

# 噪声下相互依存网络的自适应 $H_\infty$ 异质同步

郭天姣<sup>1,2</sup> 涂俐兰<sup>1,2</sup>

**摘要** 针对具有噪声的相互依存复杂动力网络, 本文研究了它的局部自适应  $H_\infty$  异质同步问题. 该网络由两个具有“一对一”相互依赖关系的子网构成, 子网内部耦合和子网间的耦合均含有未知但有界的非线性函数. 基于李雅普诺夫稳定性理论、线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 技术和自适应以及  $H_\infty$  控制方法, 本文提出了使得相互依存网络在外部噪声的干扰下, 两个子网各自达到一致的充分条件. 这些条件不仅可以保证受扰动的网络获得鲁棒渐近同步而且可以让网络达到一个给定的鲁棒  $H_\infty$  水平. 最后的数值模拟验证了提出的方法的有效性以及可行性.

**关键词** 相互依存网络, 自适应  $H_\infty$  控制, 异质同步, 噪声, 线性矩阵不等式

**引用格式** 郭天姣, 涂俐兰. 噪声下相互依存网络的自适应  $H_\infty$  异质同步. 自动化学报, 2020, 46(6): 1229–1239

**DOI** 10.16383/j.aas.c180075

## Adaptive $H_\infty$ Heterogeneous Synchronization for Interdependent Networks With Noise

GUO Tian-Jiao<sup>1,2</sup> TU Li-Lan<sup>1,2</sup>

**Abstract** In this paper, local adaptive  $H_\infty$  heterogeneous synchronization is investigated for interdependent networks with noise. The network considered consists of two sub-network, which are one-by-one inter-coupled. The unknown but bounded nonlinear functions exist both in the intra-coupling and inter-coupling between the two sub-networks. Based on the Lyapunov stability theory, linear matrix inequality (LMI), and adaptive  $H_\infty$  control technique, the sufficient conditions are established to lead the sub-networks of the interdependent networks with noise to respective heterogeneous synchronization, which guarantee not only robust asymptotical synchronization for networks with noise but also a prescribed robust  $H_\infty$  performance level. Finally, numerical simulations prove the effectiveness and feasibility of the method.

**Key words** Interdependent networks, adaptive  $H_\infty$  control, heterogeneous synchronization, noise, linear matrix inequality (LMI)

**Citation** Guo Tian-Jiao, Tu Li-Lan. Adaptive  $H_\infty$  heterogeneous synchronization for interdependent networks with noise. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(6): 1229–1239

相互依存网络是指由两个或者多个子网络通过彼此之间的相互依赖关系构成的网络系统. 和单个网络相比, 相互依存网络的拓扑结构不仅含有子网内部的连接, 同时也具备子网之间的依赖. 生活中的相互依存网络无处不在, 例如: 通信-计算机网、交通运输网、人体的蛋白质网等, 多为具有相互依赖关系的网络, 因此对相互依存网络的研究具有十分重要的意义. 2010 年, Buldyrev 等<sup>[1]</sup> 提出了具有“一对一”相互依赖关系的网络模型, 开启了研究相互依

存网络的新篇章. 随着社会的进步, 相互依存网络的研究已成为现阶段网络研究的热潮. 目前对相互依存网络的研究主要体现在网络模型的建立<sup>[2-4]</sup>、网络的级联失效研究<sup>[5-6]</sup> 以及鲁棒性分析<sup>[6-7]</sup> 等.

同步问题是复杂动力网络研究中的一个有趣且有意义的问题, 受到了广泛的关注. 迄今为止, 单个网络同步成果丰硕, 已研究的同步类型有相位同步<sup>[8]</sup>、完全同步<sup>[9]</sup>、局部同步<sup>[10]</sup>、投影同步<sup>[11]</sup> 等. 与单个网络相同, 相互依存网络的同步动力学行为也是现阶段研究的一个重要课题. 近年来, 研究者们对相互依存网络同步的研究尚处于起步阶段<sup>[12-14]</sup>.

由于网络所处的社会环境、自然环境的复杂化, 研究噪声干扰下的网络同步问题不可避免. 网络的内部噪声会对其动力学行为产生影响, 增加了网络同步的控制难度; 而网络外部的信道噪声则会会影响网络的信息传递, 降低通信的准确性. 在单个网络中, 分析噪声对同步的影响已有一系列成果, 如文献<sup>[15]</sup> 探讨了噪声下网络的自适应同步; 文献<sup>[16]</sup> 研究了噪声下不确定时滞复杂网络的外同步. 近年来,

收稿日期 2018-01-30 录用日期 2018-08-21  
Manuscript received January 30, 2018; accepted August 21, 2018

国家自然科学基金 (61473338) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (61473338)

本文责任编辑 鲁仁全  
Recommended by Associate Editor LU Ren-Quan  
1. 武汉科技大学冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室 武汉 430065  
2. 武汉科技大学理学院 武汉 430065  
1. Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065  
2. College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065

有学者开始研究相互依存网络<sup>[17-18]</sup>, 并对相互依存网络的广义同步<sup>[19]</sup> 有了初步探索.

分析噪声与网络同步的关系对研究相互依存网络的稳定性非常重要. 在经典控制论中, 对于具有噪声的网络通常采用前馈或者反馈消除噪声影响, 达到系统稳定. 20 世纪 80 年代, Zames<sup>[20]</sup> 和 Doyle 等<sup>[21]</sup> 分别提出了利用  $H_\infty$  控制方法探讨了系统的鲁棒优化控制问题.  $H_\infty$  鲁棒控制理论是在  $H_\infty$  空间 (即 Hardy 空间) 通过某些性能指标的无穷范数优化, 而获得具有鲁棒性能的控制器的控制理论. 它是一个非常有效的优化控制方法. Wang 等<sup>[22]</sup> 和 Lin 等<sup>[23]</sup> 利用  $H_\infty$  控制以及自适应控制的方法研究了复杂动力网络的一致性; 同时文献 [15] 又利用了  $H_\infty$  方法和自适应控制的方法研究了噪声下时滞复杂网络的局部一致性问题. 它们都说明了基于  $H_\infty$  方法, 不仅可以达到系统内部的鲁棒稳定, 同时可以满足网络外部一定的鲁棒水平.

