航空航天大学人工智能学院 沈阳 110135 2. 大连理工大学电子信息与电气工程学部 大连 116023

1. School of Artificial Intelligence, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110135 2. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023

近稳定收敛, 对同步的时间与速度并没有进一步的考虑. 但在实际工程中, 人们通常期望较快的收敛速率, 并可以预知所需的收敛时间. 例如在保密通信中, 若同步传输速度越快、时间越短, 并且可准确预知到达时间, 就会有效减小信息被窃取的风险. 由此, 为了实现更优控制, 有限时间同步思想被提出并愈发被研究学者所重视. 该类方法可以提前预知同步时间, 并具有更好的鲁棒性和抗干扰性, 控制效果更优, 在理论和实际上都具有重要的研究意义^[18]. 文献 [19] 在误差函数中加入比例矩阵, 通过设计一个线性状态反馈同步控制器, 实现了有限时间混合外同步控制. 文献 [20] 针对含有时滞的驱动-响应分数阶忆阻神经网络, 利用反馈控制技术, 完成了有限时间同步控制. 文献 [21] 研究了具有马尔科夫拓扑结构及分布式脉冲效应的耦合网络全局有限时间同步. 文献 [22] 提出了一种新颖的切换控制方法, 实现了忆阻递归神经网络间的有限时间同步控制.

此外, 在研究中较全面的考虑各种影响因素, 建立更贴近实际网络特性的网络模型是复杂网络同步研究的重要方向. 例如, 在实际中, 网络参量或拓扑结构的不确定性是常见的, 此时理论研究中假设各参量已知的方法便不再适用. 在已有的成果中, 文献 [23–24], 考虑含有未知参量与未知拓扑结构的复杂网络同步问题, 但是所提方法只能保证一般渐近同步的实现, 对同步时间没有讨论. 文献 [25–27], 基于有限时间同步, 考虑了节点含有未知参量的情况, 但是拓扑结构均默认为已知. 另外, 时滞是影响动力学行为的重要特性, 是实际工程中普遍存在的影响因素, 很多学者在网络同步的研究中都考虑了这一因素. 文献 [28] 针对时滞扩散性复杂网络系统, 通过自适应脉冲控制方法, 设计脉冲控制器, 实现了同步保性能控制. 在实际中, 可能存在的未知参量、未知拓扑结构及时滞等因素会增加网络的复杂性, 进而对同步结果产生较大影响. 不同的节点系统和节点数也是实际中常见, 在研究中却往往被忽略.

根据以上的分析, 怎样在诸多因素的影响下, 快速实现同步控制并辨识得到未知量, 是网络同步研究中亟待解决的问题. 本文针对此, 建立更贴近实际网络特性的网络模型, 研究耦合网络间的参量和拓扑结构辨识及有限时间同步控制问题. 所提出的单向耦合方法, 仅需从响应网络中提取单向状态变量信号与驱动网络相耦合, 使驱动和响应网络建立关联, 基于有限时间稳定性理论和线性矩阵不等式变换, 即可实现驱动-响应网络的有限时间同步及

未知参量和未知拓扑结构的辨识. 最后通过仿真实验验证方法的有效性及其优异性.

1 网络模型与预备条件

考虑具有 N_1 个节点的复杂网络, 网络中含两种不同的节点系统, 受时变耦合时滞的影响, 其中网络的第 i 个节点的状态方程可以表示为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = f_i(\mathbf{x}_i(t), \boldsymbol{\alpha}_i) + \sum_{j=1}^{N_1} c_{ij} \mathbf{x}_j(t - \tau(t)), \\ i = 1, 2, \dots, N^* \\ \dot{\mathbf{x}}_i(t) = g_i(\mathbf{x}_i(t), \boldsymbol{\beta}_i) + \sum_{j=1}^{N_1} c_{ij} \mathbf{x}_j(t - \tau(t)), \\ i = N^* + 1, N^* + 2, \dots, N_1 \end{cases} \quad (1)$$

将网络 (1) 作为驱动网络, 构造具有 N_2 个节点并含有未知参量及未知拓扑结构的响应网络, 状态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_i(t) = f_i(\mathbf{y}_i(t), \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i) + \sum_{j=1}^{N_2} \hat{c}_{ij} \mathbf{y}_j(t - \tau(t)) + \\ r_i(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N^* \\ \dot{\mathbf{y}}_i(t) = g_i(\mathbf{y}_i(t), \hat{\boldsymbol{\beta}}_i) + \sum_{j=1}^{N_2} \hat{c}_{ij} \mathbf{y}_j(t - \tau(t)) + \\ r_i(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t)), \\ i = N^* + 1, N^* + 2, \dots, N_2 \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))^T \in \mathbf{R}^n$ 为驱动网络节点的状态向量, $\mathbf{y}_i(t) = (y_{i1}(t), y_{i2}(t), \dots, y_{in}(t))^T \in \mathbf{R}^n$ 是响应网络中第 i 个节点的状态向量. $f, g: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为连续非线性光滑函数, $\tau(t) \geq 0$ 为时变耦合时滞. $C = [c_{ij}]_{N_1 \times N_1}$ 为驱动网络的外部耦合矩阵, 表示网络的拓扑结构, 一般被定义为: 当第 i 个节点与第 j ($j \neq i$) 个节点连接, 则耦合 $c_{ij} \neq 0$; 否则, $c_{ij} = 0$ ($j \neq i$). $\hat{C} = [\hat{c}_{ij}]_{N_2 \times N_2}$ 为响应网络的未知耦合矩阵, 即响应网络的拓扑结构未知. r_i ($i = 1, 2, \dots, N_2$) 为网络间的耦合强度系数, 假设 $N_1 \geq N_2$.

