

有限时间一致无迹 Kalman 滤波器

刘鹏^{1,2} 田玉平^{1,2} 张亚^{1,2}

摘要 本文研究多个传感器测量非线性系统时的分布式无迹 Kalman 滤波器 (Unscented Kalman filter, UKF) 的设计问题. 借助离散多智能体系统有限时间平均一致算法的思想, 针对无向通信和有向通信网络分别设计了两种不同的滤波算法. 对于无向连通的通信拓扑, 利用节点存储的一致性算法的迭代值构造差向量, 由该差向量构成的 Hankel 矩阵的核来得到分布式无迹 Kalman 滤波器, 并通过利用误差协方差矩阵的逆来构造 Lyapunov 函数, 基于随机稳定性引理证明了该有限时间一致无迹 Kalman 滤波器的稳定性. 对于有向强连通的通信拓扑, 结合比率一致和 Hankel 矩阵的核来设计分布式无迹 Kalman 滤波器, 该滤波器的稳定性与无向通信拓扑的滤波器相同. 最后, 通过仿真例子来验证所提滤波器的跟踪效果.

关键词 一致 Kalman 滤波器, 无迹 Kalman 滤波器, 有限时间一致, Hankel 矩阵

引用格式 刘鹏, 田玉平, 张亚. 有限时间一致无迹 Kalman 滤波器. 自动化学报, 2020, 46(7): 1357–1366

DOI 10.16383/j.aas.2018.c170726

Finite-time Consensus Based Unscented Kalman Filter

LIU Peng^{1,2} TIAN Yu-Ping^{1,2} ZHANG Ya^{1,2}

Abstract This paper investigates how to design the distributed unscented Kalman filter (UKF) for nonlinear system in sensor networks. With the aid of finite-time average consensus for discrete-time multi-agent systems, we present unscented Kalman filters for undirected and directed communication topologies, respectively. For the undirected communication case, the distributed unscented Kalman filter is computed by the kernels of some Hankel matrices. The components of these Hankel matrices are the difference values of this node's current and past consensus iteration values. The stability of this filter is further proved via the Lyapunov function and the stochastic stability theory. For the strongly connected directed communication case, a distributed unscented Kalman filter is designed through combining ratio consensus and Hankel matrix. Finally, the tracking performance of these two filters are verified by the simulation examples.

Key words Consensus Kalman filter, unscented Kalman filter (UKF), finite-time consensus, Hankel matrix

Citation Liu Peng, Tian Yu-Ping, Zhang Ya. Finite-time consensus based unscented Kalman filter. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(7): 1357–1366

无线传感器网络由分布在一定空间的自主传感器节点组成, 这些传感器可以对周围环境数据进行采集、通信和计算. 无线传感器网络具有易安装、低计算成本、对节点失效不敏感和可扩展性等优点. 分布式估计是无线传感器网络的一个重要应用方面, 例如麦克风阵列中对演讲者或目标的跟踪^[1], 智能电网的状态估计^[2–3] 以及其他相关应用^[4–5] 等. 传感器节点由电池供电, 当电量损失过多后难以及时更换, 一个有效办法是通过减少节点之间的通信来

延长传感器网络的寿命, 从而设计出具有适量通信的分布式估计算法是目前的一个可行研究方向^[6–7].

一致性算法^[8] 通过节点间的局部合作使得所有节点达到一个共同量, 这个一致值与节点的初始状态和网络的拓扑结构紧密相关. 近来, 利用一致性策略来设计分布式估计算法受到众多研究者的重视^[4–5, 9]. 对于线性系统, 目前基于一致性的滤波算法主要有三类. 第一类称为单时标协议, 即估计器算法的运行时间与一致迭代的运行时间相同. 扩散 Kalman 滤波和 H_∞ 一致滤波均属于此类. 第二类是传输局部新息量给周边邻居, 此类算法是对局部新息运行一致 (如赋权平均)^[5, 10]. 第三类是对信息向量和信息矩阵进行一致性算法^[5, 11]. 第二类和第三类属于双时标协议. 大多数基于一致性滤波算法中的一致迭代是一个渐近的过程, 有限次一致性迭代时可能无法得到精确一致值. 因此, 加快一致算法收敛来得到高精度的滤波器是一个努力的方向, 且已有一些相关的结果^[6–7, 10, 12]. 文献 [7] 利用扩散策略将其前期基于一致性策略的分布式滤波结果^[4] 推

收稿日期 2017-12-25 录用日期 2018-04-04
Manuscript received December 25, 2017; accepted April 4, 2018
国家自然科学基金 (61573105, 61473081), 江苏省自然科学基金 (BK20141341) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61573105, 61473081), Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20141341)
本文责任编辑 诸兵
Recommended by Associate Editor ZHU Bing
1. 东南大学自动化学院 南京 210096 2. 东南大学复杂工程系统测量与控制教育部重点实验室 南京 210096
1. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096
2. Key Laboratory of Measurement and Control of CSE, Ministry of Education, Southeast University, Nanjing 210096

广到单时标的情形,这一推广明显减少了节点间的通信量.证明了如果连通网络中至少存在一个稳定的节点,则所有的节点关于目标状态均能得到稳定的估计值.文献[10]将最大一致协议的思想应用到分布式滤波器.另一个减少通信的方法是利用分布式动态跟踪算法^[12],该动态跟踪算法通过节点之间的通信以分布的形式估计出时变信号的平均值.故而,文献[12]中提出了一个融合平均跟踪算法的分布式 Kalman-Bucy 滤波器.最后, Yuan 等在文献[6]中利用构造 Hankel 矩阵的性质来实现加速一致化的分布式滤波算法.这也是一种减少通信的有效办法.

实际系统的模型具有非线性特点,扩展 Kalman 滤波器通过对系统线性化来对非线性系统状态进行估计.若系统的非线性程度较弱,扩展 Kalman 滤波算法跟踪效果较好,但需要计算 Jacobian 矩阵.为了避免计算 Jacobian 矩阵和提高估计精度,无迹 Kalman 滤波器 (Unscented Kalman filter, UKF) 是一个行之有效的选择.无迹 Kalman 滤波器是利用确定采样得到的 Sigma-点来近似状态的概率密度函数而非采用线性化技术^[13-14],随机变量的后验统计特性由赋权 Sigma-点来近似.该滤波器及其各种变式亦具有预测-更正的结构^[15-17].文献[18-19]分析了尺度参数对 UKF 的影响.当系统的测量值由多个传感器提供时,信息滤波器可以减少集合测量矩阵的维数^[20-22],便于计算.然而,这些信息滤波器^[20-22]要求传感器之间的通信方式为完全图.随着传感器技术的发展,越来越多的学者将注意力转移到分析和设计分布式 UKFs^[2-3, 23-24],分布式 UKFs 无需通信拓扑为完全图,本质上是对集中形式滤波器的分布式实现.文献[2]提出了一个分散算法来实时估计电力系统的状态,其将测量信号作为伪输入来分散实现 UKF.多域电力系统的电压幅值和相角估计可以利用一致性算法得到^[3],对于无向连通图, Li 等在文献[23]中提出了一个基于赋权平均一致的 UKF 算法,并利用随机稳定性引理证明了估计误差在均方意义下的有界性.为了改进滤波器的数值特征,文献[24]提出了基于 Sigma-点的信息赋权一致滤波器的平方根形式.非线性系统滤波器稳定性的证明,通常利用矩阵不等式的放缩和随机稳定性引理来进行^[23, 25-26].文献[2-3, 23-24]中的算法采用的是双时标设计思想,其中的一致性迭代过程通过确定的常数来近似,而精确的一致值需要渐近得到,此渐近一致过程需要极高的通信量.

