

输入增益未知非参数不确定系统的准最优学习控制

严求真¹ 柳向斌² 朱胜³ 蔡建平⁴

摘要 为解决一类非参数不确定系统在任意初态且输入增益未知情形下的轨迹跟踪问题, 提出准最优误差跟踪学习控制方法. 该方法综合准最优控制和迭代学习控制两种技术设计控制器, 在构造期望误差轨迹的基础上, 根据控制 Lyapunov 函数及 Sontag 公式给出标称系统的优化控制, 以鲁棒方法和学习方法相结合的策略处理非参数不确定性. 闭环系统经过足够次迭代运行后, 经由实现系统误差对期望误差轨迹在整个作业区间上的精确跟踪, 获得系统状态对参考信号在预设的部分作业区间上的精确跟踪. 仿真结果表明所设计学习系统在收敛速度方面快于非优化设计.

关键词 准最优非线性控制, 迭代学习控制, 初值问题, 误差跟踪学习控制, 非参数不确定系统

引用格式 严求真, 柳向斌, 朱胜, 蔡建平. 输入增益未知非参数不确定系统的准最优学习控制. 自动化学报, 2020, 46(5): 1051–1060

DOI 10.16383/j.aas.c170503

Suboptimal Learning Control for Nonparametric Systems With Uncertain Input Gains

YAN Qiu-Zhen¹ LIU Xiang-Bin² ZHU Sheng³ CAI Jian-Ping⁴

Abstract This paper presents a suboptimal error-tracking iterative learning control (ILC) scheme to solve the trajectory-tracking problem for a class of nonparametric systems with uncertain input gains in the presence of arbitrary initial states. The ILC controller is developed by integrating ILC with suboptimal control. Firstly, a desired error trajectory is constructed according to the given method, and then Sontag formula is employed for the control design of nominal system, while robust control and learning control are synthetically applied to deal with nonparametric uncertainties. While the closed-loop system operates, as iteration number increases, the controller can render system error to perfectly follow its desired error trajectory over the entire time interval, by which, the system state can precisely track its reference signal in the pre-specified part of above-mentioned interval. Numerical simulations demonstrate that our suboptimal error-track ILC scheme improves convergence performance in comparison with conventional solutions.

Key words Suboptimal nonlinear control, iterative learning control, initial condition problem, error-tracking learning control, nonparametric systems

Citation Yan Qiu-Zheng, Liu Xiang-Bin, Zhu Sheng, Cai Jian-Ping. Suboptimal learning control for nonparametric systems with uncertain input gains. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(5): 1051–1060

收稿日期 2017-09-04 录用日期 2018-01-29
Manuscript received September 4, 2017; accepted January 29, 2018

国家自然科学基金 (61573322, 61673050), 浙江省教育厅科研项目 (Y201635861), 浙江省高等学校访问学者专业发展项目 (FX2017078) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61573322, 61673050), Scientific Research Project of Education Department of Zhejiang Province (Y201635861), University Visiting Scholars Developing Project of Zhejiang Province (FX2017078)

本文责任编辑 王占山

Recommended by Associate Editor WANG Zhan-Shan

1. 浙江水利水电学院信息工程学院 杭州 310018 2. 北京交通大学电子信息工程学院 北京 100044 3. 浙江大学城市学院信息与电气工程学院 杭州 310015 4. 浙江水利水电学院电气工程学院 杭州 310018

1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Water Resources and Electric Power, Hangzhou 310018 2. School of Electronics and Information Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044 3. School of Information and Electrical Engineering, Zhejiang University City Col-

在实际工业系统中, 大量地存在着在有限作业区间上的重复运行的系统或设备, 诸如机械臂、磁盘驱动器、间歇化工过程、伺服电机、逆变电路等. 这些受控对象的精确模型不易获得, 含有多种复杂的不确定性. 对于此类重复作业系统, 迭代学习控制 (Iterative learning control, ILC) 是一种有效的控制技术^[1–5], 它利用前次或前几次的系统误差信息修正相应的学习量, 得到本次迭代运行的控制输入, 经过一定次数的迭代后, 可获得系统状态对参考信号在整个作业区间或预设的部分作业区间上的精确跟踪^[6–10].

迄今, 多数迭代学习控制理论算法要求系统在每次迭代运行开始前精确复位, 使得系统误差初

lege, Hangzhou 310015 4. School of Electrical Engineering, Zhejiang University of Water Resources and Electric Power, Hangzhou 310018

值为零. 但在实际工业系统中, 初始误差很难完全避免, 因此, 研究并提出任意初态条件下适用的迭代学习控制方法, 是将迭代学习控制技术应用于工业实际的现实需要. 到目前为止, 涉及迭代学习控制初值问题解决方案的相关文献中, 多数为基于压缩映射原理的迭代学习控制 (Contraction mapping iterative learning control, CM ILC) 方面的结果^[11-15]. 文献 [11] 提出适用于误差初值在固有邻域内变化情形的多模解决方案. 文献 [12] 研究线性时不变系统在初始误差均值为零情形下的学习控制算法, 利用平均值算子设计学习律. 此外, 典型的解决方案还有脉冲补偿^[13-14]、初始修正^[15-16]. 近年来, 基于 Lyapunov 方法设计迭代/重复学习控制器成为学习控制领域的研究热点^[1,17-18], 学者们着手探讨在该设计方法中适用的初值问题解决方案. 文献 [19] 构造时变边界层处理非零初始误差. 文献 [20-22] 采用误差跟踪方法为初始误差非零的不确定系统设计自适应学习控制器. 始于 CM ILC 设计的初始修正方法, 在应用 Lyapunov 方法设计学习控制器时, 也是一种有效的初值问题解决方案^[23-26]. 此外, 在参考信号光滑闭合场合, 对齐条件 (Alignment condition) 可被视作一种初值问题解决方案^[27].

为了获得较快的误差收敛速度, 学者们考虑采用优化学习方法设计控制律^[28-30]. 当受控系统为非线性不确定系统时, 实现自适应学习控制方法和标准最优控制 (Standard optimal control) 方法的结合使用是一项困难的工作, 这是因为, 在标准最优控制设计过程中, 需要求解哈密尔顿-雅可比-贝尔曼 (HJB) 方程, 但对一般的非线性系统而言, 求解 HJB 方程是一件困难的工作^[31]. 鉴于上述困难, 准最优学习控制成为退而求其次的一种可选方案. 文献 [30] 针对 MIMO 参数不确定系统, 提出基于 Sontag 公式的准最优学习控制设计. 文献 [31] 针对同含参数不确定性与非参数不确定性的一类 SISO 非线性系统, 分别给出了相应的准最优迭代学习与准最优重复学习控制设计方案. 上述准最优学习控制方面的结果或是假设系统初始误差为零, 或是要求系统满足对齐条件. 迄今, 尚无文献讨论任意系统初态情形下的准最优迭代学习控制方法. 鉴于实际系统的初始误差不可完全避免, 有必要探讨初始误差非零情形下的准最优迭代学习控制方法研究.

实际工业控制系统的输入增益往往是不可知或不完全可知的, 其中含有复杂的不确定性. 基于 Lyapunov 方法设计自适应学习控制器, 所考虑受控系统的输入增益常为以下三者之一: 1) 未知固定常数^[32]; 2) 未知时变参数 (不随迭代次数变化)^[17]; 3) 关于状态 (或状态与时间) 的未知函数 (结构不可

知, 无法参数化)^[27]. 具体实施设计时, 可以采用自适应学习方法估计情形 1) 和 2) 中的未知输入增益; 情形 3) 中的增益无法直接估计, 常需假设其下界可知, 并采用鲁棒方法与学习方法相结合的策略进行处理. 在已有的准最优学习控制文献结果^[33-34]中, 根据 Sontag 公式进行控制器设计时均假设系统的输入增益完全已知, 对应于情形 1)~3) 的设计方法在此场景下无法直接套用. 到目前为止, 有关输入增益未知系统的准最优学习控制方法研究, 尚属空白.

