

# 解最优控制问题结合同伦法的自适应拟谱方法

秦廷华<sup>1</sup>

**摘要** 针对弱间断最优控制问题和 Bang-Bang 最优控制问题, 提出一种结合同伦法的自适应拟谱方法. Chebyshev 拟谱方法转换原问题成为非线性规划问题. 基于同伦法思想, 同伦参数改变路径约束的界限, 得到一系列比较光滑的最优控制问题. 通过解这些问题得到原问题的不光滑解. 文中证明了弱间断情况下数值解的收敛性. 依据这收敛性和同伦参数, 误差指示量可以捕捉不光滑点. 本文方法与其他方法在数值算例中的对比表明, 本文方法在精度和效率上都有明显优势.

**关键词** 最优控制问题, 自适应拟谱方法, 同伦法, 弱间断解, Bang-Bang 控制

**引用格式** 秦廷华. 解最优控制问题结合同伦法的自适应拟谱方法. 自动化学报, 2019, 45(8): 1579–1585

**DOI** 10.16383/j.aas.2018.c170551

## An Adaptive Pseudospectral Method Combined With Homotopy Method for Solving Optimal Control Problems

QIN Ting-Hua<sup>1</sup>

**Abstract** Aiming at the weakly discontinuous and Bang-Bang optimal control problems, an adaptive pseudospectral method combined with the homotopy method is proposed. The Chebyshev pseudospectral method transforms the original problems into the resulting nonlinear programming problems. Based on the idea of homotopy method, the homotopic parameters change the bounds on path constraints to obtain a series of smoother optimal control problems. The nonsmooth original problems are solved by starting from the smoother problems. The convergence of numerical solutions is proved for the weakly discontinuous problems. With the help of the convergence and the homotopic parameters, an error indicator is able to capture the nonsmooth points. Several numerical examples are given to compare the proposed method with other methods. The comparison shows that the proposed method has obvious advantages in terms of accuracy and efficiency.

**Key words** Optimal control problem, adaptive pseudospectral method, homotopy method, weakly discontinuous solution, Bang-Bang control

**Citation** Qin Ting-Hua. An adaptive pseudospectral method combined with homotopy method for solving optimal control problems. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(8): 1579–1585

最优控制问题广泛存在于科学研究和实际工程各领域, 因为解析解通常难以找到, 所以许多学者致力于研究处理该问题的 3 类数值方法<sup>[1–2]</sup>: 直接法、间接法和混合法.

拟谱方法是直接法的一种, 对光滑问题具有指数收敛率<sup>[3]</sup>是其诱人的优点. 因为大量的实际问题有间断或弱间断<sup>[4]</sup>的不光滑解, 例如生产和维护最优控制问题, 所以有学者关注这一优点对应的反面缺点, 即不光滑点妨碍了拟谱方法的快速收敛<sup>[5]</sup>. 已经有各种自适应拟谱方法<sup>[5–8]</sup>可以捕捉不光滑点以改善逼近效果, 它们大都依据数值解提供的后验估

计来捕捉不光滑点, 然后主要用两种手段来改善数值解精度, 一是设置网格点在不光滑点可能的位置附近, 二是依据估计的各区间光滑程度来调整区间内逼近多项式次数.

一些学者致力于同伦法解最优控制问题. 文献 [9–10] 将同伦法的基本思想简单解释为“构造一个与原问题有联系但是相对容易求解的辅助问题, 从求解构造的容易问题出发, 通过迭代的方式逐步过渡到原来棘手的问题”.

文献 [11] 研究燃料最优控制问题, 先用拟谱法解光滑的最优控制问题, 所得结果用于构造和估计协态, 并将该协态做为间接法解题的初始猜测, 然后用同伦法将光滑问题逐渐转变为不光滑的原问题, 在此过程中用间接法解题. 文献 [11] 的思路还被文献 [12] 用于研究时间最优控制问题. 文献 [13] 也采用类似的思路, 研究的问题模型更为特殊, 但是所得的协态正好为零, 这为同伦法和间接法解这类特殊的题带来便利.

文献 [10] 用同伦法将光滑的最优控制问题逐渐

收稿日期 2017-10-09 录用日期 2017-12-23  
Manuscript received October 9, 2017; accepted December 23, 2017

重庆交通大学校内科学基金课题 (15JDKJC-A010) 资助  
Supported by Science Foundation Project of Chongqing Jiaotong University (15JDKJC-A010)

本文责任编辑 张卫东  
Recommended by Associate Editor ZHANG Wei-Dong

1. 重庆交通大学数学与统计学院 重庆 400074  
1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074

转变为不光滑的原问题,产生的若干最优控制问题都用直接法中的自适应控制参数化方法 (Adaptive control parametrization method) 求解. 文献 [14] 研究月面上升最优控制问题,通过调整问题本身的参数得到易于求解的问题,然后用拟谱法和同伦法求解.

本文的思路来自以下三点:

1) 文献 [8] 在约束界限内寻找数列收敛到约束界限,在数值解等于数列各元素时求根,利用数值解的收敛性,在根中寻找数列收敛到弱间断点. 本文采用该思路,而且用同伦法思想放宽约束界限,这又带来两个好处,一是可以在原问题约束界限之外寻找数列收敛到约束界限,二是放宽约束界限可能增加问题的光滑性,避免直接处理不光滑的原问题.

2) 文献 [1] 提到: Grigoriev 用同伦法和间接法“先放松对推力幅值的限制进行求解,再慢慢减少最大推力幅值进行求解,用上一步的解作为下一步求解的初值,直到得出符合推力幅值约束的结果”. 本文采用同样做法,但使用的是同伦法和直接法.

3) 前述其他同伦法文献与文献 [14] 不同,均调整人为加入的参数,这些参数会改变原问题形式,例如文献 [10] 需要构造一个易解的最优控制问题与人为加入的参数一起合并到原问题中,其他文献往往也要改变目标函数的形式,文献 [14] 仅调整问题本身的参数显然更为简单. 本文将原问题自身的约束界限做为同伦参数予以调整,避免了改变原问题形式.