将节点系统进行拆分 $f_i(\mathbf{x}_i(t), \boldsymbol{\alpha}_i) = F_i(\mathbf{x}_i(t)) + S_i(\mathbf{x}_i(t)) \boldsymbol{\alpha}_i$, $g_i(\mathbf{x}_i(t), \boldsymbol{\beta}_i) = G_i(\mathbf{x}_i(t)) + T_i(\mathbf{x}_i(t)) \boldsymbol{\beta}_i$, $f_i(\mathbf{y}_i(t), \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i) = F_i(\mathbf{y}_i(t)) + S_i(\mathbf{y}_i(t)) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$, $g_i(\mathbf{y}_i(t), \hat{\boldsymbol{\beta}}_i) = G_i(\mathbf{y}_i(t)) + T_i(\mathbf{y}_i(t)) \hat{\boldsymbol{\beta}}_i$, 这里 $S: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m_1}$, $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m_2}$. $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbf{R}^{m_1}$, $\boldsymbol{\beta}_i \in \mathbf{R}^{m_2}$ 是驱动网络的参量. $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \in \mathbf{R}^{m_1}$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i \in \mathbf{R}^{m_2}$ 是待辨识的响应网络中的未知参量.

定义误差向量为 $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t)$ ($i = 1,$

$2, \dots, N_2$), 待辨识参量误差为 $\tilde{\alpha}_i = \hat{\alpha}_i - \alpha_i, \tilde{\beta}_i = \hat{\beta}_i - \beta_i, \tilde{c}_{ij} = \hat{c}_{ij} - c_{ij}$.

定义 1. 对于复杂网络 (1) 和 (2), 若存在某一时刻 $t_1 > 0$, 使得对任意 $i, j = 1, 2, \dots, N_2, t \geq t_1$ 有 $\lim_{t \rightarrow t_1} \|e_i(t)\| = 0$ 与 $\lim_{t \rightarrow t_1} \|\tilde{\alpha}_i\| = \lim_{t \rightarrow t_1} \|\tilde{\beta}_i\| = \lim_{t \rightarrow t_1} |\tilde{c}_{ij}| = 0$ 恒成立, 则称两个网络在有限时间 t_1 内实现同步控制, 并且网络中的未知参量及未知拓扑结构在时间 t_1 内正确辨识.

引理 1. 如果存在连续、正定函数 $V(t)$ 满足如下不等式条件:

$$\dot{V}(t) \leq -aV^\eta(t), \forall t \geq t_0, V(t_0) \geq 0 \quad (3)$$

其中常实数 $a > 0, 0 < \eta < 1$. 那么对于任意初始时刻 t_0 , $V(t)$ 满足如下不等式:

$$V^{1-\eta}(t) \leq V^{1-\eta}(t_0) - a(1-\eta)(t-t_0), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4)$$

且 $V(t) \equiv 0, \forall t \geq t_1$. 其中, $t_1 = t_0 + V^{1-\eta}(t_0)/a(1-\eta)$ 即为实现同步控制所需时间.

引理 2. 对于任意实数 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}^n$ 及 $0 < q < 2$, 可以得到如下不等式成立:

$$\|x_1\|^q + \|x_2\|^q + \dots + \|x_n\|^q \geq \left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 \right)^{\frac{q}{2}} \quad (5)$$

进一步可以得到:

$$\sum_{i=1}^n \|x_n\|^q \geq \left(\sum_{i=1}^n \|x_n\|^2 \right)^{\frac{q}{2}}$$

引理 3. 对于任意向量 $\mathbf{x}_i(t), \mathbf{y}_i(t) \in \mathbf{R}^n$, 存在正定矩阵 $H \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 满足如下矩阵不等式:

$$\mathbf{x}_i^\top(t) \mathbf{y}_i(t) \leq \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}_i^\top(t) H \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{y}_i^\top(t) H^{-1} \mathbf{y}_i(t) \right) \quad (6)$$

假设 1. 假设 $\tau(t)$ 是一个可微的函数且满足 $0 \leq \dot{\tau}(t) \leq \varepsilon < 1$.

假设 2. 对任意的 $\mathbf{x}_i(t), \mathbf{y}_i(t) \in \mathbf{R}^n$, 存在正常量 l_1 和 l_2 , 满足:

$$\begin{aligned} \|f_i(\mathbf{y}_i(t), \alpha_i) - f_i(\mathbf{x}_i(t), \alpha_i)\| &\leq l_1 \|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t)\| \\ \|g_i(\mathbf{y}_i(t), \beta_i) - g_i(\mathbf{x}_i(t), \beta_i)\| &\leq l_2 \|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t)\| \end{aligned} \quad (7)$$

其中, 向量 \mathbf{x} 的范数 $\|\cdot\|$ 定义为 $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^\top \mathbf{x})^{1/2}$.

2 同步原理分析

根据定义 1, 有限时间的同步问题可以被看作为有限时间内误差系统的稳定性问题. 当 $t \rightarrow t_1$ 时

有 $e_i(t) \rightarrow 0$, 就认为复杂网络 (1) 与 (2) 实现有限时间同步. 本文利用两个网络间的耦合关系, 通过在响应网络中加入耦合项的作用, 实现网络同步, 并同时辨识未知参量及未知拓扑结构.

响应网络中的耦合项设计如下:

$$\begin{aligned} \dot{r}_i = \lambda_i &\left[\frac{\sum_{j=N_2+1}^{N_1} r_j e_i^\top(t) c_{ij} \mathbf{x}_j(t - \tau(t))}{r_i^2} + \right. \\ &\left. \Lambda - \frac{r_i e_i^\top(t)}{r_i^2} (k \text{sign}(e_i(t))) - \right. \\ &\left. \frac{r_i k}{2r_i^2(1-\varepsilon)} \left(\int_{t-\tau(t)}^t e_i^\top(\varphi) e_i(\varphi) d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \right], \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, N_2 \quad (8)$$

其中, $\Lambda = -e_i^\top(t) e_i(t) - \xi e_i^\top(t) e_i(t) - \frac{k}{\sqrt{\lambda_i}} \text{sign}(r_i)$, λ_i, k 为任意正常量. $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数.