综上所述, 已有的准最优迭代学习控制算法要求输入增益已知, 且迭代初始误差为零 (或是要求系统满足对齐条件), 初始误差非零或输入增益未知情形下的准最优学习控制, 均属有待开展的研究课题. 实际工业控制系统不仅在运行时存在非零初始误差, 且其输入增益往往为不可知或不完全可知, 因此, 有必要研究输入增益未知且初始误差非零情形下的准最优学习控制方法. 在此情形下, 设计准最优学习控制器需要克服的障碍有两个: 首先, 基于 Sontag 公式^[35-36]的优化设计要求输入增益完全可知, 但此时面临的情形是受控系统的输入增益不可知或不完全可知; 其次, 由于系统误差初值非零, 故无法直接选用系统误差构造控制 Lyapunov 函数 (Control Lyapunov function, CLF), 需要采用合适的初值问题解决方案克服这一由于系统误差非零所带来的困难.

本文研究非参数不确定系统^[27,34,37]的准最优误差跟踪学习控制问题, 针对一类输入增益未知且系统初态任意变化的非参数不确定系统, 提出准最优误差跟踪学习控制设计方案, 以解决该类系统在非零初始误差及输入增益未知情形下的轨迹跟踪问题. 本文的主要工作及创新点为: 1) 将 Sontag 公式应用于误差跟踪学习控制方法设计, 提出在任意系统初态下适用的准最优误差跟踪学习控制方法; 2) 研究了输入增益函数中含有不确定项情形下的准最优迭代学习控制算法, 给出相应的鲁棒学习控制方法, 并实现与准最优误差跟踪学习控制方法的结合. 本文给出的算法适用于任意初态及输入增益未知情形, 相比已有的同类结果, 适用范围更广.

1 问题的提出与准备

考虑在时间区间 $[0, T]$ 上重复运行的非线性不确定系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{n,k} = f(\mathbf{x}_k, t) + \Delta f(\mathbf{x}_k, t) + g_u(\mathbf{x}_k, t)u_k \end{cases} \quad (1)$$

式中 $k \in \mathbf{N}$ 为迭代运行次数, $\mathbf{x}_k = [x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k}]^T \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态, $u_k \in \mathbf{R}$ 为控制输入; $f(\mathbf{x}_k, t)$ 为已知函数, $\Delta f(\mathbf{x}_k, t)$ 为不确定项,

$g_u(\mathbf{x}_k, t)$ 为未知且连续的输入增益函数, 不失一般性, 设 $g_u(\mathbf{x}_k, t) > 0$. 与系统 (1) 对应的标称系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{n,k} = f(\mathbf{x}_k, t) + g(\mathbf{x}_k, t)u_k \end{cases} \quad (2)$$

其中, $g(\mathbf{x}_k, t) \geq \underline{g} > 0$, \underline{g} 为一未知常数. 对系统 (1) 中的 $\Delta f(\cdot, \cdot)$ 与 $g_u(\cdot, \cdot)$ 作如下假设:

假设 1. 对于 $\forall \xi_1 \in \mathbf{R}^n$ 及 $\forall \xi_2 \in \mathbf{R}^n$, 不确定项 $\Delta f(\cdot, \cdot)$ 满足不等式

$$|\Delta f(\xi_1, t) - \Delta f(\xi_2, t)| \leq \alpha_f(\xi_1, \xi_2, t) \|\xi_1 - \xi_2\|$$

上式中, $\alpha_f(\cdot, \cdot, \cdot)$ 为已知的非负连续函数.

假设 2. 存在连续函数 $g_m(\mathbf{x}_k, t)$ ^[21, 27], 满足

$$g_u(\mathbf{x}_k, t) \geq g_m(\mathbf{x}_k, t) > 0 \quad (3)$$

本文的控制目标是实现系统状态 \mathbf{x}_k 对参考信号 $\mathbf{x}_d = [x_{1,d}, x_{2,d}, \dots, x_{n,d}]^T = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)}]^T \in \mathbf{C}^1[0, T]$ 的精确跟踪. 本文所考虑系统的初态为任意有界值, 不要求系统初态 $\mathbf{x}_k(0)$ 和参考信号的初值 $\mathbf{x}_d(0)$ 相等, 故不满足常规迭代学习控制算法所要求的初值条件. 定义误差 $\mathbf{e}_k = [e_{1,k}, e_{2,k}, \dots, e_{n,k}]^T = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_d$, 并记 $\Delta g(\mathbf{x}_k, t) = g_u(\mathbf{x}_k, t) - g(\mathbf{x}_k, t)$, 由式 (1) 可得误差动态为

$$\begin{cases} \dot{e}_{i,k} = e_{i+1,k}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{e}_{n,k} = f(\mathbf{x}_k, t) + \Delta f(\mathbf{x}_k, t) - \dot{x}_{n,d} + [g(\mathbf{x}_k, t) + \Delta g(\mathbf{x}_k, t)]u_k \end{cases} \quad (4)$$

为了实现控制目标, 本文拟选择合适的 CLF, 结合 Sontag 公式, 设计准最优误差跟踪学习控制器 u_k , 使得误差 \mathbf{e}_k 在整个作业区间 $[0, T]$ 上以预设精度跟踪期望误差轨迹 $\mathbf{e}_k^* = [e_{1,k}^*, e_{2,k}^*, \dots, e_{n,k}^*]^T$, 并由此实现 \mathbf{x}_k 在预设的部分作业区间 $[t_\delta, T]$ 上对 \mathbf{x}_d 予以精确跟踪 ($0 < t_\delta < T$). 期望误差轨迹 \mathbf{e}_k^* 具有合适的衰减性状, 其具体构造方案见本文第 2 节.

为表达简便, 在不引起混淆的前提下, 文中略去函数的时间自变量 t , 并简记 $\alpha(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_d, t)$ 为 α_{fk} , $\Delta f(\mathbf{x}_d, t)$ 为 Δf_d , $g_m(\mathbf{x}_k, t)$ 为 g_{mk} , $g_u(\mathbf{x}_k, t)$ 为 g_{uk} , 以及 $\nu(\mathbf{x}_k, t)$ 为 ν_k , $\nu \in \{f, g, \Delta f, \Delta g\}$.

注 1. 近年来, 已有一些文献开展非参数不确定系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{n,k} = f_u(\mathbf{x}_k, t) + g_u(\mathbf{x}_k, t)u_k \end{cases} \quad (5)$$

的非优化迭代学习控制方法研究, 给出的鲁棒学习控制方法不需要 $g_u(\cdot, \cdot)$ 已知, 但要求其满足 Lipschitz 条件或类 Lipschitz 条件, 且下界已知. 然而,

在已有的准最优学习控制设计的相关结果^[33-34] 中, 算法均要求输入增益 $g_u(\cdot, \cdot)$ 完全已知, 且系统满足初始误差为零条件或满足对齐条件, 本文的工作拟降低以上两个假设性要求.

因分析系统及控制器设计方面的需要, 给出如下定义和引理.

对于光滑仿射系统

$$\dot{\chi} = \mathbf{F}(\chi) + G(\chi)\mathbf{v} \quad (6)$$

式中, 状态变量 $\chi \in \mathbf{R}^n$, 控制向量 $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^m$, 函数 $\mathbf{F}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $G: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$ 是已知的连续可微函数, 并且 $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

定义 1. 如果存在连续可微、正定、径向无界的函数 $V(\chi)$, 满足

$$\forall \chi \neq \mathbf{0}, L_G V(\chi) = 0 \Rightarrow L_F V(\chi) < 0 \quad (7)$$

则称其为控制 Lyapunov 函数 (CLF)^[35]. 这里, $L_F V(\chi) := \frac{\partial V(\chi)}{\partial \chi^T} \mathbf{F}(\chi)$, $L_G V(\chi) := \frac{\partial V(\chi)}{\partial \chi^T} G(\chi)$.

