

# 补偿信号法驱动的 Pendubot 自适应平衡控制

魏萃<sup>1</sup> 柴天佑<sup>1,2</sup> 贾瑶<sup>1</sup> 王良勇<sup>1</sup>

**摘要** Pendubot 是以电机转矩为输入, 主动臂角度和欠驱动臂角度为输出的强非线性、多变量、欠驱动机械系统, 受到具有时变不确定性的摩擦影响, 且模型参数随摆臂质量与长度的改变而变化. 本文将上述被控对象采用确定线性模型与未知高阶非线性项来描述, 设计消除前一时间高阶非线性项及其变化率对系统输出影响的补偿器, 叠加于基于确定线性模型设计的 PD 控制器, 提出了补偿信号法驱动的自适应平衡控制方法, 并对所提方法进行了稳定性和收敛性分析. 仿真和物理对比实验表明, 当 Pendubot 系统模型参数改变时, 所提控制算法可以有效地消除摩擦的影响, 将两摆臂输出角度稳定在目标位置.

**关键词** 补偿信号驱动, 高阶非线性项补偿, 一步最优 PD 控制, Pendubot, 摩擦补偿

**引用格式** 魏萃, 柴天佑, 贾瑶, 王良勇. 补偿信号法驱动的 Pendubot 自适应平衡控制. 自动化学报, 2019, 45(6): 1146–1156

**DOI** 10.16383/j.aas.2018.c170583

## Compensation Signal Driven Adaptive Balance Control of the Pendubot

WEI Cui<sup>1</sup> CHAI Tian-You<sup>1,2</sup> JIA Yao<sup>1</sup> WANG Liang-Yong<sup>1</sup>

**Abstract** The Pendubot system is a strong nonlinear multivariable underactuated mechanical system with the motor torque as the input, angles of the actuated link and the underactuated link as outputs. The model parameters, such as the length of the link, the center of mass, change with the system mechanical structure. Moreover, the system is influenced by the friction, which is uncertain, nonlinear and time varying. In this paper, a novel compensation signal driven adaptive controller is developed by representing the controlled object as the combination of a determinate low-order linear model and unknown high-order nonlinear terms. In the proposed controller design, two compensation signals are constructed and added onto the control signal obtained from the linear deterministic model based PD control design. Such two compensation signals aim at eliminating the effects of the previous sample high-order nonlinearity and its changing rate, respectively. The performance analysis of the algorithm is given, and simulations and physical experiments are carried out, where it has been shown that the two output angles of the Pendubot can be stabilized at their targeted positions when the system is subjected to unknown variations of its parameters.

**Key words** Compensation signal driven, high-order nonlinearity compensation, one-step optimal PD control, Pendubot, friction compensation

**Citation** Wei Cui, Chai Tian-You, Jia Yao, Wang Liang-Yong. Compensation signal driven adaptive balance control of the Pendubot. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(6): 1146–1156

欠驱动系统是独立控制量数目少于系统自由度的一类系统<sup>[1]</sup>. 由于驱动器数目减少, 使得整个系统具有体积小、重量轻、成本低等优点, 广泛应用于无人艇<sup>[2]</sup>、舰艇<sup>[3]</sup>、移动机器人<sup>[4]</sup>和吊车<sup>[5]</sup>等领域. 由于欠驱动系统输出个数多于输入个数, 且动态模型具有强非线性, 其中, 摩擦是与系统输出的变化率相

关的时变非线性、机理不清、难以用数学模型描述的复杂物理现象, 动态特性具有很强的不确定性<sup>[6]</sup>, 因此, 欠驱动系统的控制问题一直是非线性控制领域的研究热点.

Pendubot 是一个两自由度欠驱动平面机器人, 肩关节由电机直接驱动, 肘关节是无源的<sup>[7]</sup>, 是一个典型的欠驱动机械系统. 针对其平衡控制, 文献 [7] 采用线性二次型调节器 (Linear quadratic regulator, LQR) 和极点配置技术实现了垂直倒立位置的平衡控制; 文献 [8] 提出一种状态相关黎卡提方程 (State-dependent Riccati equation, SDRE) 控制方法, 在线获得控制增益; 文献 [9] 提出一种混杂控制策略; 文献 [10] 提出一种降阶的输出反馈控制器. 上述方法要求 Pendubot 系统可用精确数学模型描述.

对于参数定常未知的 Pendubot 系统, 文献 [11] 提出一种模糊 PI + PD 控制方法; 文献 [12] 提出一

收稿日期 2017-10-17 录用日期 2018-02-26  
Manuscript received October 17, 2017; accepted February 26, 2018

国家自然科学基金 (61673095, 61773107, 61890923, 61890924) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61673095, 61773107, 61890923, 61890924)

本文责任编辑 梅生伟  
Recommended by Associate Editor MEI Sheng-Wei

1. 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室 沈阳 110819 2. 国家冶金自动化工程技术研究中心 沈阳 110819

1. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110819 2. National Engineering Research Center of Metallurgy Automation, Shenyang 110819

种自适应分层滑模控制方法, 增强了系统鲁棒性; 文献 [13] 提出一种基于 T-S 模糊结构和线性调节理论的平衡控制策略. 然而, 上述控制方法均没有考虑摩擦对系统的影响.

摩擦常常导致系统存在稳态误差甚至振荡<sup>[14]</sup>, 为提高控制系统性能, 文献 [15] 基于一种简化的近似摩擦模型设计非线性扰动观测器, 将摩擦的估计值作为扰动补偿项, 叠加于基于一阶泰勒级数展开线性化模型设计的 LQR 控制器, 提出一种带有非线性扰动观测器的鲁棒平衡控制方法. 该控制方法要求被控对象模型精确已知, 而且假设摩擦模型关于原点对称且连续可微, 实际运行中的欠驱动系统如塔吊<sup>[16]</sup>, 在运行过程中负载质量与臂的长度发生变化, 导致模型参数发生变化, 使得采用参数已知或定常未知的欠驱动系统的控制方法不能将主动臂与欠驱动臂稳定的控制在平衡位置上, 甚至导致波动, 从而引起摩擦力矩变化, 进而又引起系统波动甚至振荡, 此时文献 [15] 方法难以取得理想的控制效果.

本文针对动态特性发生变化的 Pendubot 系统, 将动态特性变化用已知的前一时刻高阶非线性项及其变化率描述, 设计了对前一时刻高阶非线性项及其变化率的补偿器, 叠加于基于确定线性模型设计的 PD 控制器, 提出了补偿信号法驱动的 Pendubot 自适应平衡控制算法, 理论分析与仿真及物理实验结果表明了所提算法的有效性.

## 1 控制问题描述

### 1.1 Pendubot 系统动态模型

Pendubot 系统结构示意图, 如图 1 所示. 其中,  $m_1$ 、 $m_2$  分别为主动臂和欠驱动臂的质量;  $y_1$  为主动臂相对于水平方向的角度;  $y_2$  为欠驱动臂相对于主动臂的角度;  $l_1$  为主动臂的长度;  $l_{c1}$ 、 $l_{c2}$  分别为主动臂和欠驱动臂相对于连接点到质心的距离;  $I_1$ 、 $I_2$

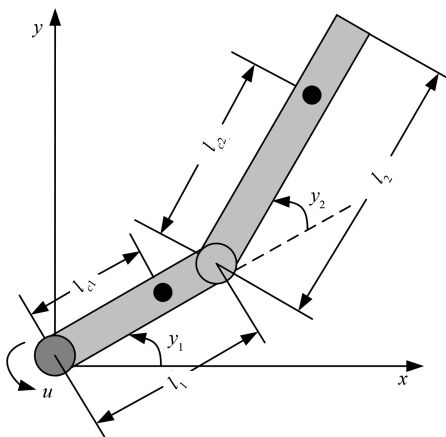


图 1 Pendubot 系统示意图

Fig.1 Diagram of the Pendubot

分别为主动臂和欠驱动臂相对于质心的转动惯量.