基于以上分析, 本文将研究带有噪声的相互依存网络的自适应异质同步问题. 其中, 相互依存网络是由两个具有“一对一”相互依赖关系的子网构成, 子网内部耦合和子网间的耦合均含有未知但有界的非线性函数. 基于李雅普诺夫稳定性理论、Schur 引理, 本文提出新的使得相互依存网络在有噪声和没有噪声的情况下达到异质同步的充分条件, 同时相互依存网络的内部达到自适应渐近同步, 而网络外部则达到鲁棒  $H_\infty$  水平. 本文创新点如下: 1) 研究的相互依存网络更具有一般性, 不仅含有外部噪声, 同时子网内部与子网间均含有非线性的耦合函数; 2) 利用自适应控制和  $H_\infty$  控制的方法, 基于李雅普诺夫稳定性理论和线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 技术从理论上提出了相互依存网络达到自适应异质同步的充分条件, 这些条件简单易行.

## 1 问题的提出和预备知识

### 1.1 问题的提出

考虑一个含有两个子网的相互依存网络, 每个子网各含有  $N$  个不同节点, 且子网中的每个节点都是一个  $n$  维系统, 整个网络的状态方程如下

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^k(t) = & f^k(x_i^k(t)) + d^k \sum_{j=1}^N A_{ij}^k H^k(x_j^k(t)) + \\ & \sum_{l=1}^2 c^{kl} (H^k(x_i^l(t)) - H^k(x_i^k(t))) + G^k w_i^k(t) \\ & i = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $x_i^k = [x_{i1}^k, x_{i2}^k, \dots, x_{in}^k]^T \in \mathbf{R}^n$  是子网  $k$  中节

点  $i$  的状态变量;  $f^k: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  是一个连续可微的有界非线性函数; 常数  $d^k$  是子网  $k$  内部的耦合强度; 常数  $c^{kl}$  是子网  $k$  和子网  $l$  之间的耦合强度;  $A_{ij}^k$  定义如下: 若子网  $k$  中的节点  $i$  和节点  $j$  ( $j \neq i$ ) 之间有连接, 那么  $A_{ij}^k = A_{ji}^k = 1$ ; 否则  $A_{ij}^k = A_{ji}^k = 0$ , 且矩阵  $A^k$  的对角线元素满足如下条件

$$A_{ii}^k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij}^k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ji}^k, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

$H^k: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  是未知但有界的连续非线性函数;  $G^k$  是一个有适当维数的矩阵,  $w_i^k(t) \in \mathbf{R}^n$  是子网  $k$  的外部噪声.

注 1. 设  $s^k(t) \in \mathbf{R}^n$  是子网  $k$  中孤立节点系统的解, 满足下述方程

$$\dot{s}^k(t) = f^k(s^k(t)), \quad k = 1, 2 \quad (3)$$

式 (3) 孤立节点系统可改写为

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{s}^1(t) = & f^1(s^1(t)) + d^1 \sum_{j=1}^N A_{ij}^1 H^1(s^1(t)) + \\ & \sum_{l=1}^2 c^{1l} (H^1(s^l(t)) - H^1(s^1(t))) \\ \dot{s}^2(t) = & f^2(s^2(t)) + d^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^2 H^2(s^2(t)) + \\ & \sum_{l=1}^2 c^{2l} (H^2(s^l(t)) - H^2(s^2(t))) \end{aligned} \right. \quad (4)$$

对网络 (1) 的两个子网分别施加控制器  $u_i^1(t)$  和  $u_i^2(t)$ , 则有

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_i^1(t) = & f^1(x_i^1(t)) + d^1 \sum_{j=1}^N A_{ij}^1 H^1(x_j^1(t)) + \\ & u_i^1(t) + \sum_{l=1}^2 c^{1l} (H^1(x_i^l(t)) - \\ & H^1(x_i^1(t))) + G^1 w_i^1(t) \\ \dot{x}_i^2(t) = & f^2(x_i^2(t)) + d^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^2 H^2(x_j^2(t)) + \\ & u_i^2(t) + \sum_{l=1}^2 c^{2l} (H^2(x_i^l(t)) - \\ & H^2(x_i^2(t))) + G^2 w_i^2(t) \\ & i = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2 \end{aligned} \right. \quad (5)$$

本文在研究网络 (1) 的同步中, 有以下几个假设.

**假设 1.** 设  $F(t) = Df^1(s^1(t)) = (f_{ij}(t))_{n \times n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是  $f^1(x_i^1(t))$  在  $s^1(t)$  处的雅可比矩阵, 且设  $F = (f_{ij})_{n \times n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 其中  $f_{ij}$  是  $f_{ij}(t)$  的最大值; 设  $M(t) = Df^2(s^2(t)) = (m_{ij}(t))_{n \times n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是  $f^2(x_i^2(t))$  在  $s^2(t)$  处的雅可比矩阵, 且假设  $M = (m_{ij})_{n \times n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 其中  $m_{ij}$  是  $m_{ij}(t)$  的最大值.

**假设 2.** 设  $B(t) = DH^1(s^1(t)) = (b_{ij}(t))_{n \times n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是  $H^1(x_i^1(t))$  在  $s^1(t)$  处的雅可比矩阵, 且设  $B = (b_{ij})_{n \times n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 其中  $b_{ij}$  是  $b_{ij}(t)$  的最大值; 设  $R(t) = DH^2(s^2(t)) = (r_{ij}(t))_{n \times n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是  $H^2(x_i^2(t))$  在  $s^2(t)$  处的雅可比矩阵, 且假设  $R = (r_{ij})_{n \times n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 其中  $r_{ij}$  是  $r_{ij}(t)$  的最大值.

令  $e_i^k(t) = x_i^k(t) - s^k(t)$ ,  $k = 1, 2$ , 基于线性化方法, 由式 (4) 和式 (5) 可得误差系统

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{e}_i^1(t) &= F(t)e_i^1(t) + d^1 \sum_{j=1}^N A_{ij}^1 B(t)e_j^1(t) + \\ &\quad \sum_{l=1}^2 c^{1l} B(t)e_i^l(t) + c(H^1(s^2(t)) - \\ &\quad H^1(x_i^1(t))) + cB(t)e_i^1(t) + \\ &\quad G^1 w_i^1(t) + u_i^1(t) \\ \dot{e}_i^2(t) &= M(t)e_i^2(t) + d^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^2 R(t)e_j^2(t) + \\ &\quad \sum_{l=1}^2 c^{2l} R(t)e_i^l(t) + c(H^2(s^1(t)) - \\ &\quad H^2(x_i^2(t))) + cR(t)e_i^2(t) + \\ &\quad G^2 w_i^2(t) + u_i^2(t) \end{aligned} \right. \quad (6)$$

**注 2.** 本文主要讨论网络 (1) 的子网 1 和子网 2 在控制器  $u_i^1(t)$  和  $u_i^2(t)$  的作用下的异质同步问题.

下面给出相互依存网络自适应  $H_\infty$  异质同步的定义.

**定义 1 (渐近异质同步).** 一般的, 对于相互依存网络 (1), 若满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i^k(t) - s^k(t)\| = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2$$

则称相互依存网络达到渐近异质同步.