引理 1. 对于系统 (6), 如果存在控制 Lyapunov 函数 $V(\chi)$, 则可为其设计控制律

$$\mathbf{v} = p(\chi)(L_G V(\chi))^T, \quad (8)$$

实现闭环系统的鲁棒渐近镇定. 式 (8) 中,

$$p(\chi) = \begin{cases} \eta(\chi), & L_G V(\chi) \neq 0 \\ 0, & L_G V(\chi) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$\eta(\chi) = -\frac{L_F V(\chi) + \sqrt{(L_F V(\chi))^2 + (L_G V(\chi)(L_G V(\chi))^T)^2}}{L_G V(\chi)(L_G V(\chi))^T}$. 这种控制器设计方案被称为 Sontag 公式.

证明. 参见文献 [35-36]. \square

2 期望误差轨迹的构造

构造合适的期望误差轨迹 $\mathbf{e}_k^*(t)$, 是设计误差跟踪控制器的基础. 拟构造的期望误差轨迹 $\mathbf{e}_k^*(t)$ 须满足以下条件:

$$\mathbf{e}_k^*(0) = \mathbf{e}_k(0) \quad (10a)$$

$$\mathbf{e}_k^*(t) = \mathbf{0}, t \in [t_\delta, T] \quad (10b)$$

此处, t_δ 是 $\mathbf{e}_k^*(t)$ 从非 $\mathbf{0}$ 值到 $\mathbf{0}$ 的过渡时间点. 下面给出期望误差轨迹构造方案.

1) 当 $t_\delta \leq t \leq T$ 时,

$$e_{1,k}^*(t) = e_{2,k}^*(t) = \dots = e_{n,k}^*(t) = 0 \quad (11)$$

2) 当 $0 \leq t < t_\delta$ 时, 选择

$$e_{1,k}^*(t) = a_{0,k} + a_{1,k}t + \dots + a_{2n+1,k}t^{2n+1} \quad (12)$$

$$e_{i,k}^*(t) = e_{1,k}^{*(i-1)}(t), \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (13)$$

式 (12) 中各系数按以下规则选取

$$a_{0,k} = e_{1,k}(0)$$

$$a_{j,k} = \frac{1}{j!} e_{j+1,k}(0), 1 \leq j \leq n \quad (14)$$

$$[a_{n+1,k}, a_{n+2,k}, \dots, a_{2n+1,k}]^T = \Gamma^{-1} \omega \quad (15)$$

此处, $e_{n+1,k}(t)$ 表示 $\dot{e}_{n,k}(t)$.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} t_\delta^{n+1} & t_\delta^{n+2} & \dots & t_\delta^{2n+1} \\ (n+1)t_\delta^n & (n+2)t_\delta^{n+1} & \dots & (2n+1)t_\delta^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n+1)!t_\delta & \left(\prod_{j=3}^{n+2} j\right)t_\delta^2 & \dots & \left(\prod_{j=n+2}^{2n+1} j\right)t_\delta^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\omega = -[\eta(t_\delta), \dot{\eta}(t_\delta), \dots, \eta^{(n)}(t_\delta)]^T$$

$$\eta(t) = a_{0,k} + a_{1,k}t + \dots + a_{n,k}t^n$$

上文所构造的期望误差轨迹 \mathbf{e}_k^* 在 $[0, T]$ 上连续, 且 $\dot{e}_{n,k}^*(t)$ 在 $t = t_\delta$ 两侧也连续. 在式 (14) 中, $e_{n+1,k}(0)$ 可取为任意有界常数.

由 $\mathbf{e}_k^*(t)$ 的衰减性状可以看出, 若能设计合适的控制律, 实现 $\mathbf{e}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上完全跟踪 $\mathbf{e}_k^*(t)$, 那么, $\mathbf{x}_k(t)$ 可在 $[t_\delta, T]$ 上完全跟踪 $\mathbf{x}_d(t)$.

记 $\bar{\mathbf{z}}_k = [z_{1,k}, \dots, z_{n,k}]^T = \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k^*$. 定义

$$s_k = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} z_{1,k} \quad (16)$$

其中, λ 是正常数. 将式 (16) 的右边展开后, 可得

$$s_k = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} \frac{d^i z_{1,k}}{dt^i} \lambda^{n-1-i} = [\mathbf{c}^T \quad 1] \bar{\mathbf{z}}_k$$

式中, $\mathbf{c} := [c_1, \dots, c_{n-1}]^T, c_j = \frac{(n-1)}{(j-1)(n-j)} \lambda^{n-j}, j = 1, 2, \dots, n-1$.

3 控制器设计

根据式 (4) 及 $\bar{\mathbf{z}}_k$ 的定义, 可得

$$\begin{cases} \dot{z}_{i,k} = z_{i+1,k}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{z}_{n,k} = f_k + \Delta f_k - \dot{x}_{n,d} - \dot{e}_{n,k}^* + \\ \quad (g_k + \Delta g_k)u_k \end{cases} \quad (17)$$

记 $\mathbf{z}_k = [z_{1,k}, z_{2,k}, \dots, z_{n-1,k}]^T$, 当 $s_k = 0$ 时, 将式 (17) 的前 $n-1$ 行写成向量形式, 可得

$$\dot{\mathbf{z}}_k = A\mathbf{z}_k \quad (18)$$

其中,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & \dots & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 中的 c_1, \dots, c_{n-1} 的表意见第 2 节. 不难看出, 存在对称正定矩阵 P 和 Q , 满足 $PA + A^T P = -Q$. 记 $\varpi_k = f(\mathbf{x}_d + \mathbf{e}_k^*) - \dot{x}_{n,d} - \dot{e}_{n,k}^*$, 由式 (17) 可得,

$$\begin{cases} \dot{z}_{i,k} = z_{i+1,k}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{z}_{n,k} = f_k - f(\mathbf{x}_d + \mathbf{e}_k^*) + \Delta f_k + \\ \quad (g_k + \Delta g_k)u_k + \varpi_k \end{cases} \quad (19)$$

为标称系统 (2) 选择一个待确定的控制 Lyapunov 函数 $V_k = \frac{1}{2} s_k^2 + \mathbf{z}_k^T P \mathbf{z}_k$, 仿效定义 1 中的式 (7), 相应的检验条件为:

$$\forall \bar{\mathbf{z}}_k \neq 0, b_k = 0 \Rightarrow a_k < 0 \quad (20)$$

其中, $b_k = \frac{\partial V_k}{\partial \bar{\mathbf{z}}_k^T} \boldsymbol{\beta}_g, a_k = \frac{\partial V_k}{\partial \bar{\mathbf{z}}_k^T} \boldsymbol{\beta}_f$. 此处, $\boldsymbol{\beta}_g = [0, \dots, 0, g_k]^T \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{\beta}_f = [z_{2,k}, \dots, z_{n,k}, f_k - f(\mathbf{x}_d + \mathbf{e}_k^*)]^T \in \mathbf{R}^n$. 当 $\bar{\mathbf{z}}_k = \mathbf{0}$ 时, $\boldsymbol{\beta}_f = \mathbf{0}$. 对 V_k 关于时间求导, 由式 (19) 可得

$$\dot{V}_k = a_k + b_k(1 + g_k^{-1} \Delta g_k)[u_k + (g_k + \Delta g_k)^{-1}(\Delta f_k + \varpi_k)] \quad (21)$$

结合 Sontag 公式, 设计如下准最优学习控制器:

$$u_k = u_{ok} - g_k^{-1}(u_{i,k} + \varpi_k) + u_{rk} \quad (22)$$

式中,

$$u_{ok} = \begin{cases} -\left(\mu + \frac{a_k + \sqrt{a_k^2 + b_k^4}}{b_k^2}\right) b_k, & |b_k| > \epsilon \\ -\left(\mu + \frac{a_k + \sqrt{a_k^2 + b_k^4}}{\epsilon^2}\right) b_k, & |b_k| \leq \epsilon \end{cases} \quad (23)$$

$$u_{i,k} = \text{sat}_u(\hat{u}_{i,k})$$

$$\hat{u}_{i,k} = \text{sat}_u(\hat{u}_{i,k-1}) + \gamma_1 s_k \quad (24)$$

$$u_{rk} = -\frac{2s_k}{|s_k| + \varepsilon} (|u_{ok} - g_k^{-1}(u_{i,k} + \varpi_k)|) - \frac{2s_k(|\mathbf{c}_\rho^T \bar{\mathbf{z}}_k + f_k| + |s_k|)}{g_{mk}(|s_k| + \varepsilon)} - (\rho_k |u_{ok} - g_k^{-1}(u_{i,k} + \varpi_k)| + \alpha_{fk} \|\mathbf{e}_k\|) \frac{1}{g_{mk}} \text{sat}\left(\frac{b_k}{\varepsilon}\right) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \rho_k &= \text{sat}_\rho(\hat{\rho}_k) \\ \hat{\rho}_k &= \text{sat}_\rho(\hat{\rho}_{k-1}) + \gamma_2 |s_k (u_{ok} - g_k^{-1}(u_{i,k} + \varpi_k))| \end{aligned} \quad (26)$$