上述文献所提出的设计协议无法直接应用于有限通信量时的无迹 Kalman 滤波器.因此,本文的目标便是来设计具有有限步通信时的 UKFs.有限时间一致性协议在文献[27]和文献[28]中都有了深入

研究.本文主要将有限时间一致性协议融入到 UKF 算法中,有效减少文献[23-24]中一致性迭代的步数,从而减少通信量、延长网络的寿命.

与现有文献相比,该文所得结论的主要贡献包括:

1) 对于无向连通的传感器网络,通过构造 Hankel 矩阵的方法来设计分布式有限时间一致 UKF 算法,并利用随机稳定性引理,给出该分布式有限时间一致 UKF 的稳定性证明.

2) 对于有向强连通的传感器网络,通过平行计算两个一致性协议的技术设计出此时的分布式有限时间一致 UKF 算法,该滤波器的稳定性分析与无向通信网络相似.

1 准备知识与问题描述

这一部分,我们首先给出相关的图论知识以及有限时间内达到平均一致的算法.然后,给出本文所述问题的数学描述以及集中形式的 UKF.

1.1 图论

假设 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ 为一个含有节点集合 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 和边集合 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 的有向图,其中, $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ 意味着该有向图上存在自节点 v_i 到节点 v_j 的通信连接.图 \mathcal{G} 的路径 $v_i \rightsquigarrow v_j$ 是指,以 $v_i \in \mathcal{V}$ 为始点,以 $v_j \in \mathcal{V}$ 为终点的集合 \mathcal{E} 中的顺序相连的有向边集合,并且不含有任何的环.一个图称为无向图是指对任意的 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$, 都有 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$. 对于一个无向图,我们称其为连通的是指,图中的任何两个顶点 v_i 和 v_j 之间都有一条无向路径来连接它们; 对于一个有向图,我们称其为连通的是指,图中的任何两个顶点 v_i 和 v_j 之间都有一条有向路径来连接它们,此时也称该有向图为强连通的.一般来说,无向边的两端添加方向后,任何无向连通图可视为有向强连通图.节点 v_i 的入邻居 $\mathcal{N}_i^{\text{in}}$ 是满足条件 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ 的所有节点 v_j 构成的集合; 节点 v_i 的出邻居 $\mathcal{N}_i^{\text{out}}$ 是满足条件 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ 的所有节点 v_j 构成的集合.对于无向图有 $\mathcal{N}_i^{\text{in}} = \mathcal{N}_i^{\text{out}} = \mathcal{N}_i$ 成立,其中, \mathcal{N}_i 简称为节点 v_i 的邻居.节点 v_i 的入度 d_i^{in} 是指其入边的数目,即 $d_i^{\text{in}} = |\mathcal{N}_i^{\text{in}}|$; 节点 v_i 的出度 d_i^{out} 是指其出边的数目,即 $d_i^{\text{out}} = |\mathcal{N}_i^{\text{out}}|$.

1.2 平均一致协议及其有限时间实现

平均一致性协议可以通过节点之间的局部通信来得到节点初始值的算术平均值.无向连通通信拓扑时,一致性协议一般表示为^[29]:

$$w_i(k+1) = w_i(k) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(w_j(k) - w_i(k)) \quad (1)$$

其中, $w_i(k)$ 是第 i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) 个传感器 (或自主体) 在 k 时刻对算术均值的估计值, n 是观测到目标的传感器的数目, a_{ij} 表示边的权值 (传感器 i 和传感器 j 之间信息交换的系数). 如果 $i = j$ 或者节点 i 和节点 j 非直接连接, 则 $a_{ij} = 0$; 如果存在边连接节点 i 和节点 j , 则 $a_{ij} \in (0, 1)$. 为了保证一致性算法的收敛性, 要求非零的边权值 a_{ij} 满足 $0 < a_{ij} < \frac{2}{d_i + d_j - 2}$ (其中, d_i 是自主体 i 的度, 即与节点 i 相连接的自主体的数目及其自身). 选取适当的权值 a_{ij} , 一致性协议 (1) 可以转化为下述形式 (2) (见文献 [8, 27])

$$w_i(k+1) = w_i(k) + \epsilon \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (w_j(k) - w_i(k)) \quad (2)$$

其中, 影响收敛速率的步长 ϵ 满足 $0 < \epsilon < \frac{1}{\Delta_{\max}}$, Δ_{\max} 是图 \mathcal{G} 的最大度. 通过运行迭代方程 (1) 或方程 (2), 所有传感器节点都可以渐近地收敛到它们初始值的算术均值, 即如果 $k \rightarrow \infty$, 那么 $w_i(k) \rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i(0)$. 为了加快这个收敛过程, 一般可以选取权值 a_{ij} 为 Metropolis 权^[24].

如果每个节点都有存储数据的能力, 则可以利用自身存储的有限数据来构造一个 Hankel 矩阵. 所有传感器节点初始值的算术均值可以利用构造的该 Hankel 矩阵的正规化核与局部存储的状态值计算得到. 计算的过程如下所述. 节点 i 在时刻 $k = 2j - 1$ (k 是奇数, $j = 1, 2, \dots$) 存储自身所得的连续状态值 $w_i(0), w_i(1), \dots, w_i(2j - 1)$. 这些连续值之间的差, 可以按照方程 (3) 进行计算,

$$\bar{w}_i(k') = w_i(k') - w_i(k' - 1), \quad k' = 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

同时存储这些差值. 针对每个传感器节点, 可以利用这些差值构造一个大小为 $j \times j$ 的 Hankel 矩阵, 如下表示

$$H_i^j = \begin{bmatrix} \bar{w}_i(1) & \bar{w}_i(2) & \cdots & \bar{w}_i(j) \\ \bar{w}_i(2) & \bar{w}_i(3) & \cdots & \bar{w}_i(j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{w}_i(j) & \bar{w}_i(j+1) & \cdots & \bar{w}_i(2j-1) \end{bmatrix}$$

每一时刻计算构造的 Hankel 矩阵的秩. 如果某一时刻开始, Hankel 矩阵为奇异矩阵, 可以计算出其正规的核 $\beta^{(i)} = [\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_{M_i-1}^{(i)}, 1]^T$, 其中, M_i 是 Hankel 矩阵首次出现奇异时的维数. 此时, 一致值可以表示为

$$\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} w_i(k) = \frac{\mathbf{w}_{M_i}^T \beta^{(i)}}{\mathbf{1}^T \beta^{(i)}}$$

其中, $\mathbf{w}_{M_i} = [w_i(0), w_i(1), \dots, w_i(M_i - 1)]^T$.

上述计算过程得到的有限时间平均一致, 要求通信拓扑为无向连通的. 然而, 对于实际的问题, 因为一般的信息交换并非都是对称的, 这样的无向拓扑假设过于严格. 因此, 利用有向图来定义通信时的信息传输方式是一个常用的技术手段.