基于拉格朗日方程建立 Pendubot 动力学模型<sup>[15]</sup>为:

$$D(\mathbf{y})\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{G}(\mathbf{y}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{U} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T \in \mathbf{R}^2$  为两摆臂输出角度矢量;  $\dot{\mathbf{y}} = [\dot{y}_1 \ \dot{y}_2]^T \in \mathbf{R}^2$  为两摆臂输出角速度矢量;  $\mathbf{U} = [u \ 0]^T \in \mathbf{R}^2$  为系统控制输入转矩矢量;  $D(\mathbf{y}) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$  为对称正定的惯量矩阵;  $\mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \in \mathbf{R}^2$  为向心力和科里奥利力矩矢量;  $\mathbf{G}(\mathbf{y}) \in \mathbf{R}^2$  为重力矩矢量;  $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{y}}) \in \mathbf{R}^2$  为摩擦力矩矢量. 各系数矩阵定义如下:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos y_2 & \theta_2 + \theta_3 \cos y_2 \\ \theta_2 + \theta_3 \cos y_2 & \theta_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta_3 \sin y_2 \dot{y}_2 & -\theta_3 \sin y_2 \dot{y}_2 - \theta_3 \sin y_2 \dot{y}_1 \\ \theta_3 \sin y_2 \dot{y}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}(\mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos y_1 + \theta_5 g \cos(y_1 + y_2) \\ \theta_5 g \cos(y_1 + y_2) \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}(\dot{\mathbf{y}}) &= \begin{bmatrix} f_1(\dot{y}_1) \\ f_2(\dot{y}_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

其中,

$$\begin{cases} \theta_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ \theta_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ \theta_3 = m_2 l_1 l_{c2} \\ \theta_4 = m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \\ \theta_5 = m_2 l_{c2} \end{cases} \quad (3)$$

由式 (1)~(3) 知, 摆臂的质量、长度、质心位置及转动惯量的变化将会导致参数  $\theta_1 \sim \theta_5$  变化, 从而使得  $D(\mathbf{y})$ 、 $\mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ 、 $\mathbf{G}(\mathbf{y})$  发生变化.

### 1.2 控制目标

针对被控对象 (1)~(3), 设计以电机转矩  $u$  为输入、以主动臂角度  $y_1$  和欠驱动臂角度  $y_2$  为输出的平衡控制器, 当  $l_{c1}$ 、 $l_{c2}$  变化的情况下, 使得两摆

臂能够尽快地稳定在目标位置, 即

$$\begin{cases} |y_1(t) - y_{1sp}| \leq \varepsilon_1 \\ |y_2(t) - y_{2sp}| \leq \varepsilon_2 \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $y_{1sp} = 90^\circ$ 、 $y_{2sp} = 0^\circ$  分别为主动臂角度和欠驱动臂输出角度的设定值;  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  分别为主动臂角度和欠驱动臂角度跟踪误差的上限值。

当 Pendubot 系统的质心位置  $l_{c1}$ 、 $l_{c2}$  发生变化时, 导致  $\theta_1 \sim \theta_5$  发生变化, 此时, 文献 [15] 方法难以将主动臂和欠驱动臂角度控制在目标值范围内。

## 2 补偿信号法驱动的 Pendubot 自适应控制

### 2.1 控制策略

利用 Pendubot 平衡过程运行在平衡点附近的特点, 采用欧拉法对式 (1) 进行离散化, 并在平衡点处线性化得:

$$\mathbf{A}(z^{-1}) \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{B}(z^{-1}) u(k) + \mathbf{v}(k) \quad (5)$$

其中,  $u(k)$  为电机转矩;  $\mathbf{y}(k) = [y_1(k) \ y_2(k)]^T$ ,  $y_1(k)$  和  $y_2(k)$  分别为主动臂、欠驱动臂角度;  $k$  为采样时间,  $k=1$  表示采样周期  $T$ ;  $\mathbf{A}(z^{-1}) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$  和  $\mathbf{B}(z^{-1}) \in \mathbf{R}^{2 \times 1}$  分别为关于  $z^{-1}$  的多项式矩阵且  $\mathbf{A}(z^{-1})$  和  $\mathbf{B}(z^{-1})$  左互质,  $\mathbf{A}(z^{-1})$  和  $\mathbf{B}(z^{-1})$  的表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{A}(z^{-1}) = \mathbf{I} + \mathbf{A}_1(z^{-1}) + \mathbf{A}_2(z^{-2}) \\ \mathbf{B}(z^{-1}) = \mathbf{B}_0 \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{I}$  为 2 阶单位矩阵;  $\mathbf{A}_1 = \text{diag}\{a_{11}, a_{21}\} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{A}_2 = \text{diag}\{a_{12}, a_{22}\} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$  为对角常数矩阵;  $\mathbf{B}_0 = [b_{10} \ b_{20}]^T \in \mathbf{R}^{2 \times 1}$  为常数矩阵且各元素均不为 0;  $\mathbf{v}(k) = [v_1(k) \ v_2(k)]^T \in \mathbf{R}^2$  为关于  $u(k)$  和  $\mathbf{y}(k)$  的未知高阶非线性项, 包含了参数矩阵  $\mathbf{D}(\cdot)$ 、 $\mathbf{C}(\cdot)$ 、 $\mathbf{G}(\cdot)$  改变及  $\mathbf{F}(\cdot)$  变化所引起的 Pendubot 两摆臂角度动态特性的变化。

利用实际输入输出数据, 采用最小二乘估计算法与基于神经网络的高阶非线性项估计算法交替辨识<sup>[17]</sup> 可确定参数矩阵  $\mathbf{A}_1$ 、 $\mathbf{A}_2$  和  $\mathbf{B}_0$ , 且  $\mathbf{v}(k)$  有界, 即

$$\|\mathbf{v}(k)\| \leq M \quad (7)$$

其中,  $M$  为  $\mathbf{v}(k)$  模的上界。

$\mathbf{v}(k)$  可以表示为:

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}(k-1) + \Delta \mathbf{v}(k) \quad (8)$$

因此, 被控对象模型式 (5) 可表示为:

$$\mathbf{A}(z^{-1}) \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{B}(z^{-1}) u(k) + \mathbf{v}(k-1) + \Delta \mathbf{v}(k) \quad (9)$$

由式 (9) 可得  $\mathbf{v}(k-1)$  为:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(k-1) &= \mathbf{y}(k) + \mathbf{A}^*(z^{-1}) \mathbf{y}(k) - \\ &\quad \mathbf{B}(z^{-1}) u(k-1) = \\ &\quad \mathbf{y}(k) - \mathbf{y}^*(k) \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{A}^*(z^{-1}) = \mathbf{A}(z^{-1}) - \mathbf{I}$ 。

$$\mathbf{y}^*(k) = -\mathbf{A}^*(z^{-1}) \mathbf{y}(k) + \mathbf{B}(z^{-1}) u(k-1) \quad (11)$$

式 (11) 为 Pendubot 两摆臂角度的控制器驱动模型<sup>[18]</sup> 的输出。由式 (10) 和式 (11) 可以获得  $\mathbf{v}(k-1)$  的精确值, 因此可以设计消除  $\mathbf{v}(k-1)$  的补偿器。虽然高阶非线性项变化率  $\Delta \mathbf{v}(k)$  未知, 但其变化导致跟踪误差  $\mathbf{e}(k) = \mathbf{y}_{sp}(k) - \mathbf{y}(k)$  的变化, 可以以尽可能消除  $\mathbf{e}(k)$  为目标来设计补偿器, 将两个补偿器叠加到基于确定线性模型设计的 PD 控制器, 从而得到补偿信号法驱动的自适应 PD 控制器, 其结构图如图 2 所示。

### 2.2 控制参数设计

如图 2 所示, 补偿信号法驱动的 Pendubot 自适应平衡控制器为:

$$u(k) = u_1(k) + u_2(k) + u_3(k) \quad (12)$$

以式 (5) 中的确定线性模型设计 PD 控制律为:

$$H(z^{-1}) u_1(k) = \mathbf{G}(z^{-1}) [\mathbf{y}_{sp}(k) - \mathbf{y}(k)] \quad (13)$$