**定义 2 (相互依存网络自适应  $H_\infty$  异质同步).** 给定零初始值和噪声扰动衰减水平  $\gamma > 0$ , 在合适的自适应控制器  $u_i^1(t)$  和  $u_i^2(t)$  的作用下, 当子网 1 和

子网 2 的误差系统 (6) 满足条件 (7), 则称相互依存网络 (1) 达到自适应  $H_\infty$  异质同步.

$$\int_0^\infty e_i^T(t) \tilde{S} e_i(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty w_i^T(t) w_i(t) dt, \\ i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

其中,  $\tilde{S}$ ,  $S^1$ ,  $S^2$  均为正定对称矩阵, 且

$$w_i(t) = \begin{bmatrix} w_i^1(t) \\ w_i^2(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n} \\ e_i(t) = \begin{bmatrix} e_i^1(t) \\ e_i^2(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n} \\ \tilde{S} = \begin{bmatrix} S^1 & 0 \\ 0 & S^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

**注 3.** 由以上分析可知, 相互依存网络 (1) 达到异质同步的充分条件是在控制器的作用下, 子网 1 和子网 2 误差系统 (6) 的状态变量均趋于零. 因此, 研究网络 (1) 的同步问题转化为研究误差系统 (6) 在零点的稳定性问题.

## 1.2 预备知识

本节将给出文中需要用到的一些预备知识.

**注 4.** 本文中的矩阵  $E$  是具有适当维数的单位矩阵.

**假设 3.** 设矩阵  $G$  为具有适当维数的矩阵, 且  $G^1 = G^2 = G$ .

**引理 1**<sup>[15]</sup>. 对任意矩阵  $X, Y \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 有不等式

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T A X + Y^T A^{-1} Y$$

成立, 其中,  $A^T = A > 0$ ,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ .

**引理 2 (Schur complement**<sup>[24]</sup>). 假设  $Q(x) = Q^T(x)$ ,  $R(x) = R^T(x)$  和  $S(x)$  都是  $x$  的矩阵函数, 则线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} < 0$$

等价于下列条件中的任意一个:

- 1)  $R(x) < 0$ ,  $Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S^T(x) < 0$ ;
- 2)  $Q(x) < 0$ ,  $R(x) - S^T(x)Q(x)^{-1}S(x) < 0$ .

## 2 主要结果

李雅普诺夫稳定性理论是控制理论研究的主要方法, 而自适应控制技术是一种能修正自己的特性以适应对象和扰动的动态特性变化的方法. 基于这两种方法的特性, 本节将用这两种方法, 并结合线性

$$\begin{bmatrix} \Psi & cR^TQ + cPB & PB & 0 & 0 \\ cB^TP + cQR & \Phi & 0 & QR & QG \\ B^TP & 0 & \frac{1}{-d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^1|} E & 0 & 0 \\ 0 & R^TQ & 0 & \frac{1}{-d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^2|} E & 0 \\ 0 & G^TQ & 0 & 0 & -\gamma^2 E \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

矩阵不等式和  $H_\infty$  方法, 首先构造出李雅普诺夫函数, 在李雅普诺夫稳定性理论的框架下, 设置出合适的控制器, 提出相互依存网络 (1) 在自适应控制器的作用下达达到  $H_\infty$  异质同步的充分条件.

**定理 1.** 若假设 1~3 成立时, 对于给定的  $S^{1T} = S^1 > 0$ ,  $S^{2T} = S^2 > 0$ , 以及  $\gamma > 0$ , 若存在两个正定矩阵  $P$  和  $Q$ , 使得式 (9) (见本页上方) 成立, 其中,

$$\Psi = F^TP + PF + S^1 + \frac{1}{\gamma^2} PGG^TP + d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^1| E - 2dP$$

且

$$\Phi = M^TQ + QM + S^2 + d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^2| E - 2dQ$$

那么网络 (5) 在控制器

$$\begin{cases} u_i^1(t) = -c(H^1(s^2(t)) - H^1(x_i^1(t))) - d_i^1 e_i^1(t) \\ u_i^2(t) = -c(H^2(s^1(t)) - H^2(x_i^2(t))) - d_i^2 e_i^2(t) \end{cases} \quad (10)$$

和自适应律

$$\begin{cases} \dot{d}_i^1 = k_i^1 e_i^{1T}(t) P e_i^1(t) \\ \dot{d}_i^2 = k_i^2 e_i^{2T}(t) Q e_i^2(t) \end{cases} \quad (11)$$

的作用下达达到自适应  $H_\infty$  异质同步. 其中  $d$  是  $d_i^1$  与  $d_i^2$  的近似值, 且  $k_i^1$  与  $k_i^2$  均为常数.

**证明.** 由控制器 (10) 和自适应律 (11), 误差系统 (6) 可写成

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{e}_i^1(t) &= F(t)e_i^1(t) + d^1 \sum_{j=1}^N A_{ij}^1 B(t)e_j^1(t) + \sum_{l=1}^2 c^{1l} B(t)e_i^l(t) + cB(t)e_i^1(t) - d_i^1 e_i^1(t) + Gw_i^1(t) \\ \dot{e}_i^2(t) &= M(t)e_i^2(t) + d^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^2 R(t)e_j^2(t) + \sum_{l=1}^2 c^{2l} R(t)e_i^l(t) + cR(t)e_i^2(t) - d_i^2 e_i^2(t) + Gw_i^2(t) \end{aligned} \right.$$

构造如下李雅普诺夫函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^N (e_i^{1T}(t) P e_i^1(t) + \frac{(d_i^1 - d)^2}{k_i^1} + e_i^{2T}(t) Q e_i^2(t) + \frac{(d_i^2 - d)^2}{k_i^2}) \quad (12)$$