未知参量及未知拓扑结构的更新规则如下:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_i &= -\eta_{1i} \left(S_i^\top(\mathbf{x}_i(t)) e_i(t) + \frac{k}{\sqrt{\eta_{1i}}} \text{sign}(\tilde{\alpha}_i) \right), \\ & \quad i = 1, 2, \dots, N^* \\ \dot{\beta}_i &= -\eta_{2i} \left(T_i^\top(\mathbf{y}_i(t)) e_i(t) + \frac{k}{\sqrt{\eta_{2i}}} \text{sign}(\tilde{\beta}_i) \right), \\ & \quad i = N^* + 1, N^* + 2, \dots, N_2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{c}_{ij} = -\delta_{ij} \left(e_i^\top(t) \mathbf{y}_j(t - \tau(t)) + \frac{k}{\sqrt{\delta_{ij}}} \text{sign}(\tilde{c}_{ij}) \right), \quad i = 1, 2, \dots, N_2 \quad (10)$$

其中, $\delta_{ij}, \eta_{1i}, \eta_{2i}$ 为任意正常量.

定理 1. 根据引理 1, 2, 当假设 1, 2 成立, 在耦合项 (8) 及参量更新规则 (9) 和 (10) 的作用下, 驱动网络 (1) 与响应网络 (2) 在限制时间 t_1 内实现同步控制与未知参量的辨识, 误差动态系统实现渐近稳定, 轨迹趋近 $e_i(t) = 0$, 时间 t_1 满足:

$$t_1 \geq \frac{\sqrt{2} V^{\frac{1}{2}}(t_0)}{k} \quad (11)$$

其中, t_0 为初始时刻.

下面利用有限时间稳定性理论, 对定理 1 进行证明.

证明. 构建如下的 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$\begin{aligned}
V(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N^*} \frac{1}{\eta_{1i}} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i + \\
&\frac{1}{2} \sum_{i=N^*+1}^{N_2} \frac{1}{\eta_{2i}} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\beta}}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \frac{1}{\delta_{ij}} \tilde{c}_{ij}^2 + \\
&\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{\lambda_i} r_i^2 + \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_{t-\tau(t)}^t \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(\varphi) \mathbf{e}_i(\varphi) d\varphi
\end{aligned} \quad (12)$$

将 $V(t)$ 沿误差系统求导, 并代入式 (8) ~ (10), 得到

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^{N^*} \mathbf{e}_i^T(t) (f_i(\mathbf{y}_i(t), \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i) - f_i(\mathbf{x}_i(t), \boldsymbol{\alpha}_i)) + \\
&\sum_{i=N^*+1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) (g_i(\mathbf{y}_i(t), \hat{\boldsymbol{\beta}}_i) - g_i(\mathbf{x}_i(t), \boldsymbol{\beta}_i)) + \\
&\sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) \tilde{c}_{ij} \mathbf{y}_j(t - \tau(t)) + \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) c_{ij} \times \\
&\mathbf{e}_j(t - \tau(t)) + \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=N_2+1}^{N_1} \mathbf{e}_i^T(t) c_{ij} \mathbf{x}_j(t - \tau(t)) + \\
&\sum_{i=1}^{N_2} r_i \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) + \sum_{i=1}^{N^*} \frac{1}{\eta_{1i}} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i^T \left[-\eta_{1i} (S_i^T(\mathbf{x}_i(t)) \times \right. \\
&\left. \mathbf{e}_i(t) + \frac{k}{\sqrt{\eta_{1i}}} \text{sign}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i) \right] + \sum_{i=N^*+1}^{N_2} \frac{1}{\eta_{2i}} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_i^T \times \\
&\left[-\eta_{2i} \left(T_i^T(\mathbf{y}_i(t)) \mathbf{e}_i(t) + \frac{k}{\sqrt{\eta_{2i}}} \text{sign}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i) \right) \right] + \\
&\sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \frac{1}{\delta_{ij}} \tilde{c}_{ij} \left[-\delta_{ij} (\mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{y}_j(t - \tau(t)) + \right. \\
&\left. \frac{k}{\sqrt{\delta_{ij}}} \text{sign}(\tilde{c}_{ij}) \right] + \\
&\sum_{i=1}^{N_2} r_i \left[\frac{\sum_{j=N_2+1}^{N_1} r_i \mathbf{e}_i^T(t) c_{ij} \mathbf{x}_j(t - \tau(t))}{r_i^2} + \right. \\
&\left. \Lambda - \frac{r_i \mathbf{e}_i^T(t)}{r_i^2} (k \text{sign}(\mathbf{e}_i(t))) - \right. \\
&\left. \frac{r_i k}{2r_i^2(1-\varepsilon)} \left(\int_{t-\tau(t)}^t \mathbf{e}_i^T(\varphi) \mathbf{e}_i(\varphi) d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \\
&\frac{1}{2(1-\varepsilon)} \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) - \\
&\frac{1-\dot{\tau}(t)}{2(1-\varepsilon)} \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t - \tau(t)) \mathbf{e}_i(t - \tau(t))
\end{aligned} \quad (13)$$

根据假设 2 及引理 1, 进一步得到

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq l_1 \sum_{i=1}^{N^*} \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) + l_2 \sum_{i=N^*+1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) + \\
&\sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) c_{ij} \mathbf{e}_j(t - \tau(t)) - \xi \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) - \\
&k \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) \text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) - k \sum_{i=1}^{N^*} \frac{1}{\sqrt{\eta_{1i}}} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i^T \text{sign}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i) - \\
&k \sum_{i=N^*+1}^{N_2} \frac{1}{\sqrt{\eta_{2i}}} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_i^T \text{sign}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i) - k \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \frac{1}{\sqrt{\delta_{ij}}} \\
&\tilde{c}_{ij} \text{sign}(\tilde{c}_{ij}) - k \sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} r_i \text{sign}(r_i) - k \sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \\
&\left(\int_{t-\tau(t)}^t \mathbf{e}_i^T(\varphi) \mathbf{e}_i(\varphi) d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) - \\
&\frac{1-\dot{\tau}(t)}{2(1-\varepsilon)} \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t - \tau(t)) \mathbf{e}_i(t - \tau(t))
\end{aligned} \quad (14)$$

其中, $\mathbf{e}(t) = (\mathbf{e}_1^T(t), \mathbf{e}_2^T(t), \dots, \mathbf{e}_{N_2}^T(t))^T \in \mathbf{R}^{n \times N_2}$, 由引理 1 ~ 3 及假设 1, 变换整理有