其中,  $H(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$ ,  $\mathbf{G}(z^{-1}) = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1 z^{-1} + \mathbf{G}_2 z^{-2}$ ,  $\mathbf{G}_i = [g_{1i} \ g_{2i}]$ ,  $i = 0, 1, 2$ 。

前一时刻高阶非线性项  $\mathbf{v}(k-1)$  补偿器为:

$$u_2(k) = -\mathbf{K}(z^{-1}) \mathbf{v}(k-1) \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{K}(z^{-1})$  为补偿器的参数。

采用一步最优前馈补偿律来设计  $\mathbf{G}(z^{-1})$  和  $\mathbf{K}(z^{-1})$  的参数, 将式 (13) 中的  $u_1(k)$  和式 (14) 中的  $u_2(k)$  代入式 (12) 得  $u(k)$  为:

$$\begin{aligned} H(z^{-1}) u(k) &= \mathbf{G}(z^{-1}) [\mathbf{y}_{sp}(k) - \mathbf{y}(k)] - \\ &\quad H(z^{-1}) \mathbf{K}(z^{-1}) \mathbf{v}(k-1) + \\ &\quad H(z^{-1}) u_3(k) \end{aligned} \quad (15)$$

引入下列性能指标<sup>[19]</sup>:

$$J = \min [\mathbf{P}(z^{-1}) \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{R}(z^{-1}) \mathbf{y}_{sp}(k) + \mathbf{Q}(z^{-1}) u(k) + \bar{\mathbf{K}}(z^{-1}) \mathbf{v}(k-1)]^2 \quad (16)$$

其中,  $\mathbf{P}(z^{-1}) \in \mathbf{R}^{1 \times 2}$ 、 $\mathbf{R}(z^{-1}) \in \mathbf{R}^{1 \times 2}$ 、 $\mathbf{Q}(z^{-1})$  和  $\bar{\mathbf{K}}(z^{-1}) \in \mathbf{R}^{1 \times 2}$  均为关于  $z^{-1}$  的加权多项式矩阵。

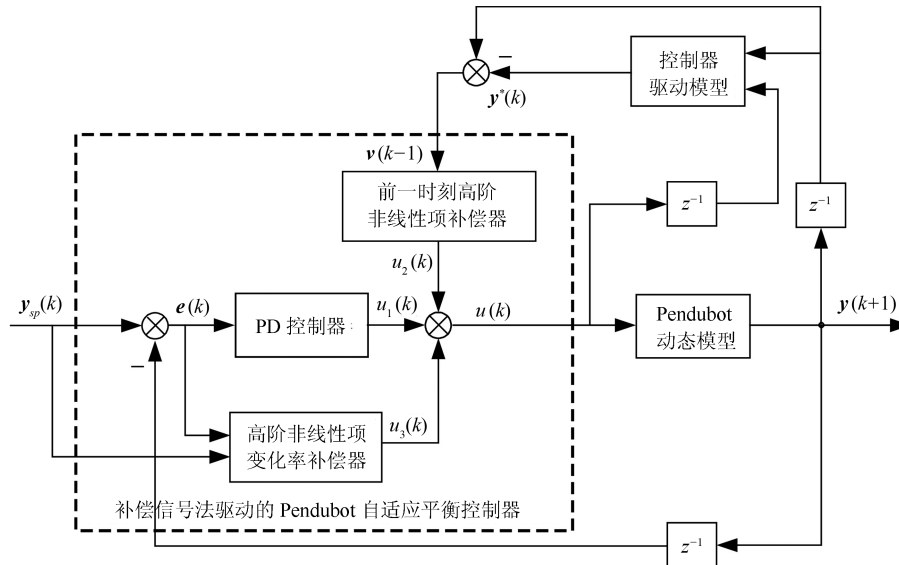


图2 补偿信号法驱动的 Pendubot 自适应平衡控制结构图

Fig. 2 Structure diagram of Pendubot adaptive balance control using the compensation signal based approach

引入广义输出  $\phi(k+1)$  为:

$$\phi(k+1) = \mathbf{P}(z^{-1}) \mathbf{y}(k+1) \quad (17)$$

定义广义理想输出  $\phi^*(k+1)$  为:

$$\phi^*(k+1) = \mathbf{R}(z^{-1}) \mathbf{y}_{sp}(k) - \mathbf{Q}(z^{-1}) u(k) - \bar{\mathbf{K}}(z^{-1}) \mathbf{v}(k-1) \quad (18)$$

定义式 (16) 中的  $\mathbf{P}(z^{-1})$  为

$$\mathbf{P}(z^{-1}) = \mathbf{F}(z^{-1}) \mathbf{A}(z^{-1}) + z^{-1} \mathbf{G}(z^{-1}) \quad (19)$$

其中,  $\mathbf{F}(z^{-1}) = [1 \quad 1]$ .

由式 (9) 和式 (19) 可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z^{-1}) \mathbf{y}(k+1) = & \mathbf{G}(z^{-1}) \mathbf{y}(k) + \mathbf{F}(z^{-1}) \mathbf{B}(z^{-1}) u(k) + \\ & \mathbf{F}(z^{-1}) \mathbf{v}(k-1) + \mathbf{F}(z^{-1}) \Delta \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (20)$$

将式 (20) 代入式 (16), 使得  $J_{\min} = 0$  可得带有前一时刻高阶非线性项补偿的一步最优控制律为:

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}(z^{-1}) \mathbf{B}(z^{-1}) + \mathbf{Q}(z^{-1})] u(k) = & \mathbf{R}(z^{-1}) \mathbf{y}_{sp}(k) - \mathbf{G}(z^{-1}) \mathbf{y}(k) - \\ & [\mathbf{F}(z^{-1}) + \bar{\mathbf{K}}(z^{-1})] \mathbf{v}(k-1) - \\ & \mathbf{F}(z^{-1}) \Delta \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (21)$$

由式 (15) 和式 (21) 可得  $\mathbf{R}(z^{-1})$ 、 $\mathbf{Q}(z^{-1})$  和  $\bar{\mathbf{K}}(z^{-1})$  为:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(z^{-1}) &= \mathbf{H}(z^{-1}) - \mathbf{F}(z^{-1}) \mathbf{B}(z^{-1}) \\ \mathbf{R}(z^{-1}) &= \mathbf{G}(z^{-1}) \\ \bar{\mathbf{K}}(z^{-1}) &= \mathbf{H}(z^{-1}) \mathbf{K}(z^{-1}) - \mathbf{F}(z^{-1}) \end{aligned} \quad (22)$$

将式 (21) 和式 (22) 代入被控对象式 (9) 得闭环系统方程为:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}(z^{-1}) \mathbf{H}(z^{-1}) + z^{-1} \mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{G}(z^{-1})] \times \\ \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{G}(z^{-1}) \mathbf{y}_{sp}(k) + \\ \mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{H}(z^{-1}) u_3(k) + \\ \mathbf{H}(z^{-1}) [\mathbf{I} - \mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{K}(z^{-1})] \mathbf{v}(k-1) + \\ \mathbf{H}(z^{-1}) \Delta \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (23)$$

选择 PD 控制参数  $\mathbf{G}(z^{-1})$  满足

$$\det [\mathbf{A}(z^{-1}) \mathbf{H}(z^{-1}) + z^{-1} \mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{G}(z^{-1})] \neq 0, |z| > 1 \quad (24)$$

由式 (23) 知, 为实现对  $\mathbf{v}(k-1)$  的动态和静态补偿, 选择  $\mathbf{K}(z^{-1})$  使  $\mathbf{I} - \mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{K}(z^{-1}) = \mathbf{0}$ , 即

$$\mathbf{K}(z^{-1}) = \mathbf{B}^+(z^{-1}) = \mathbf{B}_0^+ \quad (25)$$

其中,  $\mathbf{B}_0^+ = (\mathbf{B}_0^T \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{B}_0$  为  $\mathbf{B}_0$  的左伪逆.

注 1. 由于  $\mathbf{B}_0$  各元素均不为 0, 为列满秩矩阵, 故其左伪逆  $\mathbf{B}_0^+$  存在.

