

# 带有不匹配干扰的二阶多自主体系统有限时间包容控制

李玉玲<sup>1</sup> 杨洪勇<sup>1</sup> 刘凡<sup>1</sup> 杨怡泽<sup>1,2</sup>

**摘要** 针对多自主体系统群集运动问题, 本文研究了带有不匹配干扰的二阶系统有限时间包容控制. 运用现代控制理论, 设计了非线性观测器, 对系统未知状态和干扰进行估计. 在状态估计的基础上, 构建了基于干扰观测器的多自主体系统的协同控制算法. 应用代数图论和齐次性理论等方法, 分析了二阶多自主体系统有限时间包容控制. 数据仿真中应用基于观测器的包容控制算法, 使得系统的运动状态最终都收敛到由多个领导者所围成的目标区域中, 验证了本文结果的有效性.

**关键词** 包容控制, 有限时间, 不匹配干扰, 多领导者

**引用格式** 李玉玲, 杨洪勇, 刘凡, 杨怡泽. 带有不匹配干扰的二阶多自主体系统有限时间包容控制. 自动化学报, 2019, 45(9): 1783–1790

**DOI** 10.16383/j.aas.2018.c170571

## Finite-time Containment Control of Second-order Multi-agent Systems With Mismatched Disturbances

LI Yu-Ling<sup>1</sup> YANG Hong-Yong<sup>1</sup> LIU Fan<sup>1</sup> YANG Yi-Ze<sup>1,2</sup>

**Abstract** In this paper, a finite-time containment control algorithm is studied for the second-order multi-agent systems with mismatched disturbances. By applying the modern control theory, a nonlinear observer is designed to estimate the unknown states and disturbances of the systems. On the basis of the state estimation, a cooperative control algorithm based on disturbance observers for multi-agent systems is constructed. By applying the algebraic graph theory and homogeneous theory, the finite-time containment control of the second-order multi-agent systems is analyzed. The validity of containment control algorithm based on the disturbance observer is verified in simulation examples, where the motion states of the system eventually converge to the target area surrounded by multiple leaders.

**Key words** Containment control, finite time, mismatched disturbances, multiple leaders

**Citation** Li Yu-Ling, Yang Hong-Yong, Liu Fan, Yang Yi-Ze. Finite-time containment control of second-order multi-agent systems with mismatched disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(9): 1783–1790

近年来, 多自主体系统控制成为复杂系统领域的热点研究问题. 基于生物学启发的多自主体系统协调控制在多机器人协同工作、交通车辆控制和无人机的编队控制等领域有着广泛的应用, 促进着多自主体系统研究的快速发展.

模仿具有领导者的自然界中的群集运动, 多自

主体系统的跟随者动态追随领导者的运动状态来实现群集系统的协同控制<sup>[1–3]</sup>. 包容控制的本质是一组跟随者通过所设计的网络通信控制协议最终收敛到由多个领导者所围成的几何区域(凸包)中. 文献[4]研究了一般线性时变离散时间多自主体系统的包容控制问题, 并基于轨迹分析的方法证明控制算法的有效性. 文献[5]讨论了一阶和二阶多自主体系统的包容控制问题, 并证明在事件触发情况下具有时间延迟的动态系统可以实现包容控制. 文献[6]讨论了非线性高阶多自主体系统的包容控制问题, 提出了一种分布式自适应非线性协议, 并证明此协议同样适用于只有一个动态领导者的 Leader-follower 一致性问题. 文献[7]研究了带有传输噪声的多自主体系统的包容控制问题, 并得到在动态切换拓扑和随机切换拓扑下均方包容控制的充分条件. 文献[8]研究了在有向网络拓扑下具有固定时延的多个静态或动态领导者的多自主体系统包容控制问题, 并得到了可以使一阶多自主体系统实现包容控制的充分条件. 从以上文献可知, 虽然都可以实现系统的包容

收稿日期 2017-10-09 录用日期 2018-01-20  
Manuscript received October 9, 2017; accepted January 20, 2018

国家自然科学基金(61673200, 61472172, 61771231), 山东省自然科学基金(ZR2017PF010, ZR2018ZC0438), 烟台市重点研发项目(2019XDHZ085)资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61673200, 61472172, 61771231) and Natural Science Foundation of Shandong Province of China (ZR2017PF010, ZR2018ZC0438) and the Key Research and Development Program of Yantai City of China (2019XDHZ085)

本文责任编辑 刘艳军

Recommended by Associate Editor LIU Yan-Jun

1. 鲁东大学信息与电气工程学院 烟台 264025 中国 2. 新南威尔士大学电气工程与信息学院 悉尼 2052 澳大利亚

1. School of Information and Electrical Engineering, Ludong University, Yantai 264025, China 2. School of Electrical Engineering and Telecommunications, The University of New South Wales, Sydney 2052, Australia

控制,但是没有考虑在有限时间内多自主体系统的状态一致性.事实上,在工业生产中更需要在有限时间内使系统实现一致,因为不仅可以提高收敛速率,而且可以使闭环系统提高抑制干扰的能力.文献[9]研究了有向网络拓扑下,时延多自主体系统的运动一致性,得到了保证系统一致性的控制增益与时延上界之间的关系.文献[10]研究了二阶随机多自主体系统有限时间一致性问题,并提出了分布式控制算法,使所有自主体在无向拓扑的情况下有限时间一致收敛.文献[11]研究了一般线性多自主体系统的分布式有限时间包容控制问题,并证明了在有向通信拓扑情况下跟随者在有限时间内可以收敛到领导者所围成的凸包中.文献[12]研究了异构多自主体系统有限时间一致性问题,并得到线性和非线性系统在有领导者和无领导者的情况下达到有限时间一致性的充分条件.