本文方法的主要思想是:对约束上下界先放松再慢慢收紧,用拟谱法解由此产生的多个最优控制问题,并将上一个最优控制问题的解做为下一个求解的初值,直到得出符合约束上下界的结果;与此同时,用数列收敛到约束上下界,在约束方程等于数列各元素时求根,在这些根中寻找数列收敛到不光滑点,据此实现自适应调整网格点分布和逼近多项式次数.

## 1 问题描述和离散

### 1.1 问题描述

本文主要研究 Bolza 型最优控制问题 (问题 B). 首先引入若干记号,令  $M_x, M_u, M_e$  和  $M_h$  是正整数,  $a$  和  $b$  是实数且  $a < b$ . 问题 B 的形式如下:

$$\min J[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = E(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)) + \int_a^b F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)) = \mathbf{0}_e \quad (3)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq \mathbf{0}_h \quad (4)$$

其中,控制函数  $\mathbf{u}(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{M_u}$  是弱间断<sup>[4]</sup>函数或 Bang-Bang 控制,  $\mathbf{x}(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{M_x}$  是状态函数,  $\dot{\mathbf{x}}$  表示  $\mathbf{x}$  关于自变量  $t$  的导数;  $\mathbf{0}_e = (0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^{M_e}$ ,  $\mathbf{0}_h = (0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^{M_h}$ ; 已知的函数  $F : \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_u} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $E : \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_x} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{f} : \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_u} \rightarrow \mathbf{R}^{M_x}$ ,  $\mathbf{e} : \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_x} \rightarrow \mathbf{R}^{M_e}$  和  $\mathbf{h} : \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_u} \rightarrow \mathbf{R}^{M_h}$  关于变元  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{u}$  连续可微.

为了使用同伦方法,引入非负常数组成的向量  $\mathbf{c}_h = (c_{1,h}, \dots, c_{M_h,h})^T$ , 问题 B 的式 (4) 相应修改为

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq \mathbf{c}_h \quad (5)$$

于是,式 (1)~(4) 构成的问题 B 被修改为式 (1)~(3) 和式 (5) 构成的问题 B( $\mathbf{c}_h$ ), 其中  $\mathbf{c}_h$  即本文的同伦参数,用于调整约束界限.

### 1.2 问题离散

分割区间  $(a, b)$  为  $K$  个子区间  $I_k = (t_{k-1}, t_k)$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b$ ,  $\bar{I}_k = [t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = 1, \dots, K$ . 令  $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_K)$  是正整数组成的向量,  $\mathcal{P}_{M_k}(\bar{I}_k)$  是  $\bar{I}_k$  上不超过  $M_k$  次多项式组成的空间,令  $C[a, b]$  表示  $[a, b]$  上连续函数构成的空间. 定义分段多项式空间如下:

$$V_M^K = \{y \in C[a, b] : y|_{\bar{I}_k} \in \mathcal{P}_{M_k}(\bar{I}_k), k = 1, \dots, K\}$$

在每个闭区间  $\bar{I}_k = [t_{k-1}, t_k]$  内,离散问题用  $M_k + 1$  个 Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL) 点<sup>[8]</sup>做为配置点,记为  $\{t_0^{M_k}, \dots, t_{M_k}^{M_k}\}$ . 对于任意整数  $n \geq 1$  和  $n$  维列向量  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\|\mathbf{v}\|_\infty$  表示最大模.

问题 B( $\mathbf{c}_h$ ) 可转化为  $K$  段连续最优控制问题,每段用 Chebyshev 拟谱方法离散,得到一个非线性规划问题,即如下形式的离散问题 B<sup>M</sup>( $\delta^M, \mathbf{c}_h$ )

$$\begin{aligned} \min J^M[\mathbf{x}^M, \mathbf{u}^M] &= E(\mathbf{x}^M(t_0^{M_1}), \mathbf{x}^M(t_{M_K}^{M_K})) + \\ &\sum_{k=1}^K \frac{t_k - t_{k-1}}{2} \sum_{n=0}^{M_k} F(\mathbf{x}^M(t_n^{M_k}), \mathbf{u}^M(t_n^{M_k})) \omega_n^{M_k} \\ \text{s.t. } \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^M(t_n^{M_k}), \mathbf{u}^M(t_n^{M_k})) - \dot{\mathbf{x}}^M(t_n^{M_k})\|_\infty &\leq \delta^M \\ n &= 1, \dots, M_k - 1, k = 1, \dots, K \\ \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^M(t_{k-1}), \mathbf{u}^M(t_{k-1})) - \dot{\mathbf{x}}^M(t_{k-1}^+)\|_\infty &\leq \delta^M \\ k &= 1, \dots, K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^M(t_k), \mathbf{u}^M(t_k)) - \dot{\mathbf{x}}^M(t_k^-)\|_\infty &\leq \delta^M \\ k &= 1, \dots, K \\ \|\mathbf{e}(\mathbf{x}^M(t_0^{M_1}), \mathbf{x}^M(t_{M_K}^{M_K}))\|_\infty &\leq \delta^M \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}^M(t_n^{M_k}), \mathbf{u}^M(t_n^{M_k})) &\leq \delta^M \cdot \mathbf{1}_h + \mathbf{c}_h \\ n &= 0, 1, \dots, M_k, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

其中, 对于  $\forall i \in \{1, \dots, M_x\}$  和  $\forall j \in \{1, \dots, M_u\}$  有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^M(t) &= (x_1^M(t), \dots, x_{M_x}^M(t))^T, \quad x_i^M(t) \in V_{M_x}^K \\ \mathbf{u}^M(t) &= (u_1^M(t), \dots, u_{M_u}^M(t))^T, \quad u_j^M(t) \in V_{M_u}^K \end{aligned}$$

$\dot{\mathbf{x}}^M(t_k^-)$  和  $\dot{\mathbf{x}}^M(t_{k-1}^+)$  表示相应导函数的左右极限,  $\mathbf{1}_h = (1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}^{M_h}$ ,  $\delta^M > 0$  是为离散问题  $B^M(\delta^M, \mathbf{c}_h)$  具有可行性而加入的参数, 文献 [15] 的定理 5.3.1 给出了该参数表达式, 参数  $\{\omega_0^{M_k}, \dots, \omega_{M_k}^{M_k}\}$  是 Clenshaw-Curtis 求积公式<sup>[8]</sup> 使用的积分权, 用于在  $[t_{k-1}, t_k]$  积分.