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq \mathbf{e}^T(t) Q \mathbf{e}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) C C^T \mathbf{e}(t) + \\
&\frac{1}{2(1-\varepsilon)} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) - \xi \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) - \\
&k \sum_{i=1}^{N_2} \|\mathbf{e}_i(t)\| - k \sum_{i=1}^{N^*} \frac{1}{\sqrt{\eta_{1i}}} |\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i| - \\
&k \sum_{i=N^*+1}^{N_2} \frac{1}{\sqrt{\eta_{2i}}} |\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i| - k \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \frac{1}{\sqrt{\delta_{ij}}} |\tilde{c}_{ij}| - \\
&k \sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} |r_i| - k \sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \\
&\left(\int_{t-\tau(t)}^t \mathbf{e}_i^T(\varphi) \mathbf{e}_i(\varphi) d\varphi \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \quad (15)$$

这里, $Q = \begin{pmatrix} l_1 I_n N^* & 0 \\ 0 & l_2 I_n (N_2 - N^*) \end{pmatrix}$.

取 $\xi > \lambda_{\max} \left(Q + \frac{1}{2} C C^T \right) + \frac{1}{2(1-\varepsilon)}$, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\sqrt{2}k \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} e_i^T(t) e_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N^*} \frac{1}{\eta_{1i}} \tilde{\alpha}_i^T \tilde{\alpha}_i + \right. \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=N^*+1}^{N_2} \frac{1}{\eta_{2i}} \tilde{\beta}_i^T \tilde{\beta}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \frac{1}{\delta_{ij}} \tilde{c}_{ij}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{\lambda_i} r_i^2 + \\ & \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{(1-\varepsilon)} \int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(\varphi) e_i(\varphi) d\varphi \right] \leq -\sqrt{2}kV^{\frac{1}{2}}(t) \end{aligned} \quad (16)$$

基于有限时间稳定性理论, 根据引理 1, 误差系统在时间 $t_1 \geq 2V^{1/2}(t_0)/\sqrt{2}k$ 内收敛到零. 此时 $\lim_{t \rightarrow t_1} \|e_i(t)\| = 0, \lim_{t \rightarrow t_1} \|\tilde{\alpha}_i\| = \lim_{t \rightarrow t_1} \|\tilde{\beta}_i\| = \lim_{t \rightarrow t_1} |\tilde{c}_{ij}| = 0$ 成立. 根据定义 1, 驱动网络 (1) 与响应网络 (2) 实现有限时间同步, 网络中的未知参量可正确辨识. \square

注 1. 驱动网络和响应网络分别包含两种不同的节点动力系统, 相似的工作很容易推广至网络拥有更多不同类型节点系统的情况.

3 数值仿真

为了验证所提方法的有效性, 选取具有混沌特性的 Lorenz 系统^[29] 和 Chen 系统^[30], 作为节点系统, 分别构造 12 个节点及 10 个节点的复杂网络进行仿真实验. Lorenz 系统各参量的取值为 $a_1 = 10, a_2 = 28, a_3 = 8/3$; Chen 系统参量为 $d_1 = 35, d_2 = 3, d_3 = 28$.

3.1 仿真实验

驱动-响应网络的节点数分别为 $N_1 = 12$ 和 $N_2 = 10$. 其中驱动网络中包含 5 个 Lorenz 系统 ($i = 1, 2, \dots, 5$) 和 7 个 Chen 系统 ($i = 6, 7, \dots, 12$); 响应网络是含有未知参量的 5 个 Lorenz 系统 ($i =$

$1, 2, \dots, 5$) 和 5 个 Chen 系统 ($i = 6, 7, \dots, 10$). 网络的拓扑矩阵 $C = [c_{ij}]_{12 \times 12}$ 按照小世界网络的连接形式, 如式 (17).

仿真实验中, 假设响应网络中 Lorenz 系统与 Chen 系统包含待辨识未知参量 $\hat{a}_{1i} (i = 1, 2, \dots, 5), \hat{d}_{2i} (i = 6, 7, \dots, 10)$, 其真值为 $a_{1i} = 10, d_{2i} = 3$. 未知参量的初始值选取为 $\hat{a}_{1i}(0) = (12, 14, 6, 8, 15)^T, \hat{d}_{2i}(0) = (3, 2, 5, 4, 1)^T$. 另取 $\eta_{1i} = 15, \eta_{2i} = 2, \delta_{ij} = 0.5, \lambda_i = 0.2, k = 2, \tau(t) = 1$ 满足假设 1. 响应网络中的耦合项如式 (8), 未知参量及未知拓扑结构的更新规则分别满足式 (9) 和式 (10).

图 1 为同步误差 $e_{i1}(t), e_{i2}(t), e_{i3}(t) (i = 1, 2, \dots, 10)$ 随时间的演化情况, 两个网络在耦合作用下, 同步误差曲线从不同的初始值出发, 经过一段时间的波动后, 在零点趋近于稳定, 网络同步得以实现.

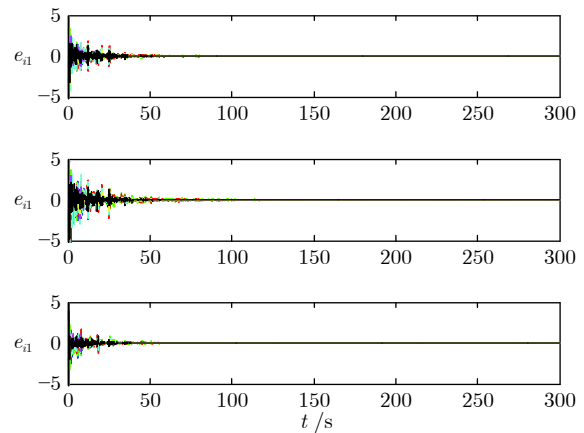


图 1 同步误差的演化
 $e_{i1}(t), e_{i2}(t), e_{i3}(t) (i = 1, 2, \dots, 10)$
Fig. 1 Synchronous errors
 $e_{i1}(t), e_{i2}(t), e_{i3}(t) (i = 1, 2, \dots, 10)$

$$C = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -8 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & -7 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -5 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -9 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & -7 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & -5 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -10 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & -12 \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (17)$$

图 2 和 图 3 为未知参量 $\hat{a}_{1i}, \hat{d}_{2i}$ 的辨识过程, 节点未知参量的曲线轨迹经过一段时间的演化后迅速重合, 趋近于真值 $\hat{a}_{1i} = 10, \hat{d}_{2i} = 3$. 图 4 ~ 图 7 为未知拓扑结构的辨识过程, 对比式 (17), 对应矩阵内元素的权重值均得以正确辨识. 从仿真结果中可以看出, 本文所提方法正确有效, 且同步收敛速度快, 同步效果较好.