于是式 (23) 为:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(z^{-1}) \mathbf{H}(z^{-1}) \mathbf{y}(k+1) = & \mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{G}(z^{-1}) \mathbf{e}(k) + \\ & \mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{H}(z^{-1}) u_3(k) + \mathbf{H}(z^{-1}) \Delta \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (26)$$

其中,  $\mathbf{e}(k) = \mathbf{y}_{sp}(k) - \mathbf{y}(k)$ .

虽然  $\Delta \mathbf{v}(k)$  未知, 但其引起的误差可知, 因此以消除跟踪误差  $\mathbf{e}(k)$  为目标, 设计补偿信号  $u_3(k)$ ,

将式 (26) 两边同时减  $\mathbf{A}(z^{-1})H(z^{-1})\mathbf{y}_{sp}(k+1)$ , 可将式 (26) 表示为以  $\mathbf{e}(k+1)$  为输出, 以  $u_3(k)$  为输入的系统, 即

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-1}\mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{G}(z^{-1})] \times \\ & \mathbf{e}(k+1) = -\mathbf{B}(z^{-1})H(z^{-1})u_3(k) - \\ & H(z^{-1})\Delta\mathbf{v}(k) + \mathbf{A}(z^{-1})H(z^{-1})\mathbf{y}_{sp}(k+1) \end{aligned} \quad (27)$$

为尽可能地消除  $\mathbf{e}(k+1)$ , 引入一步最优调节律<sup>[19]</sup> 设计  $u_3(k)$ , 引入下列性能指标:

$$J = \min E \{ \|\mathbf{e}(k+1)\|^2 \} \quad (28)$$

引入 Diophantine 方程:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-1}\mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{G}(z^{-1}) + \\ & z^{-1}\mathbf{G}'(z^{-1}) = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (29)$$

由式 (29) 可得  $\mathbf{G}'(z^{-1})$  为:

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}'(z^{-1}) = \mathbf{A}(z^{-1}) - \mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{G}(z^{-1}) - \\ & (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2z^{-1}) = \mathbf{G}'_0 + \mathbf{G}'_1z^{-1} + \mathbf{G}'_2z^{-2} \end{aligned} \quad (30)$$

其中,

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}'_0 = \mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_0\mathbf{G}_0 \\ & \mathbf{G}'_1 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_0\mathbf{G}_1 \\ & \mathbf{G}'_2 = \mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_0\mathbf{G}_2 \end{aligned}$$

将式 (29) 代入式 (7) 得:

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}(k+1) = \mathbf{G}'(z^{-1})\mathbf{e}(k) - \\ & \mathbf{B}(z^{-1})H(z^{-1})u_3(k) - H(z^{-1})\Delta\mathbf{v}(k) + \\ & \mathbf{A}(z^{-1})H(z^{-1})\mathbf{y}_{sp}(k+1) \end{aligned} \quad (31)$$

由式 (31) 知, 跟踪误差的一步最优预报  $\mathbf{e}^*(k+1|k)$  为:

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}^*(k+1|k) = \mathbf{G}'(z^{-1})\mathbf{e}(k) - \\ & \mathbf{B}(z^{-1})H(z^{-1})u_3(k) - H(z^{-1})\Delta\mathbf{v}(k-1) + \\ & \mathbf{A}(z^{-1})H(z^{-1})\mathbf{y}_{sp}(k+1) \end{aligned} \quad (32)$$

令  $\mathbf{e}^*(k+1|k) = \mathbf{0}$ , 可得补偿信号  $u_3(k)$  为:

$$\begin{aligned} & u_3(k) = u_3(k-1) + \mathbf{B}^+(z^{-1})\mathbf{G}'(z^{-1})\mathbf{e}(k) - \\ & \mathbf{B}^+(z^{-1})H(z^{-1})\Delta\mathbf{v}(k-1) + \\ & \mathbf{B}^+(z^{-1})\mathbf{A}(z^{-1})H(z^{-1})\mathbf{y}_{sp}(k+1) \end{aligned} \quad (33)$$

其中, 高阶非线性项变化率补偿器参数  $\mathbf{G}'(z^{-1})$  由式 (30) 获得.

### 2.3 自适应平衡控制算法

补偿信号法驱动的 Pendubot 自适应平衡控制算法实现步骤如下:

**步骤 1.** 采用实际输入输出数据, 利用最小二乘估计算法和基于神经网络的高阶非线性项  $\mathbf{v}(k)$  的估计算法组成的交替辨识算法<sup>[17]</sup> 确定  $\mathbf{A}_1$ 、 $\mathbf{A}_2$  和  $\mathbf{B}_0$ ;

**步骤 2.** 由式 (24) 确定 PD 控制器参数  $\mathbf{G}(z^{-1})$ , 由式 (25) 确定前一时刻高阶非线性项补偿器参数  $\mathbf{K}(z^{-1})$ , 由式 (30) 确定高阶非线性项变化率补偿器参数  $\mathbf{G}'(z^{-1})$ ;

**步骤 3.** 测取  $\mathbf{y}(k)$ 、 $\mathbf{y}(k-1)$ 、 $\mathbf{y}(k-2)$  和  $u(k-1)$ , 由式 (10) 求得前一时刻高阶非线性项  $\mathbf{v}(k-1)$ ;

**步骤 4.** 测取  $\mathbf{y}(k-1)$ 、 $\mathbf{y}(k-2)$ 、 $\mathbf{y}(k-3)$  和  $u(k-2)$ , 由式 (10) 求得  $\mathbf{v}(k-2)$ , 由式 (8) 求得高阶非线性项变化率  $\Delta\mathbf{v}(k-1)$ ;

**步骤 5.** Pendubot 自适应平衡控制器输出  $u(k)$  由式 (12) 给出, 其中, PD 控制器输出  $u_1(k)$  由式 (13) 给出; 前一时刻高阶非线性项补偿器输出  $u_2(k)$  由式 (14) 给出; 高阶非线性项变化率补偿器输出  $u_3(k)$  由式 (33) 给出;

**步骤 6.** 返回步骤 3, 计算下一时刻控制器输出.

### 3 稳定性和收敛性分析

**定理 1.** 被控对象由式 (5) 表示, 高阶非线性项  $\mathbf{v}(k)$  满足:  $\|\mathbf{v}(k)\| \leq M$ , 当  $k \rightarrow \infty$  时, 高阶非线性项变化率  $\Delta\mathbf{v}(\infty)$  为常数. 当补偿信号法驱动的自适应平衡控制算法式 (12)~(14)、式 (24)、式 (25)、式 (30)、式 (33) 作用于被控对象式 (5) 时, 闭环系统具有稳定性和收敛性.

稳定性:

$$\|u(k)\| < \infty, \|\mathbf{y}(k)\| < \infty \quad (34)$$

收敛性: 被控对象输出  $\mathbf{y}(k)$  与设定值  $\mathbf{y}_{sp}(k)$  之间的跟踪误差  $\mathbf{e}(k)$  满足:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(k)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_{sp}(k) - \mathbf{y}(k)\| < \varepsilon \quad (35)$$

其中,  $\varepsilon$  为预先指定的任意小的正数.

**证明.** 将补偿信号法驱动的 Pendubot 自适应平衡控制算法式 (12)~(14)、式 (24)、式 (25)、式 (30)、式 (33) 作用于被控对象式 (5) 时, 得到闭环系统的输入方程为:

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_0u(k) = \mathbf{A}(z^{-1})\mathbf{y}_{sp}(k+1) + \\ & \left[ \mathbf{A}(z^{-1})(1-z^{-1})^3 - \mathbf{I} \right] \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (36)$$

由式 (36) 知,  $\mathbf{y}_{sp}(k)$  和  $\mathbf{v}(k)$  有界, 采用文献 [20] 类似方法可证

$$|u(k)| \leq c_1 + c_2 \max_{0 \leq k' \leq k} \|\mathbf{v}(k')\| \leq c_1 + c_2 M < \infty \quad (37)$$

其中,  $c_1$  和  $c_2$  为正常数.