## 2 收敛性分析

针对最优控制连续的情况, 本节首先证明离散问题的收敛性 (定理 1), 这证明对弱间断的最优控制显然也适用, 据此设计了第 3 节算法 1 的步骤 2; 然后, 第 2.1 节证明在同伦参数收敛的情况下可以得到原问题最优解 (定理 2). 对于触及约束界限的弱间断点, 第 2.2 节证明可以捕捉这类不光滑点 (定理 3). 在第 3 节的算法 1 中, 步骤 3 和步骤 4 正是以定理 2 和定理 3 为依据.

为了论述方便, 除了沿用前边的记号之外, 在后文中令  $\mathbf{N}$  表示自然数集.

### 2.1 离散问题的收敛性

**假设 1.** 对于  $\forall j \in \mathbf{N}$ , 存在  $\mathbf{M}_j = (M_{1,j}, \dots, M_{K,j})$ , 其中  $M_{k,j} \in \mathbf{N}$ ,  $\{M_{k,j}\}_{j=1}^\infty$  是递增序列,  $k = 1, \dots, K$ , 向量  $\mathbf{M}_j$  的元素都足够大; 离散问题序列  $\{B^{M_j}(\delta^{M_j}, \mathbf{c}_h)\}_{j=1}^\infty$  以  $\{(\mathbf{x}^{M_j, \mathbf{c}_h}(t), \mathbf{u}^{M_j, \mathbf{c}_h}(t))\}_{j=1}^\infty$  为最优解序列,  $\{(\mathbf{x}^{M_j, \mathbf{c}_h}(a), \dot{\mathbf{x}}^{M_j, \mathbf{c}_h}(t), \mathbf{u}^{M_j, \mathbf{c}_h}(t))\}_{j=1}^\infty$  一致收敛的极限为  $(\mathbf{x}_0^{\infty, \mathbf{c}_h}, \mathbf{q}^{\mathbf{c}_h}(t), \mathbf{u}^{\infty, \mathbf{c}_h}(t))$ , 其中  $\mathbf{q}^{\mathbf{c}_h}(t)$  和  $\mathbf{u}^{\infty, \mathbf{c}_h}(t)$  都属于  $C[a, b]$ .

**定理 1.** 如果假设 1 成立, 问题  $B(\mathbf{c}_h)$  的最优解是  $\mathbf{u}^{\infty, \mathbf{c}_h}(t)$  和  $\mathbf{x}^{\infty, \mathbf{c}_h}(t) = \int_a^t \mathbf{q}^{\mathbf{c}_h}(\tau) d\tau + \mathbf{x}_0^{\infty, \mathbf{c}_h}$ .

**证明.** 注意到  $\mathbf{c}_h$  是非负常数组成的向量, 问题  $B(\mathbf{c}_h)$  的式 (5) 可等价写为  $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{c}_h \leq \mathbf{0}_h$ . 此时, 式 (1)~(3) 和 (5) 构成的问题  $B(\mathbf{c}_h)$  形式上变为式 (1)~(4) 构成的问题  $B$ , 而问题  $B$  在文献 [15] 定理 5.4.1 中已有证明.  $\square$

不难看出, 假设 1 和定理 1 是文献 [8] 中假设 1 和定理 1 的推广, 当  $\mathbf{c}_h$  为零向量时, 它们与文献 [8]

一致.

**假设 2.** 非负常数组成的向量序列  $\{\mathbf{c}_h^j\}_{j=1}^\infty$  满足  $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{c}_h^j = \mathbf{0}_h$ ; 问题序列  $\{B(\mathbf{c}_h^j)\}_{j=1}^\infty$  由定理 1 得到的最优解中存在序列  $\{(\mathbf{x}^{\infty, \mathbf{c}_h^j}(t), \mathbf{u}^{\infty, \mathbf{c}_h^j}(t))\}_{j=1}^\infty$ , 且  $\{(\mathbf{x}_0^{\infty, \mathbf{c}_h^j}(a), \dot{\mathbf{x}}^{\infty, \mathbf{c}_h^j}(t), \mathbf{u}^{\infty, \mathbf{c}_h^j}(t))\}_{j=1}^\infty$  一致收敛于  $(\mathbf{x}_0^\infty, \mathbf{q}(t), \mathbf{u}^\infty(t))$ , 其中  $\mathbf{q}(t)$  和  $\mathbf{u}^\infty(t)$  都属于  $C[a, b]$ .

**定理 2.** 如果假设 2 成立, 问题  $B$  的最优解是  $\mathbf{u}^\infty(t)$  和  $\mathbf{x}^\infty(t) = \int_a^t \mathbf{q}(\tau) d\tau + \mathbf{x}_0^\infty$ .