对于一般有向通信拓扑, 达到平均一致值时的拓扑条件为强连通且满足平衡图^[8, 30]的要求. 对于强连通非平衡的有向图, 文献 [28] 提出了一个比率一致的算法来实现平均一致. 这个算法中, 有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 中的每个自主体 i 都有两个内部状态 η_i 和 ζ_i . 这些内部状态执行下述更新:

$$\eta_i(k+1) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i^{\text{in}}} w_{i,j} \eta_j(k) \quad (4)$$

$$\zeta_i(k+1) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i^{\text{in}}} w_{i,j} \zeta_j(k) \quad (5)$$

其中, 选取 $w_{i,j}$ 使得矩阵 $W = [w_{i,j}] \in \mathbf{R}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V}|}$ 满足列随机和本原 (一个简单的取法: 当 $i \in \mathcal{N}_j^{\text{out}}$ 时, $w_{i,j} = 1/d_j^{\text{out}}$; 其他的 $w_{i,j} = 0$), 并且初始条件取为

$$\boldsymbol{\eta}(0) = [\eta_1(0), \eta_2(0), \dots, \eta_{|\mathcal{V}|}(0)]^T, \quad \boldsymbol{\zeta}(0) = \mathbf{1}$$

因为 W 是列随机和本原矩阵, 所以根据 Perron-Frobenius 定理可知, $\lim_{k \rightarrow \infty} W^k = \mathbf{v} \mathbf{1}^T$, 其中, $\mathbf{v} > 0$ 和 $\mathbf{1}^T \mathbf{v} = 1$, 详细过程见文献 [31] 中第 516 页. 每个传感器 $i \in \mathcal{V}$ 可以对 η_i 和 ζ_i 按照下述取比率的方法渐近地获得平均值:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_i(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\eta_i(k)}{\zeta_i(k)} = \frac{v_i \sum_{j=1}^{|\mathcal{V}|} \eta_j(0)}{v_i \sum_{j=1}^{|\mathcal{V}|} 1} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{V}} \eta_j(0)}{|\mathcal{V}|}$$

其中, 符号 $(\cdot)_i$ 表示向量 (\cdot) 的第 i 个元素. 通过利用该比值的相继迭代差值来构造 Hankel 矩阵, 并计算首次降秩时 Hankel 矩阵的正规核, 对内部状态分配相应的正规核权值来得到此时的一致值^[29]. Hankel 矩阵降秩时的维数是一个有限数, 故而算术平均值可以在有限时间内得到.

1.3 问题描述

考虑下述具有加性噪音的离散非线性系统^[23]:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (6)$$

其中, $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态向量, 它的具体形式由应用中的实际模型决定. 该目标状态由 N 个传感器组成的网络来测量, 每个传感器的测量模型为

$$\mathbf{z}_k^i = h^i(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k^i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

其中, $\mathbf{z}_k^i \in \mathbf{R}^m$ 表示第 i 个传感器在 k 时刻的测量输出. 方程 (6) 和 (7) 中的非线性函数 $f(\cdot)$ 和 $h^i(\cdot)$ 分别表示系统动态和第 i 个传感器的测量模型. 我们假设过程噪声 \mathbf{w}_k 和第 i 个测量噪声 \mathbf{v}_k^i 是不相关的零均值高斯白噪声, 相应的协方差矩阵分别为 Q_k 和 R_k^i . 所有的传感器构成一个通信图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$.

接下来回顾标准的 UKF 算法, 这是一个集中表达的形式. 这个算法是下述提出分布式 UKF 算法的基础. 对于集中形式的 UKF 算法, 将所有的测量方程堆积为一个扩张的向量

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} z_k^1 \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^1(\mathbf{x}_k) \\ h^2(\mathbf{x}_k) \\ \vdots \\ h^N(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \\ \vdots \\ v_k^N \end{bmatrix} = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (8)$$

针对方程 (6) 和 (8), UKF 算法可以经过下述形式来表达. 在这个算法中, n 维状态向量 \mathbf{x} 可以由 $2n+1$ 个 Sigma-点来近似. 一般来说, 在 $k-1$ 时刻, 这些 Sigma-点由状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 和其误差协方差矩阵 P_{k-1} 来确定.

1.3.1 UKF 的预测过程

一般地, $k-1$ 时刻, 我们利用状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 及其误差协方差矩阵 P_{k-1} 来确定出如下的 $2n+1$ 个 Sigma-点

$$\begin{aligned} \chi_{k-1}^0 &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \chi_{k-1}^s &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \left(\sqrt{(n+\kappa)P_{k-1}} \right)_s, \quad s = 1, 2, \dots, n \\ \chi_{k-1}^s &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \left(\sqrt{(n+\kappa)P_{k-1}} \right)_{s-n}, \\ & \quad s = n+1, \dots, 2n \end{aligned}$$

其中, κ 是尺度因子, $\left(\sqrt{(n+\kappa)P_{k-1}} \right)_s$ 是矩阵 $(n+\kappa)P_{k-1}$ 的平方根的第 s 列, 矩阵的平方根可由 Cholesky 分解技术来得到.

将这 $2n+1$ 个 Sigma-点经过非线性状态函数 $f(\cdot)$ 映射为

$$\chi_{k|k-1}^s = f(\chi_{k-1}^s), \quad s = 0, 1, \dots, 2n$$

接下来, 通过下述赋权 Sigma-点来计算预测状态值和协方差矩阵

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{s=0}^{2n} W^s \chi_{k|k-1}^s$$

$$P_{k|k-1} = \sum_{s=0}^{2n} W^s (\chi_{k|k-1}^s - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \times (\chi_{k|k-1}^s - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T + Q_{k-1}$$

其中权值的取法为

$$W^s = \begin{cases} \frac{\kappa}{n+\kappa+1}, & s = 0 \\ \frac{1}{2(n+\kappa)}, & s = 1, 2, \dots, 2n \end{cases} \quad (9)$$

1.3.2 UKF 的更新过程

将映射后的 Sigma-点代入测量函数 $h(\cdot)$, 可以得到:

$$\gamma_k^s = h(\chi_{k|k-1}^s), \quad s = 0, 1, \dots, 2n$$

将这些新得到的 Sigma-点进行赋权组合, 从而得到如下的预测测量值, 预测测量值的协方差矩阵和状态-测量互协方差矩阵

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_k &= \sum_{s=0}^{2n} W^s \gamma_k^s \\ P_{\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k} &= \sum_{s=0}^{2n} W^s (\gamma_k^s - \hat{\mathbf{z}}_k) (\gamma_k^s - \hat{\mathbf{z}}_k)^T + R_k \\ P_{\mathbf{x}_k \mathbf{z}_k} &= \sum_{s=0}^{2n} W^s (\chi_{k|k-1}^s - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\gamma_{k|k-1}^s - \hat{\mathbf{z}}_k)^T \end{aligned}$$

其中, 权值如式 (9) 所示. UKF 算法中的增益矩阵为

$$K_k = P_{\mathbf{x}_k \mathbf{z}_k} (P_{\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k})^{-1}$$

最后, 通过下述线性更新准则来更新状态估计和协方差矩阵

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k)$$

$$P_k = P_{k|k-1} - K_k P_{\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k} (K_k)^T$$

本文的目的是对非线性目标系统 (6) 和 (7) 设计分布式滤波算法, 通过邻居之间的信息交换 (分布式) 使得每个传感器的节点都能够估计出系统的状态, 并且该分布式滤波算法具有更少的通信量和更高的估计精度. 下面, 我们将利用这里的滤波算法来设计分布式无迹 Kalman 滤波.

2 有限时间一致分布式 UKFs

这一部分, 基于有限时间一致协议, 我们分别对无向通信网络和有向通信网络提出分布式 UKF 算法. 主要思想是, 通过节点之间的局部信息交换来计

算整个网络的全局信息. 同时, 我们证明了滤波算法的稳定性, 并分析了这些算法的具体实现方式. 为了便于描述, 这里我们并不考虑传输或接收时延, 同时也不考虑通信噪音等情况.