则  $V(t)$  关于误差系统 (6) 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N (\dot{e}_i^{1T}(t) P e_i^1(t) + e_i^{1T}(t) P \dot{e}_i^1(t) + \frac{2}{k_i^1} (d_i^1 - d) \dot{d}_i^1 + \dot{e}_i^{2T}(t) Q e_i^2(t) + e_i^{2T}(t) Q \dot{e}_i^2(t) + \frac{2}{k_i^2} (d_i^2 - d) \dot{d}_i^2) = \\ &= \sum_{i=1}^N (e_i^{1T}(t) F^T(t) P e_i^1(t) + d^1 \sum_{j=1}^N A_{ij}^1 e_j^{1T}(t) B^T(t) P e_i^1(t) + c e_i^{2T}(t) B^T(t) P e_i^1(t) + e_i^{1T}(t) P F(t) e_i^1(t) + d^1 \sum_{j=1}^N A_{ij}^1 e_i^{1T}(t) P B(t) e_j^1(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ce_i^{1T}(t)PB(t)e_i^2(t) + \\
& ce_i^{2T}(t)QR(t)e_i^1(t) + ce_i^{1T}(t)R^T(t)Qe_i^2(t) + \\
& d^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^2 e_j^{2T}(t)R^T(t)Qe_i^2(t) + \\
& e_i^{2T}(t)QM(t)e_i^2(t) + e_i^{2T}(t)M^T(t)Qe_i^2(t) + \\
& w_i^{1T}(t)G^T P e_i^1(t) + \\
& d^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^2 e_i^{2T}(t)QR(t)e_j^2(t) + \\
& e_i^{1T}(t)PGw_i^1(t) + w_i^{2T}(t)G^T Qe_i^2(t) + \\
& e_i^{2T}(t)QGw_i^2(t) - 2de_i^{1T}(t)Pe_i^1(t) - \\
& 2de_i^{2T}(t)Qe_i^2(t) \leq \\
& \sum_{i=1}^N (e_i^{1T}(t)F^T P e_i^1(t) + \\
& d^1 \sum_{j=1}^N A_{ij}^1 e_j^{1T}(t)B^T P e_i^1(t) + \\
& ce_i^{2T}(t)B^T P e_i^1(t) + e_i^{2T}(t)M^T Qe_i^2(t) + \\
& d^1 \sum_{j=1}^N A_{ij}^1 e_i^{1T}(t)P B e_j^1(t) + e_i^{1T}(t)P F e_i^1(t) + \\
& ce_i^{1T}(t)P B e_i^2(t) - 2de_i^{1T}(t)P e_i^1(t) + \\
& d^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^2 e_j^{2T}(t)R^T Qe_i^2(t) + e_i^{2T}(t)Q M e_i^2(t) + \\
& ce_i^{1T}(t)R^T Qe_i^2(t) + ce_i^{2T}(t)Q R e_i^1(t) - \\
& 2de_i^{2T}(t)Qe_i^2(t) + \\
& d^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^2 e_i^{2T}(t)Q R e_j^2(t) + \\
& w_i^{1T}(t)G^T P e_i^1(t) + e_i^{1T}(t)P G w_i^1(t) + \\
& w_i^{2T}(t)G^T Qe_i^2(t) + e_i^{2T}(t)Q G w_i^2(t)
\end{aligned}$$

由引理 1 有

$$\begin{aligned}
& w_i^{1T}(t)G^T P e_i^1(t) + e_i^{1T}(t)P G w_i^1(t) \leq \\
& \gamma^2 w_i^{1T}(t)w_i^1(t) + \frac{1}{\gamma^2} e_i^{1T}(t)P G G^T P e_i^1(t) \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& w_i^{2T}(t)G^T Qe_i^2(t) + e_i^{2T}(t)Q G w_i^2(t) \leq \\
& \gamma^2 w_i^{2T}(t)w_i^2(t) + \frac{1}{\gamma^2} e_i^{2T}(t)Q G G^T Q e_i^2(t) \quad (14)
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
& d^1 \sum_{j=1}^N A_{ij}^1 e_j^{1T}(t)B^T P e_i^1(t) + \\
& d^1 \sum_{j=1}^N A_{ij}^1 e_i^{1T}(t)P B e_j^1(t) \leq \\
& d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^1| [e_j^{1T}(t)e_j^1(t) + \\
& e_i^{1T}(t)P B B^T P e_i^1(t)] = \\
& d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^1| e_i^{1T}(t)P B B^T P e_i^1(t) + \\
& d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^1| e_i^{1T}(t)e_i^1(t)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
& d^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^2 e_j^{2T}(t)R^T Qe_i^2(t) + \\
& d^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^2 e_i^{2T}(t)Q R e_j^2(t) \leq \\
& d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^2| e_i^{2T}(t)Q R R^T Q e_i^2(t) + \\
& d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^2| e_i^{2T}(t)e_i^2(t)
\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^N [e_i^{1T}(t)(F^T P + \\
& d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^1| P B B^T P + d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^1| E + \\
& P F + \frac{1}{\gamma^2} P G G^T P - 2dP + S^1) e_i^1(t) + \\
& e_i^{2T}(t)(M^T Q + d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^2| Q R R^T Q + \\
& d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^2| E + Q M + \\
& \frac{1}{\gamma^2} Q G G^T Q - 2dQ + S^2) e_i^2(t)] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N (e_i^{2T}(t)(cB^T P + cQR)e_i^1(t) + \\ & e_i^{1T}(t)(cPB + cR^T Q)e_i^2(t)) + \\ & \sum_{i=1}^N (\gamma^2 w_i^{1T}(t)w_i^1(t) - e_i^{1T}(t)S^1 e_i^1(t) + \\ & \gamma^2 w_i^{2T}(t)w_i^2(t) - e_i^{2T}(t)S^2 e_i^2(t)) \end{aligned} \quad (15)$$

若

$$\begin{bmatrix} \Xi & cR^T Q + cPB \\ cB^T P + cQR & \Theta \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi = & F^T P + d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^1| P B B^T P + \\ & d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^1| E + P F + \\ & \frac{1}{\gamma^2} P G G^T P - 2dP + S^1 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \Theta = & M^T Q + d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^2| Q R R^T Q + \\ & d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^2| E + Q M + \\ & \frac{1}{\gamma^2} Q G G^T Q - 2dQ + S^2 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^N (\gamma^2 w_i^{1T}(t)w_i^1(t) - e_i^{1T}(t)S^1 e_i^1(t) + \\ & \gamma^2 w_i^{2T}(t)w_i^2(t) - e_i^{2T}(t)S^2 e_i^2(t)) \end{aligned} \quad (17)$$

对式 (17) 从  $0 \rightarrow \infty$  定积分有

$$\begin{aligned} V(\infty) - V(0) < & \sum_{i=1}^N \left[ \int_0^\infty (\gamma^2 w_i^{1T}(t)w_i^1(t) + \right. \\ & \left. \gamma^2 w_i^{2T}(t)w_i^2(t)) dt - \right. \\ & \left. \int_0^\infty (e_i^{1T}(t)S^1 e_i^1(t) + e_i^{2T}(t)S^2 e_i^2(t)) dt \right] \end{aligned}$$