**证明.** 首先证明  $\mathbf{u}^\infty(t)$  和  $\mathbf{x}^\infty(t)$  是可行解.

注意到问题  $B$  中已经假设函数  $\mathbf{h}$  关于变元  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{u}$  连续可微. 于是, 根据假设 2 和式 (5) 易知

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}^\infty(t), \mathbf{u}^\infty(t)) &= \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{h}(\mathbf{x}^{\infty, \mathbf{c}_h^j}(t), \mathbf{u}^{\infty, \mathbf{c}_h^j}(t)) &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{c}_h^j = \mathbf{0}_h \end{aligned}$$

即  $\mathbf{u}^\infty(t)$  和  $\mathbf{x}^\infty(t)$  满足问题  $B$  的式 (4). 类似地, 可证  $\mathbf{u}^\infty(t)$  和  $\mathbf{x}^\infty(t)$  也满足问题  $B$  的式 (2) 和式 (3), 所以, 得证  $\mathbf{u}^\infty(t)$  和  $\mathbf{x}^\infty(t)$  是问题  $B$  的可行解.

令  $\mathbf{u}^*(t)$  和  $\mathbf{x}^*(t)$  是问题  $B$  的最优解, 由上述证明可知

$$J[\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*] \leq J[\mathbf{x}^\infty, \mathbf{u}^\infty] \quad (6)$$

注意到问题  $B$  与问题  $B(\mathbf{c}_h)$  的区别仅在于式 (4) 与式 (5) 不同, 再由假设 2 可以得知, 对于  $\forall j \in \mathbf{N}$ , 问题  $B$  的最优解  $\mathbf{u}^*(t)$  和  $\mathbf{x}^*(t)$  必然是问题  $B(\mathbf{c}_h^j)$  的可行解, 所以有

$$J[\mathbf{x}^{\infty, \mathbf{c}_h^j}, \mathbf{u}^{\infty, \mathbf{c}_h^j}] \leq J[\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*] \quad (7)$$

注意到问题  $B$  中已经假设函数  $E$  和  $F$  关于变元  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{u}$  连续可微. 根据假设 2, 易知

$$J[\mathbf{x}^\infty, \mathbf{u}^\infty] = \lim_{j \rightarrow \infty} J[\mathbf{x}^{\infty, \mathbf{c}_h^j}, \mathbf{u}^{\infty, \mathbf{c}_h^j}] \quad (8)$$

由式 (6)~(8) 知,  $J[\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*] = J[\mathbf{x}^\infty, \mathbf{u}^\infty]$ .  $\square$

### 2.2 弱间断点的捕捉

对于问题  $B$  和  $B(\mathbf{c}_h)$  的向量函数  $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ , 令  $h_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  表示其第  $i$  个分量,  $i = 1, \dots, M_h$ , 又令  $h_i^\infty(t) = h_i(\mathbf{x}^\infty(t), \mathbf{u}^\infty(t))$ , 不难看出,  $h_i^\infty(t) \in C[a, b]$ , 相应地有  $h_i^{\infty, \mathbf{c}_h}(t) = h_i(\mathbf{x}^{\infty, \mathbf{c}_h}(t), \mathbf{u}^{\infty, \mathbf{c}_h}(t))$ .

**假设 3.** 问题  $B$  的  $\{h_1^\infty(t), \dots, h_{M_h}^\infty(t)\}$  中, 至少存在一个  $h_i^\infty(t)$  和相应两个集合  $S_0^i$  与  $S_1^i$  满足

$$\begin{aligned} S_0^i \cup S_1^i &= [a, b], S_0^i \cap S_1^i = \emptyset, S_0^i \neq \emptyset, S_1^i \neq \emptyset \\ \left\{ \begin{aligned} &\text{当 } t \in S_0^i \text{ 时, } h_i^\infty(t) < 0 \\ &\text{当 } t \in S_1^i \text{ 时, } h_i^\infty(t) = 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

其中,  $i \in \{1, \dots, M_h\}$ .

**定理 3.** 在假设 2 和假设 3 成立的情况下, 对于  $\forall t_i \in S_0^i \cap S_1^i$ , 存在数列  $\{c_{j,i}\}_{j=1}^\infty$  使得以下三个

等式成立.

$$c_{j,i} = h_i^{\infty, c_h^j}(t_{j,i}), \quad t_{j,i} \in S_{j,i} \quad (9)$$

$$t_i = \lim_{j \rightarrow \infty} t_{j,i} \quad (10)$$

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{j,i} \quad (11)$$

其中,  $S_{j,i}$  是  $c_{j,i} = h_i^{\infty, c_h^j}(t)$  在  $[a, b]$  内的根组成的集合,  $S_0^i$  为  $S_0^i$  的闭包.

证明. 令

$$c_{j,i} = h_i^{\infty, c_h^j}(t_i) \quad (12)$$

可得数列  $\{c_{j,i}\}_{j=1}^{\infty}$ . 显然,  $t_i \in S_{j,i}$  对于  $\forall j \in \mathbf{N}$  都成立. 虽然  $S_{j,i}$  可能还包含  $t_i$  以外的其他根, 但是显然可在  $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_{j,i}$  中找到数列  $\{t_{j,i}\}_{j=1}^{\infty}$ , 使式 (9) 和式 (10) 都成立.

由假设 2 和定理 2 已知, 问题 B 的最优解是  $\mathbf{u}^{\infty}(t)$  和  $\mathbf{x}^{\infty}(t) = \int_a^t \mathbf{q}(\tau) d\tau + \mathbf{x}_0^{\infty}$ , 由假设 2 中的一致收敛性和式 (12) 可知

$$h_i^{\infty}(t_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} h_i^{\infty, c_h^j}(t_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{j,i}$$

因为  $t_i \in \overline{S_0^i} \cap S_1^i$ , 由假设 3 可知,  $h_i^{\infty}(t_i) = 0$ , 所以式 (11) 成立.  $\square$

定理 3 表明, 可以通过设置数列  $\{c_{j,i}\}_{j=1}^{\infty}$  来找到收敛的数列  $\{t_{j,i}\}_{j=1}^{\infty}$ , 收敛的极限是两个区域的交界点  $t_i \in \overline{S_0^i} \cap S_1^i$ . 注意到问题 B 的约束条件式 (4) 在交界点触及约束界限, 所以该交界点很可能是弱间断点, 第 3 节算法 1 的步骤 4 正是通过度量数列  $\{t_{j,i}\}_{j=1}^{\infty}$  的收敛情况来捕捉这类触及约束界限的弱间断点. 更进一步来看, 注意到 Bang-Bang 控制的间断点也可视为触及约束界限, 所以算法 1 在第 4 节的计算中不但用于捕捉弱间断点, 也用于捕捉 Bang-Bang 控制的间断点.