2.1 无向通信时分布式 UKF

这里给出分布式 UKF 算法 1, 这个算法中通过在无向连通图上进行信息交换来实现有限时间一致. 算法 1 中, 在系统演化时间之间, 节点 i 将其初始值 $\hat{\mathbf{x}}_k^i, P_k^i$ 和中间值 $\hat{\mathbf{x}}_{k,\ell}^i, P_{k,\ell}^i$ 广播给其邻居. 当传感器节点收到来自邻居的中间值时, 这些传感器节点按照一致性协议来更新当前的状态值. 假设传感器节点具有一定的存储能力. 最后, 利用这些保存的值进行适当的计算和构造合适的 Hankel 矩阵来得到一致信息. 由前述知识可知, 这个一致信息可以经过有限步得到, 而文献 [8, 23] 中得到关心的一致信息时使用的是渐近一致的协议. 因此称这个分布式 UKF 算法为 Finite-time consensus-based UKF (FCUKF). 该算法中, 上标表示传感器节点的标识符; 特殊符号 S_i 表示第 i 个节点的估计值或协方差矩阵, 当 S_i 表示估计值时, 步骤 4 中的 $l = 0$, h 表示行标号, 当 S_i 表示协方差矩阵时, 步骤 4 中 $S_i(\tau)[h, l]$ 表示协方差矩阵在运行一致性算法的第 τ 步时的第 (h, l) 个元素. 对任意的 h, l , 算法 1 中构造首次降秩 Hankel 矩阵时, 相应的降秩时刻记为 $\tau^{h,l}$, 一致性运行时间 $L > \max_{h,l} \tau^{h,l}$. 通过这个 FCUKF 算法, 所有的传感器节点都能跟踪上非线性目标的状态.

算法 1. 无向图中的有限时间一致 UKF

步骤 1. 初始化: 将由初始值 $\hat{\mathbf{x}}_0^i$ 和 P_0^i 生成的 $2n + 1$ 个 Sigma-点 $\chi_0^{i,s}$ ($s = 0, 1, \dots, 2n$) 代入 $\chi_{k|k-1}^{i,s} = f(\chi_{k-1}^{i,s})$, 运行下述的预测步:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i &= \sum_{s=0}^{2n} W^s \chi_{k|k-1}^{i,s} \\ P_{k|k-1}^i &= \sum_{s=0}^{2n} W^s (\chi_{k|k-1}^{i,s} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i) \times \\ &\quad (\chi_{k|k-1}^{i,s} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i)^{\text{T}} + Q_{k-1}\end{aligned}$$

步骤 2. 传感器测量目标, 利用测量 \mathbf{z}_k^i 来更新预测值:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k^i &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i + K_k^i (\mathbf{z}_k^i - \hat{\mathbf{z}}_k^i) \\ P_k^i &= P_{k|k-1}^i - K_k^i P_{\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k}^i (K_k^i)^{\text{T}}\end{aligned}$$

步骤 3. 设 $\hat{\mathbf{x}}_{k,0}^i = \hat{\mathbf{x}}_k^i, P_{k,0}^i = P_k^i$, 对 $\ell =$

$0, 1, \dots, L$, 运行下述一致性算法

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k,\ell+1}^i &= \hat{\mathbf{x}}_{k,\ell}^i + \epsilon \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\hat{\mathbf{x}}_{k,\ell}^j - \hat{\mathbf{x}}_{k,\ell}^i) \\ P_{k,\ell+1}^i &= P_{k,\ell}^i + \epsilon \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (P_{k,\ell}^j - P_{k,\ell}^i)\end{aligned}$$

步骤 4. 对任意的 (h, l) , 计算 S_i 的连续值之间的差值: $\bar{S}_{2\tau}[h, l] = \{S_i(1)[h, l] - S_i(0)[h, l], \dots, S_i(2\tau+1)[h, l] - S_i(2\tau)[h, l]\}$, 其中, $S_i(\tau)$ 是 S_i 在第 τ 步的值, 利用这些差值, 构造 Hankel 矩阵 $\Gamma(\bar{S}_{2\tau}[h, l])$, 计算首次降秩时 $\Gamma(\bar{S}_{2\tau}[h, l])$ 的正规核 $\mathbf{K}_S^{h,l} = [\beta_0^{h,l}, \dots, \beta_{\tau-1}^{h,l}, 1]^{\text{T}}$, 并计算最终一致值 $S^c[h, l] = \frac{S_{\tau}^i[h, l] \mathbf{K}_S^{h,l}}{1^{\text{T}} \mathbf{K}_S^{h,l}}$, 其中, $S_{\tau}^i[h, l] = [S_i(0)[h, l], S_i(1)[h, l], \dots, S_i(\tau)[h, l]]$. 利用 S^c 代替 S_i 的所有元素后, 可得:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^i = \hat{\mathbf{x}}_{k,L}^i, \quad P_k^i = P_{k,L}^i$$

注 1. 算法 1 中的一致信息依赖于对方形 Hankel 矩阵的秩的分析. 文献 [27] 指出, 当 $j = M_i$ 时, Hankel 矩阵降秩. 如果接收到邻居个体的误差信号, 可利用奇异值分解来处理该情况. 同时, Yuan 等 [27] 给出所需时间步数的图论特征. 文中证明了, 每个个体所需的时间步由两个组合图论性质来限定: 相应于该传感器节点的图的最小外部合理分割和相应于该传感器节点的最长距离. 与渐近一致算法 [8] 相比, 有限时间一致算法 1 同样执行迭代 (2). 然而, 有限时间一致算法中自主体 i 可以利用 $2M_i$ 步内的状态来得到平均系统. 注意到, 总的解决时间由 1) 迭代数目和 2) 每次迭代的时间来决定. 因此, 使用者选择合适的算法时, 应该考虑到: 1) 通信代价和收敛时间之间的权衡; 和 2) 系统的特点, 如通信网络设置和容量、每个传感器的计算能力等. $\hat{\mathbf{x}}_{k,L}^i$ 和 $P_{k,L}^i$ 为有限时间一致算法得到的平均值.

关于系统模型 (6) 和测量输出 (7), 为了方便分析 FCUKF 的稳定性, 这里使用和文献 [25] 相似的证明技术. 因此, 对于每个滤波器节点, 计算其伪系统矩阵 \mathcal{F}_{k-1}^i 和伪测量矩阵 \mathcal{H}_k^i . 这里, \mathcal{H}_k^i 可由下式得到:

$$\mathcal{H}_k^i = (P_{\mathbf{x}_k \mathbf{z}_k}^i)^{\text{T}} (P_{k|k-1}^i)^{-1}$$

而矩阵 \mathcal{F}_{k-1}^i 可以由

$$\mathcal{F}_{k-1}^i = (P_{\mathbf{x}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}}^i)^{\text{T}} (P_{k-1}^i)^{-1}$$

来近似, 其中, 矩阵 $P_{\mathbf{x}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}}^i$ 表示估计值与预测值

之间的互协方差矩阵

$$P_{\mathbf{x}_{k-1}\mathbf{x}_{k|k-1}}^i = \sum_{s=0}^{2n} W^s (\mathbf{x}_{k-1}^{i,s} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^i) \times (\mathbf{x}_{k|k-1}^{i,s} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i)^T$$