其中, $\mathbf{c}_\rho = [0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}]^T$, $u_{i,k}$ 为对 Δf_d 的估计, $\hat{u}_{i,-1} = 0, \hat{\rho}_{-1} = 0$, 本文中, $\text{sat}(\cdot)$ 为饱和函数, 其定义为: 对于 $\hat{\vartheta} \in \mathbf{R}$,

$$\text{sat}_{\hat{\vartheta}}(\hat{\vartheta}) = \begin{cases} \hat{\vartheta}, & |\hat{\vartheta}| \leq \bar{\vartheta} \\ \bar{\vartheta} \text{sgn}(\hat{\vartheta}), & \text{其他} \end{cases}$$

$\bar{\vartheta}$ 为合适的限幅值; 当 $\bar{\vartheta} = 1$ 时, 简记 $\text{sat}_{\hat{\vartheta}}(\hat{\vartheta})$ 为 $\text{sat}(\hat{\vartheta})$. 在上述控制律和学习律中,

$$\mu > 0, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, \varepsilon \gg \epsilon > 0 \quad (27)$$

在具体实施时, 常可选 $5 \leq \mu \leq 10, 1 \leq \gamma_1 \leq 10, 0.01 \leq \gamma_2 \leq 0.1, \varepsilon \geq 10, 0.001 \leq \epsilon \leq 0.1$.

注 2. 采用引理 1 中式 (8) 所示的方案设计控制律, 在实施时可能出现控制量不连续现象, 本文在设计 (23) 时借鉴文献 [38] 中的处理方法, 给出新型的设计方案, 以避免控制量不连续现象的产生.

4 收敛性分析

本节分析闭环系统的收敛性能, 该方面的主要结果总结为如下定理.

定理 1. 将控制律 (22)~(26) 应用于满足假设 1 和假设 2 的系统 (1), 并根据式 (27) 选取学习增益及控制参数, 经过足够次数的迭代运行后, 闭环系统中的所有信号有界, 并实现 $|b_k(t)| \leq \epsilon, t \in [0, T]$ 及

$$|e_{i,k}(t)| \leq (2\lambda)^{i-1} \frac{\epsilon}{g\lambda^{n-1}}, t \in [t_\delta, T], i = 1, \dots, n$$

这就是说, 选择适当大小的 ϵ , 可以获得需要的控制精度.

证明.

1) 检验 V_k 是否满足控制 Lyapunov 函数条件容易看出,

$$b_k = \frac{\partial(\frac{1}{2}s_k^2 + \mathbf{z}_k^T P \mathbf{z}_k)}{\partial \bar{\mathbf{z}}_k^T} \boldsymbol{\beta}_g = g_k s_k \quad (28)$$

因为 $g_k > 0$, 所以当 $b_k = 0$ 时, $s_k = 0$, 此时,

$$a_k = \frac{\partial(\mathbf{z}_k^T P \mathbf{z}_k)}{\partial \bar{\mathbf{z}}_k^T} \boldsymbol{\beta}_f = \frac{\partial(\mathbf{z}_k^T P \mathbf{z}_k)}{\partial \bar{\mathbf{z}}_k^T} \dot{\bar{\mathbf{z}}}_k = \frac{d(\mathbf{z}_k^T P \mathbf{z}_k)}{dt}$$

结合上式和式 (20), 可知: 当 $\bar{\mathbf{z}}_k \neq 0$ 且 $b_k = 0$ 时,

$$a_k = \mathbf{z}_k^T (A^T P + P A) \mathbf{z}_k = -\mathbf{z}_k^T Q \mathbf{z}_k$$

注意到当 $\bar{\mathbf{z}}_k \neq 0$ 且 $b_k = 0$ 时, $\mathbf{z}_k \neq 0$. 故所选取的 $V_k = \frac{1}{2}s_k^2 + \mathbf{z}_k^T P \mathbf{z}_k$ 满足式 (20) 的要求.

2) 证明系统变量的有界性

由式 (17) 可知

$$\dot{s}_k = \mathbf{c}_\rho^T \bar{\mathbf{z}}_k + f_k + \Delta f_k - \dot{x}_{n,d} - \dot{e}_{n,k}^* + g_{uk} u_k$$

求 $V_{0k} = \frac{1}{2}s_k^2$ 关于时间的导数, 利用上式及假设 1, 可以推出

$$\dot{V}_{0k} \leq s_k [\mathbf{c}_\rho^T \bar{\mathbf{z}}_k + f_k - \dot{x}_{n,d} - \dot{e}_{n,k}^* + g_{uk} (u_{ok} - g_k^{-1}(u_{ik} + \varpi_k) + u_{rk}) + \Delta f_d] + |s_k| \alpha_{fk} \|\mathbf{e}_k\|$$

当 $|s_k| > \epsilon/g$ 时, $|b_k| > \epsilon$, $s_k \text{sat}(\frac{b_k}{\epsilon}) = |s_k|$, 于是

$$\begin{aligned} \dot{V}_{0k} &\leq s_k [\mathbf{c}_\rho^T \bar{\mathbf{z}}_k + f_k - \dot{x}_{n,d} - \dot{e}_{n,k}^* + g_{uk} (u_{ok} - g_k^{-1}(u_{ik} + \varpi_k))] - \frac{2s_k^2 g_{uk}}{|s_k| + \varepsilon} (|u_{ok} - g_k^{-1}(u_{i,k} + \varpi_k)|) - \frac{2s_k^2 g_{uk}}{g_{mk}(|s_k| + \varepsilon)} (|\mathbf{c}_\rho^T \bar{\mathbf{z}}_k + f_k| + |s_k|) + s_k \Delta f_d + |s_k| \alpha_{fk} \|\mathbf{e}_k\| - \frac{g_{uk} |s_k|}{g_{mk}} [\rho_k |u_{ok} - g_k^{-1}(u_{ik} + \varpi_k)| + \alpha_{fk} \|\mathbf{e}_k\|] \end{aligned} \quad (29)$$

当 $|s_k| > \max(\varepsilon, |\Delta f_d - \dot{x}_{n,d} - \dot{e}_{n,k}^*|)$ 时,

$$s_k g_{uk} [u_{ok} - g_k^{-1}(u_{i,k} + \varpi_k)] - 2s_k^2 g_{uk} [|u_{ok} - g_k^{-1}(u_{ik} + \varpi_k)|] / (|s_k| + \varepsilon) \leq 0 \quad (30)$$

且

$$s_k (\mathbf{c}_\rho^T \bar{\mathbf{z}}_k + f_k - \dot{x}_{n,d} - \dot{e}_{n,k}^*) + s_k \Delta f_d - \frac{2s_k^2 g_{uk} (|\mathbf{c}_\rho^T \bar{\mathbf{z}}_k + f_k| + |s_k|)}{g_{mk}(|s_k| + \varepsilon)} \leq 0 \quad (31)$$

记 $h_s = \max(\frac{\epsilon}{g}, \varepsilon, |\Delta f_d - \dot{x}_{n,d} - \dot{e}_{n,k}^*|)$, 综合式 (29)~(31), 可知当 $|s_k| > h_s$ 时,

$$\dot{V}_{0k} \leq -\frac{g_{uk}}{g_{mk}} \rho_k |u_{ok} - g_k^{-1}(u_{ik} + \varpi_k)| |s_k| < 0 \quad (32)$$

因此, $|s_k| \leq h_s$. 据此, 可知^[39]

$$|z_{1,k}^{(i)}(t)| \leq (2\lambda)^i \frac{h_s}{\lambda^{n-1}}, i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (33)$$

这就是说, 闭环系统中 $\|\tilde{\mathbf{z}}_k\|$ 有界, 进一步, 可以推出 \mathbf{e}_k 与 \mathbf{x}_k 的有界性. 根据饱和函数的性质, 可以确保 $u_{i,k}$ 是有界的. 至此, 容易证明系统中控制输入及其他变量均为有界.