### 3 误差指示量和算法

采用文献 [8] 的误差指示量, 给出定义 1, 与文献 [8] 不同, 本文定义 1 的网格由式 (13) 的同伦参数  $\mathbf{c}_h^{j+1}$  决定.

定义 1. 令  $L, K \in \mathbf{N}$ ,  $K \geq L \geq 2$ , 对于网格

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b$$

$$a = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_L = b$$

令  $\eta_i = \min\{|t'_i - t_1|, \dots, |t'_i - t_{K-1}|\}$ ,  $i = 1, \dots, L - 1$ , 令  $EI = \max\{\eta_1, \dots, \eta_{L-1}\}$ , 称  $EI$  为误差指示量 (Error indicator, EI).

后文算法 1 的步骤 4 将用误差指示量  $EI_j$  度量两套网格点彼此的某种距离, 根据柯西收敛原理, 该距离可判断是否有网格点足够接近不光滑点.

对于问题  $B^{M_j}(\delta^{M_j}, \mathbf{c}_h^j)$  的最优解  $(\mathbf{x}^{M_j, \mathbf{c}_h^j}(t), \mathbf{u}^{M_j, \mathbf{c}_h^j}(t))$ , 令  $h_i^{M_j, \mathbf{c}_h^j}(t)$  表示  $\mathbf{h}(\mathbf{x}^{M_j, \mathbf{c}_h^j}(t), \mathbf{u}^{M_j, \mathbf{c}_h^j}(t))$  的第  $i$  个分量,  $c_{i,h}^{j+1}$  是  $\mathbf{c}_h^{j+1}$  的第  $i$  个分量,  $i = 1, \dots, M_h$ . 令  $P_{\text{CGL}}$  为若干 CGL 点的集合, 常数  $\theta \in (0, 1)$ . 由于很难从定理 3 的式 (9) 解出  $t_{j,i}$  的值, 所以满足

$$0 < h_i^{M_j, \mathbf{c}_h^j}(t) - (\delta + c_{i,h}^{j+1}) < \theta \left( \max_{t \in P_{\text{CGL}}} h_i^{M_j, \mathbf{c}_h^j}(t) - (\delta + c_{i,h}^{j+1}) \right) \quad (13)$$

的 CGL 点被算法 1 的步骤 4 用来近似  $t_{j,i}$ , 如此得到新网格点替换原有网格点, 实现网格自适应调整.

令  $P_{\text{number}}^{\text{CGL}}$  表示当前 CGL 点的个数,  $P_{\text{stop}}^{\text{CGL}}$  是为停止增加 CGL 点设置的正整数,  $\max(\mathbf{c}_h^{j+1})$  表示  $\mathbf{c}_h^{j+1}$  各元素的最大值.

算法 1. 结合同伦法的自适应拟谱方法

步骤 1. 设置  $j = K_1 = 1$ .  $N_{\min} = 4$ ,  $N_{\text{Initial}} = 8$ ,  $P_{\text{stop}}^{\text{CGL}} = 33$ ,  $\delta = 0$ ,  $\theta = 0.1$ ,  $Tol^{\text{EI}} = Tol^{\text{ch}} = Tol$ ,  $\mathbf{M}_j = N_{\text{Initial}}$ , 根据算例情况输入参数  $\mathbf{c}_h^j$ .

步骤 2. 解  $B^{M_j}(\delta, \mathbf{c}_h^j)$  得数值解和目标值  $J(j)$ .

设置  $P_{\text{number}}^{\text{CGL}}$  为  $\mathbf{M}_j$  各元素之和再加上  $K_j$ .

如果  $P_{\text{number}}^{\text{CGL}} \geq P_{\text{stop}}^{\text{CGL}}$ , 则转到步骤 3.

否则, 改  $\mathbf{M}_j$  各元素为原值的 2 倍, 以此为新的  $\mathbf{M}_j$ , 以刚才算出的数值解为初值, 重新执行步骤 2.

步骤 3. 如果  $\mathbf{c}_h^j$  为零向量, 则上次解  $B^{M_j}(\delta, \mathbf{c}_h^j)$  所得为最终解, 程序停止, 否则继续.

步骤 4. 如果  $K_j > 1$ , 则设置  $\mathbf{c}_h^{j+1} = \frac{1}{2}\mathbf{c}_h^j$ .

如果  $K_j = 1$ , 则记录  $h_i^{M_j, \mathbf{c}_h^j}(t)$  在各 CGL 点的最大值,  $i = 1, \dots, M_h$ , 以此组成向量  $\mathbf{h}_{\max}^j \in \mathbf{R}^{M_h}$ . 设置  $\mathbf{c}_h^{j+1} = \frac{1}{2}\mathbf{h}_{\max}^j$ .

对于  $i = 1, \dots, M_h$ , 适当增加 CGL 点, 使之与当前使用的 CGL 点一起组成集合  $P_{\text{CGL}}$ , 找出  $P_{\text{CGL}}$  中满足式 (13) 的点为新增网格点. 用端点  $a$  和  $b$  与新增网格点一起组成新网格, 并得到新网格数  $K_{j+1}$ .

如果  $K_j = 1$ , 则设置  $\mathbf{c}_h^{j+1} = \frac{1}{2}\mathbf{c}_h^j$ .