在实际应用中,多自主体系统通常会受到各种干扰的影响,干扰的存在会影响系统的运动状态,所以研究干扰对系统所产生的影响是很有必要的.文献[13]研究了带有外部干扰的多自主体系统的包容控制问题,并提出状态反馈和输出反馈控制协议,设计外部干扰观测器使得系统实现包容控制.文献[14]研究了带有外部干扰的二阶多自主体系统的一致性,设计了干扰观测器来估计干扰系统所产生的干扰.对于固定和切换拓扑,可以实现在复合控制器下具有干扰的多自主体系统的渐近一致.文献[15]在多自主体系统带有未知的外部干扰情况下,提出了一种分布式状态观测器,可观测各个自主体的未知状态和所受干扰,并提出了可使系统达到一致性的控制算法.文献[16]基于自主体的不同特性,提出了非均匀分数阶多自主体系统,并且研究了具有通信时延的非均匀分数阶多自主体系统的分布式包容控制问题.文献[17]研究了带有干扰的连续时间多自主体系统的有限时间一致性问题.文献[18]讨论了带有干扰的有领导者和无领导者的多自主体系统有限时间一致性问题,并基于有限时间控制技术,设计了一种分布式控制算法,证明在受到干扰的情况下,系统可达到状态一致.前面的研究成果仅仅考虑匹配干扰(干扰与控制输入在系统的同一通道中)对系统的影响,然而在多自主体系统中也存在不匹配干扰(干扰与控制输入在系统的不同通道中),例如多液压机械臂系统和多导弹系统等.多液压机械臂的电液伺服作动器中,模型参数摄动、环境干扰力矩等干扰直接影响活塞杆和机械臂的运动,而不是通过控制电压通道,属于不匹配干扰.在多导弹系统中,导弹所受到的风等环境干扰属于不匹配干扰.不匹配干扰以异于匹配干扰的方式对系统性能产生影响,已有的抑制匹配干扰的控制方法无法有效地处理不

匹配干扰对系统性能的影响.因此,研究带有不匹配干扰的多智能体系统的抗干扰控制意义重大,但是,现有文献对具有不匹配干扰的多自主体系统的有限时间包容控制研究鲜有报道.

本文研究由多个领导者引导的具有不匹配干扰的二阶多自主体系统的有限时间包容控制问题.本文的创新点是在多智能体系统受到不匹配干扰影响的情况下,提出了有限时间的非线性包容控制算法,研究具有不匹配干扰的多自主体系统的群集运动.

## 1 代数图论

设  $G = (V, E, A)$  是  $n$  个节点的加权无向图,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  表示其节点的集合,其中节点的下标是一个有限集合  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ;  $E \subseteq V \times V$  表示边的集合,  $e_{ij} = (v_i, v_j)$  表示图  $G$  的边;  $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为节点邻接矩阵,对于  $\forall i \in I$ , 都有  $a_{ii} = 0$ ; 对于  $e_{ij} \in E$ , 都有  $a_{ij} > 0$ , 否则  $a_{ij} = 0$ . 节点  $i$  的邻居集合定义为  $N_i = \{v_j \in V \mid (v_i, v_j) \in E\}$ . 令  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为图  $G$  的度矩阵,其中,  $d_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 拓扑图  $G$  的 Laplacian 矩阵定义为:  $L = D - A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ . 如果节点  $v_i$  和  $v_j$  之间路径存在,那么则称  $v_i$  和  $v_j$  之间是可达的,否则,称  $v_i$  和  $v_j$  之间是不可达的.

**定义 1**<sup>[19]</sup>. 设集合  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  为实向量空间  $\mathbf{R}^n$  的子集,  $X$  的凸包定义为  $CO(X) = \{\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \mid x_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1\}$ .

**定义 2**<sup>[20]</sup>. 考虑如下连续非线性系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n \quad (1)$$

其中连续向量流  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T$  与带有扩张  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ ,  $r_i > 0$  的度  $\kappa \in \mathbf{R}$  是齐次的,如果对于任意的  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  都有

$$f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{\kappa+r_i} f_i(\mathbf{x}), \\ i = 1, 2, \dots, n$$

**引理 1**<sup>[21]</sup>. 设系统 (1) 与带有扩张  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  的度  $\kappa \in \mathbf{R}$  是齐次的,函数  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  是连续的,且  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  是它的一个渐近稳定平衡点,如果齐次度  $\kappa < 0$ ,则该系统就是有限时间稳定的.

**引理 2**. 任意实数  $x \geq 0$  和  $y \geq 0$ , 都有  $xy \leq x^a/a + y^b/b$ , 其中,  $a > 1$ ,  $b > 1$ , 且  $1/a + 1/b = 1$ .

**证明.** 若  $xy = 0$ , 结论显然成立. 以下设  $x > 0$ ,  $y > 0$ . 构造函数  $\varphi(y) = x^a/a + y^b/b - xy$ , 得到  $\dot{\varphi}(y) = y^{b-1} - x$ , 求得唯一驻点  $y_0 = x^{\frac{1}{b-1}} = x^{a-1} = x^{\frac{a}{b}}$ . 又因为  $\ddot{\varphi}(y) = (b-1)y^{b-2} > 0$ , 故  $\varphi(y)$  在  $y = y_0$  取极小值,且是最小值. 由于  $\varphi(y_0) = x^a/a +$

$y^b/b - xx^{a-1} = x^a - x^a = 0$ , 故  $\varphi(y) \geq \varphi(y_0) = 0$ , 即  $xy \leq x^a/a + y^b/b$ .  $\square$

**引理 3.** 对于  $n$  维向量  $\alpha$  和  $\beta$ , 正定矩阵  $R$ , 有  $\alpha^T R \beta \leq \alpha^T R \alpha / 2 + \beta^T R \beta / 2$ .

**证明.** 定义  $n$  维实内积空间中向量内积为  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ , 则向量内积  $(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0$ , 即  $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0$ . 得到  $\mathbf{x}^T \mathbf{x} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{y} \geq 0$ , 令正定矩阵  $R = \mathbf{c}^T \mathbf{c}$ , 向量  $\mathbf{x} = \mathbf{c}\alpha$ , 向量  $\mathbf{y} = \mathbf{c}\beta$ , 故可得到  $\alpha^T R \beta \leq \alpha^T R \alpha / 2 + \beta^T R \beta / 2$ .  $\square$

## 2 具有不匹配干扰的有限时间包容控制

考虑带有不匹配干扰的  $n$  个跟随者和  $m$  个领导者的二阶多自主系统, 假设多自主系统的动力学方程为:

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = p_i(t) + d_{i1}(t) \\ \dot{p}_i(t) = u_i(t) + d_{i2}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2a)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = p_i(t) \\ \dot{p}_i(t) = 0, \quad i = n+1, n+2, \dots, n+m \end{cases} \quad (2b)$$

其中,  $q_i(t)$  为智能体  $i$  的位置状态,  $u_i(t)$  为智能体  $i$  的控制输入,  $p_i(t)$  为对应的速度状态,  $d_{i1}(t)$ 、 $d_{i2}(t)$  分别为不匹配干扰和匹配干扰.  $F = \{1, 2, \dots, n\}$  为  $n$  个跟随者智能体集合,  $K = \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$  为  $m$  个动态领导者集合.