3) 误差的收敛性

由上文的有界性证明可知 $|\Delta g_k|$ 是有界的, 记其界为 ρ . 当 $|b_k| > \epsilon$ 时, 将式 (22) 代入式 (21), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & -\mu b_k^2 - \sqrt{a_k^2 + b_k^4} + s_k(-u_{i,k} + f_d) + \\ & |s_k|\rho|u_{ok} - g_k^{-1}(u_{i,k} + \varpi_k)| - (g_k + \Delta g_k) \times \\ & \frac{\rho_k |s_k(u_{ok} - g_k^{-1}(u_{i,k} + \varpi_k))|}{g_{mk}} \leq \\ & -\mu b_k^2 - \sqrt{a_k^2 + b_k^4} + s_k \tilde{u}_{i,k} + |s_k(u_{ok} - \\ & g_k^{-1}(u_{i,k} + \varpi_k))| \tilde{\rho}_k \end{aligned} \quad (34)$$

其中, $\tilde{u}_{i,k} = \Delta f_d - u_{i,k}$, $\tilde{\rho}_k = \rho - \rho_k$.

选择 Lyapunov 泛函

$$L_k = V_k + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t \tilde{u}_{i,k}^2 d\tau + \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t \tilde{\rho}_k^2 d\tau \quad (35)$$

当 $|b_k| > \epsilon$ 时, 由式 (34) 可得

$$\begin{aligned} V_k \leq & -\int_0^t \left(\mu b_k^2 + \sqrt{a_k^2 + b_k^4} \right) d\tau + \int_0^t [s_k \tilde{u}_{i,k} + \\ & |s_k(u_{ok} - g_k^{-1}(u_{i,k} + \varpi_k))| \tilde{\rho}_k] d\tau \end{aligned} \quad (36)$$

当 $k > 0$ 时, 从式 (35) 和式 (36) 可以推出

$$\begin{aligned} L_k - L_{k-1} \leq & -\int_0^t \left(\mu b_k^2 + \sqrt{a_k^2 + b_k^4} \right) d\tau + \\ & \int_0^t [s_k \tilde{u}_{i,k} + |s_k(u_{ok} - g_k^{-1}(u_{i,k} + \varpi_k))| \times \\ & \tilde{\rho}_k] d\tau + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t (\tilde{u}_{i,k}^2 - \tilde{u}_{i,k-1}^2) d\tau + \\ & \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t (\tilde{\rho}_k^2 - \tilde{\rho}_{k-1}^2) d\tau - V_{k-1} \end{aligned} \quad (37)$$

根据式 (24) 和式 (26), 分别可以得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\gamma_1} (\tilde{u}_{i,k}^2 - \tilde{u}_{i,k-1}^2) + s_k \tilde{u}_{i,k} \leq \\ \frac{1}{\gamma_1} (\Delta f_d - u_{i,k})(u_{i,k-1} - u_{i,k} + \gamma_1 s_k) = \\ \frac{1}{\gamma_1} (\Delta f_d - \text{sat}_u(\hat{u}_{i,k}))(\hat{u}_{i,k} - \text{sat}_u(\hat{u}_{i,k})) \leq 0 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\gamma_2} (\tilde{\rho}_k^2 - \tilde{\rho}_{k-1}^2) + |s_k(u_{ok} - g_k^{-1}(u_{i,k} + \varpi_k))| \tilde{\rho}_k \leq \\ \frac{1}{\gamma_2} (\rho - \rho_k)(\rho_{k-1} - \rho_k + \gamma_2 |s_k(u_{ok} - \\ g_k^{-1}(u_{i,k} + \varpi_k))|) = \\ \frac{1}{\gamma_2} (\rho - \text{sat}_\rho(\hat{\rho}_k))(\hat{\rho}_k - \text{sat}_\rho(\hat{\rho}_k)) \leq 0 \end{aligned}$$

将以上两式的结果应用于式 (37), 有 $L_k - L_{k-1} \leq -\int_0^t (\sqrt{a_k^2 + b_k^4} + \mu b_k^2) d\tau - V_{k-1}$, 取该式中的 $k = 0, 1, 2, \dots, N$, 并求和, 有

$$\begin{aligned} L_N \leq L_0 - \sum_{i=1}^N \int_0^t \mu b_i^2 d\tau - \sum_{i=1}^N V_{i-1} - \\ \sum_{i=1}^N \int_0^t \sqrt{a_i^2 + b_i^4} d\tau \end{aligned} \quad (38)$$

由上式可知, 经过数量足够多次迭代运行后,

$$|b_k| \leq \epsilon \quad (39)$$

这是因为, 若经过 $N = \frac{2\bar{g}L_0}{\epsilon^2}$ 次迭代后, 仍有 $|b_k| > \epsilon$, 则 $|s_k| > \frac{\epsilon}{g_k}$, 于是 $L_N < L_0 - \frac{1}{2g_k^2} \epsilon^2 \times \frac{2\bar{g}^2 L_0}{\epsilon^2} \leq 0$. 这与 Lyapunov 函数的非负性相矛盾; 此处, $\bar{g} := \max(g(\mathbf{x}_1, t), g(\mathbf{x}_2, t), \dots, g(\mathbf{x}_N, t)), \forall t \in [0, T]$.

由式 (39) 可知, $|s_k| \leq \frac{\epsilon}{g_k} \leq \frac{\epsilon}{g}$ 成立; 进一步地^[39], 可知对于 $t \in [0, T]$ 及 $i = 0, 1, \dots, n-1$, 式 $|z_{1,k}^{(i)}(t)| \leq (2\lambda)^i \frac{\epsilon}{g\lambda^{n-1}}$ 成立, 此处, λ 的定义见式 (16). 于是, 根据期望误差轨迹的性质, 可知

$$|e_{i,k}(t)| \leq (2\lambda)^{i-1} \frac{\epsilon}{g\lambda^{n-1}}, t \in [t_\delta, T], i = 1, \dots, n$$

从上述结果可以看出, 选择合适的设计参数 ϵ , 经过足够多次迭代运行后, $\mathbf{e}_k(t)$ 可以在整个作业区间 $[0, T]$ 上以预设精度跟踪 $\mathbf{e}_k^*(t)$. 鉴于当 $t \in [t_\delta, T]$, $\mathbf{e}_k^*(t) = \mathbf{0}$, 所以前述的 $\mathbf{e}_k(t)$ 在整个作业区间上以预设精度跟踪 $\mathbf{e}_k^*(t)$, 意味着在 $t \in [t_\delta, T]$ 上, \mathbf{x}_k 以相同的预设精度跟踪 \mathbf{x}_d . \square

在本文给出的控制设计方案中, 采用学习方法估计 ρ , 不需知道 Δg_k 的上界, 有利于减小鲁棒项设计中的保守性.

注 3. 利用非优化学习控制算法设计控制器时, 与式 (38) 对应的类似式子为 $L_N \leq L_0 - \sum_{i=1}^N V_{i-1}$ 或 $L_N \leq L_0 - \sum_{i=1}^N \int_0^t \mu s_i^2 d\tau - \sum_{i=1}^N V_{i-1}$. 不等式 (38) 右边的第三项 $-\sum_{i=1}^N \int_0^t \sqrt{a_i^2 + b_i^4} d\tau$ 起到了提高系统误差收敛速度的效果.