由式 (26) 和式 (33) 得闭环系统的输出方程为:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}_{sp}(k+1) + (1-z^{-1})[\Delta \mathbf{v}(k) - \Delta \mathbf{v}(k-1)] \quad (38)$$

由于

$$\|\Delta \mathbf{v}(k)\| = \|\mathbf{v}(k) - \mathbf{v}(k-1)\| \leq \|\mathbf{v}(k)\| + \|\mathbf{v}(k-1)\| \quad (39)$$

由  $\mathbf{v}(k)$  有界可得  $\Delta \mathbf{v}(k)$  有界, 即

$$\|\Delta \mathbf{v}(k)\| \leq 2M \quad (40)$$

由式 (38) 知,  $\mathbf{y}_{sp}(k)$  和  $\mathbf{v}(k)$  有界, 采用文献 [20] 类似方法可证

$$\|\mathbf{y}(k)\| \leq c_3 + c_4 \max_{0 \leq k' \leq k} \|\Delta \mathbf{v}(k')\| \leq c_3 + 2c_4 M < \infty \quad (41)$$

其中,  $c_3$  和  $c_4$  为正常数.

由式 (37) 和式 (41) 可知, 闭环系统的输入  $u(k)$  和输出  $\mathbf{y}(k)$  均有界.

由式 (38) 可得:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_{sp}(k) - \mathbf{y}(k)\| = \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \|(1-z^{-1})[\Delta \mathbf{v}(k) - \Delta \mathbf{v}(k-1)]\| = \\ & \|[\Delta \mathbf{v}(\infty) - \Delta \mathbf{v}(\infty)]\| \lim_{k \rightarrow \infty} |(1-z^{-1})| = \\ & 0 < \varepsilon \end{aligned} \quad (42)$$

□

## 4 仿真实验

为了验证所提方法的有效性, 本文共进行以下两个仿真实验.

### 4.1 仿真实验 1

采用文献 [15] 中的仿真被控对象模型和摩擦模型, 将本文方法和文献 [15] 方法进行仿真对比实验. 该仿真被控对象模型结构与模型 (1) 相同, 参数<sup>[15]</sup>:  $m_1 = 0.09 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0.73 \text{ kg}$ ,  $l_1 = 0.15 \text{ m}$ ,  $l_{c1} = 0.09 \text{ m}$ ,  $l_{c2} = 0.08 \text{ m}$ ,  $I_1 = 0.0073 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $I_2 = 0.0001 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ . 摩擦  $f_1$  的模型为<sup>[15]</sup>:

$$f_1 = \gamma_1 (\tanh \gamma_2 \dot{y}_1 - \tanh \gamma_3 \dot{y}_1) + \gamma_4 \tanh \gamma_5 \dot{y}_1 + \gamma_6 \dot{y}_1 \quad (43)$$

其中,  $\gamma_1 = 4.18$ ,  $\gamma_2 = 1.59$ ,  $\gamma_3 = 3.15$ ,  $\gamma_4 = 0.09$ ,  $\gamma_5 = 3.52$ ,  $\gamma_6 = 0.021$ .

控制目标为式 (4), 采样周期  $T = 1 \text{ ms}$ . 采用交替辨识方法<sup>[17]</sup> 确定式 (5) 中的线性模型参数为:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(z^{-1}) &= \mathbf{I} + \begin{bmatrix} -2.001 & 0 \\ 0 & -2.001 \end{bmatrix} z^{-1} + \\ & \begin{bmatrix} 1.001 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z^{-2} \\ \mathbf{B}(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} 5.972 \times 10^{-5} \\ -4.543 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

由式 (24)、式 (25) 和式 (30) 确定补偿信号法驱动的 Pendubot 自适应平衡控制器参数为:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(z^{-1}) &= [7.0635 \times 10^{-3} \quad 4.7797 \times 10^3]^T + \\ & [-1.4064 \times 10^4 \quad -0.9510 \times 10^4]^T z^{-1} + \\ & [7 \times 10^3 \quad 4.73 \times 10^3]^T z^{-2} \\ \mathbf{K}(z^{-1}) &= [1.0607 \times 10^4 \quad -0.8069 \times 10^4] \\ \mathbf{G}'(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} 2.5792 & -0.2854 \\ 0.3209 & 3.2181 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} -2.1621 & 0.5679 \\ -0.6389 & -3.4330 \end{bmatrix} z^{-1} + \\ & \begin{bmatrix} 0.5830 & -0.2825 \\ 0.3180 & 1.2149 \end{bmatrix} z^{-2} \end{aligned}$$

文献 [15] 基于非线性扰动观测器的平衡控制器为:

$$u = -\mathbf{K} \bar{\mathbf{e}} + \hat{f}_1(\dot{y}_1) \quad (45)$$

其中,  $\bar{\mathbf{e}} = [\mathbf{y}^T - \mathbf{y}_{sp}^T \quad \dot{\mathbf{y}}^T - \dot{\mathbf{y}}_{sp}^T]^T$ ,  $\mathbf{y}_{sp} = [90^\circ \quad 0^\circ]^T$ .

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(\dot{y}_1) &= -(k_{s1} + \alpha_1) \hat{f}_1(\dot{y}_1) + \frac{\mu_1}{\Xi} \cdot \text{sgn}(\dot{y}_1 - \hat{y}_1) + \\ & \frac{\alpha_1 k_{s1}}{\Xi} (\dot{y}_1 - \hat{y}_1), \quad \Xi = -\frac{\theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 y_2} \\ \dot{y}_1 &= \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 y_2} \left[ \theta_2 \theta_3 \sin y_2 (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)^2 + \right. \\ & \left. \theta_3^2 \cos y_2 \sin y_2 \dot{y}_1^2 + \theta_3 \theta_5 g \cos y_2 \cos(y_1 + y_2) - \right. \\ & \left. \theta_2 \theta_4 g \cos y_1 - \theta_2 \hat{f}_1(\dot{y}_1) + \theta_2 u \right] \end{aligned}$$

控制参数为:  $\mathbf{K} = [-63.5 \quad -49.7 \quad -9.7 \quad -4.6]$ ,  $k_{s1} = 500$ ,  $\alpha_1 = 250$ ,  $\mu_1 = 10^{-5}$ .

Pendubot 系统的初始位置为  $\mathbf{y}(k) = [-90^\circ \quad 0^\circ]^T$ , 起摆控制采用部分反馈线性化<sup>[7]</sup>, 控

制参数为  $k_P = 77.78$ ,  $k_D = 5.56$ , 切换条件为  $78^\circ \leq y_1(k) \leq 102^\circ$  且  $-23^\circ \leq y_2(k) \leq 23^\circ$ .

将本文控制方法与文献 [15] 控制方法进行仿真对比实验, 仿真结果如图 3 所示. 本文控制方法与文献 [15] 控制方法的性能评价表, 见表 1.

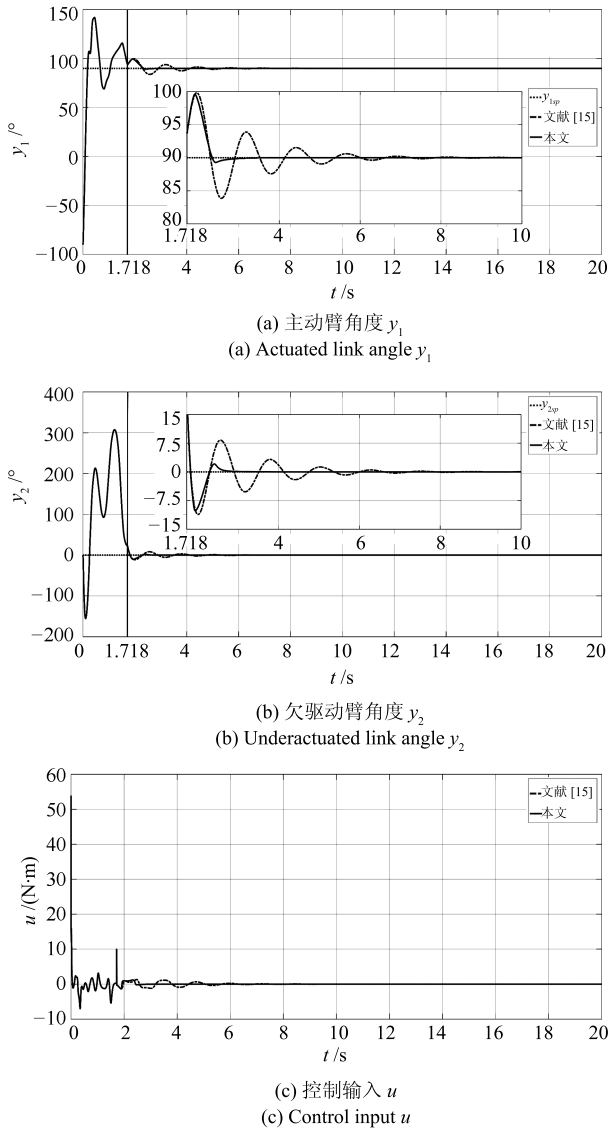


图 3 采用文献 [15] 模型时本文控制方法与文献 [15] 控制方法的仿真结果

Fig.3 Simulation results of the control method in [15] and the proposed method using the object model of [15]

