

# 一类非线性系统量化反馈控制的几何设计方法

王 隔 霞<sup>1</sup>

**摘 要** 本文考虑了一类非线性系统的对数量化反馈控制器的设计问题. 假定该非线性系统满足一定扇形条件, 在此条件下, 通过引入闭环系统函数, 利用函数平移的方法, 给出了文中非线性系统具体的对数量化反馈控制器, 可做到稳定和渐近稳定两种控制目标. 所得结论可以推广到线性系统, 与已有的结论相吻合, 说明了我们结论的正确性. 同时, 所得结论也可应用于一般非线性系统量化控制器的设计. 最后, 数值例子验证了所得结论.

**关键词** 非线性系统, 量化反馈, 对数量化器, 分段函数

**引用格式** 王隔霞. 一类非线性系统量化反馈控制的几何设计方法. 自动化学报, 2020, 46(5): 1044–1050

**DOI** 10.16383/j.aas.c180046

## Geometrical Method on Quantized Feedback Control Design for a Class of Nonlinear Systems

WANG Ge-Xia<sup>1</sup>

**Abstract** In this paper, logarithmic quantized feedback for a class of nonlinear systems is considered and designed explicitly. Assume that nonlinear systems of our interest satisfies a certain kind of sector condition. Under this assumption, based on the geometrical method, a closed-loop map is introduced and a logarithmic quantizer is designed explicitly based on translation of functions, to stabilize the nonlinear systems. Moreover, it is worthy to point out that the designed quantized feedback can achieve stability and asymptotically stability, respectively. Meanwhile, our result can be applied to the linear case, which is consistent with the existed result. It can also be applied to the general nonlinear systems. Finally, two examples are given to illustrate our result.

**Key words** Nonlinear systems, quantized feedback, logarithmic quantizer, piecewise functions

**Citation** Wang Ge-Xia. Geometrical method on quantized feedback control design for a class of nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(5): 1044–1050

量化反馈控制问题一直以来受到大家广泛关注, 请查看相关文献 [1–15]. 尤其是随着网络化控制系统的应用和发展<sup>[16–17]</sup>, 又促使量化控制成为了解决网络化控制系统控制问题的一种有效方式.

事实上, 量化反馈控制需要对状态空间进行划分, 它将状态空间划分为可数个小区, 并且在同一划分区域内的状态对应于同一个控制输入. 因此, 量化反馈控制器的控制输入值至多是可列个. 状态空间划分有多种形式, 对数划分<sup>[1]</sup> 和均匀划分<sup>[3]</sup> 是两种比较常见的划分形式. 均匀划分形式简单, 但没有伸缩性. 对数划分形式可以做到根据需要, 在离原点较远时, 划分较粗; 在离原点较近时, 划分较细, 是一类应用广泛的量化形式. 基于这两种划分形式, 分别引出了均匀量化器和对数量化器.

可数个控制输入值是量化控制不同于非量化控

制的显著特征. 通常情况下, 为了完成某一给定的控制目标, 如何给出状态空间的一个合适的划分和相应离散的控制输入值  $u$ , 即设计合适的量化反馈控制, 有多种方法, 有状态空间直接分解法、基于鲁棒性的研究方法等.

状态空间直接分解法参见文献 [1], 它针对离散线性系统, 先待定状态空间划分的形式, 接下来利用两个相邻区域边界上控制输入  $u_i$  和  $u_{i+1}$  的关系, 得到了划分形式的特点, 并指出最粗划分是对数形式的量化反馈控制器. 该方法因利用了线性系统的特点, 如坐标变换等, 致其较难被推广至一般系统, 后续工作参看文献 [5, 12, 14]. 基于鲁棒性的研究方法参见文献 [4], 它通过将量化误差看成是一种扰动, 利用绝对稳定性给出了线性系统的量化反馈, 同样得到了镇定的对数量化器. 这类方法现在仍有部分学者在使用, 参看文献 [10–11]. 同时, 值得指出的是文献 [9] 利用数据流和不变集理论研究了一维线性离散系统的实用稳定性理论.

上段提及的量化问题文献 [1, 4–5, 9–12, 14] 中设计的量化器均是无记忆的, 该量化器不随着时

收稿日期 2018-01-18 录用日期 2018-07-02  
Manuscript received January 18, 2018; accepted July 2, 2018  
本文责任编辑 高会军  
Recommended by Associate Editor GAO Hui-Jun  
1. 上海电力大学数理学院 上海 201300  
1. Department of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 201300

间的变化而变化. 同时, 一些工作考虑了有记忆的, 如文献 [3] 中的动态量化器满足下一步的量化器依赖于上一步.