**假设 1.** 在系统 (2a) 中, 干扰  $d_{i1}(t)$  二阶可微,  $d_{i2}(t)$  一阶可微, 且  $\dot{d}_{i1}(t)$  和  $\dot{d}_{i2}(t)$  是 Lipschitz 连续的.

**注 1.** 实际工程应用中, 有很多种干扰满足假设 1, 例如, 常值干扰和谐波干扰等. 本文中的干扰不仅可以连续可微, 也可以分段可微.

**定义 3.** 图  $G$  的 Laplacian 矩阵为  $L$ ,  $L = \begin{bmatrix} L_F & L_{Fk} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 其中跟随者的 Laplacian 矩阵  $L_F$  为  $n$  阶矩阵,  $L_{Fk}$  为  $n \times m$  阶矩阵.

令  $x_i(t) = q_i(t)$ ,  $v_i(t) = p_i(t) + d_{i1}(t)$ ,  $d_i(t) = \dot{d}_{i1}(t) + d_{i2}(t)$ , 则系统 (2) 可以转化为系统 (3).

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) + d_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3a)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = 0, \quad i = n+1, n+2, \dots, n+m \end{cases} \quad (3b)$$

可见, 系统 (2) 与系统 (3) 具有相同的动态特性.

**引理 4**<sup>[22]</sup>. 如果系统 (3a) 中干扰  $d_i(t)$  是一阶可微的, 且  $\dot{d}_i(t)$  是 Lipschitz 连续的, Lipschitz 常

数  $\beta$  已知, 针对系统 (3a) 设计如下非线性观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = h_0 = \hat{v}_i - \lambda_0 \beta^{\frac{1}{3}} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(\hat{x}_i - x_i) \\ \dot{\hat{v}}_i = h_1 = u_i + \hat{d}_i - \lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\hat{v}_i - h_0) \\ \dot{\hat{d}}_i = -\lambda_2 \beta \text{sgn}(u_i + \hat{d}_i - h_1) \end{cases}$$

其中增益  $\lambda_0 > 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $\hat{x}_i$ ,  $\hat{v}_i$ ,  $\hat{d}_i$  分别是  $x_i$ ,  $v_i$ ,  $d_i$  的估计值, 则该观测器是有限时间收敛的. 设  $\text{sig}^\alpha(x) = |x|^\alpha \text{sgn}(x)$ , 其中,  $\text{sgn}(\cdot)$  表示标准的符号函数, 即当  $x > 0$  时,  $\text{sgn}(x) = 1$ ; 当  $x = 0$  时,  $\text{sgn}(x) = 0$ ; 当  $x < 0$  时,  $\text{sgn}(x) = -1$ .

设智能个体之间信息交互度量函数为:

$$u_{i1}(t) = l_1 \text{sig} \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - x_i) \right]^{\alpha_1} \quad (4)$$

其中,  $a_{ij}$  表示智能体  $i$  和  $j$  的连接权值,  $0 < \alpha_1 < 1$ ,  $l_1 > 0$ .

**引理 5**<sup>[23]</sup>. 假设具有多个领导者的二阶系统 (3)  $n$  个跟随者的通信拓扑为无向图, 则 Laplacian 矩阵中的  $L_F$  为正定矩阵,  $-L_F^{-1} L_{Fk}$  为非负矩阵且每行元素和为 1.

**引理 6.** 令  $\mathbf{X}_F = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $\mathbf{X}_k = [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]^T$ , 若有  $\mathbf{X}_F \rightarrow -L_F^{-1} L_{Fk} \mathbf{X}_k$ , 则网络化系统可以实现包容控制.

**证明.** 由引理 5 可知,  $-L_F^{-1} L_{Fk}$  为非负矩阵且每行元素和为 1, 满足定义 1 中的条件, 且  $\mathbf{X}_k = [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]^T$ , 则  $-L_F^{-1} L_{Fk} \mathbf{X}_k$  位于领导者围成的凸包内. 因此, 若有  $\mathbf{X}_F \rightarrow -L_F^{-1} L_{Fk} \mathbf{X}_k$ , 那么网络化系统就可以实现包容控制.  $\square$

令  $\bar{\mathbf{X}}_F = \mathbf{X}_F + L_F^{-1} L_{Fk} \mathbf{X}_k$ ,  $\bar{\mathbf{V}}_F = \mathbf{V}_F + L_F^{-1} L_{Fk} \mathbf{V}_k$ ,  $\bar{\mathbf{X}}_F = \mathbf{V}_F$ ,  $\mathbf{u}_1 = [u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}]^T$ , 其中,  $\mathbf{X}_F = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $\mathbf{X}_k = [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]^T$ ,  $\mathbf{V}_F = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ ,  $\mathbf{V}_k = [v_{n+1}, \dots, v_{n+m}]^T$ , 则式 (4) 可以简单变化为:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= l_1 \text{sig}[-(L_F \mathbf{X}_F + L_{Fk} \mathbf{X}_k)]^{\alpha_1} = \\ &= l_1 \text{sig}[-L_F(\mathbf{X}_F + L_F^{-1} L_{Fk} \mathbf{X}_k)]^{\alpha_1} = \\ &= l_1 \text{sig}[-(L_F \bar{\mathbf{X}}_F)]^{\alpha_1} \end{aligned} \quad (5)$$

令  $\mathbf{w} = L_F \bar{\mathbf{X}}_F$ , 则式 (5) 变为

$$\mathbf{u}_1 = -l_1 \text{sig}(\mathbf{w})^{\alpha_1} \quad (6)$$

**定理 1.** 由  $n$  个跟随者和  $m$  个领导者构成具有不匹配干扰的二阶多自主系统 (2) 满足假设 1, 当  $n$  个跟随者组成的网络拓扑图是无向连通的, 至少有一个跟随者能够感应到领导者的信息, 可以设计一个控制器, 使得二阶多自主系统 (2) 在有限时间内实现包容控制.