5 仿真算例

考虑动态系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k} \\ \dot{x}_{2,k} = -0.1x_{2,k} + x_{1,k}^3 + 12\cos(t) + (1 + 0.01x_{1,k}^2 + 0.005x_{2,k}^2)u_k \end{cases}$$

其标称为

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k} \\ \dot{x}_{2,k} = -0.1x_{2,k} + u_k \end{cases} \quad (40)$$

控制目标是使得系统状态 $[x_{1,k}, x_{2,k}]^T$ 跟踪参考信号 $[x_{1,d}(t), x_{2,d}(t)]^T = [\cos(\pi t), -\pi \sin(\pi t)]^T$. 系统初态为 $x_1(0) = 1.2 + 0.1r_1, x_2(0) = -0.1 + 0.02r_2$. 这里, r_1 和 r_2 均为 0 与 1 之间的随机数.

按照本文所提的方案构造如下期望误差轨迹. 选择 $t_\delta = 0.5, T = 2.5$. 当 $t_\delta \leq t \leq T$ 时, $e_{1,k}^*(t) = 0, e_{2,k}^*(t) = 0$; 当 $0 \leq t < t_\delta$ 时, $e_{1,k}^*(t) = a_{0,k} + a_{1,k}t + a_{2,k}t^2 + a_{3,k}t^3 + a_{4,k}t^4 + a_{5,k}t^5, e_{2,k}^*(t) = \dot{e}_{1,k}^*(t)$, 其中, $a_{0,k} = e_{1,k}(0), a_{1,k} = e_{2,k}(0), a_{2,k} = 0, [a_{3,k}, a_{4,k}, a_{5,k}]^T = \Gamma^{-1}\omega$, 而 $\omega = [-a_{0,k} - a_{1,k}t_\delta - a_{2,k}t_\delta^2, -a_{1,k} - 2a_{2,k}t_\delta, -2a_{2,k}]^T$,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} t_\delta^3 & t_\delta^4 & t_\delta^5 \\ 3t_\delta^2 & 4t_\delta^3 & 5t_\delta^4 \\ 6t_\delta & 12t_\delta^2 & 20t_\delta^3 \end{pmatrix}^{-1}$$

取 $\alpha_{fk} = 3(x_{1,d}^2 + x_{1,k}^2), g_{mk} = 0.8$, 容易检验, 它们分别满足假设 1 和假设 2. 采用控制律 (22) 进行仿真. 参数选为 $c_1 = 2, \mu = 10, \gamma_1 = 5, \gamma_2 = 0.1, \bar{u} = 50, \bar{\rho} = 50, \epsilon = 0.0025, \varepsilon = 30, t_\delta = 0.5, T = 2.5$, 对应的 $V_k = \frac{1}{2}s_k^2 + e_{1,k}^2, s_k = c_1e_{1,k} + e_{2,k}$. 迭代 30 次后, 仿真结果如图 1~图 8 所示. 图 1 和图 2 是第 30 次迭代期间的系统状态情况, 图 3 和图 4 是该次迭代期间的误差情况, 该次迭代期间的 z_k 取值见图 5 和图 6, 图 7 是第 30 次迭代期间的控制输入值, 图 8 中的曲线 ilc1 是 $|s_k(t)|$ 随迭代次数变化情况, 其中, $J_k := \max_{t \in [0, T]} |s_k(t)|$. 从图 1~图 4 可以看出, 经过足够多次迭代, 系统状态在区间 $[t_\delta, T]$ 上精确跟踪参考信号. 从图 5 及图 6 可以看出, 系统误差在整个作业区间 $[0, T]$ 上精确跟踪期望误差轨迹.

为了对比起见, 采用文献 [22] 中提出的鲁棒学习控制算法进行仿真. 取

$$u_k = -\mu s_k - u_{i,k} + u_{rk} - \hat{v}_k \text{sat}\left(\frac{s_k}{\epsilon}\right) \quad (41)$$

其中,

$$\begin{cases} u_{i,k} = \text{sat}_{\bar{u}}(u_{i,k-1}) + \gamma_1 s_k \\ u_{rk} = \frac{1}{g_{mk}} \text{sat}\left(\frac{s_k}{\epsilon}\right) (|c_1 z_{2,k} - \dot{e}_{2,k} - \dot{x}_{n,d}| + \bar{f}_k) \\ \hat{v}_k = \text{sat}_{\bar{v}}(v_k^*) \\ v_k^* = \text{sat}_{\bar{v}}(v_{k-1}^*) + \gamma_2 |s_k|, v_{-1}^* = 0 \end{cases} \quad (42)$$

在式 (42) 中, $\bar{f}_k = 3 + |-0.1x_{2,k} + x_{1,k}^3 + 12\cos(t)|$ 表示 $|f_k + \Delta f_k|$ 的界, $\bar{v} = 50$, 其余参数选取情况同前. 经过 30 次迭代后, $|s_k(t)|$ 随迭代次数变化情况见图 8 中的曲线 ilc2. 对比图 8 中的曲线 ilc1 和 ilc2, 可以看出, 准最优误差跟踪学习控制算法具有较快的收敛速度.

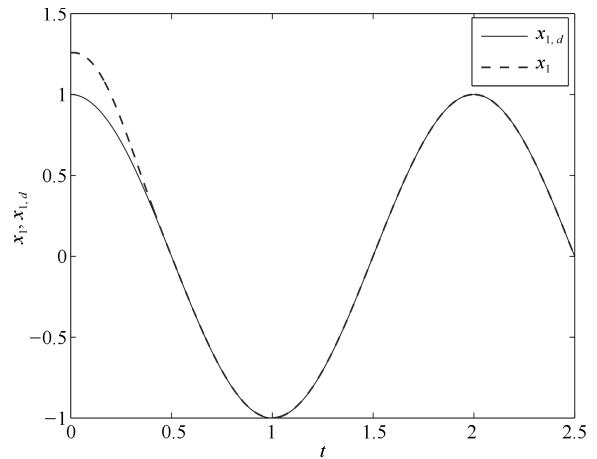


图 1 x_1 及其期望轨迹 $x_{1,d}$
Fig. 1 x_1 and its desired trajectory $x_{1,d}$

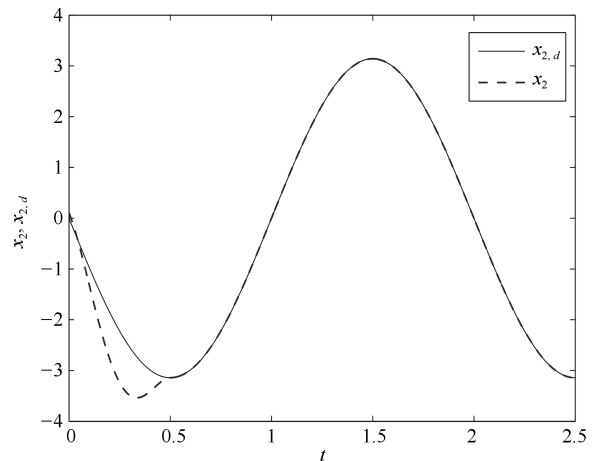


图 2 x_2 及其期望轨迹 $x_{2,d}$
Fig. 2 x_2 and its desired trajectory $x_{2,d}$

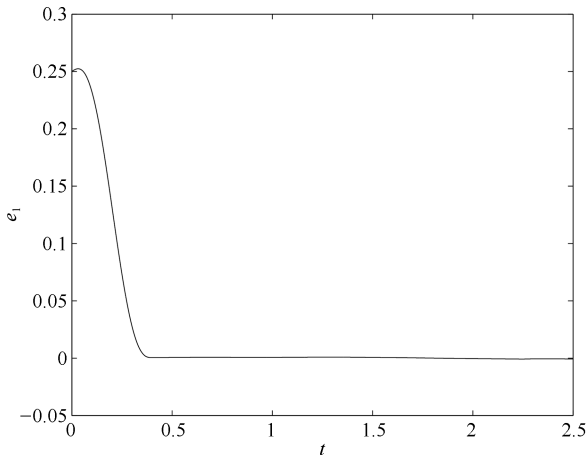


图 3 误差 e_1
Fig. 3 The error e_1

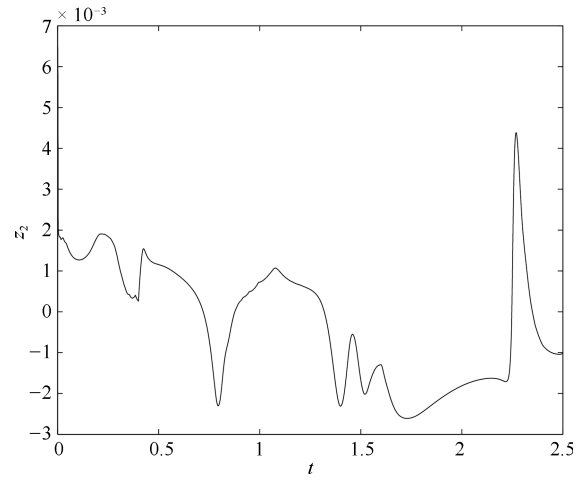


图 6 $e_{2,k}$ 和 $e_{2,k}^*$ 之差
Fig. 6 The difference between $e_{2,k}$ and $e_{2,k}^*$