本文仅考虑无记忆量化器, 不涉及有记忆的情形. 通过上述文献的阅读, 我们发现文献 [1, 4, 9] 都是针对线性系统展开的. 文献 [1] 和 [4] 中的方法几何解释不明显, 不直观, 尤其是文献 [1] 中的空间分解的方法很奇特, 难解释. 但文献 [9] 通过引入闭环系统函数, 考虑不同划分区间上闭环系统函数的图像, 并基于不变集理论给出了系统实用稳定性的结论. 故文献 [9] 的方法几何解释清晰, 方法直观.

非线性系统的研究, 请查看文献 [10, 12, 14–15] 等. 文献 [10] 延续了文献 [4] 中将量化误差看成是一种扰动的做法, 考虑了一类非线性系统的稳定性. 文献 [12] 和文献 [14] 将文献 [1] 的工作推广到了非线性系统. 但尚未发现用几何方法来研究非线性系统的工作. 这是因为文献 [9] 的方法较难推广到非线性系统, 因为它引入了不变集的连续集合的概念, 即一簇不变集, 而且这些不变集是连续变化的. 非线性系统的不变性本身就比较麻烦, 因此, 直接将文献 [9] 的方法推广到非线性系统较难.

受此启发, 本文将研究一类特殊非线性系统的对数量化反馈控制的设计问题. 此时, 假定所考虑的非线性系统满足一定的扇形条件, 在此条件下, 借用文献 [9] 中的闭环系统函数的概念, 我们利用函数图像平移的思想和分段函数的性质, 给出了该类特殊非线性系统稳定的对数量化器的设计. 该方法几何解释清晰, 方法直观, 与已有的工作不同. 同时, 我们又没有借用不变集的理论, 因此, 该文的方法与文献 [9] 也不同. 为了降低难度, 文中仅考虑了一维的情形, 高维情形待进一步研究.

### 1 问题描述

考虑如下系统:

$$x(k+1) = f(x(k)) + u(k) \tag{1}$$

其中  $x(k) \in \mathbf{R}$  是一维状态,  $u(k) \in \mathbf{R}$  是单输入,  $f(x)$  是  $x \in \mathbf{R}$  上的非线性函数, 满足  $f(0) = 0$  和  $f(-x) = -f(x)$ .

我们的控制问题就是找到如下可列集

$$U = \{u_0, u_{\pm 1}, u_{\pm 2}, \dots\} \tag{2}$$

和量化函数

$$q(x) : \mathbf{R} \rightarrow U \tag{3}$$

使得量化反馈控制器  $u(k) = q(x(k))$  镇定系统 (1).

因为实数集  $\mathbf{R}$  是不可数集, 而  $U$  为可数集, 故式 (3) 定义的量化函数  $q(x)$  必定诱导实数集  $\mathbf{R}$  的

一个可数的划分. 如图 1 所示, 它显示了一类量化函数  $q(x)$  的图像.

#### 1.1 预备知识

约定量化函数  $q(x) = u_h (x \in I_h)$ , 这里区间  $I_h$  为  $\mathbf{R}$  的某个划分中的一个区间 ( $u_h$  和  $I_h$  为泛指, 会在后面确定). 当  $x(k) \in I_h$  时, 式 (1) 在量化反馈  $u(k) = q(x(k))$  作用下变为

$$x(k+1) = f(x(k)) + u_h, \quad x(k) \in I_h \tag{4}$$

此时, 定义闭环系统函数

$$\Gamma(x) = f(x) + u_h, \quad x \in I_h \tag{5}$$

相应地, 式 (1) 的闭环系统 (4) 可写为

$$x(k+1) = \Gamma(x(k)), \quad x(k) \in I_h \tag{6}$$

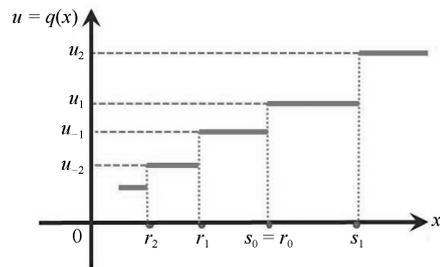


图 1 一类量化器

Fig. 1 A class of quantizer

注意闭环系统函数  $\Gamma(x)$  是一个分段函数. 图 2 显示了闭环系统函数  $\Gamma(x)$  和开环系统函数  $f(x)$  的图像. 从图 2 看出, 对于某些非线性函数  $f(x)$ , 在某些区间上, 可找到合适的控制输入  $u_h$ , 使得函数  $\Gamma(x) = f(x) + u_h$  的图像介于直线  $y = x$  和直线  $y = -x$  之间.