同时, 根据文献 [32] 中的方法, 这里引入两个对角矩阵 $\alpha_k^i = \text{diag}\{\alpha_{k,1}^i, \alpha_{k,2}^i, \dots, \alpha_{k,n}^i\}$ 和 $\beta_k^i = \text{diag}\{\beta_{k,1}^i, \beta_{k,2}^i, \dots, \beta_{k,m}^i\}$ 分别来中心化近似误差. 借此, 方程 (6) 和 (7) 可以重写为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \alpha_k^i \mathcal{F}_k^i \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (10)$$

$$\mathbf{z}_k^i = \beta_k^i \mathcal{H}_k^i \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

利用这些方程, 修正后的误差协方差、更新误差协方差和 UKF 增益矩阵可以表示为

$$P_{k|k-1}^i = \alpha_{k-1}^i \mathcal{F}_{k-1}^i P_{k-1}^i (\alpha_{k-1}^i \mathcal{F}_{k-1}^i)^T + Q_{k-1} \quad (12)$$

$$P_k^i = (I - K_k^i \beta_k^i \mathcal{H}_k^i) P_{k|k-1}^i \quad (13)$$

$$K_k^i = P_{k|k-1}^i (\beta_k^i \mathcal{H}_k^i)^T [\beta_k^i \mathcal{H}_k^i P_{k|k-1}^i (\beta_k^i \mathcal{H}_k^i)^T + R_k^i]^{-1} \quad (14)$$

为了证明滤波器的稳定性, 这里引入随机稳定性引理.

引理 1. (随机稳定性引理^[25]) 假定 $\boldsymbol{\xi}_k$ 是一个随机过程, 如果存在一个与其相关的随机过程 $V(\boldsymbol{\xi}_k)$ 和实数 $\nu_{\min}, \nu_{\max} > 0, \mu > 0, 0 < \lambda \leq 1$, 对任意的时刻 k , 满足:

$$\nu_{\min} \|\boldsymbol{\xi}_k\|^2 \leq V(\boldsymbol{\xi}_k) \leq \nu_{\max} \|\boldsymbol{\xi}_k\|^2$$

$$\mathbb{E}\{V(\boldsymbol{\xi}_k) | \boldsymbol{\xi}_{k-1}\} - V(\boldsymbol{\xi}_{k-1}) \leq \mu - \lambda V(\boldsymbol{\xi}_{k-1})$$

则该随机过程在均方意义下指数有界, 即

$$\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{\xi}_k\|^2\} \leq \frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}} \mathbb{E}\{\|\boldsymbol{\xi}_0\|^2\} (1-\lambda)^k + \frac{\mu}{\nu_{\min}} \sum_{i=1}^{k-1} (1-\lambda)^i \quad (15)$$

并且该随机过程以概率 1 有界.

有了这些基础, 这里对文中算法 1 的稳定性进行说明.

定理 1. 考虑由状态方程 (6) 和测量输出 (7) 给定的非线性随机系统, 对于算法 1, 如果下述假设条件成立

1) 存在实数 $\underline{\alpha}, \underline{f}, \underline{\beta}, \underline{h} \neq 0$ 和 $\bar{\alpha}, \bar{f}, \bar{\beta}, \bar{h} \neq 0$, 对任意的时刻 $k \geq 0$, 有关矩阵的界满足:

$$\underline{\alpha}^2 I \leq \alpha_k^i (\alpha_k^i)^T \leq \bar{\alpha}^2 I, \quad \underline{f}^2 I \leq \mathcal{F}_k^i (\mathcal{F}_k^i)^T \leq \bar{f}^2 I$$

$$\underline{\beta}^2 I \leq \beta_k^i (\beta_k^i)^T \leq \bar{\beta}^2 I, \quad \underline{h}^2 I \leq \mathcal{H}_k^i (\mathcal{H}_k^i)^T \leq \bar{h}^2 I$$

2) 存在正实数 $\underline{q}, \bar{q} > 0, \underline{r}, \bar{r} > 0$, 和 $\underline{p}, \bar{p} > 0$, 对任意的时刻 $k \geq 0$, 有下述不等式成立:

$$\underline{q}I \leq Q_k \leq \bar{q}I, \quad \underline{r}I \leq R_k^i \leq \bar{r}I, \quad \underline{p}I \leq P_k^i \leq \bar{p}I$$

3) 参数 ϵ 满足平均一致算法中的收敛条件.

那么, 对任意的 $i \in \mathcal{V}$, 其估计误差 $\mathbf{e}_{k+1}^i = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^i$ 在均方意义下指数有界.

证明. 设第 i 个传感器节点的预测误差和估计误差分别为 $\mathbf{e}_{k+1|k}^i = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^i$ 和 $\mathbf{e}_k^i = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^i$, 并记总的误差为 $\mathbf{e}_{k+1|k} = \text{col}(\mathbf{e}_{k+1|k}^i, i \in \mathcal{V})$, $\mathbf{e}_k = \text{col}(\mathbf{e}_k^i, i \in \mathcal{V})$.

根据文献 [27] 中的定理 1 可知, 算法 1 的步骤 4 中的 $\hat{\mathbf{x}}_{k,L}^i = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{V}} \hat{\mathbf{x}}_k^j$ 且 $P_{k,L}^i = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{V}} P_k^j$.

考虑下述的随机过程:

$$V(\mathbf{e}_{k+1|k}) = \sum_{i \in \mathcal{V}} (\mathbf{e}_{k+1|k}^i)^T (P_{k+1|k}^i)^{-1} \mathbf{e}_{k+1|k}^i \quad (16)$$

根据定理 1 的条件和方程 (12), 可知

$$(\bar{p}\bar{\alpha}^2\bar{f}^2 + \bar{q})^{-1}I \leq (P_{k+1|k}^i)^{-1} \leq (\underline{p}\underline{\alpha}^2\underline{f}^2 + \underline{q})^{-1}I$$

从而, 方程 (16) 满足:

$$\frac{\|\mathbf{e}_{k+1|k}\|^2}{\bar{p}\bar{\alpha}^2\bar{f}^2 + \bar{q}} \leq V(\mathbf{e}_{k+1|k}) \leq \frac{\|\mathbf{e}_{k+1|k}\|^2}{\underline{p}\underline{\alpha}^2\underline{f}^2 + \underline{q}}$$

根据有限时间一致性算法可知

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1|k}^i &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^i = \\ &= \alpha_k^i \mathcal{F}_k^i (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^i) + \mathbf{w}_k = \\ &= \alpha_k^i \mathcal{F}_k^i \left(\frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{V}} \mathbf{x}_k - \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{V}} \hat{\mathbf{x}}_k^j \right) + \mathbf{w}_k = \\ &= \sum_{j \in \mathcal{V}} \Gamma_k^{i,j} \mathbf{e}_{k|k-1}^j + \sum_{j \in \mathcal{V}} \Xi_k^{i,j} \mathbf{v}_k^j + \mathbf{w}_k \end{aligned}$$