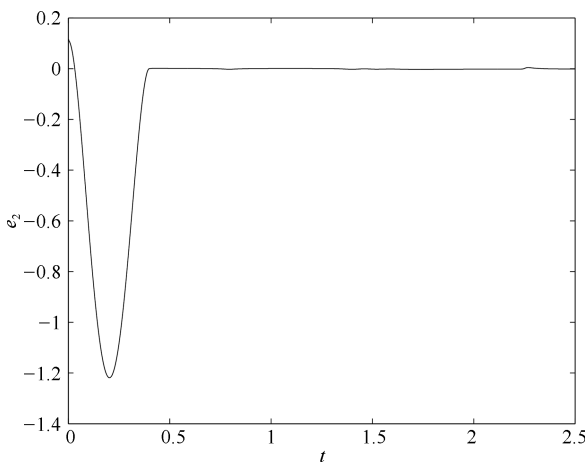


图 4 误差 e_2
Fig. 4 The error e_2

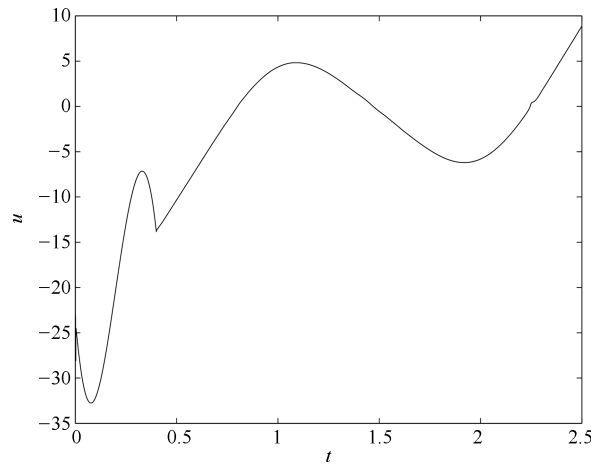


图 7 控制输入
Fig. 7 Control input

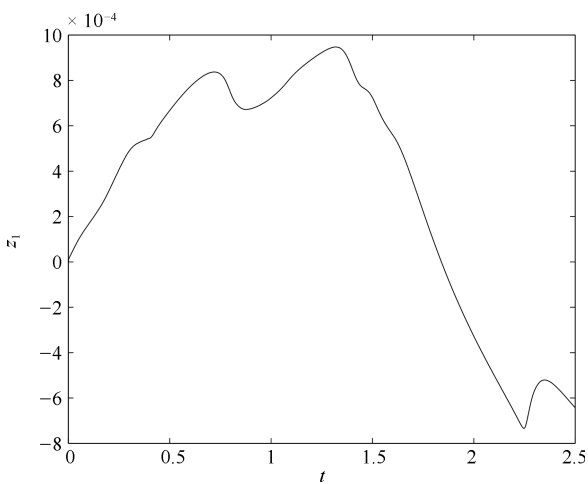


图 5 $e_{1,k}$ 和 $e_{1,k}^*$ 之差
Fig. 5 The difference between $e_{1,k}$ and $e_{1,k}^*$

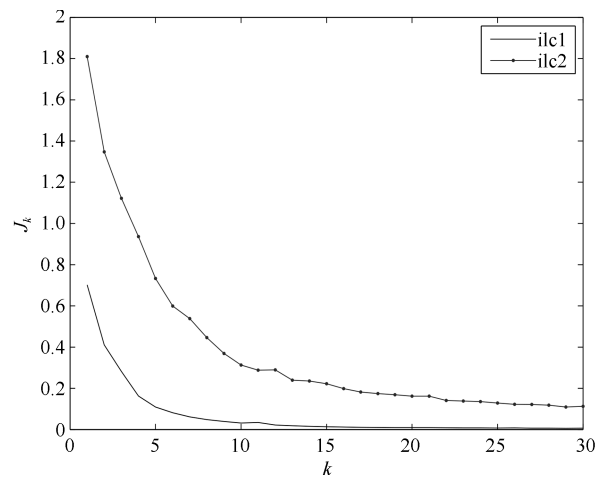


图 8 $|s_k|$ 随迭代次数的变化
Fig. 8 $|s_k|$ with respect to iterations

上述仿真结果表明, 本文提出的准最优误差跟

踪学习控制算法能够在任意系统初态下, 实现状态误差在整个作业区间上精确跟踪期望误差轨迹, 且算法具有较快的迭代收敛速度; 由此, 系统状态能够在预设的部分作业区间上精确跟踪参考信号。

6 结论

本文考虑一类输入增益未知系统的优化学习控制问题, 提出一套准最优误差跟踪学习控制方案. 该方案采用准最优控制与鲁棒学习相结合的策略设计控制器, 控制算法既不需要假设系统误差初值为零, 也不需要输入增益已知, 因而, 适用范围较现有准最优学习控制方法广. 本文的设计方案借助实现误差对期望误差轨迹的全区间精确跟踪, 获取系统状态对参考信号在部分作业区间上的精确跟踪. 构造合适的期望误差轨迹是实现本文所提优化学习控制算法的基础。