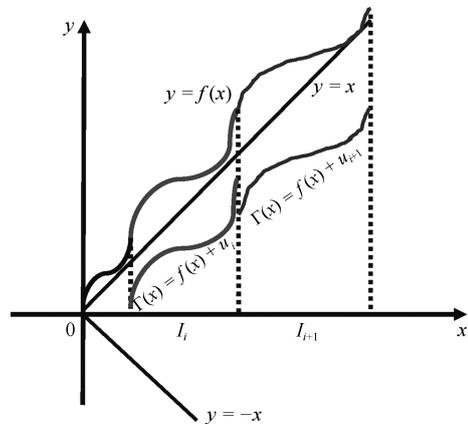


图 2 分段闭环系统函数  $\Gamma(x)$  和开环函数  $f(x)$  的关系

Fig. 2 The graphs of the closed-loop function  $\Gamma(x)$  and the open-loop function  $f(x)$

图 3 显示了当  $f(x) = \sin x^{-1}$  时, 它与直线  $y = x$  和直线  $y = -x$  在区间  $[0.1, 0.5]$  的图像. 从图 3 可看出, 为了让  $f(x)$  的图像能够通过上下平移, 做到介于直线  $y = x$  和直线  $y = -x$  之间, 前面的划分比较密, 后面的划分相对来说比较稀疏. 整体而言, 这些划分是非常杂乱无章的. 因此, 不是任何非线性函数都存在稳定的对数形式的划分, 下面我们将给出开环函数  $f(x)$  满足的一个条件, 使得式 (1) 存在稳定的对数量化器.

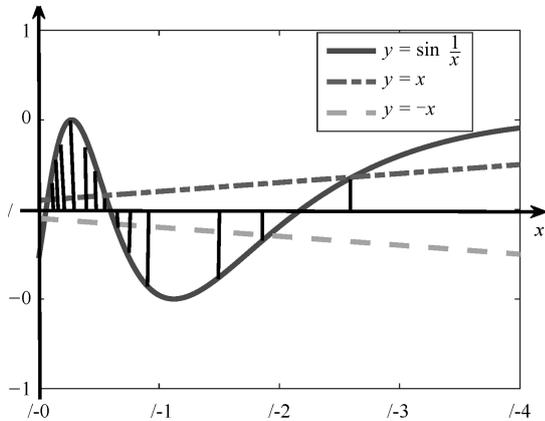


图 3 函数  $y = \sin \frac{1}{x}$  与直线  $y = \pm x$  的图 ( $x \in [0.1, 0.5]$ )

Fig. 3 The graphs of  $y = \sin \frac{1}{x}$  and  $y = \pm x$  over  $x \in [0.1, 0.5]$

假设 1. 假定  $f(x)$  满足

$$ax \leq f(x) \leq bx, \quad x \geq 0 \quad (7)$$

其中  $a$  和  $b$  为两个已知正常数, 并且满足

$$1 \leq a \leq b < a + 2 \quad (8)$$

注 1. 当  $f(x)$  满足上述条件 (7) 时, 显然函数  $f(x)$  在原点连续; 并且式 (5) 定义的闭环系统函数  $\Gamma(x) = f(x) + u_h$  在各个划分区间上的图像为一段一段的曲线, 它在各个划分区间上的图像介于两条直线  $y = ax + u_h$  和  $y = bx + u_h$  之间.

注 2. 假设 1 中的式 (8) 可放宽到

$$1 \leq a \leq b \quad (9)$$

此时, 我们可以分段讨论如下情形:

$$ax \leq f(x) \leq (a + \mu)x, (a + \mu)x \leq f(x) \leq (a + 2\mu)x \leq \dots \leq (a + M\mu)x \leq f(x) \leq bx$$

其中

$$\begin{cases} \mu = 0, & b < a + 2 \\ \mu \in (0, 2), & \text{其他} \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} \max\{m \mid a + m\mu \leq b\}, & \mu > 0 \\ 0, & \mu = 0 \end{cases}$$

此情形可具体参考后面的仿真例子 (例 2).

### 1.2 问题叙述

我们的控制问题就是对式 (1) 找出镇定的无记忆的对数量化控制器, 它可描述为:

问题 1. 对系统 (1), 在假设 1 下, 找到可数个固定控制输入 (2), 以及一个单调递增的正序列  $\{s_i\}_{i=0}^{+\infty}$  和单调递减的正序列  $\{r_i\}_{i=1}^{+\infty}$ , 约定  $r_0 = s_0$ . 注意  $r_1 < s_0$ , 使得它们满足

$$\begin{aligned} u_i &= \rho u_{i+1}, s_{i-1} = \rho s_i, u_{-(i+1)} = \rho u_{-i}, \\ r_i &= \rho r_{i-1}, i = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\rho \in (0, 1)$  待定, 此两序列形成的数轴  $\mathbf{R}$  的一个全划分记为  $I_R$ , 相应地按上述划分, 定义量化函数  $q: \mathbf{R} \rightarrow U$  如下:

$$q(x) = \begin{cases} \text{sign}(x)u_i, & |x| \in [s_{i-1}, s_i), \\ \text{sign}(x)u_{-i}, & |x| \in (r_i, r_{i-1}], \quad i = 1, 2, 3, \dots \\ u_0, & x = 0 \end{cases} \quad (11)$$

并且上述量化反馈控制能够镇定系统 (1).