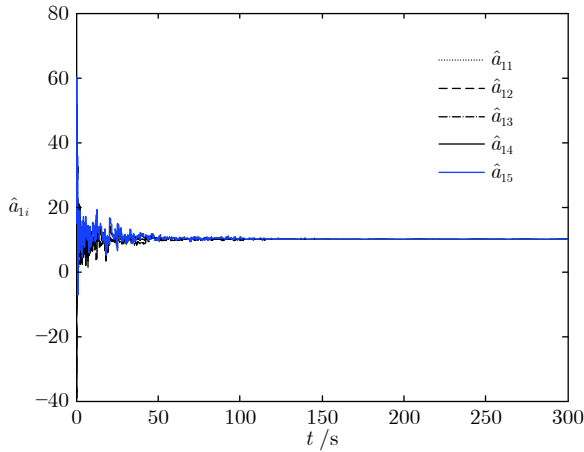


图 2 未知参量的辨识 $\hat{a}_{1i} (i = 1, 2, \dots, 5)$
 Fig.2 Identification of the unknown parameters $\hat{a}_{1i} (i = 1, 2, \dots, 5)$

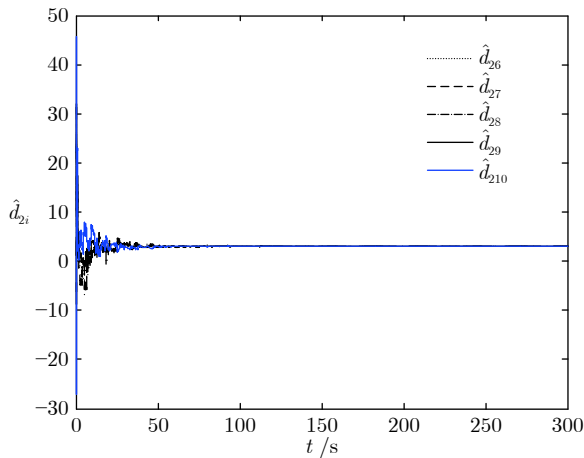


图 3 未知参量的辨识 $\hat{d}_{2i} (i = 6, 7, \dots, 10)$
 Fig.3 Identification of the unknown parameters $\hat{d}_{2i} (i = 6, 7, \dots, 10)$

3.2 仿真对比

在第 3.1 节, 仿真结果验证了所提方法的有效性. 为了进一步说明本文方法的优越性, 将本文方法与文献 [14] 所提方法进行对比, 验证本文所提出的单向耦合方法, 可以不依赖外部控制输入, 并且在较少耦合数的情况下, 具有更快的同步速率及更

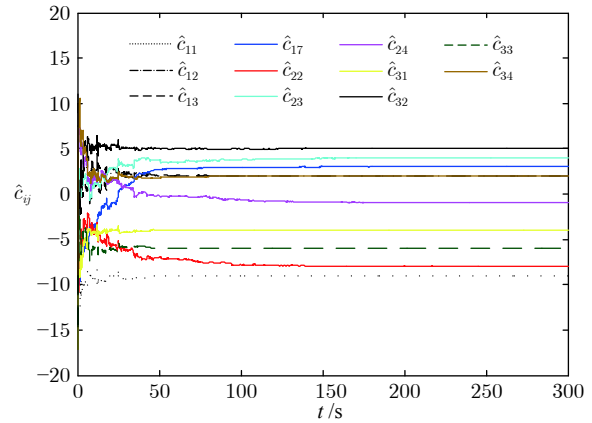


图 4 未知拓扑结构的辨识 \hat{c}_{ij}
 Fig.4 Identification of network structure \hat{c}_{ij}

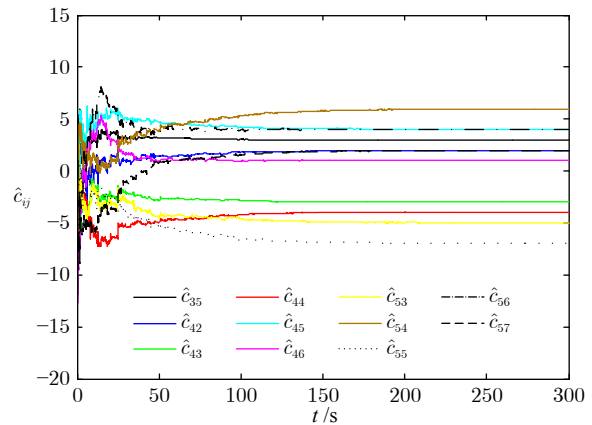


图 5 未知拓扑结构的辨识 \hat{c}_{ij}
 Fig.5 Identification of network structure \hat{c}_{ij}

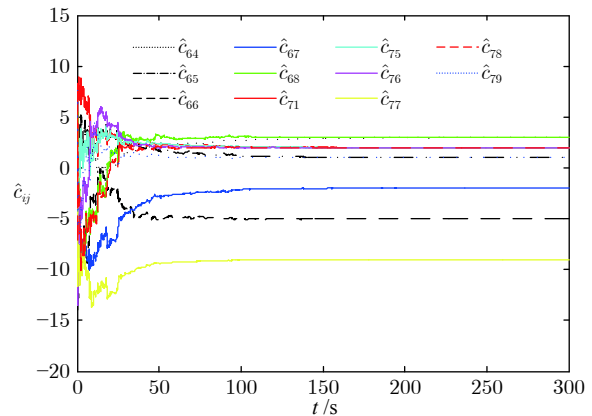


图 6 未知拓扑结构的辨识 \hat{c}_{ij}
 Fig.6 Identification of network structure \hat{c}_{ij}