因为  $V(\infty) > 0, V(0) = 0$ , 所以有

$$\begin{aligned} V(\infty) < & \sum_{i=1}^N \left[ \int_0^\infty (\gamma^2 w_i^{1T}(t)w_i^1(t) + \right. \\ & \left. \gamma^2 w_i^{2T}(t)w_i^2(t)) dt - \right. \\ & \left. \int_0^\infty (e_i^{1T}(t)S^1 e_i^1(t) + e_i^{2T}(t)S^2 e_i^2(t)) dt \right] \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \gamma^2 (w_i^{1T}(t)w_i^1(t) + w_i^{2T}(t)w_i^2(t)) dt - \\ & \int_0^\infty (e_i^{1T}(t)S^1 e_i^1(t) + e_i^{2T}(t)S^2 e_i^2(t)) dt > 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \int_0^\infty (w_i^{1T}(t)w_i^1(t) + w_i^{2T}(t)w_i^2(t)) dt > \\ & \int_0^\infty (e_i^{1T}(t)S^1 e_i^1(t) + e_i^{2T}(t)S^2 e_i^2(t)) dt \end{aligned}$$

又由式 (8), 有

$$\int_0^\infty e_i^T(t) \tilde{S} e_i(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty w_i^T(t)w_i(t) dt$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

所以, 在各种假设条件下, 相互依存网络 (6) 达到了  $H_\infty$  异质同步. 特别要注意的是不等式 (16) 并非标准的线性矩阵不等式形式, 利用引理 2 可将其化为不等式 (9).  $\square$

定理 1 提出了噪声作用下相互依存网络达到  $H_\infty$  异质同步的充分条件, 定理 2 则给出了没有噪声条件下, 子网 1 和子网 2 达到异质同步的充分条件.

**定理 2.** 当假设 1~3 成立时, 对于给定的  $S^{1T} = S^1 > 0, S^{2T} = S^2 > 0$ , 若存在两个正定矩阵  $P$  和  $Q$ , 使得式 (18) (见下页上方) 成立, 则无噪声的相互依存网络在控制器 (10) 和自适应律 (11) 的作用下达到异质同步.

**证明.** 与定理 1 证明类似. 若  $w_i^1(t) = w_i^2(t) = 0$ , 由式 (15) 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^N (e_i^{1T}(t)(F^T P + \\ & d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^1| P B B^T P + d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^1| E + \\ & P F - 2dP + S^1) e_i^1(t) + e_i^{2T}(t)(M^T Q + \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} F^T P + PF + S^1 + d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^1| E - 2dP & cR^T Q + cPB & PB & 0 \\ cB^T P + cQR & M^T Q + QM + S^2 + d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^2| E - 2dQ & 0 & QR \\ B^T P & 0 & \frac{1}{-d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^1|} E & 0 \\ 0 & R^T Q & 0 & \frac{1}{-d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^2|} E \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^2| QRR^T Q + d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^2| E + QM - \\ & 2dQ + S^2 e_i^2(t) + \\ & \sum_{i=1}^N (e_i^{2T}(t)(cB^T P + cQR)e_i^1(t) + \\ & e_i^{1T}(t)(cPB + cR^T Q)e_i^2(t) + \\ & \sum_{i=1}^N (-e_i^{1T}(t)S^1 e_i^1(t) - e_i^{2T}(t)S^2 e_i^2(t)) \end{aligned}$$

当

$$\begin{bmatrix} \Xi & cR^T Q + cPB \\ cB^T P + cQR & \Theta \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi &= F^T P + d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^1| PBB^T P + \\ & d^1 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^1| E + PF - 2dP + S^1 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \Theta &= M^T Q + d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ij}^2| QRR^T Q + \\ & d^2 \sum_{j=1}^N |A_{ji}^2| E + QM - 2dQ + S^2 \end{aligned}$$

有

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^N (-e_i^{1T}(t)S^1 e_i^1(t) - e_i^{2T}(t)S^2 e_i^2(t)) < 0$$

所以, 无噪声的相互依存网络在控制器 (10) 和自适应律 (11) 的作用下达达到自适应  $H_\infty$  异质同步. 类似地, 由引理 2, 上述不等式 (19) 等价于不等式 (18).

□

### 3 数值模拟

为了验证定理 1 和定理 2, 下面将对由两个小世界网络构成的相互依存网络进行数值模拟, 其中子网 1 和子网 2 均为具有 100 个节点的小世界网络, 子网 1 每个节点的动力学系统均是 Lorenz 系统, 即

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = a_1(x_{i2} - x_{i1}) \\ \dot{x}_{i2} = a_3 x_{i1} - x_{i1} x_{i3} - x_{i2}, \quad i = 1, 2, \dots, 100 \\ \dot{x}_{i3} = x_{i1} x_{i2} - a_2 x_{i3} \end{cases}$$

其中,  $a_1, a_2, a_3$  是实数, 当  $a_1 = 10, a_2 = 8/3, a_3 = 28$  时, Lorenz 系统是混沌的. 子网 2 每个节点的动力学系统均是 Lü 系统, 即

$$\begin{cases} \dot{y}_{i1} = b_1(-y_{i1} + y_{i2}) \\ \dot{y}_{i2} = -y_{i1} y_{i3} + b_2 y_{i2}, \quad i = 1, 2, \dots, 100 \\ \dot{y}_{i3} = y_{i1} y_{i2} - b_3 y_{i3} \end{cases}$$

其中,  $b_1, b_2, b_3$  是实数, 当  $b_1 = 36, b_2 = 20, b_3 = 3$  时, Lü 系统是混沌的.

同时, 在本数值模拟中, 设子网 1 和子网 2 的耦合函数分别为

$$\begin{aligned} H(x_i(t)) &= (-x_{i1}(t), x_{i2}(t), \cos(x_{i3}(t)))^T \\ & \quad i = 1, 2, \dots, 100 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} H(y_i(t)) &= (-y_{i1}(t), y_{i2}(t), \cos(y_{i3}(t)))^T \\ & \quad i = 1, 2, \dots, 100 \end{aligned}$$

设  $w_i^1(t), w_i^2(t)$  均为均值为 0 的高斯噪声, 给定网络中的参数  $G = [1, 1, 1]^T, d^1 = d^2 = 0.3, c = 0.088, S^1 = S^2 = \text{diag}\{0.0001, 0.0001, 0.0001\}, \gamma = 0.5$ . 同时, 在所有的数值模拟中设初始值  $k_i^1 = 3 \times i, k_i^2 = 0.03 \times i$ , 子网 1 孤立系统的初值  $l_1 = (3, -10, 8)$ , 子网 2 孤立系统的初值  $l_2 = (2, 2, 5)$ , 子网 1 和子网 2 的初始值为分别为:  $x_i = (-0.05i, 0.05i, 0.5i), y_i = (-0.05i, 0.5i, 0.05i), i = 1, 2, \dots, 100$ .