其中, $\Gamma_k^{i,j} = \frac{1}{N} \alpha_k^i \mathcal{F}_k^i (I - K_k^j \beta_k^j \mathcal{H}_k^j)$ 和 $\Xi_k^{i,j} = -\frac{1}{N} \alpha_k^i \mathcal{F}_k^i K_k^j$. 接下来, 将上式代入式 (16), 易得:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{V(\mathbf{e}_{k+1|k}) | \mathbf{e}_{k|k-1}\} &= \\ \mathbb{E}\left\{ \sum_{i \in \mathcal{V}} (\mathbf{e}_{k+1|k}^i)^T (P_{k+1|k}^i)^{-1} \mathbf{e}_{k+1|k}^i \middle| \mathbf{e}_{k|k-1} \right\} &= \\ \Phi_{k+1}^x + \Phi_{k+1}^v + \Phi_{k+1}^w & \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1}^x &= \mathbb{E}\left\{ \sum_{i \in \mathcal{V}} \left(\sum_{j \in \mathcal{N}} \Gamma_k^{i,j} \mathbf{e}_{k|k-1}^j \right)^T (P_{k+1|k}^i)^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{j \in \mathcal{V}} \Gamma_k^{i,j} \mathbf{e}_{k|k-1}^j \right) \middle| \mathbf{e}_{k|k-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\Phi_{k+1}^v = \mathbb{E} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{V}} \left(\sum_{j \in \mathcal{V}} \Xi_k^{i,j} \mathbf{v}_k^j \right)^T (P_{k+1|k}^i)^{-1} \times \right. \\ \left. \left(\sum_{j \in \mathcal{V}} \Xi_k^{i,j} \mathbf{v}_k^j \right) \middle| \mathbf{e}_{k|k-1} \right\}$$

$$\Phi_{k+1}^w = \mathbb{E} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{V}} \mathbf{w}_k^T (P_{k+1|k}^i)^{-1} \mathbf{w}_k \middle| \mathbf{e}_{k|k-1} \right\}$$

下面, 对文献 [23] 中的分析方法进行适当变化后, 容易得到无噪音的项 Φ_{k+1}^x 满足:

$$\Phi_{k+1}^x \leq (1 - \lambda) \mathbb{E} \left\{ V(\mathbf{e}_{k|k-1}) \right\}$$

含有噪音的项 $\Phi_{k+1}^v + \Phi_{k+1}^w$ 满足:

$$\Phi_{k+1}^v + \Phi_{k+1}^w \leq \\ (\underline{p}\alpha^2 \underline{f}^2 + \underline{q})^{-1} (\bar{\alpha}^2 \bar{f}^2 \bar{k}^2 m + \bar{q} N n) = \mu$$

由上述计算, 可以得到:

$$\mathbb{E} \{ V_{k+1}(\mathbf{e}_{k+1|k}) | \mathbf{e}_{k|k-1} \} - V_k(\mathbf{e}_{k|k-1}) \leq \\ \mu - \lambda V_k(\mathbf{e}_{k|k-1})$$

因此, 根据引理 1, 随机过程 $\mathbf{e}_{k+1|k}$ 在均方意义下为指数有界的, 这就意味着 $\mathbf{e}_{k+1|k}^i$ 在均方意义下也是指数有界的。

下来, 我们将证明随机过程 \mathbf{e}_{k+1}^i 为均方意义下是有界的. 根据上述证明过程可知:

$$\mathbf{e}_{k+1|k}^i = \alpha_k^i \mathcal{F}_k^i(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^i) + \mathbf{w}_k$$

对上式两边取期望, 可得

$$\mathbb{E} \{ \|\mathbf{e}_k^i\|^2 \} \leq \underline{\alpha}^{-2} \underline{f}^{-2} \left(\mathbb{E} \{ \|\mathbf{e}_{k+1|k}^i\|^2 \} - \mathbb{E} \{ \|\mathbf{w}_k\|^2 \} \right)$$

同样的道理, \mathbf{w}_k 也是均方意义下指数有界的. 因此, 我们可以得出: 估计误差 \mathbf{e}_{k+1}^i 为均方意义下指数有界的. \square

注 2. 定理 1 在证明滤波算法 1 的稳定性时, 利用的是统计线性化模型 (10) 和 (11), 该统计线性化技术^[20-21] 在文献 [23] 证明渐近平均一致无迹 Kalman 滤波器时已有使用. 对于一般的非线性系统, 定理 1 前提条件中的参数在证明滤波器稳定性时才会涉及, 而滤波器算法 1 的运行除参数 ϵ 外与定理 1 前提条件中的其他参数无关. 如果系统模型已知, 这些参数可利用文献 [23, 32] 中的方法来分析得到. 对于实际问题, 一般这些参数都是满足的, 可以直接运行滤波算法. 关于拓扑结构动态变化的无线传感器网络, 分两种情况来说明: 1) 如果在一个拓扑结构的保持时间内可以得到有限时间一致, 则算法 1 可以在该拓扑结构上运行, 同时定理 1 前提

条件中的参数仍然适用; 2) 如果拓扑结构变化较快, 在一个拓扑结构的保持时间内不足以得到有限时间一致, 则算法 1 在这些拓扑结构上难以运行. 因为切换拓扑时, 离散系统有限时间一致协议尚不清楚.

2.2 有向通信时分布式 UKF

上一节中设计的分布式 UKF 算法考虑的通信拓扑为无向图, 核心思想是利用存储数据来构造降秩的 Hankel 矩阵, 并利用该 Hankel 矩阵的核来实现一致值的分布计算. 而对于有向通信拓扑情形, 上述算法不再适用. 此时我们可以借助比率一致的方法来设计出强连通情形下的分布式有限时间一致 UKF 算法 2. 在该算法中, 符号 $a_i[\ell]$ 和 $b_i[\ell]$ 表示迭代式 (17) 和迭代式 (18) 的第 ℓ 次值, L 是保证可以得到最终一致值的常数; a_i 是一个抽象记号, 用来表示 N 个传感器节点对应估计值和误差协方差矩阵中的元素. $\mathbf{a}[0] = \mathbf{a}_0$ 和 $\mathbf{b}[0]$ 是传感器初始值构成的向量.

算法 2. 有向图中的有限时间一致 UKF

步骤 1和**步骤 2.** 同算法 1 中的步骤 1 和步骤 2.

步骤 3. 设 $\hat{\mathbf{x}}_{k,0}^i = \hat{\mathbf{x}}_k^i$, $P_{k,0}^i = P_k^i$. 对 $\ell = 0, 1, \dots, L$, $\hat{\mathbf{x}}_{k,0}^i$ 和 $P_{k,0}^i$ 中的每个元素运行下述有限时间一致性算法:

1) 运行下述比率一致算法

$$a_i[\ell + 1] = w_{ii} a_i[\ell] + \sum_{v_j \in \mathcal{N}_i^{\text{in}}} w_{ij} a_j[\ell] \quad (17)$$

$$b_i[\ell + 1] = w_{ii} b_i[\ell] + \sum_{v_j \in \mathcal{N}_i^{\text{in}}} w_{ij} b_j[\ell] \quad (18)$$

其中, $\mathbf{a}[0] = [a_0(1), a_0(2), \dots, a_0(|\mathcal{V}|)]^T$ 和 $\mathbf{b}[0] = [b_0(1), b_0(2), \dots, b_0(|\mathcal{V}|)]^T = \mathbf{1}$.

2) 对每一次迭代, $c_i[\ell] = \frac{a_i[\ell]}{b_i[\ell]}$, 保存分别由 $c_i[\ell]$ 的连续值之差构成的向量 $\bar{\mathbf{c}}_{M_i}^T$, 利用 $\bar{\mathbf{c}}_{M_i}^T$ 构造 Hankel 矩阵, 增加方形 Hankel 矩阵的维数 ℓ 直到其开始降秩为止.