由图 3 及表 1 可以看出, 本文方法的控制效果明显优于文献 [15] 方法的控制效果, 绝对误差累积和和误差均方差分别减小 65.14% 和 30.49%, 文献 [15] 的控制方法采用摩擦观测器来补偿摩擦的影响, 由于观测误差的存在, 必然影响控制效果, 本文采用的补偿信号可以利用精确测量的  $y(k)$  和  $e(k)$  以及模型式 (11) 计算的  $y^*(k)$  获得.

表 1 本文控制方法与文献 [15] 控制方法的性能指标  
Table 1 Performance indexes of the control method in [15] and the proposed control method

	绝对误差累积和 <sup>[21]</sup>	误差均方差 <sup>[21]</sup>
文献 [15]	23 396.497	2.657
本文	8 156.131	1.847

4.2 仿真实验 2

为了表明本文控制方法针对被控对象模型参数变化及摩擦特性变化时的控制效果, 将本文控制方法与文献 [15] 控制方法及常规 PD 控制方法进行仿真对比实验. 仿真被控对象模型采用模型 (1), 参数  $l_{c1}$  和  $l_{c2}$  为时变的, 表达式如下:

$$\begin{aligned}
 l_{c1}(t) &= \begin{cases} 0.09 \text{ m}, & t < 1.718 \text{ s} \\ 0.063 \text{ m}, & t \geq 1.718 \text{ s} \end{cases} \\
 l_{c2}(t) &= \begin{cases} 0.08 \text{ m}, & t < 1.718 \text{ s} \\ 0.096 \text{ m}, & t \geq 1.718 \text{ s} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{46}$$

其余参数与第 4.1 节的控制参数相同.

摩擦  $f_1$  为式 (43) 上加入  $\Delta f_1(t)$ ,  $\Delta f_1(t)$  表示如下:

$$\Delta f_1(t) = \begin{cases} 0.5, & 8 \text{ s} \leq t \leq 8.2 \text{ s} \\ -0.45, & 14 \text{ s} \leq t \leq 14.3 \text{ s} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{47}$$

本文方法与文献 [15] 方法的控制器结构和参数与第 4.1 节的控制器结构和参数完全相同. 常规 PD 方法的控制器参数与本文方法的 PD 控制器参数相同. 三种控制方法的仿真结果, 如图 4 所示. 将三种平衡控制器的性能进行比较, 见表 2.

表 2 常规 PD、文献 [15] 及本文控制方法的性能指标  
Table 2 Performance indexes of the conventional PD method, the method in [15] and the proposed method

	绝对误差累积和	误差均方差
常规 PD	17 950.004	1.780
文献 [15]	33 762.650	2.656
本文	11 233.987	1.762

由图 4 及表 2 可以看出, 当被控对象模型参数和摩擦特性变化时, 本文方法的两摆臂输出角度波动幅度最小, 干扰消失后, 摆臂恢复到原来位置的时间最短, 本文控制方法与文献 [15] 控制方法及常规 PD 控制方法相比, 绝对误差累积和分别减少 66.73% 和 37.42%, 误差均方差分别减小 33.66% 和 1.01%, 控制效果明显优于其他两种方法.

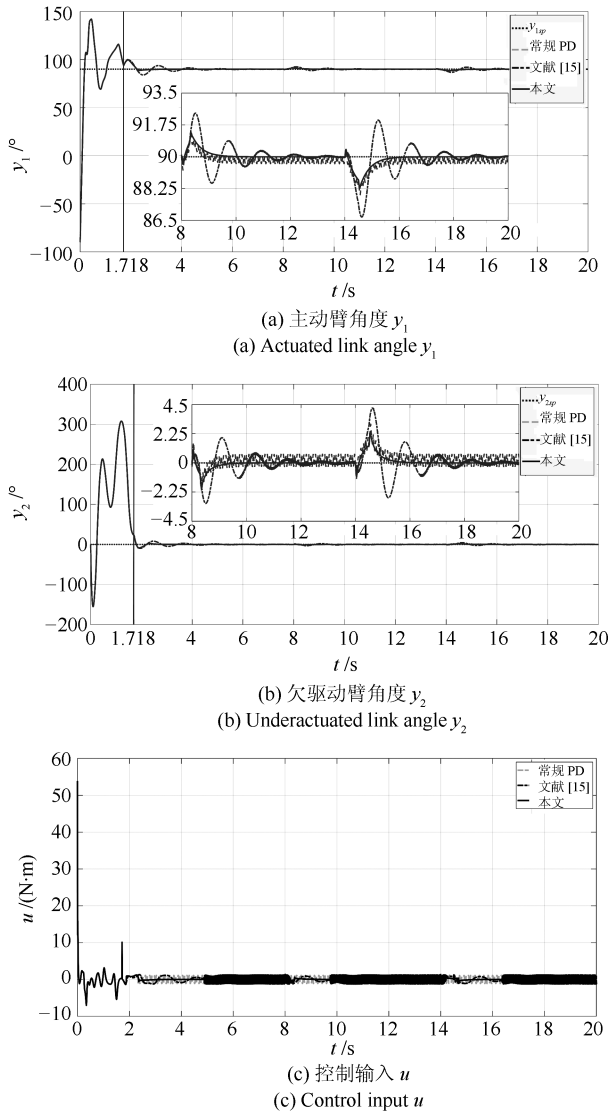


图4 模型参数变化时常规 PD、文献 [15] 及本文控制方法的仿真结果

Fig. 4 Simulation results of the conventional PD control method, the control method in [15] and the proposed method with parameter uncertainties

## 5 物理实验

为验证本文提出的补偿信号法驱动的 Pendubot 自适应平衡控制方法的有效性和可行性, 将本文控制方法与常规 PD 控制方法及文献 [15] 控制方法在实际设备上物理实验对比。

### 5.1 实验平台描述

本文选用宁波东大自动化智能技术有限公司生产的 Pendubot 倒立摆机器人实验系统作为实验平台, 硬件系统主要包括 3 台 PC 机、网络化控制器和 Pendubot, 通过局域网连接, 如图 5 所示。

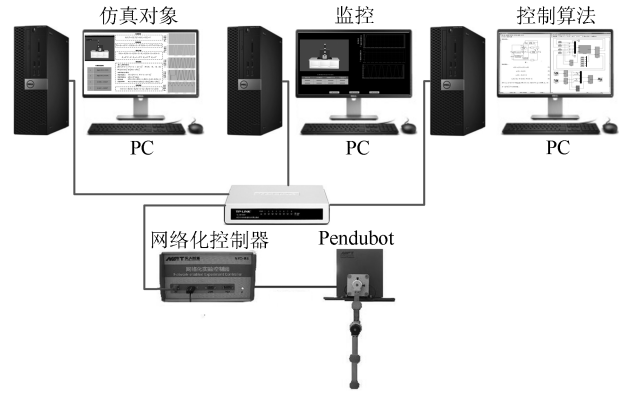


图5 Pendubot 系统实验平台

Fig. 5 The experimental platform of the Pendubot

Pendubot 的主动臂由 90SY56\_180W 直流力矩型伺服电机驱动, 空载速度 2 000 r/min, 额定电压 90 V。网络化控制器采用 PowerPC 处理器, 主频为 1 GHz。主动臂和欠驱动臂的角度分别由安装在电机轴和两摆臂间轴承上的 2 个 EPC-VLT12 型光电编码器进行测量, 精度为 1 250 脉冲/圈。

