“分数阶广义系统容许性的充分必要条件”一文评论

张雪峰 [1]

摘 要 《自动化学报》39 卷 12 期的“分数阶奇异系统容许性的充分必要条件”得到了基于线性矩阵不等式的分数阶广义系统容许性充分必要条件. 本文给出一个数值反例表明文献 [1] 中定理 1 的充分条件结论并不成立, 必要条件也不准确. 最后, 给出了修改正确的分数阶广义系统容许性充分必要条件. 相比于文献 [1] 的定理 1, 改进后充要条件没有保守性并去除了原文中分数阶广义系统正则性的限制要求.

关键词 分数阶广义系统, 稳定性判据, 容许性, 线性矩阵不等式

引用格式 张雪峰. “分数阶广义系统容许性的充分必要条件”一文评论. 自动化学报, 2020, **46**(5): 1061−1062

DOI 10.16383/j.aas.2018.c170539

Comments on “Sufficient and Necessary Condition of Admissibility for Fractional Order Singular Systems”

ZHANG Xue-Feng[1]

Abstract In *Acta Automatica Sinica* Vol. 39 No. 12 “Sufficient and necessary condition of admissibility for fractional-order singular system”, it is claimed that the necessary and sufficient condition of the admissibility for fractional order singular systems is given in terms of linear matrix inequalities (LMIs). In this note, a numerical example is presented to show that the sufficient condition of Theorem 1 given in reference [1] does not hold and its necessary condition is not accurate. At last, the modified necessary and sufficient condition for the admissibility of the fractional order singular systems is proposed. Compared with Theorem 1 in the reference [1], the improved necessary and sufficient condition is not conservative and the restriction of the regularity of the fractional order singular systems in original article is removed.

Key words Fractional order singular systems, stability criteria, admissibility, linear matrix inequality (LMI)

Citation Zhang Xue-Feng. Comments on “Sufficient and necessary condition of admissibility for fractional order singular systems”. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(5): 1061−1062

1 问题描述

分数阶系统的稳定性分析是具有极大研究价值的控制基础问题, 近期引起了许多学者的广泛关注 [1−6]. 文献 [1] 提出了具有阶数 $\alpha \in (0,1)$ 的分数阶广义系统容许性判据. 建立了一个基于线性矩阵不等式的分数阶广义系统容许性的充分必要条件. 但是, 文献 [1] 中定理 1 的充分条件结论并不成立. 可以找到一个反例来表明文献 [1] 中定理 1 的充分条件结论不正确.

收稿日期 2017-09-30 录用日期 2018-02-26
Manuscript received September 30, 2017; accepted February 26, 2018
本文责任编委 孙长银
Recommended by Associate Editor SUN Chang-Yin
1. 东北大学理学院 沈阳 110819
1. School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819

考虑如下的分数阶广义系统

$$ED^{\alpha}\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t), 0<\alpha<1 \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是伪状态向量, $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 系统矩阵, $E \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 是奇异矩阵且 D^{α} 是 α 阶 Caputo 分数阶导数.

定理 1[1]**.** 假设分数阶广义系统 (1) 是正则的, 则系统 (1) 是容许的充分必要条件是存在两个正定矩阵 $Q_{k1} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ $(k=1,2)$ 和两个反对称矩阵 $Q_{k2} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ $(k=1,2)$ 及一个矩阵 $Q \in \mathbf{R}^{(n-r)\times n}$ 使得

$$\begin{aligned}\mathrm{sym}\Big\{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\Theta_{ij}\otimes(E^{\mathrm{T}}Q_{ij}A)+\\ I_2\otimes(Q^{\mathrm{T}}E_0^{\mathrm{T}}A)\Big\}<0\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\mathrm{rank}(E)=r<n, E_0 \in \mathbf{R}^{n\times(n-r)}$ 是一个满足 $E^{\mathrm{T}}E_0 = 0$ 的列满秩矩阵且 $\mathrm{sym}\{X\} := X+X^{\mathrm{T}}$,

$$\Theta_{11}=\begin{bmatrix}\sin(\frac{\pi\alpha}{2}) & -\cos(\frac{\pi\alpha}{2})\\ \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) & \sin(\frac{\pi\alpha}{2})\end{bmatrix}$$

$$\Theta_{12}=\begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi\alpha}{2}) & \sin(\frac{\pi\alpha}{2})\\ -\sin(\frac{\pi\alpha}{2}) & \cos(\frac{\pi\alpha}{2})\end{bmatrix}$$

$$\Theta_{21}=\begin{bmatrix}\sin(\frac{\pi\alpha}{2}) & \cos(\frac{\pi\alpha}{2})\\ -\cos(\frac{\pi\alpha}{2}) & \sin(\frac{\pi\alpha}{2})\end{bmatrix}$$

$$\Theta_{22}=\begin{bmatrix}-\cos(\frac{\pi\alpha}{2}) & \sin(\frac{\pi\alpha}{2})\\ -\sin(\frac{\pi\alpha}{2}) & -\cos(\frac{\pi\alpha}{2})\end{bmatrix}$$

引理 1[2]**.** 分数阶系统 $D^{\alpha}\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ 是稳定的充分必要条件是

$$|\arg(\mathrm{spec}(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

其中 $\mathrm{spec}(\cdot)$ 是矩阵的谱.

通过一个利用把 E 进行矩阵满秩分解形成的受限等价变换可以得到如下引理.

引理 2[3−4]**.** 分数阶广义系统 (1) 是稳定的充分必要条件是

$$|\arg(\mathrm{spec}(E,A))| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

其中 $\mathrm{spec}(\cdot,\cdot)$ 是矩阵对 (E,A) 的广义谱.

