

# 执行器故障不确定非线性系统最优自适应 输出跟踪控制

张绍杰<sup>1</sup> 吴雪<sup>1</sup> 刘春生<sup>1</sup>

**摘要** 本文针对一类具有执行器故障的多输入多输出 (Multi-input multi-output, MIMO) 不确定连续仿射非线性系统, 提出了一种最优自适应输出跟踪控制方案. 设计了保证系统稳定性的不确定项估计神经网络权值调整算法, 仅采用评价网络即可同时获得无限时域代价函数和满足哈密顿-雅可比-贝尔曼 (Hamilton-Jacobi-Bellman, HJB) 方程的最优控制输入. 考虑执行器卡死和部分失效故障, 设计最优自适应补偿控制律, 所设计的控制律可以实现对参考输出的一致最终有界跟踪. 飞行器控制仿真和对比验证表明了本文方法的有效性和优越性.

**关键词** 多输出多输入非线性系统, 执行器故障, 自适应动态规划, 最优自适应控制, 输出跟踪控制, 神经网络

**引用格式** 张绍杰, 吴雪, 刘春生. 执行器故障不确定非线性系统最优自适应输出跟踪控制. 自动化学报, 2018, 44(12): 2188-2197

**DOI** 10.16383/j.aas.2018.c170300

## Optimal Adaptive Output Tracking Control for a Class of Uncertain Nonlinear Systems With Actuator Failures

ZHANG Shao-Jie<sup>1</sup> WU Xue<sup>1</sup> LIU Chun-Sheng<sup>1</sup>

**Abstract** An optimal adaptive actuator failure output tracking control scheme is proposed for a class of multi-input multi-output (MIMO) uncertain affine nonlinear continuous-time systems with redundant actuators subject to uncertain failures. The weight adjustment law of the neural network uncertainty estimators can guarantee the stability of the control system, and only critic neural network is used in the proposed adaptive dynamic programming (ADP) scheme to simultaneously get the infinite horizon cost function and the approximate optimal control input satisfying the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation. Considering the stuck-in-space and loss of effectiveness faults of actuators, an optimal adaptive compensation control scheme is designed, which can guarantee the uniformly ultimate boundedness tracking ability of the closed loop system. Flight control simulations and comparative analysis results have demonstrated the effectiveness and advantage of the proposed method.

**Key words** MIMO nonlinear systems, actuator failure, adaptive dynamic programming, optimal adaptive control, output tracking control, neural networks

**Citation** Zhang Shao-Jie, Wu Xue, Liu Chun-Sheng. Optimal adaptive output tracking control for a class of uncertain nonlinear systems with actuator failures. *Acta Automatica Sinica*, 2018, 44(12): 2188-2197

随着技术的进步, 使得具有强非线性、大范围变化的非线性动力学系统越来越多. 用精确的数学模型描述这类系统的动态特性是不现实甚至是不可能的. 人们在对这类系统进行数学建模时, 通常在某确定点的微小变化范围内将非线性系统描述为线性系统, 或用低阶系统代替高阶系统等方法近似, 这都会或多或少地使系统存在建模误差及不确定性. 除了

模型不确定性外, 环境的变化、内部参数的变化、未知的外界扰动以及未知执行器故障也会造成被控系统的不确定性. 如果对于系统的控制器设计及分析中没有考虑这些不确定因素, 所设计的控制系统将很难保持所期望的性能, 甚至使系统失去稳定性. 因此, 非线性系统的执行器故障容错控制得到了广泛的研究<sup>[1-13]</sup>. 基于故障检测与隔离 (Fault detection and isolation, FDI) 的容错控制<sup>[7-9]</sup> 和自适应补偿控制<sup>[10-13]</sup> 是两种典型的容错控制方案. 基于 FDI 的方法需要确定系统故障信息并利用故障信息重构控制器. 基于自适应补偿控制方法设计的控制律不受故障诊断误差的影响, 不需要在系统故障时重新调整控制律的形式、结构简单, 且易于从理论上证明系统的稳定性和跟踪能力, 因此这种方法得到了广

收稿日期 2017-06-05 录用日期 2017-10-03  
Manuscript received June 5, 2017; accepted October 3, 2017  
国家自然科学基金 (61473147) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (61473147)  
本文责任编辑 刘艳军  
Recommended by Associate Editor LIU Yan-Jun  
1. 南京航空航天大学自动化学院 南京 211106  
1. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106

泛的研究.