### 5.2 控制目标及控制器参数设计

控制目标为式 (4)。起摆控制采用部分反馈线性化<sup>[7]</sup>, 控制参数为  $k_P = 66.35$ ,  $k_D = 9.92$ , 切换条件为  $78^\circ \leq y_1(k) \leq 102^\circ$  且  $20^\circ \leq y_2(k) \leq 20^\circ$ , 采样周期为 2 ms。

控制器设计模型参数为:

$$A(z^{-1}) = I + \begin{bmatrix} -2.001 & 0 \\ 0 & -2.001 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1.001 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z^{-2}$$

$$B(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 3.532 \times 10^{-4} \\ -2.843 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

由式 (26)、式 (24) 和式 (32) 可得补偿信号法驱动的 Pendubot 平衡控制器参数为:

$$G(z^{-1}) = [973.1732 \quad 600.8420]^T + [-1935.3 \quad -1191.7]^T z^{-1} + [962.15 \quad 590.9]^T z^{-2}$$

$$K(z^{-1}) = [1.7181 \times 10^3 \quad -1.3829 \times 10^3]$$



$$G'(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 2.6573 & -0.2122 \\ 0.2767 & 3.1718 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} -2.3184 & 0.4209 \\ -0.5502 & -3.3398 \end{bmatrix} z^{-2} + \begin{bmatrix} 0.6612 & -0.2087 \\ 0.2735 & 1.1680 \end{bmatrix} z^{-2}$$

5.3 实验结果

三种方法的实验结果,如图 6 所示.

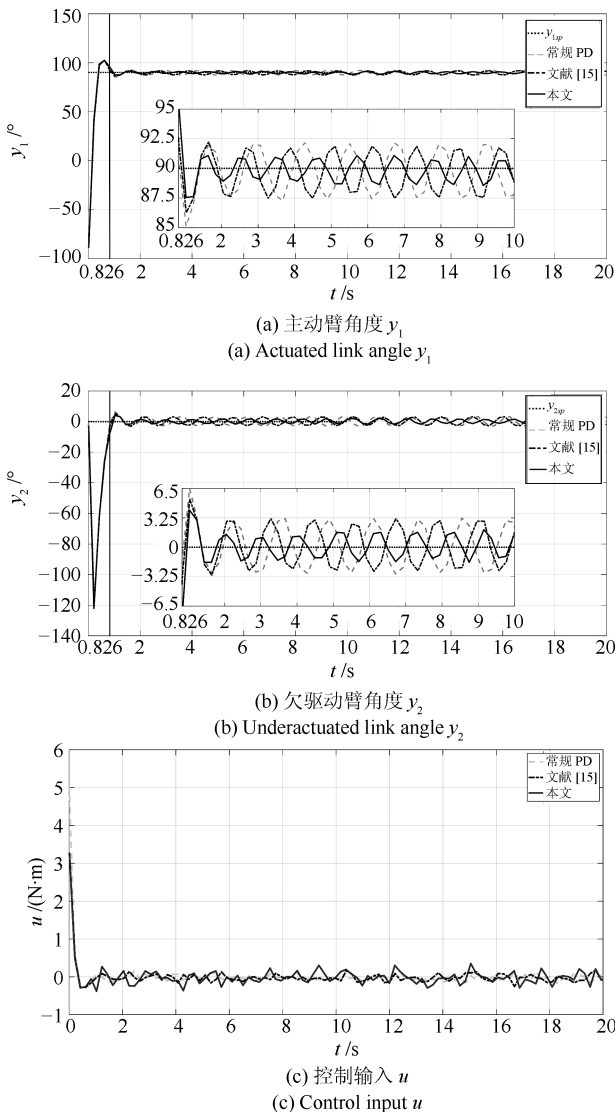


图 6 常规 PD、文献 [15] 及本文控制方法的实验结果  
Fig. 6 Experimental results of the conventional PD method, the method in [15] and the proposed method

将三种平衡控制器的性能进行比较,见表 3.

表 3 常规 PD、文献 [15] 及本文控制方法的性能指标  
Table 3 Performance indexes of the conventional PD method, the method in [15] and the proposed method

	绝对误差累积和	误差均方差
常规 PD	361.080	6.483
文献 [15]	337.320	6.093
本文	204.336	4.201

由图 6 和表 3 可以看出,采用本文控制方法时,系统的各项性能指标均为最小,与文献 [15] 控制方法和常规 PD 控制方法相比,绝对误差累积和分别减少 39.42% 和 43.41%,误差均方差分别减小 31.05% 和 35.2%,控制效果明显优于其他两种方法.

为了验证被控对象模型参数改变且摩擦复杂未知时三种方法的控制效果,在 Pendubot 主动臂和欠驱动臂的实际输出角度上分别叠加式 (48) 所示的干扰信号  $\Delta y_1$  和  $\Delta y_2$ ,表示由于控制参数和摩擦变化导致输出信号  $y_1$  和  $y_2$  的变化,采用三种方法在不加干扰信号时设计的控制器进行实验,结果如图 7 所示.

$$\Delta y_1(t) = \begin{cases} -10^\circ, & 8\text{ s} \leq t \leq 8.2\text{ s} \\ 12.5^\circ, & 14\text{ s} \leq t \leq 14.3\text{ s} \\ 0^\circ, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\Delta y_2(t) = \begin{cases} 10^\circ, & 8\text{ s} \leq t \leq 8.2\text{ s} \\ -12.5^\circ, & 14\text{ s} \leq t \leq 14.3\text{ s} \\ 0^\circ, & \text{其他} \end{cases} \quad (48)$$

将三种平衡控制器的性能进行比较,见表 4.

表 4 常规 PD、文献 [15] 及本文控制方法的性能指标  
Table 4 Performance indexes of the conventional PD method, the method in [15] and the proposed method

	绝对误差累积和	误差均方差
常规 PD	548.784	12.695
文献 [15]	667.728	16.059
本文	295.776	7.574

由图 7 和表 4 可以看出,当系统在 8s~8.2s 和 14s~14.3s 受到干扰时,本文方法的摆臂角度波动幅度最小,干扰消失后回到平衡位置的时间最短.采用本文方法进行控制时,系统的各项性能指标均为最小,与文献 [15] 控制方法和常规 PD 控制方法相比,本文方法的绝对误差累积和分别减少 55.70% 和 46.10%,误差均方差分别减小 52.84% 和 40.34%,控制性能有显著提高.

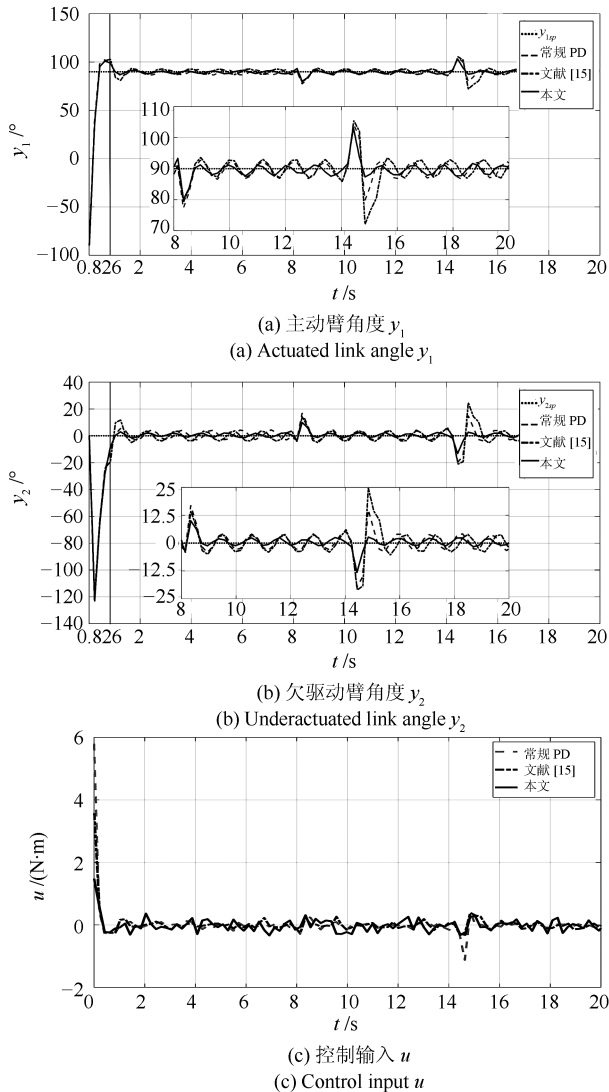


图 7 模型参数变化时常规 PD、文献 [15] 及本文控制方法的实验结果

Fig. 7 Experimental results of the conventional PD control method, the method in [15] and the proposed method with parameter uncertainties