证明. 构造控制器

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) - \hat{\mathbf{d}}(t) \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{u}_2(t) = -l_2 \text{sig}(\widehat{\mathbf{V}}_F)^{\alpha_2}$ ,  $\hat{\mathbf{d}}(t) = (\hat{d}_1(t), \hat{d}_2(t), \dots, \hat{d}_n(t))^T$ ,  $\alpha_2 = 2\alpha_1/(1 + \alpha_1)$ ,  $l_2 > 0$ .  $\widehat{\mathbf{V}}_F$ ,  $\hat{\mathbf{d}}$  分别为  $\overline{\mathbf{V}}_F$ ,  $\mathbf{d}$  的估计值. 其中,  $\overline{\mathbf{V}}_F = [\overline{v}_1(t), \overline{v}_2(t), \dots, \overline{v}_n(t)]^T$ ,  $\mathbf{d}(t) = [d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t)]^T$ , 它们可由观测器 (8) 得到:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{w}}} = \mathbf{z}_0 = \widehat{\mathbf{V}}_F - \lambda_0 \beta^{\frac{1}{3}} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{w}) \\ \dot{\widehat{\mathbf{V}}}_F = \mathbf{z}_1 = \mathbf{u} + \hat{\mathbf{d}} - \lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\widehat{\mathbf{V}}_F - \mathbf{z}_0) \\ \dot{\hat{\mathbf{d}}} = -\lambda_2 \beta \text{sgn}(\mathbf{u} + \hat{\mathbf{d}} - \mathbf{z}_1) \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $\beta$  是  $\hat{\mathbf{d}}$  的 Lipschitz 常数,  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  分别是观测器的增益. 所以控制器为:

$$\mathbf{u} = -l_1 \text{sig}(\mathbf{w})^{\alpha_1} - l_2 \text{sig}(\widehat{\mathbf{V}}_F)^{\alpha_2} - \hat{\mathbf{d}} \quad (9)$$

定义观测误差  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \overline{\mathbf{V}}_F - \widehat{\mathbf{V}}_F$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}}$ , 可得到观测误差系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_1 = L_F \overline{\mathbf{V}}_F - \widehat{\mathbf{V}}_F - \lambda_0 \beta^{\frac{1}{3}} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(\mathbf{e}_1) \\ \dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_3 - \lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(L_F \overline{\mathbf{V}}_F - \widehat{\mathbf{V}}_F - \mathbf{e}_1) \\ \dot{\mathbf{e}}_3 = -\lambda_2 \beta \text{sgn}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2) + \dot{\mathbf{d}} \end{cases} \quad (10)$$

由引理 4 可知, 存在大于 0 的增益  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ , 使得观测器误差系统 (10) 有限时间稳定, 即存在一个时间常数  $T$ , 使得  $\mathbf{e}_1(t) = \mathbf{e}_2(t) = \mathbf{e}_3(t) = 0$ ,  $\forall t \geq T$ .

闭环系统 (3), (8), (9) 的有限时间稳定性分析可以分为两个部分: 一方面, 存在时间  $T$ , 当  $t \in (0, T]$  时,  $\overline{\mathbf{X}}_F$  和  $\overline{\mathbf{V}}_F$  是否有界的; 另一方面,  $t > T$  时, 闭环系统 (3), (9) 在有限时间内是否收敛. 注意到, 当  $t \in (0, T]$  时,  $|\overline{\mathbf{V}}_F - \widehat{\mathbf{V}}_F|$  有界, 因此  $\widehat{\mathbf{V}}_F$  的有界性等价于  $\overline{\mathbf{V}}_F$  的有界性.

首先证明当  $t \in (0, T]$  时,  $\overline{\mathbf{X}}_F$  和  $\overline{\mathbf{V}}_F$  的有界性. 选取 Lyapunov 函数  $Q = \frac{l_1}{1 + \alpha_1} |\mathbf{w}|^{1 + \alpha_1} + \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{V}}_F^T L_F \widehat{\mathbf{V}}_F$ , 对其进行求导:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= l_1 |\mathbf{w}|^{\alpha_1} \cdot |\dot{\mathbf{w}}| + \widehat{\mathbf{V}}_F^T L_F \dot{\widehat{\mathbf{V}}}_F = \\ &= l_1 |\mathbf{w}|^{\alpha_1} \cdot \text{sgn}(\mathbf{w}) \cdot \dot{\mathbf{w}} + \\ &= \widehat{\mathbf{V}}_F^T L_F (-l_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\mathbf{w}) - l_2 \text{sig}^{\alpha_2}(\widehat{\mathbf{V}}_F) - \\ &= \lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\widehat{\mathbf{V}}_F - \mathbf{z}_0)) = \\ &= l_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\mathbf{w}^T) \cdot L_F (\mathbf{e}_2 + \widehat{\mathbf{V}}_F) - \\ &= l_1 \widehat{\mathbf{V}}_F^T L_F \text{sig}^{\alpha_1}(\mathbf{w}) - l_2 \widehat{\mathbf{V}}_F^T L_F \text{sig}^{\alpha_2}(\widehat{\mathbf{V}}_F) - \\ &= \widehat{\mathbf{V}}_F^T L_F \lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\widehat{\mathbf{V}}_F - \mathbf{z}_0) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= l_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\mathbf{w}^T) \cdot L_F \mathbf{e}_2 - l_2 \widehat{\mathbf{V}}_F^T L_F \text{sig}^{\alpha_2}(\widehat{\mathbf{V}}_F) - \\ &= \widehat{\mathbf{V}}_F^T L_F \lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\widehat{\mathbf{V}}_F - \mathbf{z}_0) \leq \\ &= \frac{l_1 \alpha_1}{1 + \alpha_1} |\mathbf{w}|^{1 + \alpha_1} + \frac{l_1}{1 + \alpha_1} |L_F \mathbf{e}_2|^{1 + \alpha_1} - \\ &= l_2 |\widehat{\mathbf{V}}_F^T | \text{sgn}(\widehat{\mathbf{V}}_F^T) L_F \text{sgn}(\widehat{\mathbf{V}}_F) | \widehat{\mathbf{V}}_F |^{\alpha_2} - \\ &= \widehat{\mathbf{V}}_F^T L_F \lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\lambda_0 \beta^{\frac{1}{3}} \text{sig}^{\frac{2}{3}}(\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{w})) \end{aligned}$$

上式的最后不等式推理应用了引理 2. 由于

$$|\widehat{\mathbf{V}}_F^T | \text{sgn}(\widehat{\mathbf{V}}_F^T) L_F \text{sgn}(\widehat{\mathbf{V}}_F) | \widehat{\mathbf{V}}_F |^{\alpha_2} \geq \lambda_{\min}(L_F) |\widehat{\mathbf{V}}_F|^{1 + \alpha_2}$$