3) 计算首次降秩 Hankel 矩阵的核 $\beta_j = (\beta_0, \dots, \beta_{M_j-1}, 1)^T$, 并计算平均一致值

$$\mu_j = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{a_j(h)}{b_j(h)} = \frac{\mathbf{a}_{M_j}^T \beta_j}{\mathbf{b}_{M_j}^T \beta_j}$$

其中, $\mathbf{a}_{M_i}^T = [a_i(0), a_i(1), \dots, a_i(M_i - 1)]$, $\mathbf{b}_{M_i}^T = [b_i(0), b_i(1), \dots, b_i(M_i - 1)]$. 根据上述计算, 可以得到 $\hat{\mathbf{x}}_k^i$ 和 P_k^i 中每个分量的均值.

步骤 4. 由步骤 3 来计算状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k^i$ 和误差协方差矩阵 P_k^i .

与滤波算法 1 相似, 这里给出滤波算法 2 的稳定性结论.

定理 2. 考虑由状态方程 (6) 和测量输出 (7) 给定的非线性随机系统, 对于算法 2, 如果定理 1 中的假设条件 1) 和条件 2) 满足, 并且矩阵 W 为列随机本原矩阵. 那么, 对任意的 $i \in \mathcal{V}$, 其估计误差 $\mathbf{e}_{k+1}^i = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^i$ 在均方意义下指数有界.

证明. 算法 2 的估计误差在均方意义下指数有界的证明方法与定理 1 相似, 其中不同的部分为一致性协议运行方式. 根据比率一致性协议的初始条件和文献 [28] 中的定理 1 可知, 算法 2 中第 4) 步的 $\hat{\mathbf{x}}_k^i = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{V}} \hat{\mathbf{x}}_k^j$ 且 $P_k^i = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{V}} P_k^j$. 对定理 1 中的证明过程进行简单调整, 即为该定理的证明. \square

3 仿真例子

本节给出例子通过比较来验证所提滤波算法 1 和算法 2 的性能. 根据文中构造算法的思路可知, 算法 1 和算法 2 分别用来处理无向通信拓扑和有向通信拓扑, 这两个算法理论上都可以跟踪目标状态, 这里用 FCUKF1 和 FCUKF2 来分别表示算法 1 和算法 2. 考虑由 6 个传感器进行测量运动目标的模型, 示意图为图 1. 该图左边为无向连通图, 右边为有向强连通图.

此时考虑二维平面 $x-y$ 内的一个运动的质点 M , 该质点在某时刻 k 的位置、速度和加速度组成状态向量, 用 $\mathbf{x}_k = [x_k^1 \ x_k^2 \ x_k^3 \ x_k^4 \ x_k^5 \ x_k^6]^T$ 来表示. 其中, x_k^1, x_k^3, x_k^5 分别表示水平方向的位置、速度、加速度; x_k^2, x_k^4, x_k^6 分别表示垂直方向的位置、速度、加速度. 假设该质点 M 在水平方向和垂直方向做近似匀加速直线运动. 两个方向上都具有加性系统噪声 \mathbf{w}_k , 则在 Cartesian 坐标系下该质点的运动状态方程为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T & 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (19)$$

假设坐标位置为 (x_0, y_0) 的雷达对质点 M 进行跟踪, 则可以得到雷达和质点 M 之间的距离 r_k 和质点 M 相对于雷达的角度 φ_k , 实际测量中雷达具有加性测量噪声 \mathbf{v}_k , 在以雷达为中心的坐标系下,

第 i ($i = 1, 2, \dots, 6$) 个雷达的观测方程为

$$\mathbf{z}_k^i = \begin{bmatrix} r_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_r(k) \\ v_\varphi(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_k^1 - x_0)^2 + (x_k^2 - y_0)^2} \\ \arctan\left(\frac{x_k^2 - y_0}{x_k^1 - x_0}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_r(k) \\ v_\varphi(k) \end{bmatrix}$$

其中, x_k^1 和 x_k^2 分别表示质点的坐标位置.

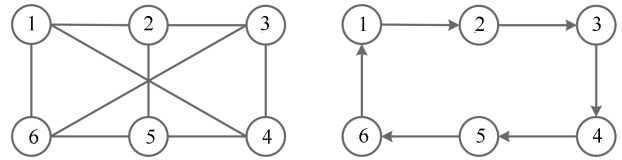


图 1 6 个传感器构成的无向与有向通信图

Fig. 1 Undirected and directed communication topologies of 6 sensors

仿真环境中, 采样时间取为 $T = 0.5$ s. 假设系统噪声 \mathbf{w}_k 的协方差矩阵 Q_k 和测量噪声 \mathbf{v}_k 的协方差矩阵 R_k 分别为

$$Q_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$R_k = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0.01^2 \end{bmatrix}$$

初始状态 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 和初始协方差 P_0 取为 $\hat{\mathbf{x}}_0 = [1000 \ 5000 \ 10 \ 50 \ 2 \ -4]^T$, $P_0 = \text{diag}\{100, 100, 1, 1, 0.1, 0.1\}$. 这里, 我们用算法 1 和算法 2 分别与赋权平均一致无迹 Kalman 滤波器^[23] (Weighted average consensus unscented Kalman filter, WACUKF) 进行比较, 算法 WACUKF 中的权值取为 Metropolis 权, 一致性迭代步长分别取为 36 和 25.

图 2 是无向传感器网络估计目标状态时与集中式无迹 Kalman 滤波器估计值的平均偏差. 算法 FCUKF1 运行的最大有限时间一致的步数为 36, 与一致性迭代步长为 36 的算法 WACUKF 进行比较. 图 2 可以看出, 算法 FCUKF1 和算法 WACUKF 都可以实现与集中式无迹 Kalman 滤波器相似的跟踪效果. 当算法 WACUKF 的一致性迭代步长取为算法 FCUKF1 的最大一致步时, 从图 2 上反映了算

法 WACUKF 是对集中式无迹 Kalman 滤波器的一种近似, 而算法 FCUKF1 是精确实现。

图 3 是有向强连通传感器网络估计目标状态时的均方估计误差的平均值. 仿真环境中, 进行 200 次重复实验, 算法 FCUKF2 运行的最大有限时间一致的步数为 12. 从图 3 可以看出, 算法 FCUKF2 是经过增加节点自身计算量来减小节点之间的通信次数, 进而实现与算法 WACUKF 相似的跟踪效果。