易见  $q(-x) = -q(x) (x \in \mathbf{R})$ .

注 3. 式 (10) 和式 (11) 说明控制输入值  $\{u_{\pm i}\}$  和点列  $\{s_i\}_{i=0}^{+\infty}, \{r_i\}_{i=1}^{+\infty}$  均为等比数列, 因此称此量化器 (11) 为对数量化器. 特别地,  $\{u_i\}_{i=1}^{+\infty}$  和  $\{s_i\}_{i=0}^{+\infty}$  两数列的公比为  $\rho^{-1} > 1$ ,  $\{u_i\}_{i=-1}^{-\infty}$  和  $\{r_i\}_{i=1}^{+\infty}$  两数列的公比为  $\rho < 1$ . 故问题的关键是确定参数  $\rho$  以及  $s_0$  和  $u_1, u_{-1}$ .

## 2 主要结论

下面考虑系统 (1) 满足假设 1 时对数量化器的设计. 因为  $f(-x) = -f(x)$ , 接下来只考虑  $x > 0$  的情形. 不妨先取  $s_0 = 1$ , 后面会发现这不是必须的.

结论 1. 确定  $s_1$  和  $u_1$ . 取  $u_1 = -(a+1)s_0, x \in [s_0, s_1)$ . 这里  $s_1 > s_0$  待定. 固定点  $B(s_0, bs_0 + u_1)$ , 如图 4 所示, 假定点  $B$  和点  $C(s_1, s_1)$  的连线平行于直线  $y = bx$ , 可推出

$$s_1 = \frac{a+1}{b-1} s_0 \quad (12)$$

注 4. 这里  $u_1$  为直线  $y = ax$  上的点  $(s_0, as_0)$  下降到点  $(s_0, -s_0)$  所需要的竖直平移高度. 注意点  $(s_0, -s_0)$  在直线  $y = -x$  上.

结论 2. 确定  $s_2$  和  $u_2$ . 取  $u_2 = -(a+1)s_1, x \in [s_1, s_2)$ . 这里  $s_2 > s_1$  待定. 假定点  $(s_1, bs_1 + u_2)$  和

点  $(s_2, s_2)$  连线平行于直线  $y = bx$ , 同理可推出

$$s_2 = \frac{a+1}{b-1}s_1 \quad (13)$$

其余类似.

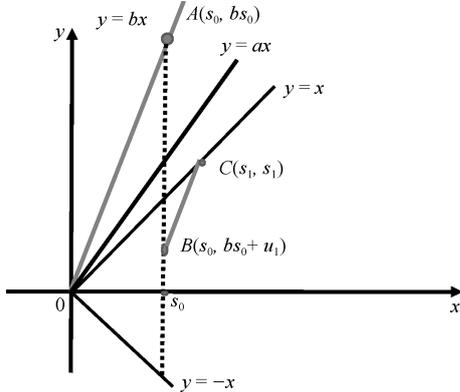


图 4 非线性系统状态空间的稳定对数划分 ( $s_1$  的确定)

Fig. 4 The state partition of a stable logarithmic quantizer for nonlinear systems (Determine  $s_1$ )

**结论 3.** 确定  $r_1$  和  $u_{-1}$ . 取  $u_{-1} = -(b-1)s_0$ ,  $x \in [r_1, s_0)$ . 这里  $r_1 < s_0$  待定. 固定点  $B'(s_0, as_0 + u_{-1})$ , 如图 5 所示, 假定点  $B'$  和点  $C'(r_1, -r_1)$  的连线平行于直线  $y = ax$ , 可推出

$$r_1 = \frac{b-1}{a+1}s_0 \quad (14)$$

**注 5.** 这里  $u_{-1}$  为直线  $y = bx$  上的点  $(s_0, bs_0)$  下降到点  $(s_0, s_0)$  所需要的竖直平移高度. 注意点  $(s_0, s_0)$  在直线  $y = x$  上.