应用引理 3 可得:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &\leq \frac{l_1 \alpha_1}{1 + \alpha_1} |\mathbf{w}|^{1 + \alpha_1} + \frac{l_1}{1 + \alpha_1} |L_F \mathbf{e}_2|^{1 + \alpha_1} - \\ &= \lambda_{\min}(L_F) l_2 |\widehat{\mathbf{V}}_F|^{1 + \alpha_2} + \\ &= \widehat{\mathbf{V}}_F^T L_F \lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda_0 \beta^{\frac{1}{3}} (1 + \mathbf{e}_1)) \leq \\ &= \frac{l_1 \alpha_1}{1 + \alpha_1} |\mathbf{w}|^{1 + \alpha_1} + \frac{l_1}{1 + \alpha_1} |L_F \mathbf{e}_2|^{1 + \alpha_1} - \\ &= \lambda_{\min}(L_F) l_2 |\widehat{\mathbf{V}}_F|^{1 + \alpha_2} + \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{V}}_F^T L_F \widehat{\mathbf{V}}_F + \\ &= \frac{1}{2} [\lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda_0 \beta^{\frac{1}{3}} (1 + \mathbf{e}_1))]^T \times \\ &= L_F [\lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda_0 \beta^{\frac{1}{3}} (1 + \mathbf{e}_1))] \leq Q + \\ &= \frac{l_1}{1 + \alpha_1} |L_F \mathbf{e}_2^{\max}|^{1 + \alpha_1} - \lambda_{\min}(L_F) l_2 |\widehat{\mathbf{V}}_F|^{1 + \alpha_2} + \\ &= \frac{1}{2} [\lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda_0 \beta^{\frac{1}{3}} (1 + \mathbf{e}_1^{\max}))]^T \times \\ &= L_F [\lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda_0 \beta^{\frac{1}{3}} (1 + \mathbf{e}_1^{\max}))] \leq \\ &= Q + \frac{l_1}{1 + \alpha_1} |L_F \mathbf{e}_2^{\max}|^{1 + \alpha_1} + \\ &= \frac{1}{2} [\lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda_0 \beta^{\frac{1}{3}} (1 + \mathbf{e}_1^{\max}))]^T \times \\ &= L_F [\lambda_1 \beta^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda_0 \beta^{\frac{1}{3}} (1 + \mathbf{e}_1^{\max}))] \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{e}_1^{\max}, \mathbf{e}_2^{\max}$  分别是  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  的上界, 由引理 4 可知, 存在时间  $T$ , 在  $t \in (0, T]$  时,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  是有限时间收敛的. 由上式可知,  $\mathbf{w}$  和  $\widehat{\mathbf{V}}_F$  是有界的, 即  $\overline{\mathbf{X}}_F$  和  $\overline{\mathbf{V}}_F$  是有界的.

再证明全局有限时间稳定, 当  $t > T$  时,  $\mathbf{e}_1(t) = \mathbf{e}_2(t) = \mathbf{e}_3(t) = 0$ , 则控制器 (9) 变为  $\bar{u}_i(t) = l_1 \text{sig}[\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j - x_i)]^{\alpha_1} - l_2 \text{sig}(\bar{v}_i)^{\alpha_2}$ , 所以系统 (3) 变为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = \bar{u}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (11a)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = 0, \quad i = n+1, n+2, \dots, n+m \end{cases} \quad (11b)$$

选取与第一步相同的 Lyapunov 函数  $Q$ , 求得后得:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -l_2 \widehat{\mathbf{V}}_F^T L_F \text{sig}^{\alpha_2}(\widehat{\mathbf{V}}_F) \leq \\ &\quad -\lambda_{\min}(L_F) l_2 |\widehat{\mathbf{V}}_F|^{1+\alpha_2} \leq 0 \end{aligned}$$

当  $\dot{Q} \equiv 0$  时, 有  $\widehat{\mathbf{V}}_F = 0$ , 因此  $\dot{\widehat{\mathbf{V}}}_F = 0$ . 而  $\dot{\widehat{\mathbf{V}}}_F = -l_1 \text{sig}(\mathbf{w})^{\alpha_1} - l_2 \text{sig}(\widehat{\mathbf{V}}_F)^{\alpha_2}$ ,  $\mathbf{w} = L_F \overline{\mathbf{X}}_F$ , 当  $\dot{\widehat{\mathbf{V}}}_F = 0$  时, 有  $\mathbf{w} = 0$ , 即  $\overline{\mathbf{X}}_F = 0$ . 由 LaSalle's 不变集原理可知,  $\overline{\mathbf{X}}_F, \overline{\mathbf{V}}_F$  全局渐近收敛到 0. 由  $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{X}}_F(t) = 0$ , 可以得到  $\mathbf{X}_F \rightarrow -L_F^{-1} L_{Fk} \mathbf{X}_k$ . 再由  $\mathbf{e}_2 = \overline{\mathbf{V}}_F - \widehat{\mathbf{V}}_F$ ,  $\mathbf{e}_2 = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{V}}_F(t) = 0$ , 可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{V}}_F(t) = 0$ , 即  $\mathbf{V}_F \rightarrow -L_F^{-1} L_{Fk} \mathbf{V}_k$ . 所以由引理 6 可知, 系统 (2) 实现了包容控制.

下面分析齐次性系统的有限时间稳定, 对于系统 (11), 假设

$$\begin{cases} f_1(\overline{\mathbf{X}}_F, \overline{\mathbf{V}}_F) = \overline{\mathbf{V}}_F \\ f_2(\overline{\mathbf{X}}_F, \overline{\mathbf{V}}_F) = l_1 \text{sig}[-(L_F \overline{\mathbf{X}}_F)]^{\alpha_1} - l_2 \text{sig}(\widehat{\mathbf{V}}_F)^{\alpha_2} \end{cases}$$