引理 3[4]**.** 分数阶广义系统 (1) 是稳定的充分必要条件是存在非奇异矩阵 $P_{i1} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和 $P_{i2} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ $(i=1,2)$ 使得

$$\mathrm{sym}\{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\Theta_{ij}\otimes(P_{ij}A)\}<0 \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix}EP_{11} & EP_{12}\\ -EP_{12} & EP_{11}\end{bmatrix}\geq 0, \begin{bmatrix}EP_{21} & EP_{22}\\ -EP_{22} & EP_{21}\end{bmatrix}\geq 0$$

然而, 在下面的一节中, 可以提供两个数值例子来说明文 [1] 中定理 1 的充分条件结论不成立.

2 两个反例

例 1. 考虑具有如下参数的分数阶广义系统 (1):

$$\alpha = 0.5, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

则, E_0 可以通过下面的 MATLAB 命令计算得到:

$$E_0 = \text{null}(E^{\text{T}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\text{T}}$$

矩阵对 (E, A) 的两个有限特征值为 $2 \pm 1\text{j}$, 它们满足条件 $|\arg(\text{spec}(E, A))| < \alpha\frac{\pi}{2}$. 由引理 2, 易知分数阶广义系统 (1) 是不稳定的. 然而, 借助定理 1, 容易验证此反例中系统 (2) 的 LMI 却仍然具有如下可行解.

$$Q_{11} = Q_{21} = 10^8 \times \begin{bmatrix} 2.3275 & 0 & 0 \\ 0 & 2.3275 & 0 \\ 0 & 0 & 2.3275 \end{bmatrix}$$

$$Q_{12} = -Q_{22} = 10^8 \times \begin{bmatrix} 0 & 5.4779 & 0 \\ -5.4779 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = 10^7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.9094 \end{bmatrix}$$

在此反例中, 系统 (2) 的 LMI 得到了一个错误结论. 这表明文 [1] 中定理 1 的分数阶广义系统容许性的充分条件结论并不成立. 在文献 [1] 的充分性证明的稳定性部分中, 基本思路是由式 (2) 推导得到如下不等式.

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\{\Theta_{ij} \otimes (\lambda Q_{ij}) + \Theta_{ij}^{\text{T}} \otimes (\bar{\lambda} Q_{ij}^{\text{T}})\} < 0 \tag{4}$$

通过利用不等式 (4) 和文献 [1] 的定义 4 来确定系统 (1) 的稳定性. 但是, 对于稳定的系统 (1) 上面不等式 (4) 结论并不成立. 例如见如下反例.

例 2. 考虑具有如下参数的分数阶广义系统 (1):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

α, E, E_0 同例 1, 易得 $\text{spec}(E, A) = \{1 + 2\text{j}, 1 - 2\text{j}\}$, 系统 (1) 稳定, 但不等式 (4) 的实部显然有

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\{\Theta_{ij} \otimes (Q_{ij}) + \Theta_{ij}^{\text{T}} \otimes (Q_{ij}^{\text{T}})\} > 0$$

进而不等式 (4) 不成立.

可以通过在式 (2) 前面增补下面的 LMIs 来修正定理 1 的结论.

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ -Q_{12} & Q_{11} \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} Q_{21} & Q_{22} \\ -Q_{22} & Q_{21} \end{bmatrix} > 0 \tag{5}$$

设 $P_{ij} = Q_{ij}E + E_0Q$, 再利用引理 3 可以把定理 1 改进如下:

定理 2. 分数阶广义系统 (1) 是容许的充分必要条件是存在矩阵 $Q_{ij} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ $(i, j = 1, 2)$ 和一个矩阵 $Q \in \mathbf{R}^{(n-r)\times n}$ 使得式 (2) 和 (5) 成立.

需要说明的是这样的改进没有保守性, 而且去掉了系统 (1) 正则性的要求. 实际上, 利用文献 [1] 中定理 1 的必要性证明的构造 $Q_{i,j}$ $(i, j = 1, 2)$ 方法也可以容易地得到满足本文定理 2 中式 (2) 和 (5) 的必要性结论.

References

1 Yu Yao, Jiao Zhuang, Sun Chang-Yin. Sufficient and necessary condition of admissibility for fractional-order singular system. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(12): 2160−2164
(余瑶, 焦壮, 孙长银. 分数阶奇异系统容许性的充分必要条件. 自动化学报, 2013, **39**(12): 2160−2164)

2 Matignon D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In: Proceedings of the 1996 Computational Engineering in Systems Applications. Lille, France: IEEE-SMC, 1996. 963−968

3 Marir S, Chadli M, Bouagada D. A novel approach of admissibility for singular linear continuous-time fractional-order systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2017, **15**(2): 959−964

4 Liu Y C, Cui L, Duan D P. Dynamic output feedback stabilization of singular fractional-order systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016, **2016**: Article ID 9694780

5 Zhang X F. Relationship between integer order systems and fractional order systems and its two applications. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2018, **5**(2): 639−643

6 Wang C H, Li H H, Chen Y Q. H_∞ output feedback control of linear time-invariant fractional-order systems over finite frequency range. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2016, **3**(3): 304−310

张雪峰 东北大学副教授. 主要研究方向为分数阶控制系统.
E-mail: zhangxuefeng@mail.neu.edu.cn
(**ZHANG Xue-Feng** Associate professor at Northeastern University. His research interest covers fractional order control systems.)