小的波动范围. 为了更好的比较同步速率, 引入平均误差 $E(t)$ 作为评价指标, 具体形式如下:

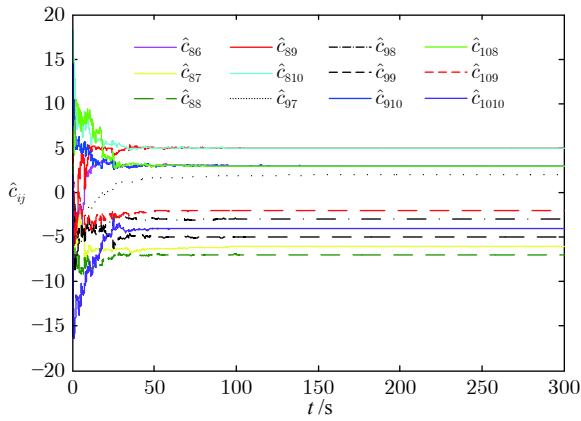


图 7 未知拓扑结构的辨识 \hat{c}_{ij}

Fig. 7 Identification of network structure \hat{c}_{ij}

$$E(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \|e_i(t)\|^2}{N}} \quad (18)$$

其中, N 为网络节点个数.

在已有的研究中, 大部分工作均需要依赖外部控制器 $u_i(t)$ 实现同步控制. 首先与这种经典的同步控制方式进行对比, 验证本文方法的优越性. 与文献 [14] 中定理 1 所提的方法进行对比, 为了保证同步条件的一致性, 简化了本文考虑的一些影响因素. 如驱动-响应网络的节点个数假设为相同的 N , 只考虑一种形式的节点系统, 且忽略时变耦合时滞的影响, 驱动-响应网络的模型简化为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = f_i(\mathbf{x}_i(t), \boldsymbol{\alpha}_i) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{x}_j(t), \\ i = 1, 2, \dots, N \\ \dot{\mathbf{y}}_i(t) = f_i(\mathbf{y}_i(t), \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i) + \sum_{j=1}^N \hat{c}_{ij} \mathbf{y}_j(t) + r_i(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t)), \\ i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (19)$$

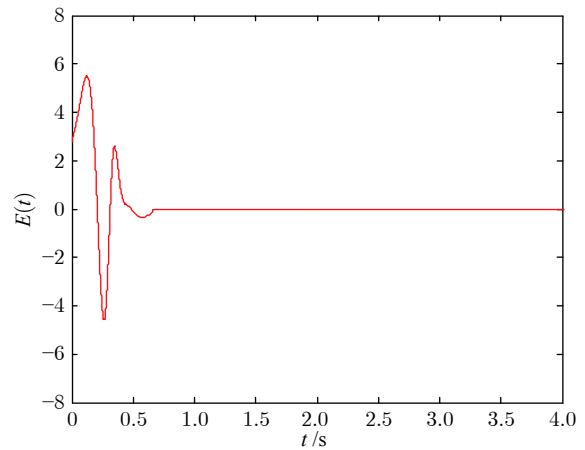
此时, 相应的参量更新规则简化如下:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i = -\eta_{1i} \left(S_i^T(\mathbf{x}_i(t)) \mathbf{e}_i(t) + \frac{k}{\sqrt{\eta_{1i}}} \text{sign}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i) \right), \\ i = 1, 2, \dots, N \\ \dot{\tilde{c}}_{ij} = -\delta_{ij} \left(\mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{y}_j(t) + \frac{k}{\sqrt{\delta_{ij}}} \text{sign}(\tilde{c}_{ij}) \right), \\ i = 1, 2, \dots, N \\ \dot{r}_i = \lambda_i \left[\Lambda - \frac{r_i \mathbf{e}_i^T(t)}{r_i^2} (k \text{sign}(\mathbf{e}_i(t))) \right], \\ i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (20)$$

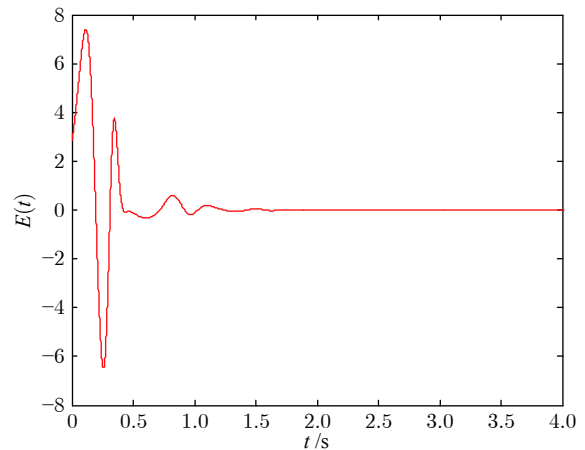
根据文献 [14] 中的仿真实例 5.1, 选取相同的预设条件, 节点数 $N = 3$, 将含有未知参量 a_{1i} 的 Lorenz 系统作为网络节点系统, 拓扑结构如下:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (21)$$

在相同的初始条件下, 选取参量 $\eta_{1i} = 5$ (文献 [14] 中, $\theta_i = 5$), $\delta_{ij} = 0.1$, $k = 0.01$, $\lambda_i = 0.2$. 对比结果如图 8 所示. 图 8(a) 为本文方法平均误差的演化曲线, 图 8(b) 为文献 [14] 定理 1 方法在相同条件下平均误差的演化情况. 可以看出本文方法无需依赖外部控制器, 在网络间单向耦合的作用下即可实现同步控制, 且同步速度快, 波动范围小. 表 1 列出两个方法的具体对比结果.