取  $r_1 = 2, r_2 = 1 + \alpha_1, \kappa = \alpha_1 - 1$ , 由定义 2 可得

$$f_1(\varepsilon^{r_1} \overline{\mathbf{X}}_F, \varepsilon^{r_2} \overline{\mathbf{V}}_F) = \varepsilon^{r_2} \overline{\mathbf{V}}_F = \varepsilon^{\kappa+r_1} f_1(\overline{\mathbf{X}}_F, \overline{\mathbf{V}}_F)$$

$$f_2(\varepsilon^{r_1} \overline{\mathbf{X}}_F, \varepsilon^{r_2} \overline{\mathbf{V}}_F) = l_1 \text{sig}[-(L_F \varepsilon^{r_1} \overline{\mathbf{X}}_F)]^{\alpha_1} -$$

$$l_2 \text{sig}(\varepsilon^{r_2} \widehat{\mathbf{V}}_F)^{\alpha_2} =$$

$$\varepsilon^{r_1 \alpha_1} [l_1 \text{sig}(-(L_F \overline{\mathbf{X}}_F))^{\alpha_1}] -$$

$$\varepsilon^{r_2 \alpha_2} l_2 \text{sig}(\widehat{\mathbf{V}}_F)^{\alpha_2}$$

而  $\varepsilon^{r_1 \alpha_1} = \varepsilon^{r_2 \alpha_2} = \varepsilon^{2\alpha_1}$ , 所以

$$f_2(\varepsilon^{r_1} \overline{\mathbf{X}}_F, \varepsilon^{r_2} \overline{\mathbf{V}}_F) = \varepsilon^{2\alpha_1} [l_1 \text{sig}(-(L_F \overline{\mathbf{X}}_F))^{\alpha_1} -$$

$$l_2 \text{sig}(\widehat{\mathbf{V}}_F)^{\alpha_2}] = \varepsilon^{\kappa+r_2} f_2(\overline{\mathbf{X}}_F, \overline{\mathbf{V}}_F)$$

此多智能体系统与带有扩张  $(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_n,$

$\underbrace{\alpha_1 + 1, \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_1 + 1}_n)$  的度  $\kappa = \alpha_1 - 1$  是同

次的. 由引理 1 可知, 系统 (11) 是全局有限时间稳定的. 因此, 多智能体系统 (3) 应用控制协议 (9) 可以实现全局有限时间包容控制, 也就是应用基于观测器的协同控制协议 (9), 使二阶多智能体系统 (2) 在有限时间内实现包容控制.  $\square$

**注 2.** 文献 [24] 研究了二阶系统的球面编队追踪控制的几何级数增长设计, 将自适应 Backstepping 技术、几何级数增长和一致性算法结合设计

新的观测器, 对自主体在法线方向上的速度, 球面经线方向上的速度和球面纬线方向上的速度进行估计. 文献 [25] 研究了在未知的欧拉规范流场中对编队追踪运动的自适应 Backstepping 设计, 将自适应 Backstepping 技术和一致性算法结合提出了一种新的观测器, 可以对未知的流速向量进行估计. 以上两种观测器适用于流场中的编队追踪控制, 而本文所使用的观测器针对的是可以在有限时间情况下对带有不匹配干扰的系统的未知状态和干扰进行估计. 不同的观测器针对的系统不同, 各有各的优势.

### 3 仿真验证

为了验证控制器 (9) 的控制效果, 本文考虑 4 个受扰跟随者和 3 个领导者, 跟随者集合和领导者集合分别为  $F = \{1, 2, 3, 4\}$  和  $K = \{5, 6, 7\}$ , 假设多智能体系统的通信拓扑图如图 1 所示.

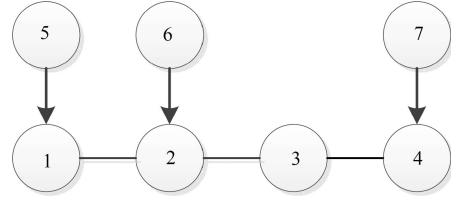


图 1 多智能体系统的通信拓扑图

Fig. 1 The communication topology of multi-agent systems

假设拓扑图所有边的权重为 1, 图的邻

接矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,

则系统的 Laplacian 矩阵为  $L =$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

控制器 (9) 的参数选取为  $l_1 = 20, l_2 = 20, \alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{2}{3}$ , 观测器 (8) 的参数选取为  $\lambda_0 = 10, \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 5, \beta = 20$ . 四个跟随者所受的不匹配干扰和匹配干扰分别选取为: 跟随者 1 的干扰  $d_{11} =$

1,  $d_{12} = 2$ ; 跟随者 2 的干扰  $d_{21} = 0.5, d_{22} = 1$ ; 跟随者 3 的干扰  $d_{31} = 0.5 \sin 2t, d_{32} = 2 \cos 2t$ ; 跟随者 4 的干扰  $d_{41} = 0.5 \cos 2t, d_{42} = 2 \sin 2t$ . 又因为  $d_i = \dot{d}_{i1} + d_{i2}$ , 所以四个跟随者最终所受的干扰为:  $d_1 = 2, d_2 = 1, d_3 = 3 \cos 2t, d_4 = \sin 2t$ . 假设四个跟随者的初始位置为:  $q_1(0) = [2 \ 0]^T, q_2(0) = [4 \ 0]^T, q_3(0) = [0 \ 2]^T, q_4(0) = [0 \ 4]^T$ , 初速度为:  $v_1(0) = [2 \ 6]^T, v_2(0) = [3 \ 8]^T, v_3(0) = [4 \ 6]^T, v_4(0) = [5 \ 5]^T$ . 三个动态领导者的初始位置为:  $q_5(0) = [6 \ 8]^T, q_6(0) = [8 \ 8]^T, q_7(0) = [8 \ 6]^T$ , 初速度为  $v_5(0) = [1 \ 1]^T, v_6(0) = [1 \ 1]^T, v_7(0) = [1 \ 1]^T$ .

系统仿真图 2 表示二阶多自主体系统跟随者的运动轨迹, 选取了  $t = 0\text{s}, t = 5\text{s}$  和  $t = 10\text{s}$  三个时间点的三个动态领导者的位置状态, 由图 2 可以看出, 四个跟随者的位置在  $t = 5\text{s}$  时已收敛到由三个领导者围成的三角形平面当中, 二阶多自主体系统在基于控制器 (9) 作用下实现了包容控制.

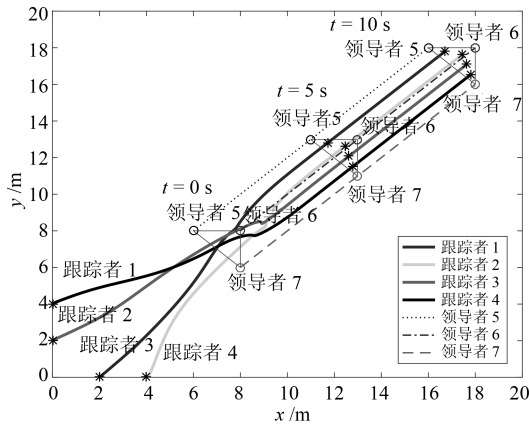


图 2 二阶多自主体系统跟随者的运动轨迹  
Fig. 2 The motion track of followers in the second-order multi-agent systems

系统仿真图 3 表示观测器 (8) 对  $w$  的估计值,  $w = L_F \bar{X}_F$ , 由图 3 可以看出,  $w$  的值在 4s 左右收敛到零, 即  $\bar{X}_F \rightarrow 0$ . 系统仿真图 4 表示观测器 (8) 对  $\bar{V}_F$  的估计值, 由图 4 可以看出,  $\bar{V}_F$  的值在 4s 左右收敛到零, 即  $\bar{V}_F \rightarrow 0$ . 由以上两个图可以得到系统在有限时间内实现了包容控制.