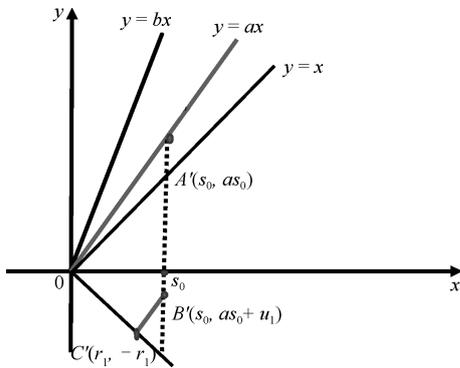


图 5 非线性系统状态空间的稳定对数划分 ( $r_1$  的确定)

Fig. 5 The state partition of a stable logarithmic quantizer for nonlinear systems (Determine  $r_1$ )

**结论 4.** 确定  $r_2$  和  $u_{-2}$ . 取  $u_{-2} = -(b-1)r_1$ ,  $x \in [r_2, r_1)$ . 这里  $r_2 < r_1$  待定. 假定点  $(r_1, ar_1 + u_{-2})$  和点  $(r_2, -r_2)$  连线平行于直线  $y = ax$ , 同理

可推出

$$r_2 = \frac{b-1}{a+1}r_1 \quad (15)$$

其余类似.

**定理 1.** 当  $f(x)$  满足假设 1 时, 定义

$$\rho = \frac{b-1}{a+1} \quad (16)$$

则  $\rho \in (0, 1)$ . 对于任意的  $s_0 > 0$ , 按上分析, 取

$$s_i = \rho^{-i}s_0, r_i = \rho^i s_0, u_1 = -(a+1)s_0 \quad (17)$$

$$u_{-i} = \rho^i u_1, u_{i+1} = \rho^{-i} u_1, i = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

来定义控制输入  $\{u_{\pm i}\}$  和点列  $\{s_i\}_{i=0}^{+\infty}, \{r_i\}_{i=1}^{+\infty}$ . 相应地, 在上述量化器 (11), (16)~(18) 的作用下, 系统 (1) 是稳定的.

**证明.** 当  $x(k) \in [s_0, s_1)$  时,

$$u(k) = q(x(k)) = u_1 \geq -(a+1)x(k)$$

因此, 注意到假设 1 知,

$$x(k+1) = f(x(k)) + u_1 \geq ax(k) - (a+1)x(k) \geq -x(k)$$

同时, 又  $u_1 = -(b-1)s_1 \leq -(b-1)x(k)$ , 因此,

$$x(k+1) = f(x(k)) + u_1 \leq bx(k) - (b-1)x(k) \leq x(k)$$

等价于

$$|x(k+1)| \leq |x(k)|, x(k) \in [s_0, s_1) \quad (19)$$

其余区间类似, 略.  $\square$

**注 6.** 式 (19) 意味着系统 (1) 在输入 (11), (16)~(18) 控制下所有的解都成立, 它说明其对应的闭环系统函数  $x(k+1) = \Gamma(x(k))$  为压缩映射. 几何上来讲, 从图 4 和图 5 关于  $s_1$  和  $r_1$  的设计, 可看出系统闭环函数  $\Gamma(x) = f(x) + u_h$  在划分区间的每一段上的图像均介于直线  $y = x$  和直线  $y = -x$  之间, 因此, 此时系统 (1) 的解是稳定的.

**注 7.** 现在的结论只能说明闭环系统的解是稳定的, 但是否趋于原点, 还需要进一步讨论.

**定理 2.** 当  $f(x)$  满足假设 1 时, 取  $\delta \in (0, 1)$  使

$$0 < \frac{b-a}{2} < \delta < 1$$

成立, 令

$$\rho = \frac{b-\delta}{a+\delta} \quad (20)$$

则  $\rho \in (0, 1)$ . 对于任意的  $s_0 > 0$ , 取

$$s_i = \rho^{-i}s_0, r_i = \rho^i s_0, u_1 = -(a+\delta)s_0, \quad (21)$$

$$u_{-i} = \rho^i u_1, u_{i+1} = \rho^{-i} u_1, i = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

来定义控制输入  $\{u_{\pm i}\}$  和点列  $\{s_i\}_{i=0}^{+\infty}, \{r_i\}_{i=1}^{+\infty}$ . 相应地, 在上述量化器 (11), (20)~(22) 的作用下, 系统 (1) 是渐近稳定的.

**证明.** 当  $x(k) \in [s_0, s_1]$  时,

$$u(k) = q(x(k)) = u_1 \geq -(a + \delta)x(k)$$

因此, 注意到假设 1 知,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k)) + u_1 \geq ax(k) - \\ &(a + \delta)x(k) \geq -\delta x(k) \end{aligned}$$

同时, 又  $u_1 = -(b - \delta)s_1 \leq -(b - \delta)x(k)$ , 因此,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k)) + u_1 \leq \\ &bx(k) - (b - \delta)x(k) \leq \delta x(k) \end{aligned}$$

等价于

$$|x(k+1)| \leq \delta |x(k)|, x(k) \in [s_0, s_1] \quad (23)$$

其余区间类似, 略. □

**注 8.** 定理 2 中  $s_1$  的确定, 与前面定理 1 中相比而言, 此时, 只是把图 4 中的直线  $y = x$  换成了直线  $y = \delta x$ , 直线  $y = -x$  换成了直线  $y = -\delta x$  而已, 做法与前类似. 同理  $r_1$  的确定, 参看图 5, 略.