设置  $EI_j = +\infty$ . 如果  $\min\{K_{j+1}, K_j\} \geq 2$ , 则用步骤 2 的网格和步骤 4 产生的网格计算当前指标  $j$  对应的误差指示量  $EI_j$ , 计算方法见定义 1.

如果  $EI_j \leq Tol^{\text{EI}}$  和  $\max(\mathbf{c}_h^{j+1}) \leq Tol^{\text{ch}}$  成立, 则设置  $\mathbf{c}_h^{j+1}$  为零向量.

设置  $j = j + 1$ . 设置  $\mathbf{M}_j$  为  $K_j$  个  $N_{\min}$  组成的向量, 转到步骤 2.

### 4 数值算例

算例用 MATLAB 编程, 笔记本电脑 AMD A4-5000 处理器, 1.5 GHz 主频, 8 GB 内存. 为了与算法 1 进行对比, 使用 Chebyshev 拟谱方法计算  $K = 1$

时的问题  $B^M(\delta, \mathbf{0}_n)$ . 所有问题都用 SNOPT<sup>[16]</sup> 求解, 并用文献 [17] 的快速变换加快计算速度, 使用的参数如表 1 所示.

表 1 算法 1 解全部算例使用的参数

Table 1 The parameters of Algorithm 1 in all examples

参数	数值
$N_{\min}$	4
$N_{\text{Initial}}$	8
$P_{\text{stop}}^{\text{CCGL}}$	33
$\delta$	0
$\theta$	0.1

例 1. 有解析解的弱间断最优控制问题<sup>[8]</sup>.

$$\min J = \int_0^2 (u^2(t) + 3u(t) - 2x(t))dt$$

s.t.  $\dot{x}(t) = x(t) + u(t), x(0) = 5, 0 \leq u(t) \leq 2$

由文献 [8] 知, 这个最优控制问题的弱间断点是  $t = 2 - \ln(4.5)$  和  $t = 2 - \ln(2.5)$ , 最优目标值为  $J^* = 59 + 14 \ln 2 - (81/2) \ln 3 + (25/4) \ln 5 - 14e^2 \approx -69.177535595535176$ . 使用算法 1, 参数  $\mathbf{c}_h^1$  的设置相当于将问题中的  $0 \leq u(t) \leq 2$  改为  $-1 \leq u(t) \leq 3$ .

表 2 和表 3 是算法 1 和 Chebyshev 拟谱法解例 1 的结果, 表 4 是三种方法解例 1 的结果. 从表 4 可以看出, 算法 1 的精度优于另两种方法; 算法 1 的时间分别是 Chebyshev 拟谱方法和文献 [8] 方法的 26% (11.4/44.59) 和 59% (11.4/19.39). 表 4 最后一行数据来自文献 [8], 由于使用电脑不同, 该数据仅供参考.

例 2. 考虑一个有解析解的 Bang-Bang 最优控制问题<sup>[18]</sup>.

$$\min J = \int_0^1 (x(t) - 0.5u(t))dt$$

s.t.  $\dot{x}(t) = u(t) - x(t), x(0) = 1, |u(t)| \leq 1$

由文献 [18] 知,  $u(t)$  的间断点为  $t = 1 - \ln 2$ , 并且可以推知最优目标值为  $J^* = 0.5 - 2e^{-1} + \ln 2 \approx 0.457388298217061$ . 使用算法 1, 参数  $\mathbf{c}_h^1$  的设置相当于问题的  $|u(t)| \leq 1$  被改为  $|u(t)| \leq 2$ .

表 5 和表 6 是算法 1 和 Chebyshev 拟谱法解例 2 的结果, 表 7 是三种方法解例 2 的结果. 从表 7 可以看出, 算法 1 的误差和耗费的时间均小于另外两种方法. 表 7 最后一行数据来自文献 [18], 由于使用电脑不同, 该数据仅供参考.

例 3. 关于生产和维护的 Bang-Bang 最优控制问题<sup>[19]</sup>.

表 2 算法 1 解例 1 的结果

Table 2 The results of Example 1 by Algorithm 1

Tol	目标值相对误差	时间 (s)	误差指示量	配置点数
$1 \times 10^{-1}$	$3.372 \times 10^{-9}$	9.7	$2.5452 \times 10^{-2}$	49
$5 \times 10^{-2}$	$2.311 \times 10^{-10}$	11.4	$1.2418 \times 10^{-2}$	49
$1 \times 10^{-2}$	$6.802 \times 10^{-10}$	15.8	$3.2392 \times 10^{-3}$	49
$5 \times 10^{-3}$	$5.811 \times 10^{-10}$	18.0	$1.6129 \times 10^{-3}$	49
$1 \times 10^{-3}$	$2.152 \times 10^{-10}$	22.4	$4.0097 \times 10^{-4}$	49
$5 \times 10^{-4}$	$2.460 \times 10^{-10}$	24.5	$1.9961 \times 10^{-4}$	49
$1 \times 10^{-4}$	$1.601 \times 10^{-10}$	31.5	$2.5017 \times 10^{-5}$	49
$5 \times 10^{-5}$	$1.512 \times 10^{-10}$	34.0	$1.2464 \times 10^{-5}$	49
$1 \times 10^{-5}$	$1.476 \times 10^{-10}$	38.5	$3.1159 \times 10^{-6}$	49

表 3 Chebyshev 拟谱方法解例 1 的结果

Table 3 The results of Example 1 by the Chebyshev pseudospectral method

目标值相对误差	时间 (s)	配置点数
$4.2145 \times 10^{-4}$	0.25	9
$5.5397 \times 10^{-6}$	0.38	17
$5.1118 \times 10^{-7}$	0.80	33
$4.2394 \times 10^{-7}$	5.27	65
$3.9478 \times 10^{-9}$	14.73	129
$4.631 \times 10^{-10}$	44.59	257