根据定理 1, 利用 MATLAB 的 LMI 工具箱, 可以找到正定矩阵  $P_1$  和  $Q_1$ , 且

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 3.0206 & -4.2827 & -2.5859 \\ -4.2827 & 210.9386 & -78.2760 \\ -2.5859 & -78.2760 & 161.2255 \end{bmatrix}$$

使得满足定理 1 的条件式 (9). 类似地, 根据定理 2, 可以找到正定矩阵  $P_2$  和  $Q_2$  分别为

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 12.8847 & -1.7161 & -0.3602 \\ -1.7161 & 82.5465 & 6.1691 \\ -0.3602 & 6.1691 & 76.8006 \end{bmatrix}$$

在上述条件下, 对有噪声和无噪声的子网 1 和子网 2 施加控制器 (10) 和自适应律 (11) 之后, 得到子网 1 和子网 2 的误差系统和自适应律的运动轨迹图 (图 1~8).

图 1 和图 2 表明在噪声的干扰下, 误差系统轨迹在 0 处有很小的波动, 但是很快都趋于 0, 说明网络外部噪声干扰, 对网络误差系统没有很大的改变. 无噪声时, 图 3 和图 4 说明子网 1 和子网 2 在各自的控制器和自适应律的作用下, 误差系统轨迹都很快趋于 0, 即网络内部很快达到同步. 子网 1 和子网 2 在有噪声和无噪声情况下的自适应律轨迹图 (图 5

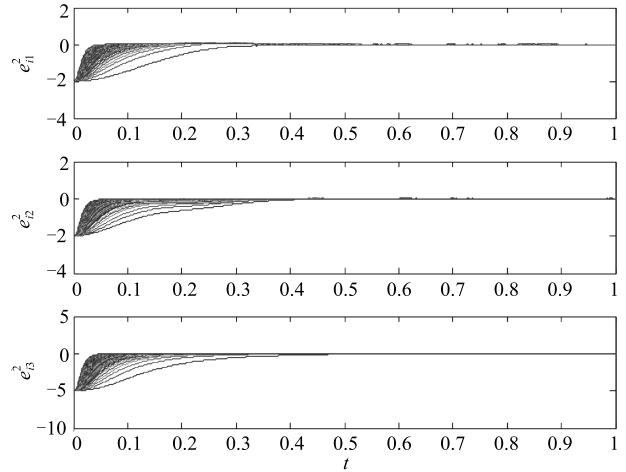


图 2 噪声下子网 2 误差系统轨迹图  
Fig. 2 The trajectory of the error system of sub-network 2 with noise

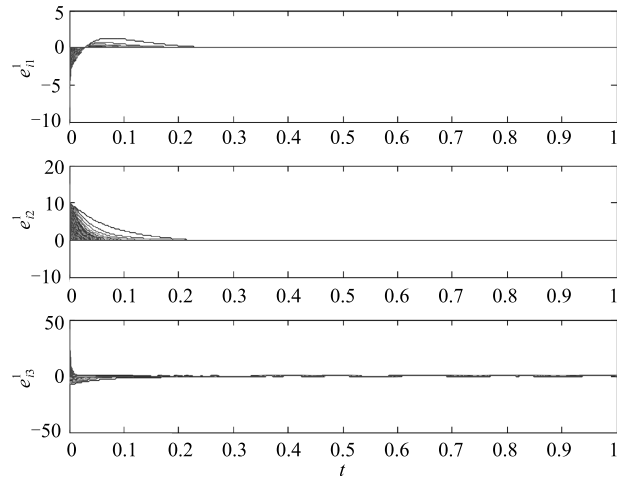


图 3 无噪声子网 1 误差系统轨迹图  
Fig. 3 The trajectory of the error system of sub-network 1 without noise

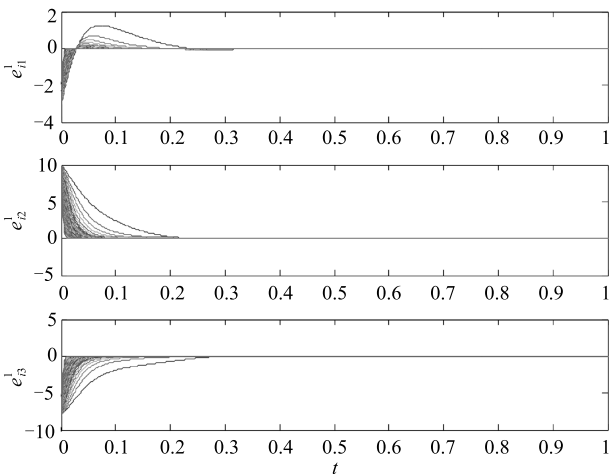


图 1 噪声下子网 1 误差系统迹图  
Fig. 1 The trajectory of the error system of sub-network 1 with noise

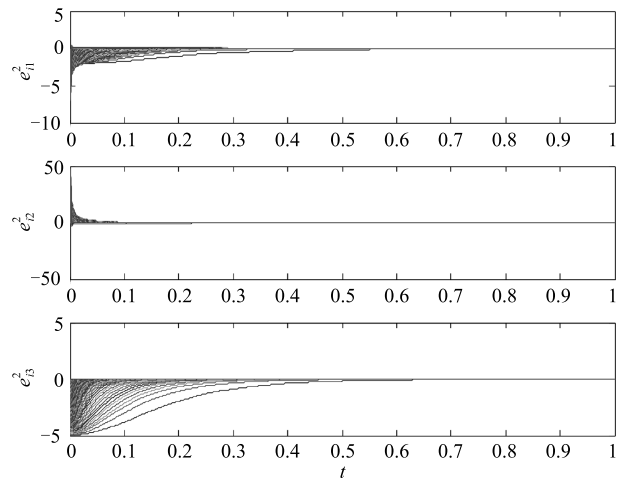


图 4 无噪声子网 2 误差系统迹图  
Fig. 4 The trajectory of the error system of sub-network 2 without noise