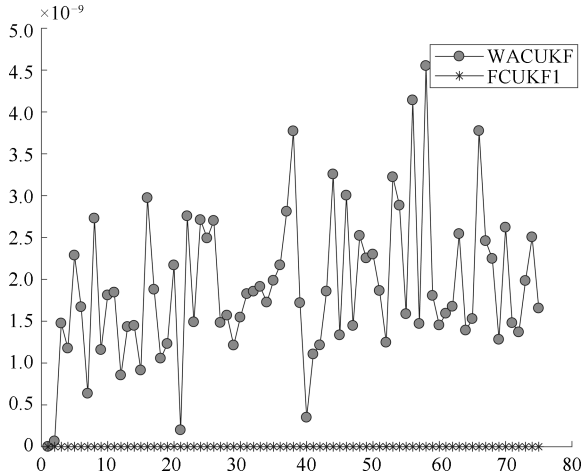


图 2 6 个节点的平均跟踪偏差

Fig. 2 The average tracking deviation of 6 sensors

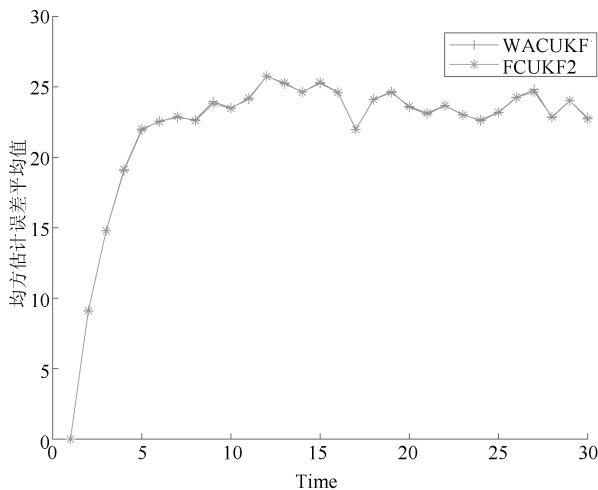


图 3 6 个节点均方估计误差的平均值

Fig. 3 The mean value of 6 sensors' mean square estimation error

4 结论

本文研究了非线性随机系统的分布式无迹 Kalman 滤波器的设计问题, 主要包含了两个方面的内容. 对于无向连通的拓扑结构, 各传感器节点利用自身的存储数据集构造 Hankel 矩阵, 并利用该矩阵的核来得到估计值和误差协方差矩阵的平均值, 这个平均值可以经过有限步得到. 文中借助随机稳

定性引理证明了 FCUKF 的稳定性. 对于有向的通信拓扑, FCUKF 中的一致方法不再适用, 此时引入另一个具有特殊初始值的过程, 通过比率一致的协议得到所需的平均值。

References

- 1 Tian Y, Chen Z, Yin F L. Distributed IMM-unscented Kalman filter for speaker tracking in microphone array networks. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2015, **23**(10): 1637–1647
- 2 Singh A K, Pal B C. Decentralized dynamic state estimation in power systems using unscented transformation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2014, **29**(2): 794–804
- 3 Qing X Y, Karimi H R, Niu Y G, et al. Decentralized unscented Kalman filter based on a consensus algorithm for multi-area dynamic state estimation in power systems. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2015, **65**: 26–33
- 4 Li W L, Jia Y M. Consensus-based distributed multiple model UKF for jump Markov nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(1): 230–236
- 5 Battistelli G, Chisci L, Mugnai G, et al. Consensus-based linear and nonlinear filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(5): 1410–1415
- 6 Yuan Y, Shi L, Liu J, et al. Distributed Kalman filtering with minimum-time consensus algorithm [EB/OL]. arXiv: 1703.05438v1 [cs.SY], March 16, 2017.
- 7 Li W L, Jia Y M. Distributed estimation for Markov jump systems via diffusion strategies. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2017, **53**(1): 448–460
- 8 Olfati-Saber R, Murray R. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520–1533
- 9 Gu D B, Sun J X, Hu Z, et al. Consensus based distributed particle filter in sensor networks. In: Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Information and Automation. Zhangjiajie, China, 2008. 302–307
- 10 Liu P, Tian Y P, Zhang Y. Distributed Kalman filtering with finite-time max-consensus protocol. *IEEE Access*, 2018, **6**: 10795–10802
- 11 Battistelli G, Chisci L. Stability of consensus extended Kalman filtering for distributed state estimation. *Automatica*, 2016, **68**: 169–178
- 12 Ren W, Al-Saggaf U M. Distributed Kalman-Bucy filter with embedded dynamic averaging algorithm. *IEEE Systems Journal*, 2018, **12**(2): 1722–1730
- 13 Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 2004, **92**(3): 401–422
- 14 Gustafsson F, Hendeby G. Some relations between extended and unscented Kalman filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(2): 545–555
- 15 Chang L B, Hu B Q, Li A, et al. Transformed unscented Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(1): 252–257

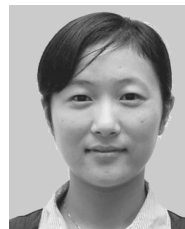
- 16 Menegaz H M T, Ishihara J Y, Borges G A. New minimum sigma set for unscented filtering. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, **25**(7): 3286–3298
- 17 Menegaz H M T, Ishihara J Y, Borges G A, et al. A systematization of the unscented Kalman filter theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(10): 2583–2598
- 18 Dunik J, Simandl M, Straka O. Unscented Kalman filter: Aspects and adaptive setting of scaling parameter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(9): 2411–2416
- 19 Straka O, Dunik J, Simandl M. Unscented Kalman filter with advanced adaptation of scaling parameter. *Automatica*, 2014, **50**(10): 2657–2664
- 20 Vercauteren T, Wang X D. Decentralized sigma-point information filters for target tracking in collaborative sensor networks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, **53**(8): 2997–3009
- 21 Lee D J. Nonlinear estimation and multiple sensor fusion using unscented information filtering. *IEEE Signal Processing Letters*, 2008, **15**: 861–864
- 22 Liu G L, Worgotter F, Markelic I. Square-root sigma-point information filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(11): 2945–2950
- 23 Li W Y, Wei G L, Han F, et al. Weighted average consensus-based unscented Kalman filtering. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, **46**(2): 558–567
- 24 Liu G L, Tian G H. Square-root sigma-point information consensus filters for distributed nonlinear estimation. *Sensors*, 2017, **17**(4): 800
- 25 Reif K, Gunther S, Yaz E, et al. Stochastic stability of the discrete-time extended Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(4): 714–728
- 26 Li L, Xia Y Q. Stochastic stability of the unscented Kalman filter with intermittent observations. *Automatica*, 2012, **48**(5): 978–981
- 27 Yuan Y, Stan G B, Shi L, et al. Decentralised minimum-time consensus. *Automatica*, 2013, **49**(5): 1227–1235
- 28 Charalambous T, Yuan Y, Yang T, et al. Distributed finite-time average consensus in digraphs in the presence of time-delays. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2015, **2**(4): 370–381
- 29 Yang T, Wu D, Sun Y N, et al. Minimum-time consensus-based approach for power system applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, **63**(2): 1318–1328
- 30 Xiao L, Boyd S. Fast linear iterations for distributed averaging. *Systems & Control Letters*, 2004, **53**: 65–78
- 31 Horn R, Johnson C. *Matrix Analysis*. New York: Cambridge University Press, 1985
- 32 Xiong K, Zhang H Y, Chan C W. Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering. *Automatica*, 2006, **42**(2): 261–270



刘鹏 东南大学自动化学院博士研究生。2006 年获得河南工业大学理学院学士学位, 2011 年获得温州大学数学与信息科学学院硕士学位。主要研究方向为多智能体系统, 结构系统, 分布式估计。
E-mail: PengLiu_SEU@163.com
(LIU Peng Ph.D. candidate at the School of Automation, Southeast University. He received his bachelor degree from the College of Science, Henan University of Technology in 2006, and his master degree from the School of Mathematics and Information Science, Wenzhou University in 2011. His research interest covers the multi-agent systems, structural systems, and distributed estimate.)



田玉平 东南大学自动化学院教授。主要研究方向为多智能体系统, 通信网络中的优化与控制。本文通信作者。
E-mail: yptian@seu.edu.cn
(TIAN Yu-Ping Professor at the School of Automation, Southeast University. His research interest covers the multi-agent systems and optimization and control in communication networks. Corresponding author of this paper.)



张亚 东南大学自动化学院副教授。主要研究方向为多智能体系统, 分布式滤波理论。E-mail: yazhang@seu.edu.cn
(ZHANG Ya Associate professor at the School of Automation, Southeast University. Her research interest covers the multi-agent systems and distributed filtering theory.)