## 6 结论

本文针对受到复杂摩擦影响和模型参数变化的 Pendubot 系统, 提出一种补偿信号法驱动的自适应 PD 平衡控制器, 该控制器由基于确定线性模型设计的常规 PD 控制器、前一时间高阶非线性项补偿器和消除跟踪误差补偿器组成. 当 Pendubot 模型参数发生变化和存在摩擦影响时, 本文提出的控制方法无需采用参数辨识和对摩擦的估计和观测, 可将两摆臂稳定地控制在平衡位置.

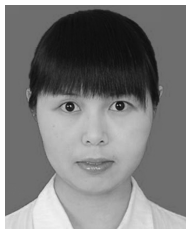
## References

1 Spong W M. Underactuated mechanical systems. In: Control Problems in Robotics and Automation. Lecture Notes

in Control and Information Sciences, Vol. 230. Berlin: Springer, 1998. 135–150

- 2 Batista P, Silvestre C, Oliveira P. A sensor-based controller for homing of underactuated AUVs. *IEEE Transactions on Robotics*, 2009, **25**(3): 701–716
- 3 Bechlioulis C P, Karras G C, Heshmati-Alamdari S, Kyriakopoulos K J. Trajectory tracking with prescribed performance for underactuated underwater vehicles under model uncertainties and external disturbances. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017, **25**(2): 429–440
- 4 Chwa D. Tracking control of differential-drive wheeled mobile robots using a backstepping-like feedback linearization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 2010, **40**(6): 1285–1295
- 5 Sun N, Fang Y C, Chen H. A new antiswing control method for underactuated cranes with unmodeled uncertainties: theoretical design and hardware experiments. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, **62**(1): 453–465
- 6 Wang Yong-Fu, Wang Dian-Hui, Chai Tian-You. State estimate-based friction fuzzy modeling and robust adaptive control. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(2): 245–252 (王永富, 王殿辉, 柴天佑. 基于状态估计的摩擦模糊建模与鲁棒自适应控制. *自动化学报*, 2011, **37**(2): 245–252)
- 7 Spong M W, Block D J. The Pendubot: a mechatronic system for control research and education. In: Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, LA, USA: IEEE, 1995. 555–556
- 8 Erdem E B, Alleyne A G. Experimental real-time SDRE control of an underactuated robot. In: Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. Orlando, FL, USA: IEEE, 2001. 2986–2991
- 9 Zhang M J, Tarn T J. Hybrid control of the Pendubot. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2002, **7**(1): 79–86
- 10 Xin X, Liu Y N. Reduced-order stable controllers for two-link underactuated planar robots. *Automatica*, 2013, **49**(7): 2176–2183
- 11 Sanchez E N, Flores V. Real-time fuzzy PI + PD control for an underactuated robot. In: Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on Intelligent Control. Vancouver, BC, Canada: IEEE, 2002. 137–141
- 12 Wang W, Yi J Q, Zhao D B, Liu X J. Adaptive sliding mode controller for an underactuated manipulator. In: Proceedings of the 2004 International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Shanghai, China: IEEE, 2004. 882–887
- 13 Hou Jun, Wang Liang-Yong, Chai Tian-You, Fang Zheng. Balance control of underactuated manipulator using T-S fuzzy scheme. *Control Engineering of China*, 2012, **19**(1): 5–8 (侯俊, 王良勇, 柴天佑, 方正. 基于 T-S 模糊的欠驱动机械臂的平衡控制. *控制工程*, 2012, **19**(1): 5–8)
- 14 Wang Yong-Fu, Wang Dian-Hui, Chai Tian-You. Data mining and systems theory based fuzzy modeling and control compensation for friction. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(3): 412–420 (王永富, 王殿辉, 柴天佑. 基于数据挖掘与系统理论建立摩擦模糊模型与控制补偿. *自动化学报*, 2010, **36**(3): 412–420)
- 15 Eom M, Chwa D. Robust swing-up and balancing control using a nonlinear disturbance observer for the Pendubot system with dynamic friction. *IEEE Transactions on Robotics*, 2015, **31**(2): 331–343

- 16 Sun N, Fang Y C, Chen H, Lu B, Fu Y M. Slew/Translation positioning and swing suppression for 4-DOF tower cranes with parametric uncertainties: design and hardware experimentation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, **63**(10): 6407–6418
- 17 Zhang Ya-Jun, Chai Tian-You, Yang Jie. Alternating identification algorithm and its application to a class of nonlinear discrete-time dynamical systems. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(1): 101–113  
(张亚军, 柴天佑, 杨杰. 一类非线性离散时间动态系统的交替辨识算法及应用. *自动化学报*, 2017, **43**(1): 101–113)
- 18 Chai T Y, Zhang Y J, Wang H, Su C Y, Sun J. Data-based virtual unmodeled dynamics driven multivariable nonlinear adaptive switching control. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, **22**(12): 2154–2172
- 19 Chai Tian-You, Yue Heng. *Adaptive Control*. Beijing: Tsinghua University Press, 2016.  
(柴天佑, 岳恒. *自适应控制*. 北京: 清华大学出版社, 2016.)
- 20 Goodwin G C, Ramadge P J, Caines P E. Discrete time multivariable adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1980, **25**(3): 449–456
- 21 Aguilar-Avelar C, Moreno-Valenzuela J. New feedback linearization-based control for arm trajectory tracking of the Furuta pendulum. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2016, **21**(2): 638–648



**魏 萃** 流程工业综合自动化国家重点实验室博士研究生. 主要研究方向为非线性控制, 机器人. 本文通信作者.  
E-mail: weicui@stumail.neu.edu.cn  
(**WEI Cui** Ph.D. candidate at the State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries. Her research interest covers nonlinear control and robotics. Corresponding author of this paper.)



**柴天佑** 中国工程院院士, 东北大学教授. IEEE Fellow, IFAC Fellow, 欧亚科学院院士. 主要研究方向为自适应控制, 智能解耦控制, 流程工业综合自动化理论、方法与技术.

E-mail: tychai@mail.neu.edu.cn

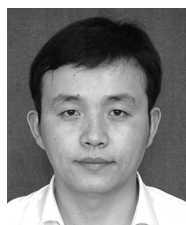
(**CHAI Tian-You** Academician of Chinese Academy of Engineering, professor at Northeastern University, IEEE Fellow, IFAC Fellow, and academician of the International Eurasian Academy of Sciences. His research interest covers adaptive control, intelligent decoupling control, as well as theories, methods and technology of integrated automation of process industry.)



**贾 瑶** 流程工业综合自动化国家重点实验室博士研究生. 主要研究方向为复杂工业过程控制理论及技术.

E-mail: jiayao\_neu@163.com

(**JIA Yao** Ph.D. candidate at the State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries. His research interest covers process control theory and technology for complex industry process.)



**王良勇** 东北大学副教授. 主要研究方向为智能控制及应用, 风力发电, 大数据及云计算的工业应用, 物联网技术.

E-mail: lywang@mail.neu.edu.cn

(**WANG Liang-Yong** Associate professor at Northeastern University. His research interest covers intelligent control and applications, wind power, big data and cloud computing for industrial applications, internet of things.)