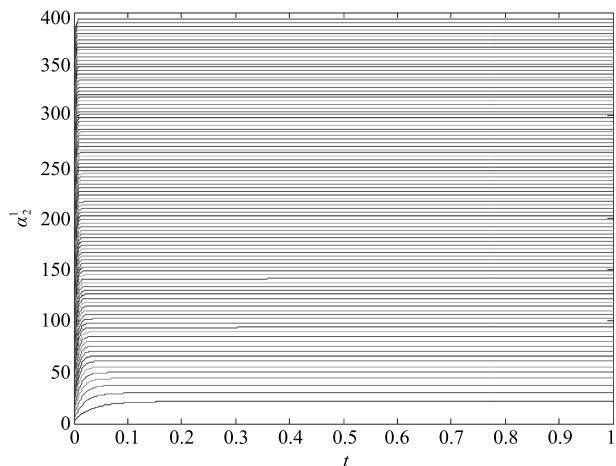


图5 噪声下子网1自适应律轨迹图

Fig. 5 The adaptive laws of sub-network 1 with noise

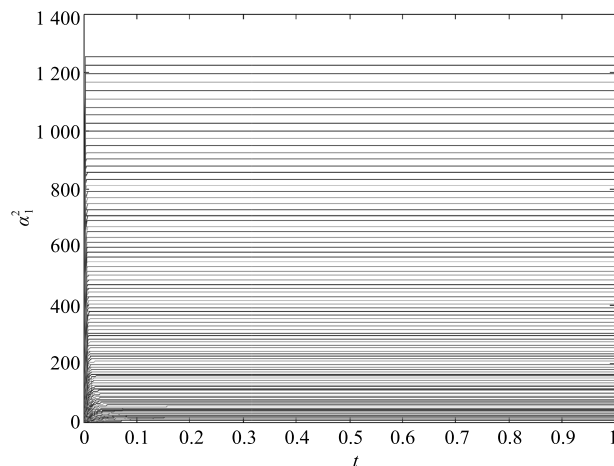


图8 无噪声子网2自适应律轨迹图

Fig. 8 The adaptive laws of sub-network 2 without noise

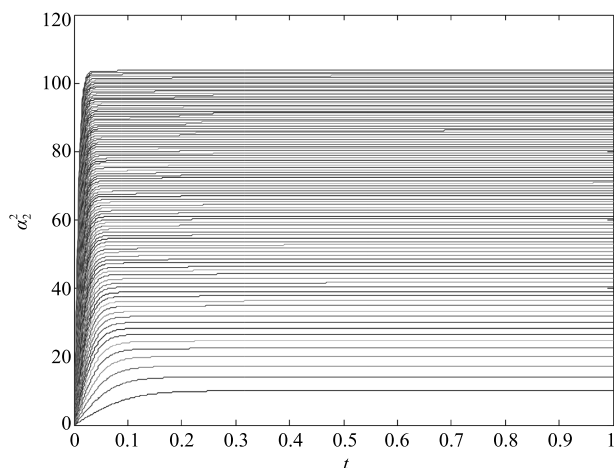


图6 噪声下子网2自适应律轨迹图

Fig. 6 The adaptive laws of sub-network 2 with noise

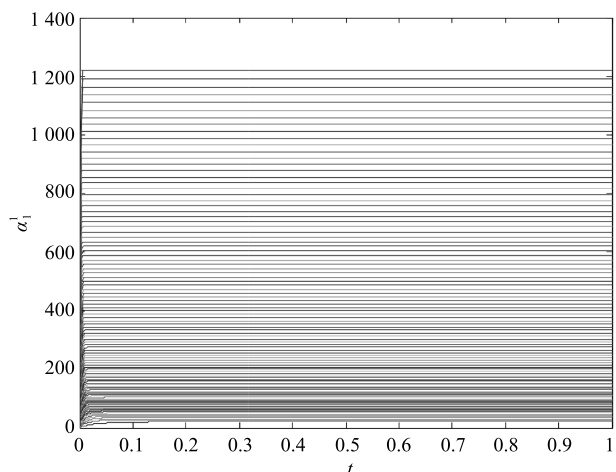


图7 无噪声子网1自适应律轨迹图

Fig. 7 The adaptive laws of sub-network 1 without noise

~8) 也表明: 自适应控制律在网络达到同步的同时都很快趋于稳定值.

图9(a)和图9(b)分别表示子网1和子网2误差的  $H_\infty$  范数和外部噪声  $H_\infty$  范数比值开方与时间关系图. 它们说明在初始值为0的条件下, 误差的  $H_\infty$  范数和外部噪声  $H_\infty$  范数的比值开方在扰动衰减水平  $\gamma = 0.5$  内, 由此证明了

$$\int_0^\infty e_i^T(t) \tilde{S} e_i(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty w_i^T(t) w_i(t) dt$$

即相互依存网络(1)的各个节点达到了自适应  $H_\infty$  一致, 因此验证了本文提出的理论的正确性和有效性.

#### 4 结束语

本文研究了带有噪声的相互依存网络的自适应  $H_\infty$  异质同步问题, 提出了有噪声作用和没有噪声作用时使得相互依存网络达到自适应异质同步的充分条件. 其中相互依存网络由两个具有“一对一”相互依赖关系的子网构成, 基于李雅普诺夫稳定性理论、线性矩阵不等式方法、以及  $H_\infty$  控制和自适应控制的方法, 通过设置合适的控制器, 最终从理论上提出使得相互依存网络达到异质同步的充分条件, 从而使网络内部的每个节点的状态都同步于孤立系统, 同时相互依存网络的外部也达到了  $H_\infty$  衰减水平. 并且自适应控制器的形式相对简单, 在实际中也比较容易实现. 最后, 通过一个具体的例子, 对节点状态分别为 Lorenz 系统和 Lü 系统的两个子网进行了详细的数值模拟, 以此证明我们提出结论的准确性. 本文提出的方法和理论结果, 是相互依存网络研究的发展和深入, 具有一定的理论和现实意义, 能够为现实生活中的相互依存网络 (譬如通信-计算机网、

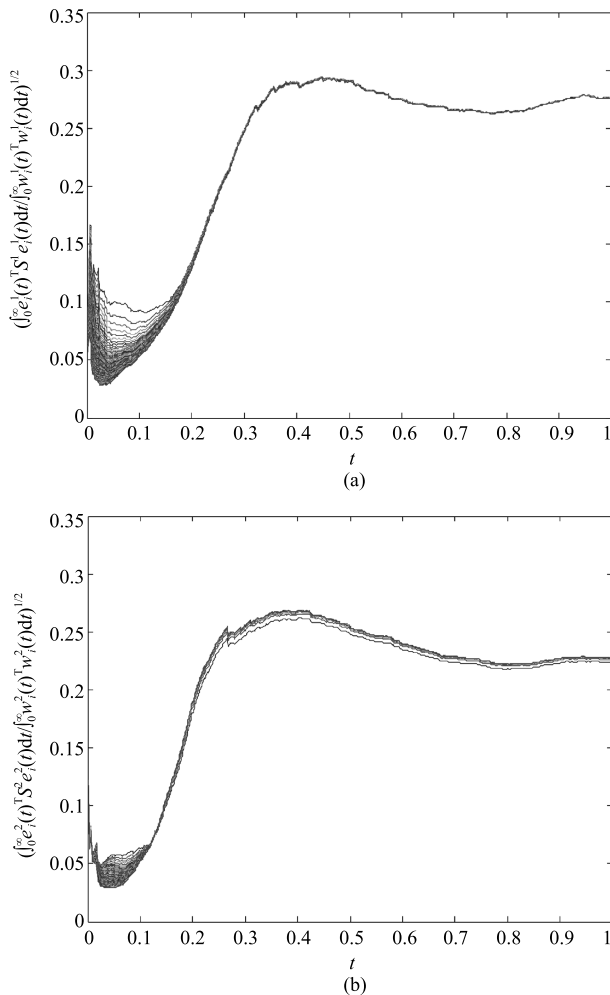


图9 子网误差  $H_\infty$  范数和外部噪声  $H_\infty$  范数比值开方与时间关系图 ((a) 子网 1; (b) 子网 2)