(a) 本文方法
(a) Our method



(b) 文献[14]定理1方法
(b) The method of Theorem 1 in [14]

图 8 本文方法与文献 [14] 定理 1 方法的平均误差曲线
Fig. 8 The average error of our method and Theorem 1 in [14]

表 1 本文方法与文献 [14] 定理 1 方法对比结果

Table 1 The comparison result between our method and the Theorem 1 in [14]

	同步时间 Sync time (s)	波动范围 Fluctuation range
本文方法	0.657	[-4.5, 5.5]
文献[14]定理1	1.698	[-6.5, 7.4]

当驱动和响应网络中均加入耦合项时, 称此种方法为双向耦合控制方法. 进一步将本文方法与文献 [14] 中定理 2 的双向耦合方法进行对比, 验证本文方法可以在较少的耦合数下, 实现较小波动范围内的快速收敛.

驱动-响应网络的形式保持式 (19) 不变. 同样与文献 [14] 仿真条件保持一致, 根据文献 [14] 中仿真实例 5.2, 选取节点数 $N = 4$, 节点系统同样为 Lorenz 系统, a_{1i} 为未知参量, $\eta_{1i} = 5$ (文献 [14] 中 $\theta_i = 5$), $\delta_{ij} = 5$. 拓扑结构如下所示:

$$C = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & -6 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (22)$$

此时得到两个方法在相同初始条件下平均误差的变化曲线如图 9 所示, 对比图 9 中的 (a) 和 (b), 可以发现本文方法的图 9(a) 曲线收敛速度更快, 波动范围更小. 说明与文献 [14] 中定理 2 的双向耦合方法相比, 本文所提方法在较少耦合数量的情况下, 可实现小范围内的快速收敛, 同步效果更好. 表 2 为两个方法具体的对比结果.

总体来说, 本文方法与文献 [14] 中的两种方法进行对比, 有如下优势:

1) 本文方法与文献 [14] 中定理 1 方法对比, 本文方法不需要依赖传统的外部控制器, 网络通过内部耦合即可实现同步, 且从图 8 及表 1 可以看出, 本文方法同步速率更快, 抖震更小.

2) 本文方法与文献 [14] 中定理 2 方法对比, 本文采用较少耦合数即可实现快速收敛, 且从图 9 及表 2 看出, 本文方法用时短, 波动更小.

在对比实验中, 为了确保同步条件的一致性, 一些可能的影响因素被忽略了, 比如网络内部节点的不同, 时变耦合时滞及驱动-响应网络节点不同的情况, 若全面考虑以上因素, 文献 [14] 的方法不能保证在本文的预设条件下, 实现同步. 整体来看, 本文方法普适性更强, 同步效果更优.

4 结论

本文提出一种新颖的单向耦合同步控制方法,

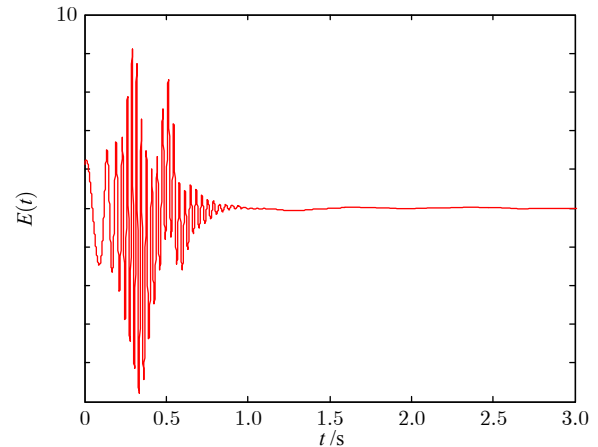
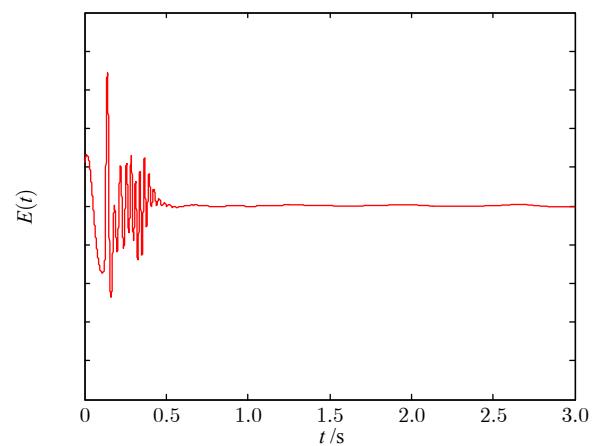
(a) 本文方法
(a) Our method(b) 文献[14]定理2方法
(b) The method of Theorem 2 in [14]

图 9 本文方法与文献 [14] 定理 2 方法的平均误差曲线

Fig.9 The average error of our method and Theorem 2 in [14]

表 2 本文方法与文献 [14] 中定理 2 方法对比结果

Table 2 The comparison result between our method and the Theorem 2 in [14]

	同步时间 Sync time (s)	波动范围 Fluctuation range	耦合数量 Coupling number
本文方法	0.639	[-4.7, 6.9]	1
文献[14]定理2	1.095	[-9.5, 8.3]	2

基于有限时间稳定性理论和线性矩阵不等式变换, 克服多重因素的影响, 得到了网络同步的充分条件. 在实现了有限时间同步控制的同时辨识得到网络的未知参量及未知拓扑结构. 数值仿真中, 一方面, 验证了所提方法的有效性; 另一方面, 通过对比实验表明了本文方法的优越性. 如何将方法应用到实际以及基于单向耦合方法实现固定时间的网络同步与参量辨识问题, 是后续研究的重点.