**注 9.** 式 (23) 意味着系统 (1) 在输入 (11), (20)~(22) 控制下所有的解都成立. 几何上来讲, 从上述注 8 中关于  $s_1$  和  $r_1$  的设计, 可看出系统闭环函数  $\Gamma(x) = f(x) + u_h$  在划分区间的每一段上的图像均介于直线  $y = \delta x$  和直线  $y = -\delta x$  之间, 因此, 此时系统 (1) 的解是渐近稳定的.

特别地, 当  $f(x) = Ax$  为一维线性系统时, 不妨设  $A > 1$ . 取  $a = b = A$ , 则有假设 1 成立, 因此, 我们有如下结论.

**推论 1.** 当  $f(x) = Ax$  时, 令

$$\rho = \frac{A - 1}{A + 1} \quad (24)$$

则  $\rho \in (0, 1)$ . 对于任意的  $s_0 > 0$ , 取

$$s_i = \rho^{-i} s_0, r_i = \rho^i s_0, u_1 = -(A + 1)s_0 \quad (25)$$

$$u_{-i} = \rho^i u_1, u_{i+1} = \rho^{-i} u_1, i = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

来定义控制输入  $\{u_{\pm i}\}$  和点列  $\{s_i\}_{i=0}^{+\infty}, \{r_i\}_{i=1}^{+\infty}$ . 相应地, 在上述量化器 (11), (24)~(26) 的作用下, 闭环系统  $x(k+1) = Ax(k) + q(x(k))$  是稳定的.

**注 10.** 推论 1 与文献 [1] 中关于线性系统的结论是吻合的, 而且推论 1 中的量化器对应于文献 [1] 中最粗的划分.

### 3 数值仿真

**例 1.** 考察系统 (1), 其中非线性函数

$$f(x) = 0.6x \cos x + 2x \quad (27)$$

易见, 上述  $f(x)$  满足

$$1.4x \leq f(x) \leq 2.6x, x \geq 0$$

这里  $a = 1.4$  和  $b = 2.6$  满足假设 1.

因此, 依据定理 2, 可取  $\delta = 0.7$ . 相应地,

$$\rho = \frac{b - \delta}{a + \delta} = \frac{19}{21} = 0.9048 \quad (28)$$

图 6 显示了当初始条件  $x_0 = 10$  时, 在定理 2 设计的对数量化控制输入下闭环系统 (27) 的状态响应, 验证了我们结论的有效性. 注意, 定理 2 是一个全局性的结论, 任意的初始状态均可. 此处的量化器也是全局的.

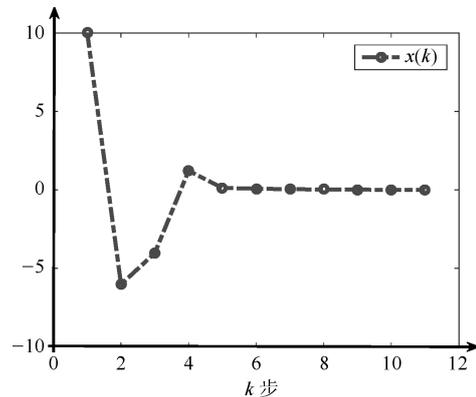


图 6 非线性系统 (27) 量化控制器下的闭环响应  
Fig. 6 Response of the closed-loop nonlinear system (27) with quantized controller

下面我们采用鲁棒性方法来研究一下上述系统. 此时采用如图 7 所示的对数量化器. 此对数量化器  $q: \mathbf{R} \rightarrow U$  满足<sup>[4]</sup>:

$$|2x - q(2x)| \leq \delta' |x|, x \in \mathbf{R}$$

这里  $\delta' \in (0, 1)$ , 并且划分细度  $\rho = \frac{2 - \delta'}{2 + \delta'}$ . 在此量化器下, 取  $u(k) = -q(2x(k))$ , 可得到

$$|x(k+1)| = |f(x(k)) - q(2x(k))| \leq (0.6 + \delta') |x(k)|$$

显然, 当  $\delta'$  满足  $0.6 + \delta' \leq 0.7$  时, 可推出

$$|x(k+1)| \leq 0.7 |x(k)|$$

而这一收敛速度与我们的是一样的 (即效果是一样的). 但条件  $0.6 + \delta' \leq 0.7$  意味着

$$\delta' \leq 0.1 \Rightarrow \rho \geq \frac{2 - \delta'}{2 + \delta'} = \frac{19}{21} \quad (29)$$

**对比分析:** 参数  $\rho \in (0, 1)$  是区间的划分细度, 当  $\rho$  越接近于 1 时, 划分越细, 当  $\rho$  越接近于 0 时, 划分越粗. 通过上述两种方法的比较发现, 用本文的方法可得到细度  $\rho$  满足条件 (28), 用鲁棒性分析可得到满足条件 (29). 显然, 式 (28) 是式 (29) 最粗的情形, 因此本文的方法, 相对于鲁棒性的方法, 并不保守, 而且我们的是其最粗的情形.