Fig. 9 The square root of the ratio between the  $H_\infty$  norm of the error and noise concerning time  
(a) Sub-network 1; (b) Sub-network 2)

交通运输网、人体的蛋白质网、计算机-银行网等) 提供一定的理论支撑. 由于本文所提出的理论结果仅针对具有高斯白噪声的相互依存网络, 而生活中的网络多涉及随机扰动, 所以, 本文的下一步工作将进一步探索随机扰动下相互依存网络的同步问题.

## References

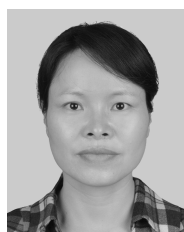
- Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, Stanley H E, Havlin S. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 2010, **464**(7291): 1025–1028
- Buldyrev S V, Shere N W, Cwiliich G A. Interdependent networks with identical degrees of mutually dependent nodes. *Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2011, **83**: Article No. 016112
- Shao J, Buldyrev S V, Havlin S, Stanley H E. Cascade of failures in coupled network systems with multiple support-dependence relations. *Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2011, **83**: Article No. 036116
- Li Wen-Guo, Deng Shu-Guang, Yang Bing, Xiao Wei-Chu. Topological coupling method between interdependent networks. *Computer Engineering and Applications*, 2014, **50**(11): 85–89  
(李稳国, 邓曙光, 杨冰, 肖卫初. 相互依存网络间的拓扑构建方法. *计算机工程与应用*, 2014, **50**(11): 85–89)
- Shen A W, Guo J L, Wang Z J. Research on methods for improving robustness of cascading failures of interdependent networks. *Wireless Personal Communications*, 2017, **95**(3): 2111–2126
- Danziger M M, Shekhtman L M, Bashan A, Berezin Y, Havlin S. Vulnerability of interdependent networks and networks of networks. *Interconnected Networks*. Cham, Germany: Springer International Publishing, 2016.
- Wang J W, Jiang C, Qian J F. Robustness of interdependent networks with different link patterns against cascading failures. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2014, **393**: 535–541
- Moskalenko O I, Koronovskii A A, Hramov A E, Zhuravlev M O. Estimate of the degree of synchronization in the intermittent phase synchronization regime from a time series (model systems and neurophysiological data). *JETP Letters*, 2016, **103**(8): 539–543
- Pai M C. Global synchronization of uncertain chaotic systems via discrete-time sliding mode control. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, **227**: 663–671
- Ryono K, Oguchi T. Partial synchronization in networks of nonlinear systems with transmission delay couplings. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, **48**(18): 77–82
- Rao P C, Wu Z Y, Liu M. Adaptive projective synchronization of dynamical networks with distributed time delays. *Nonlinear Dynamics*, 2012, **67**(3): 1729–1736
- Um J, Minnhagen P, Kim B J. Synchronization in interdependent networks. *Chaos*, 2011, **21**(2): Article No. 025106
- Gao J X, Buldyrev S V, Stanley H E, Havlin S. Networks formed from interdependent networks. *Nature Physics*, 2012, **8**(1): 40–48
- Tu L L, Song S, Wang Y J, Li K Y. The relationship between the topology and synchronizability of partially interdependent networks. *EPL (Europhysics Letters)*, 2017, **119**(4): Article No. 40004
- Tu Li-Lan, Liu Hong-Fang, Yu Le. Local adaptive  $H_\infty$  consistency of delayed complex networks with noise. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(14): 70–77  
(涂俐兰, 刘红芳, 余乐. 噪声下时滞复杂网络的局部自适应  $H_\infty$  无穷一致性. *物理学报*, 2013, **62**(14): 70–77)
- Shi H J, Sun Y Z, Miao L Y, Duan Z M. Outer synchronization of uncertain complex delayed networks with noise coupling. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **85**(4): 2437–2448
- Lao Song-Yang, Wang Jun-De, Bai Liang. Review of the interdependent networks. *Journal of National University of Defense Technology*, 2016, **38**(1): 122–128  
(老松杨, 王竣德, 白亮. 相依网络研究综述. *国防科技大学学报*, 2016, **38**(1): 122–128)

- 18 Chen Guan-Rong. Problems and challenges in control theory under complex dynamical network environments. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 312–321  
(陈关荣. 复杂动态网络环境下控制理论遇到的问题与挑战. *自动化学报*, 2013, **39**(4): 312–321)
- 19 Xu Q, Zhuang S X, Hu D, Zeng Y F, Xiao J. Generalized mutual synchronization between two controlled interdependent networks. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, **2014**: Article No. 453149
- 20 Zames G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, **26**(2): 301–320
- 21 Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, Francis B A. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. In: Proceedings of the 1988 American Control Conference. Atlanta, USA: IEEE, 1988. 1691–1696
- 22 Wang Z Y, Huang L H, Zuo Y, Zhang L L.  $H_\infty$  control for uncertain system with time-delay and nonlinear external disturbance via adaptive control method. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2010, **8**(2): 266–271
- 23 Lin T C, Kuo C H.  $H_\infty$  synchronization of uncertain fractional order chaotic systems: adaptive fuzzy approach. *ISA Transactions*, 2011, **50**(4): 548–556
- 24 Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadel-

phia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. 7–12



**郭天姣** 武汉科技大学理学院硕士研究生. 主要研究方向为复杂网络的同步与控制. E-mail: guotianjiao@wust.edu.cn  
(**GUO Tian-Jiao** Master student at the College of Science, Wuhan University of Science and Technology. Her research interest covers synchronization and control of complex networks.)



**涂俐兰** 武汉科技大学冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室教授, 武汉科技大学理学院教授. 主要研究方向为复杂网络的同步, 控制与拓扑结构识别. 本文通信作者.

E-mail: tulilan@wust.edu.cn

(**TU Li-Lan** Professor at Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process, Wuhan University of Science and Technology, and at College of Science, Wuhan University of Science and Technology. Her research interest covers synchronization, control and topology identification of complex networks. Corresponding author of this paper.)