References

- 1 Xi Yu-Geng. Large-scale systems control and complex networks-exploration and thinking. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(11): 1758–1768
(席裕庚. 大系统控制论与复杂网络 — 探索与思考. 自动化学报, 2013, **39**(11): 1758–1768)
- 2 Tran S N, Garcez A S A. Deep logic networks: Inserting and extracting knowledge from deep belief networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learn Systems*, 2018, **29**(2): 246–258
- 3 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*, 1998, **393**(6684): 440–442
- 4 Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, **286**(5439): 509–512
- 5 Chen Guan-Rong. Problems and challenges in control theory under complex dynamical network environments. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 312–321
(陈关荣. 复杂动态网络环境下控制理论遇到的问题与挑战. 自动化学报, 2013, **39**(4): 312–321)
- 6 Lakshmanan S, Prakash M, Lim C P, Rakkiyappan R, Balasubramaniam P, Nahavandi S. Synchronization of an inertial neural network with time-varying delays and its application to secure communication. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learn Systems*, 2018, **29**(1): 195–207
- 7 Suarez O J, Vega C J, Sanchez E N, Chen G R, Elviraceja J S, Rodriguez D I. Neural sliding-mode pinning control for output synchronization for uncertain general complex networks. *Automatica*, 2020, **112**: 108694
- 8 Lv Jin-Hu. Synchronization of complex networks: theories, approaches, applications and prospects. *Advances in Mechanics*, 2008, **38**(6): 713–722
(吕金虎. 复杂网络的同步: 理论、方法、应用与展望. 力学进展, 2008, **38**(6): 713–722)
- 9 Wei Xiang, Zhao Jun-Chan, Hu Chun-Hua. Generalized synchronization and system parameters identification between two different complex networks. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(4): 595–603
(韦相, 赵军产, 胡春华. 两个异构复杂网络的广义同步与参数识别. 自动化学报, 2017, **43**(4): 595–603)
- 10 Yang X, Lam J, Ho D W C, Feng Z. Fixed-time synchronization of complex networks with impulsive effects via nonchattering control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(11): 5511–5521
- 11 Han Min, Zhang Ya-Mei, Zhang Meng. Outer synchronization analysis of two time-varying networks with double delays based on pinning control. *Acta Physica Sinica*, 2015, **64**(7): 70506
(韩敏, 张雅美, 张檬. 具有双重时滞的时变耦合复杂网络的牵制外同步研究. 物理学报, 2015, **64**(7): 70506)
- 12 Zhang Z M, He Y, Wu M. Exponential synchronization of neural networks with time-varying delays via dynamic intermittent output feedback control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, **49**(3): 612–622
- 13 Xu Y H, Zhou W N, Fang J A, Lu H Q. Structure identification and adaptive synchronization of uncertain general complex dynamical networks. *Physics Letters A*, 2009, **374**(2): 272–278
- 14 Mei J, Jiang M, Wang J. Finite-time structure identification and synchronization of drive-response systems with uncertain parameter. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, **18**(4): 999–1015
- 15 Han M, Zhang M, Zhang Y M. Projective synchronization between two delayed networks of different sizes with nonidentical nodes and unknown parameters. *Neurocomputing*, 2016, **171**(1): 605–614
- 16 Du Hong-Yue, Sun Wan-Shuang, Hu Ge, Qi Li-Hua. Function projective synchronization of two fractional-order complex dynamical networks. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(2): 226–234
(杜洪越, 孙婉双, 胡革, 齐丽华. 两个分数阶复杂动态网络的函数投影同步. 自动化学报, 2016, **42**(2): 226–234)
- 17 Andrieu V, Jayawardhana B, Tarbouriech S. Some results on exponential synchronization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, **63**(4): 1213–1219
- 18 Perruquetti W, Floquet T, Moulay E. Finite-time observers: application to secure communication. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(1): 356–360
- 19 He P, Ma S H, Fan T. Finite-time mixed outer synchronization of complex networks with coupling time-varying delay. *Chaos*, 2012, **22**(4): 043151(1–11)
- 20 Velmurugan G, Rakkiyappan R, Cao J. Finite-time synchronization of fractional-order memristor-based neural networks with time delays. *Neural Networks*, 2016, **73**: 36–46
- 21 Yang X, Lu J. Finite-time synchronization of coupled networks with Markovian topology and impulsive effects. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, **61**(8): 2256–2261
- 22 Gao J, Zhu P, Alsaedi A, Alsaadi F E, Hayat T. A new switching control for finite-time synchronization of memristor-based recurrent neural networks. *Neural Networks*, 2017, **86**: 1–9
- 23 Liu H, Lu J A, Lü J, Hill D J. Structure identification of uncertain general complex dynamical networks with time delay. *Automatica*, 2009, **45**(8): 1799–1807
- 24 Che Y Q, Li R X, Han C X, Cui S G, Wang J, Wei X L, Deng B. Topology identification of uncertain nonlinearly coupled complex networks with delays based on anticipatory synchronization. *Chaos*, 2013, **23**(1): 013127–7
- 25 Mei J, Jiang M, Xu W, Wang B. Finite-time synchronization control of complex dynamical networks with time delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, **18**(9): 2462–2478
- 26 Abdurahman A, Jiang H, Hu C, Teng Z. Parameter identification based on finite-time synchronization for Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2015, **20**(3): 348–366
- 27 Jing T Y, Chen F Q, Li Q H. Finite-time mixed outer synchronization of complex networks with time-varying delay and unknown parameters. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, **39**(23): 23–24
- 28 Luo Yi-Ping, Zhou Bi-Feng. Guaranteed cost synchronization control of diffusible complex network systems with time delay. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 147–156
(罗毅平, 周笔锋. 时滞扩散性复杂网络同步保性能控制. 自动化学报, 2015, **41**(1): 147–156)
- 29 Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 1963, **20**(2): 130–141
- 30 Chen G, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and chaos*, 1999, **9**(7): 1465–1466



张 檬 沈阳航空航天大学人工智能学院讲师。主要研究方向为复杂网络, 混沌控制与同步。

E-mail: mengzhang@sau.edu.cn

(ZHANG Meng Lecturer at School of Artificial Intelligence, Shenyang Aerospace University. Her research

interest covers complex networks, chaos control and synchronization.)



韩 敏 大连理工大学电子信息与电气工程学部教授。主要研究方向为模式识别, 复杂系统建模与分析, 时间序列预测。本文通信作者。

E-mail: minhan@dlut.edu.cn

(HAN Min Professor at the Faculty of Electronic Information and

Electrical Engineering, Dalian University of Technology. Her research interest covers pattern recognition, modeling and analysis of complex system, and time series prediction. Corresponding author of this paper.)