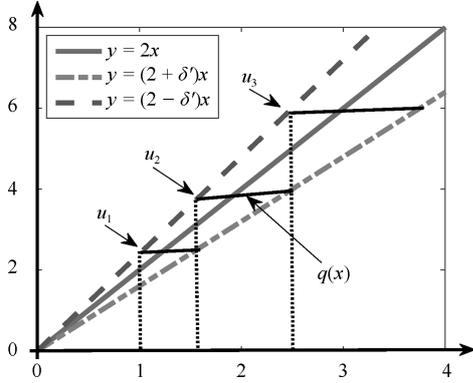


图 7 对数量化器

Fig. 7 The logarithmic quantizer

**例 2.** 考察系统 (1), 其中非线性函数  $f(x)$  为

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ x^3 + 3x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases} \quad (30)$$

其图像参看图 8. 从图 8 可看出,  $f(x)$  与直线  $y = x$  有两个交点  $A(x_A, y_A)$  和  $B(x_B, y_B)$ . 若利用前面的结论, 可分段设计该函数的量化反馈控制器, 具体如下, 原点至  $A$  是一段,  $A$  至  $B$  是一段,  $B$  至终点为一段. 容易验证.

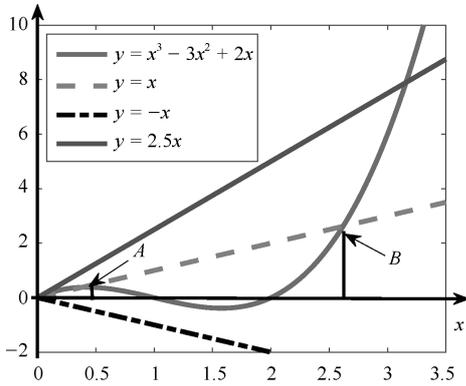


图 8 函数  $y = x^3 - 3x^2 + 2x, x \in [0, 3.5]$

Fig. 8 The curve of  $y = x^3 - 3x^2 + 2x, x \in [0, 3.5]$

1) 原点至  $A$  一段:

$$x \leq f(x) \leq 2x, \quad 0 \leq x < x_A \quad (31)$$

因此, 依据定理 2, 按照  $s_0 = x_A = 0.3819$  向后设计量化器 (即确定  $\{r_i\}_{i=1}^{+\infty}$ ).

2)  $A$  至  $B$  一段:

$$-x \leq f(x) \leq x, \quad x_A \leq x < x_B \quad (32)$$

因此, 可以利用  $f(x)$  与直线  $y = 0.9x$  相交, 再对区间进行分割. 同时, 对于满足

$$-0.9x \leq f(x) \leq 0.9x \quad (33)$$

的一段曲线, 控制取为 0. 其他区间上, 相应调整使之落入直线  $y = 0.9x$  和  $y = -0.9x$  之间.

3)  $B$  至终点一段:

$$f(x) \geq x, \quad x \geq x_B \quad (34)$$

可按照如下步骤分段考虑. 如图 8, 先考虑满足

$$x \leq f(x) \leq 2.5x, \quad x \geq x_B \quad (35)$$

的一段, 基于定理 2, 按照  $s_0 = x_B = 2.6180$  向前设计量化器, 并寻找  $s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1k_1}$ , 一旦  $f(x)$  穿出直线  $y = 2.5x$  停止. 接下来考虑满足

$$\frac{f(s_{1k_1})}{s_{1k_1}}x \leq f(x) \leq \left(\frac{f(s_{1k_1})}{s_{1k_1}} + 1.5\right)x \quad (36)$$

的第二段, 基于定理 2, 按照  $s_0 = s_{1k_1}$  向前设计量化器, 并寻找  $s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2k_2}$ , 一旦  $f(x)$  穿出直线  $y = \left(\frac{f(s_{1k_1})}{s_{1k_1}} + 1.5\right)x$  停止. 如此下去.

因此, 文中的假设 1 对于如何区间划分有指导作用. 通过定理 2, 当选择  $\delta = 0.9$  时, 可计算出  $s_{1k_1} = s_{11} = \frac{19}{16}s_0 = 3.1088, s_{2k_2} = s_{21} = \frac{2.3385+0.9}{2.3385+0.6}s_{11} = 3.4263, s_{3k_3} = s_{31} = \frac{3.4606+0.9}{3.4606+0.6}s_{21} = 3.6794, \dots$

图 9 显示了在上述设计的量化控制输入下, 闭环系统 (30) 的状态响应, 说明我们闭环系统的稳定性.