系统仿真图 5 表示观测器 (8) 对四个跟随者所受干扰的估计值, 由图 5 可以看出, 干扰观测器的估计值在有限时间 1s 左右都渐渐趋近于实际值, 跟随者 1 的干扰  $d_1 = 2$ , 跟随者 2 的干扰  $d_2 = 1$ , 跟随者 3 的干扰  $d_3 = 3 \cos 2t$ , 跟随者 4 的干扰  $d_4 = \sin 2t$ .

系统仿真图 6 表示观测器对干扰的观测误差, 由图 6 可以看出, 观测器 (8) 在有限时间内实现对系统所受干扰  $d$  的精确估计, 在有限时间 1.2s 左右趋近于 0, 达到了很好的观测效果.

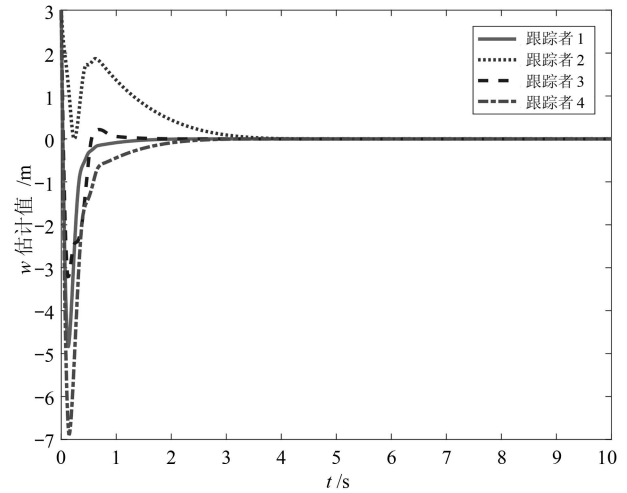


图 3  $w$  的估计值  
Fig. 3 The estimated value of  $w$

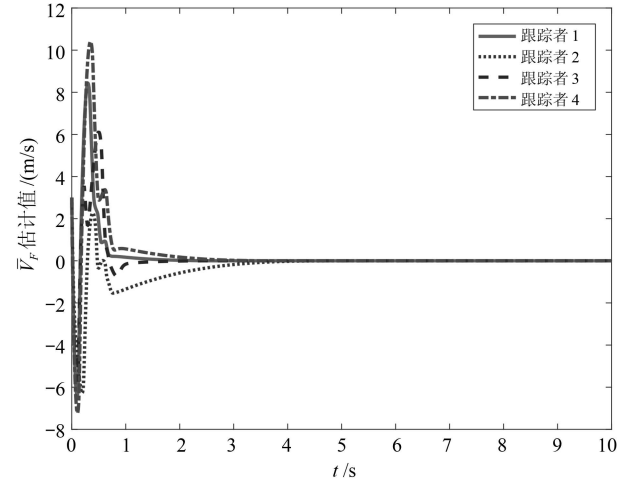


图 4 速度  $\bar{V}_F$  的估计值  
Fig. 4 The estimated value of velocity  $\bar{V}_F$

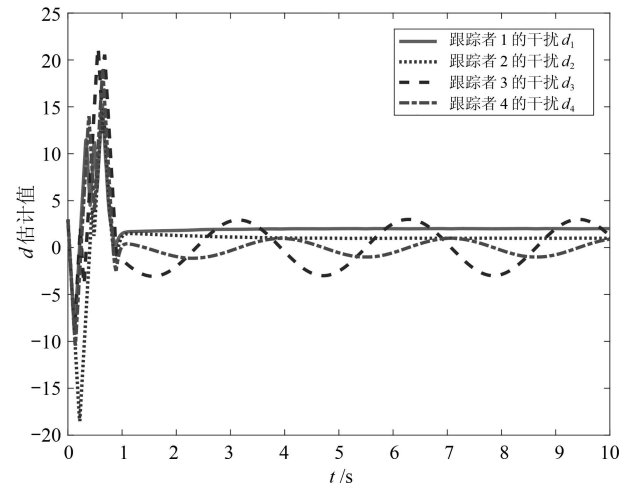
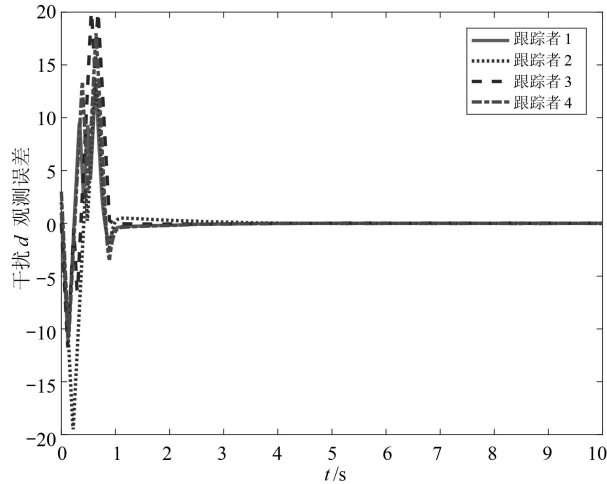


图 5 干扰  $d$  的估计值  
Fig. 5 The estimated value of disturbances  $d$

图 6 干扰  $d$  的观测误差Fig. 6 Observation error of the disturbances  $d$ 

#### 4 结论

1) 本文研究了带有不匹配干扰的具有多个动态领导者的多自主体系统的有限时间包容控制问题。为了观测不可测的系统状态, 设计了非线性观测器来估计系统不可测状态和干扰。通过使用 Lyapunov 稳定性理论、代数图论、齐次性理论等方法, 研究了多自主体系统的有限时间包容控制问题, 仿真结果验证了本文所设计的包容控制算法可以使多自主体系统在有限时间内快速收敛。