致谢

作者感谢浙江工业大学孙明轩教授和浙江师范大学蔡秀珊教授在本文撰写和修改过程中给予的支持和帮助。

References

- Xu J X, Tan Y. A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(11): 1940–1945
- Tayebi A, Chien C J. A unified adaptive iterative learning control framework for uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(10): 1907–1913
- Hu T J, Low K H, Shen L C, Xu X. Effective phase tracking for bioinspired undulations of robotic fish models: a learning control approach. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2014, **19**(1): 191–200
- Huang D Q, Xu J X, Venkataramanan V, The Cat Tuong Huynh. High-performance tracking of piezoelectric positioning stage using current-cycle iterative learning control with gain scheduling. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, **61**(2): 1085–1098
- Shen D, Wang Y Q. Survey on stochastic iterative learning control. *Journal of Process Control*, 2014, **24**(12): 64–77
- Zhang Yu-Dong, Fang Yong-Chun. Learning control for systems with saturated output. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(1): 92–98
(张玉东, 方勇纯. 一类输出饱和系统的学习控制算法研究. *自动化学报*, 2011, **37**(1): 92–98)
- Zhang Li, Liu Shan. Basis function based adaptive iterative learning control for non-minimum phase systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(12): 2716–2725
(张黎, 刘山. 非最小相位系统的基函数型自适应迭代学习控制. *自动化学报*, 2014, **40**(12): 2716–2725)
- Dai X S, Tian S P, Peng Y J, Luo W G. Closed-loop P-type iterative learning control of uncertain linear distributed parameter systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2014, **1**(3): 267–273
- Bu Xu-Hui, Hou Zhong-Sheng, Yu Fa-Shan, Fu Zi-Yi. Iterative learning control for trajectory tracking of farm vehicles. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(2): 368–372
(卜旭辉, 侯忠生, 余发山, 付子义. 基于迭代学习的农业车辆路径跟踪控制. *自动化学报*, 2014, **40**(2): 368–372)
- Li Yan, Chen Yang-Quan, Ahn Hyo-Sung. Convergence analysis of fractional-order iterative learning control. *Control Theory & Applications*, 2012, **29**(8): 1031–1037
(李岩, 陈阳泉, 安孝晟. 分数阶迭代学习控制的收敛性分析. *控制理论与应用*, 2012, **29**(8): 1031–1037)
- Lee H S, Bien Z. Study on robustness of iterative learning control with non-zero initial error. *International Journal of Control*, 1996, **64**(3): 345–359
- Park K H. An average operator-based PD-type iterative learning control for variable initial state error. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(6): 865–869
- Porter B, Mohamed S S. Iterative learning control of partially irregular multivariable plants with initial impulsive action. *International Journal of Systems Science*, 1991, **22**(3): 447–454
- Ruan Xiao-E, Zhao Jian-Yong. Pulse compensated iterative learning control to nonlinear systems with initial state uncertainty. *Control Theory & Applications*, 2012, **29**(8): 993–1000
(阮小娥, 赵建永. 具有初始状态不确定性的非线性系统脉冲补偿迭代学习控制. *控制理论与应用*, 2012, **29**(8): 993–1000)
- Sun Ming-Xuan, Huang Bao-Jian. *Iterative Learning Control*. Beijing: National Defense Industry Press, 1999.
(孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制. 北京: 国防工业出版社, 1999.)
- Meng D Y, Jia Y M, Du J P. Robust consensus tracking control for multiagent systems with initial state shifts, disturbances, and switching topologies. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, **26**(4): 809–824
- Chen Wei-Shen, Wang Yuan-Liang, Li Jun-Min. Adaptive learning control for nonlinearly parameterized systems with periodically time-varying delays. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(12): 1556–1560
(陈为胜, 王元亮, 李俊民. 周期时变时滞非线性参数化系统的自适应学习控制. *自动化学报*, 2008, **34**(12): 1556–1560)
- Yin C K, Xu J X, Hou Z S. A high-order internal model based iterative learning control scheme for nonlinear systems with time-iteration-varying parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(11): 2665–2670
- Chien C J, Hsu C T, Yao C Y. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state errors. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, **12**(5): 724–732
- Sun M X, Yan Q Z. Error tracking of iterative learning control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(3): 251–262
- Yan Qiu-Zhen, Sun Ming-Xuan. Error trajectory tracking by robust learning control for nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2013, **30**(1): 23–30
(严求真, 孙明轩. 一类非线性系统的误差轨迹跟踪鲁棒学习控制算法. *控制理论与应用*, 2013, **30**(1): 23–30)
- Yan Qiu-Zhen, Sun Ming-Xuan. Error-tracking iterative learning control with state constrained for nonparametric uncertain systems. *Control Theory & Applications*, 2015, **32**(7): 895–901
(严求真, 孙明轩. 非参数不确定系统状态受限误差跟踪学习控制方法. *控制理论与应用*, 2015, **32**(7): 895–901)

- 23 Li X D, Lv M M, Ho J K L. Adaptive ILC algorithms of nonlinear continuous systems with non-parametric uncertainties for non-repetitive trajectory tracking. *International Journal of Systems Science*, 2016, **47**(10): 2279–2289
- 24 Li Xiang-Yang. Iterative learning control based on finite time tracking differentiator. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(7): 1366–1375
(李向阳. 基于有限时间跟踪微分器的迭代学习控制. 自动化学报, 2014, **40**(7): 1366–1375)
- 25 Yan Qiu-Zhen, Sun Ming-Xuan, Li He. Iterative learning control for nonlinear uncertain systems with arbitrary initial state. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(4): 545–555
(严求真, 孙明轩, 李鹤. 任意初值非线性不确定系统的迭代学习控制. 自动化学报, 2016, **42**(4): 545–555)
- 26 Yan Qiu-Zhen, Sun Ming-Xuan, Cai Jian-Ping. Reference-signal rectifying method of iterative learning control. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(8): 1470–1477
(严求真, 孙明轩, 蔡建平. 迭代学习控制的参考信号初始修正方法. 自动化学报, 2017, **43**(8): 1470–1477)
- 27 Jin X, Xu J X. Iterative learning control for output-constrained systems with both parametric and nonparametric uncertainties. *Automatica*, 2013, **49**(8): 2508–2516
- 28 Janssens P, Pipeleers G, Swevers J. A data-driven constrained norm-optimal iterative learning control framework for LTI systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, **21**(2): 546–551
- 29 Yang S Y, Qu Z H, Fan X P, Nian X H. Novel iterative learning controls for linear discrete-time systems based on a performance index over iterations. *Automatica*, 2008, **44**(5): 1366–1372
- 30 Chi Rong-Hu, Hou Zhong-Sheng, Huang Biao. Optimal iterative learning control of batch processes: from model-based to data-driven. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(6): 917–932
(池荣虎, 侯忠生, 黄彪. 间歇过程最优迭代学习控制的发展: 从基于模型到数据驱动. 自动化学报, 2017, **43**(6): 917–932)
- 31 Chen Han-Fu, Guo Lei. Some progress and prospects in modern control theory. *Chinese Science Bulletin*, 1998, **43**(1): 1–6
(陈翰馥, 郭雷. 现代控制理论的若干进展及展望. 科学通报, 1998, **43**(1): 1–6)
- 32 Marino R, Tomei P, Verrelli C M. Robust adaptive learning control for nonlinear systems with extended matching unstructured uncertainties. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, **22**(6): 645–675
- 33 Xu J X, Tan Y. A suboptimal learning control scheme for non-linear systems with time-varying parametric uncertainties. *Optimal Control Applications and Methods*, 2001, **22**(3): 111–126
- 34 Yan Qiu-Zhen, Sun Ming-Xuan. Suboptimal learning control for nonlinear systems with both parametric and non-parametric uncertainties. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(9): 1659–1668
(严求真, 孙明轩. 非线性不确定系统准最优学习控制. 自动化学报, 2015, **41**(9): 1659–1668)
- 35 Sontag E D. A ‘universal’ construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization. *Systems & Control Letters*, 1989, **13**(2): 117–123
- 36 Cai Xiu-Shan, Gao Hong, Liu Yang. Simultaneous H^∞ stabilization for a class of multi-input nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 473–478
(蔡秀珊, 高虹, 刘洋. 一类多输入非线性系统的同时 H^∞ 镇定. 自动化学报, 2012, **38**(3): 473–478)
- 37 Chen P N, Liu X B. Repetitive learning control for a class of partially linearizable uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 2017, **85**: 397–404
- 38 Pepe P. On Sontag’s formula for the input-to-state practical stabilization of retarded control-affine systems. *Systems & Control Letters*, 2013, **62**(11): 1018–1025
- 39 Slotine J J E, Li W P. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.



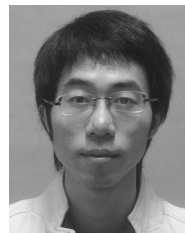
严求真 博士, 浙江水利水电学院信息工程学院讲师. 主要研究方向为迭代学习控制与重复控制. 本文通信作者.

E-mail: zjyqz@126.com

(YAN Qiu-Zhen Ph. D., lecturer at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Water Resources and Electric Power. His research interest covers learning control and repetitive control. Corresponding author of this paper.)



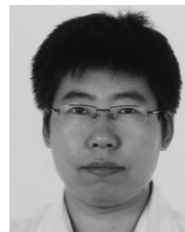
柳向斌 博士, 北京交通大学大学电子信息工程学院副教授. 主要研究方向为自适应控制. E-mail: xbliu@bjtu.edu.cn
(LIU Xiang-Bin Ph. D., associate professor at the School of Electronic Information Engineering, Beijing Jiaotong University. His main research interest is adaptive control.)



朱胜 博士, 浙江大学城市学院讲师. 主要研究方向为自适应学习控制.

E-mail: zhusheng@zucc.edu.cn

(ZHU Sheng Ph. D., lecturer at Zhejiang University City College. His main research interest is adaptive learning control.)



蔡建平 博士, 浙江水利水电学院电气工程学院教授. 主要研究方向为自适应控制. E-mail: caijp@zjweu.edu.cn

(CAI Jian-Ping Ph. D., professor at the School of Electrical Engineering, Zhejiang University of Water Resources and Electric Power. His main research interest is adaptive control.)