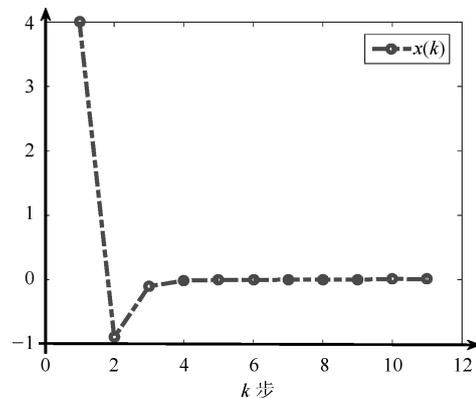


图 9 非线性系统 (30) 量化控制器下的闭环响应

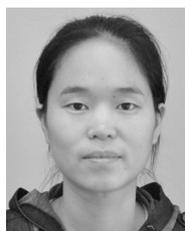
Fig. 9 Response of the closed-loop nonlinear system (30) with quantized controller

## 4 结论

本文通过引入闭环系统函数, 基于函数图像的平移和分段函数的性质, 研究了一类特殊非线性系统的对数量化反馈控制器. 文中的结论几何解释明显, 且结论是全局性的. 另外, 文中提出的非线性系统所满足的扇形条件, 可实现较好地利用函数图像平移的性质. 虽然文中所给的扇形条件要求高, 但本文的结论也可用于指导一般非线性系统量化控制器的设计, 具有可操作性. 最后, 数值例子验证了本文的结论.

## References

- 1 Elia N, Mitter S K. Stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(9): 1384–1400
- 2 Tatikonda S, Mitter S. Control under communication constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(7): 1056–1068
- 3 Liberzon D. On stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(2): 304–307
- 4 Fu M Y, Xie L H. The sector bound approach to quantized feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(11): 1698–1711
- 5 Ishii H, Francis B A. Quadratic stabilization of sampled-data systems with quantization. *Automatica*, 2003, **39**(10): 1793–1800
- 6 Sharon Y, Liberzon D. Input to state stabilizing controller for systems with coarse quantization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(4): 830–844
- 7 Brockett R W, Liberzon D. Quantized feedback stabilization of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(7): 1279–1289
- 8 Tarbouriech S, Gouaisbaut F. Control design for quantized linear systems with saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(7): 1883–1889
- 9 Fagnani F, Zampieri S. Stability analysis and synthesis for scalar linear systems with a quantized feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(9): 1569–1584
- 10 Li F B, Shi P, Wu L G, Basin M V, Lim C C. Quantized control design for cognitive radio networks modeled as nonlinear Semi-Markovian jump systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, **62**(4): 2330–2340
- 11 Feng Y, Chen X, Gu G X. Output feedback stabilization for discrete-time systems under limited communication. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(4): 1927–1932
- 12 Liu J L, Elia N. Quantized feedback stabilization of nonlinear affine systems. *International Journal of Control*, 2004, **77**(3): 239–249
- 13 Wakaiki M, Yamamoto Y. Stabilization of switched linear systems with quantized output and switching delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(6): 2958–2964
- 14 Wang Ge-Xia. Design of Quantizer for a class of nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(1): 140–144 (王隔霞. 一类非线性系统的量化控制器的设计. *自动化学报*, 2016, **42**(1): 140–144)
- 15 Jiang Zhong-Ping, Liu Teng-Fei. Quantized nonlinear control — a survey. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(11): 1820–1830 (姜钟平, 刘腾飞. 量化非线性控制—综述. *自动化学报*, 2013, **39**(11): 1820–1830)
- 16 Abdallah C T, Tanner H G. Complex networked control systems: introduction to the special section. *IEEE Control Systems*, 2007, **27**(4): 30–32
- 17 Antsaklis J, Baillieul J. Special issue on technology of networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 5–8



王隔霞 上海电力大学数理学院副教授. 华东师范大学数学系博士研究生. 2003 年获得曲阜师范大学应用数学学士学位. 2014 年在澳大利亚墨尔本大学访学一年. 主要研究方向为量化控制, 奇异摄动控制和事件驱动控制.

E-mail: gexiawang@shioep.edu.cn

(WANG Ge-Xia Associate professor in the Department of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power. Ph.D. candidate in the Department of Mathematics, East China Normal University. She received her bachelor degree from Qufu Normal University in 2003. She had visited Melbourne University in 2014 and studied at the Department of Electrical and Electronic Engineering for one year there. Her research interest covers quantized feedback control, singular perturbation systems and event-triggered control.)