2) 下一步工作将对具有多源干扰 (含不匹配干扰) 的多自主体系统进行研究, 对系统中的不匹配干扰放宽要求, 分析高阶多自主体系统的有限时间包容控制问题。

#### References

- 1 Yoon M G. Consensus of adaptive multi-agent systems. *Systems & Control Letters*, 2017, **102**: 9–44
- 2 Yang H Y, Zhu X L, Zhang S Y. Consensus of second-order delayed multi-agent systems with leader-following. *European Journal of Control*, 2010, **16**(2): 188–199
- 3 Han F J, Gao L, Yang H Y. Sampling control on collaborative flocking motion of discrete-time system with time-delays. *Neurocomputing*, 2016, **216**: 242–249
- 4 Mu X W, Yang Z. Containment control of discrete-time general linear multi-agent systems under dynamic digraph based on trajectory analysis. *Neurocomputing*, 2016, **171**: 1655–1660
- 5 Miao G Y, Cao J D, Alsaedi A, Alsaedi F E. Event-triggered containment control for multi-agent systems with constant time delays. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, **354**(15): 6956–6977
- 6 Wang Q, Fu J J, Wang J Z. Fully distributed containment control of high-order multi-agent systems with nonlinear dynamics. *Systems & Control Letters*, 2017, **99**: 33–39
- 7 Liu Shuai, Xie Li-Hua, Zhang Huan-Shui. Mean square containment control of multi-agent systems with transmission noises. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(11): 1787–1795 (刘帅, 谢立华, 张焕水. 带噪声多自主体的均方包容控制. *自动化学报*, 2013, **39**(11): 1787–1795)
- 8 Li B, Chen Z Q, Liu Z X, Zhang C Y, Zhang Q. Containment control of multi-agent systems with fixed time-delays in fixed directed networks. *Neurocomputing*, 2016, **173**: 2069–2075
- 9 Yang Hong-Yong, Guo Lei, Zhang Yu-Ling, Yao Xiu-Ming. Movement consensus of complex fractional-order multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(3): 489–496 (杨洪勇, 郭雷, 张玉玲, 姚秀明. 复杂分数阶多自主体系统的运动一致性. *自动化学报*, 2014, **40**(3): 489–496)
- 10 Zhao L, Jia Y M. Finite-time consensus for second-order stochastic multi-agent systems with nonlinear dynamics. *Applied Mathematics & Computation*, 2015, **270**: 278–290
- 11 Fu J J, Wang J Z. Robust finite-time containment control of general linear multi-agent systems under directed communication graphs. *Journal of the Franklin Institute*, 2016, **353**(12): 2670–2689
- 12 Zhu Ya-Kun, Guan Xin-Ping, Luo Xiao-Yuan. Finite-time consensus of heterogeneous multi-agent systems with linear and nonlinear dynamics. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(11): 2618–2624 (朱亚锟, 关新平, 罗小元. 线性和非线性动态异构多自主体系统的有限时间一致性. *自动化学报*, 2014, **40**(11): 2618–2624)
- 13 Xu C J, Zheng Y, Su H S, Zeng H B. Containment for linear multi-agent systems with exogenous disturbances. *Neurocomputing*, 2015, **160**: 206–212
- 14 Yang H Y, Zhang Z X, Zhang S Y. Consensus of second-order multi-agent systems with exogenous disturbances. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2011, **21**(9): 945–956
- 15 Cao W J, Zhang J H, Ren W. Leader-follower consensus of linear multi-agent systems with unknown external disturbances. *Systems & Control Letters*, 2015, **82**: 64–70
- 16 Yang H Y, Han F J, Zhao M, Zhang S N, Yue J. Distributed containment control of heterogeneous fractional-order multi-agent systems with communication delays. *Open Physics*, 2017, **15**(1): 509–516
- 17 Sun F L, Zhu W, Li Y F, Liu F. Finite-time consensus problem of multi-agent systems with disturbance. *Journal of the Franklin Institute*, 2016, **353**(12): 2576–2587
- 18 Li S H, Du H B, Lin X Z. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics. *Automatica*, 2011, **47**(8): 1706–1712
- 19 Cheng Y Y, Du H B, He Y G, Jia R T. Robust finite-time synchronization of coupled harmonic oscillations with external disturbance. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, **352**(10): 4366–4381

- 20 Cao Y C, Ren W. Containment control with multiple stationary or dynamic leaders under a directed interaction graph. In: Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 3014–3019
- 21 Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems and Control Letters*, 1992, **19**(4): 467–473
- 22 Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of homogeneous systems. In: Proceedings of the 1997 American Control Conference. Albuquerque, NM: IEEE, 1997. 2513–2514
- 23 Meng Z Y, Ren W, You Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies. *Automatica*, 2010, **46**(12): 2092–2099
- 24 Chen Y Y, Wang Z Z, Zhang Y, Liu C L, Wang Q. A geometric extension design for spherical formation tracking control of second-order agents in unknown spatiotemporal flowfields. *Nonlinear Dynamics*, 2017, **88**(2): 1173–1186
- 25 Chen Y Y, Zhang Y, Wang Z Z. An adaptive backstepping design for formation tracking motion in an unknown Eulerian specification flowfield. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, **354**(14): 6217–6233



**李玉玲** 鲁东大学信息与电气工程学院硕士研究生. 主要研究方向为多智能体编队控制.  
E-mail: liyuling822@163.com  
(**LI Yu-Ling** Master student at the School of Information and Electrical Engineering, Ludong University. Her main research interest is the formation

control of multi-agent systems.)



**杨洪勇** 鲁东大学信息与电气工程学院教授. 主要研究方向为复杂网络, 多智能体编队控制, 智能控制, 非线性系统控制. 本文通信作者.

E-mail: hyyang@yeah.net

(**YANG Hong-Yong** Professor at the School of Information and Electrical Engineering, Ludong University. His

research interest covers complex network, the formation control of multi-agent systems, intelligence control and nonlinear system control. Corresponding author of this paper.)



**刘凡** 鲁东大学信息与电气工程学院硕士研究生. 主要研究方向为多智能体编队控制. E-mail: jsgyliufan@163.com

(**LIU Fan** Master student at the School of Information and Electrical Engineering, Ludong University. His main research interest is the formation control of multi-agent systems.)



**杨怡泽** 新南威尔士大学电气工程与信息学院硕士研究生. 主要研究方向为多智能体群集运动.

E-mail: yangyz1994@126.com

(**YANG Yi-Ze** Master student at the School of Electrical Engineering and Telecommunications, The University of New South Wales. His main research

interest is the flocking motion of multi-agent systems.)