表 4 三种方法解例 1 的结果

Table 4 The results of Example 1 by three methods

数据来源	目标值相对误差	时间 (s)	配置点数
表 2 (算法 1)	$2.311 \times 10^{-10}$	11.4	49
表 3 (Chebyshev 拟谱法)	$4.631 \times 10^{-10}$	44.59	257
文献 [8] 方法	$2.5054 \times 10^{-10}$	19.39	—
文献 [8] 表 1	$1.9742 \times 10^{-10}$	15	—

$$\min J = -10x_2(0.9)e^{-0.09} - \int_0^{0.9} (32 - x_1(t) - 2\nu^2(t) - 2.5m(t))dt$$

s.t.  $\dot{x}_1(t) = x_2(t)\nu(t) - 4$   
 $\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + (1 - x_2(t))m(t)$   
 $0 \leq \nu(t) \leq 3, 0 \leq m(t) \leq 4$   
 $x_1(0) = 3, x_2(0) = 1, x_1(0.9) = 0$

为此设置的  $\mathbf{c}_h^1$  相当于将  $0 \leq \nu(t) \leq 3$  和  $0 \leq m(t) \leq 4$  改为  $-1.5 \leq \nu(t) \leq 4.5$  和  $-2 \leq m(t) \leq 6$ .

表 5 算法 1 解例 2 的结果

Table 5 The results of Example 2 by Algorithm 1

Tol	目标值相对误差	时间 (s)	误差指示量	配置点数
$1 \times 10^{-1}$	$8.0706 \times 10^{-9}$	5.7	$6.3108 \times 10^{-3}$	49
$5 \times 10^{-2}$	$4.7381 \times 10^{-9}$	6.4	$9.0744 \times 10^{-4}$	49

表 6 Chebyshev 拟谱方法解例 2 的结果

Table 6 The results of Example 2 by the Chebyshev pseudospectral method

目标值相对误差	时间 (s)	配置点数
$6.0018 \times 10^{-3}$	0.13	9
$1.5119 \times 10^{-3}$	0.23	17
$3.7982 \times 10^{-4}$	0.39	33
$9.7584 \times 10^{-5}$	1.08	65
$2.7067 \times 10^{-5}$	2.62	129
$1.8455 \times 10^{-5}$	6.86	257

表 7 三种方法解例 2 的结果

Table 7 The results of Example 2 by three methods

数据来源	目标值 相对误差	时间 (s)	配置 点数
表 5 (算法 1)	$4.7381 \times 10^{-9}$	6.4	49
表 6 (Chebyshev 拟谱法)	$1.8455 \times 10^{-5}$	6.86	257
文献 [18]	$2.6492 \times 10^{-3}$	14.88	—

用 5000 个等距网格点时, 文献 [19] 方法算出 Bang-Bang 控制  $m(t)$  间断点为  $t = 0.65691$ , 最优目标值为  $J = -26.705$ , 相应的控制函数数值解可见文献 [19] 的图 5.1 (b)。不难看出, 该图与本文算法 1 得到的图 1 基本一致。

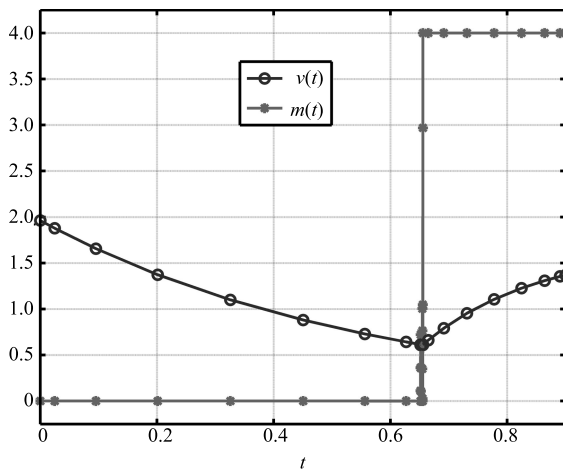


图 1 表 8 中  $Tol = 5 \times 10^{-2}$  对应的数值解

Fig. 1 Numerical solutions for  $Tol = 5 \times 10^{-2}$  in Table 8

表 8 和表 9 是算法 1 和 Chebyshev 拟谱方法解例 3 的结果, 表 10 是三种方法解例 3 的结果。从表 10 可以看出, 在目标值精度大致相同的情况下, 算法 1 的计算时间和配置点数明显少于常用的 Chebyshev 拟谱方法, 尤其与文献 [19] 对比时, 算法 1 节省了大量点数, 使得算法 1 处理的问题规模更小, 有利于节省计算时间。

表 8 算法 1 解例 3 的结果

Table 8 The results of Example 3 by Algorithm 1

Tol	数值解目标值	时间 (s)	误差指示量	配置点数
$1 \times 10^{-1}$	-26.704709	334.6	$5.1952 \times 10^{-3}$	49
$5 \times 10^{-2}$	-26.704676	423.4	$4.4434 \times 10^{-5}$	41

表 9 Chebyshev 拟谱方法解例 3 的结果

Table 9 The results of Example 3 by the Chebyshev pseudospectral method

数值解目标值	时间 (s)	配置点数
-26.668531	1.7	9
-26.689549	4.0	17
-26.702575	8.0	33
-26.703963	87.4	65
-26.704482	153.2	129
-26.704704	1380.0	257

表 10 三种方法解例 3 的结果

Table 10 The results of Example 3 by three methods

数据来源	数值解目标值	时间 (s)	点数
表 8 (算法 1)	-26.704709	334.6	49(配置点数)
表 8 (算法 1)	-26.704676	423.4	41(配置点数)
表 9 (Chebyshev 拟谱法)	-26.704704	1380.0	257(配置点数)
文献 [19]	-26.705	—	5000(网格点数)

## 5 结论

本文针对弱间断最优控制问题和 Bang-Bang 最优控制问题, 提出一种结合同伦法的自适应拟谱方法, 证明了数值解的收敛性和该方法捕捉弱间断点的能力, 据此设计的算法对含有弱间断点和 Bang-Bang 控制间断点的三个算例都有良好表现。本文方法主要有以下三个优点:

1) 本文结合同伦法与直接法, 避免了同伦法与间接法结合时以及单独使用某一方法时的缺点。

2) 本文中同伦法只调整约束界限的值, 不需为使用同伦法明显调整问题形式, 而问题形式的明显

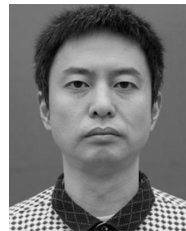
调整有时是很难想到的。

3) 数值实验表明, 与其他几种数值方法相比, 本文方法在时间和精度上有明显优势。

各种直接法有各自的优点, 本文的 Chebyshev 拟谱法在各种研究中可更换为其他直接法, 如此修改后的算法可以发挥相应直接法特有的长处。本文算法捕捉触碰到约束界限的两类不光滑点, 后续研究将考虑如何捕捉其他位置的弱间断点和间断点。

## References

- Li Jun-Feng, Jiang Fang-Hua. Survey of low-thrust trajectory optimization methods for deep space exploration. *Mechanics in Engineering*, 2011, **33**(3): 1–6  
(李俊峰, 蒋方华. 连续小推力航天器的深空探测轨道优化方法综述. *力学与实践*, 2011, **33**(3): 1–6)
- Ross I M, Karpenko M. A review of pseudospectral optimal control: from theory to flight. *Annual Reviews in Control*, 2012, **36**(2): 182–197
- Gong Q, Kang W, Ross I M. A pseudospectral method for the optimal control of constrained feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(7): 1115–1129
- Guo F. Global existence of weakly discontinuous solutions to a kind of mixed initial-boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems. *Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities (Series B)*, 2007, **22**(2): 181–200
- Darby C L, Hager W W, Rao A V. An hp-adaptive pseudospectral method for solving optimal control problems. *Optimal Control Applications and Methods*, 2011, **32**(4): 476–502
- Gong Q, Fahroo F, Ross I M. Spectral algorithm for pseudospectral methods in optimal control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2008, **31**(3): 460–471
- Qin Ting-Hua, Ma He-Ping. Adaptive algorithm for weakly discontinuous solutions of optimal control problems. *Control and Decision*, 2013, **28**(2): 313–316  
(秦廷华, 马和平. 最优控制问题弱间断解的一个自适应算法. *控制与决策*, 2013, **28**(2): 313–316)
- Qin Ting-Hua. An adaptive pseudospectral method for solving a class of weakly discontinuous optimal control problems. *Control and Decision*, 2017, **32**(6): 1097–1102  
(秦廷华. 解一类弱间断最优控制问题的一个自适应拟谱方法. *控制与决策*, 2017, **32**(6): 1097–1102)
- Shen Hong-Xin. Optimization Method for the Moon-Earth Abort Return Trajectories Based on Analytic Homotopic Technique [Ph.D. dissertation], National University of Defense Technology, China, 2014.  
(沈红新. 基于解析同伦的月地应急返回轨迹优化方法 [博士学位论文], 国防科学技术大学, 中国, 2014.)
- Mehrpouya M A, Shamsi M, Razzaghi M. A combined adaptive control parametrization and homotopy continuation technique for the numerical solution of bang-bang optimal control problems. *ANZIAM Journal*, 2014, **56**(1): 48–65
- Guo T D, Jiang F H, Li J F. Homotopic approach and pseudospectral method applied jointly to low thrust trajectory optimization. *Acta Astronautica*, 2012, **71**: 38–50
- Li J, Xi X N. Time-optimal reorientation of the rigid spacecraft using a pseudospectral method integrated homotopic approach. *Optimal Control Applications and Methods*, 2015, **36**(6): 889–918
- Cai W W, Yang L P, Zhu Y W. Bang-bang optimal control for differentially flat systems using mapped pseudospectral method and analytic homotopic approach. *Optimal Control Applications and Methods*, 2016, **37**(6): 1217–1235
- Ma L, Chen W F, Song Z Y, Shao Z J. A unified trajectory optimization framework for lunar ascent. *Advances in Engineering Software*, 2016, **94**: 32–45
- Qin Ting-Hua. Adaptive Methods for Optimal Control Problems Governed by Differential Equations [Ph.D. dissertation], Shanghai University, China, 2012.  
(秦廷华. 微分方程最优控制问题自适应方法 [博士学位论文], 上海大学, 中国, 2012.)
- Gill P E, Murray W, Saunders M A. SNOPT: an SQP algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM Review*, 2005, **47**(1): 99–131
- Ma H P, Qin T H, Zhang W. An efficient Chebyshev algorithm for the solution of optimal control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(3): 675–680
- Hu Yun-Qing, Liu Xing-Gao, Xue An-Ke. A penalty method for solving inequality path constrained optimal control problems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(12): 1996–2001  
(胡云卿, 刘兴高, 薛安克. 带不等式路径约束最优控制问题的惩罚函数法. *自动化学报*, 2013, **39**(12): 1996–2001)
- Osmolovskii N P, Maurer H. *Applications to Regular and Bang-Bang Control: Second-Order Necessary and Sufficient Optimality Conditions in Calculus of Variations and Optimal Control*. Philadelphia: SIAM, 2012. 249–251



秦廷华 重庆交通大学数学与统计学院讲师。2012 年获得上海大学计算数学专业博士学位。主要研究方向为最优控制问题数值方法。

E-mail: qintinghua@126.com

(QIN Ting-Hua Lecturer at the School of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University. He received his Ph.D. degree in computational mathematics from Shanghai University in 2012. His research interest covers numerical methods for optimal control problems.)

He received his Ph.D. degree in computational mathematics from Shanghai University in 2012. His research interest covers numerical methods for optimal control problems.)