文献 [10] 提出了一种针对具有执行器故障的多输入单输出 (Multi-input single-output, MISO) 非线性系统的反步自适应补偿跟踪控制方法. 文献 [2, 11–13] 将该方法扩展到了多输入多输出 (Multi-input multi-output, MIMO) 系统, 其中文献 [12] 考虑了更多的执行器故障类型, 文献 [13] 进一步考虑了系统的不确定性. 但上述方法均未考虑容错控制系统的性能指标, 不能从理论上表明所设计控制律的控制效果. 文献 [14] 考虑了系统的动态性能, 但不能保证性能指标选取的最优性能和合理性.

自适应动态规划<sup>[15–20]</sup> (Adaptive dynamic programming, ADP) 是近年来得到广泛关注的智能优化控制方法, 2002 年, Murray 等<sup>[21]</sup> 提出了针对连续系统的迭代 ADP 算法. 针对系统状态调节问题, Vamvoudakis 等<sup>[22]</sup> 采用神经网络构造评价网络和控制网络, 通过在线自适应的方式调节神经网络权值, 使得评价网络和控制网络的输出各自逐渐逼近最优代价函数和最优控制函数. Dierks 等<sup>[23]</sup> 设计了一种新的 ADP 结构, 该方案不需要控制网络, 只通过评价网络完成控制作用. 少数文献 [24–29] 针对系统的最优跟踪问题进行了研究, 文献 [24–26] 研究了系统的状态跟踪控制问题, 针对输出跟踪控制问题, Zargarzadeh 等<sup>[27]</sup> 针对一类 MISO 非线性严反馈系统, 提出了一种通过构造在线自适应评价器, 得到系统近似最优解的控制方法. 在此基础上, 文献 [28–29] 考虑了系统动态未知的 MISO 非线性严反馈系统的最优输出跟踪问题.

虽然采用 ADP 方法研究非线性系统的最优控制已经有了较多的研究成果, 但是多数研究成果仅适用于严反馈系统等特殊的非线性系统, 相关控制方法较少考虑存在系统故障时的控制问题; 系统控制结构通常由前馈控制和反馈控制两部分组成, 结构复杂. 针对现有研究成果的上述缺陷, 本文针对一类具有不确定性的 MIMO 连续时间非线性系统的输出跟踪控制问题, 考虑执行器失效、卡死以及两者的组合故障, 采用神经网络估计系统不确定性, 设计基于 ADP 的最优自适应补偿控制律. 该方法不需要前馈控制项, 只采用评价网络求解最优跟踪控制律, 通过李雅普诺夫理论证明了系统的跟踪误差一致最终有界.

## 1 问题描述

考虑一类如下描述的多输入多输出连续非线性系统<sup>[13]</sup>

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + \Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$  是系统的状态向量;  $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^{n \times m}$  和  $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^q$  是关于  $\boldsymbol{x}$  的充分光滑的非线性函数;  $\boldsymbol{u} = [u_1, \dots, u_m]^T \in \mathbf{R}^m$  是系统执行器的控制输入;  $\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^n$  为系统的不确定项;  $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^q$  ( $0 < q < m \leq n$ ) 为系统输出.

考虑执行器失效、卡死及其组合故障, 故障形式可表示为

$$u_i = \lambda_i u_{ci}(t) + \bar{u}_i, t \geq t_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

其中,  $u_i$  和  $u_{ci}$  分别是系统第  $i$  个执行器的实际控制输入和设计的控制输入;  $\lambda_i$  ( $0 \leq \lambda_i \leq 1$ ) 和  $\bar{u}_i$  是未知常数, 分别代表系统第  $i$  个执行器发生失效故障时的有效比例以及卡死故障时的卡死位置;  $t_i$  是代表故障发生时间的未知常数.

当发生如式 (2) 所示的执行器故障时, 可以将系统控制信号  $\boldsymbol{u}$  表示为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{u}_c(t) + \boldsymbol{K}_2 \quad (3)$$

其中,  $\boldsymbol{K}_1 = \text{diag}\{K_{11}, \dots, K_{1m}\}$ ,  $K_{1i} = \lambda_i$ ,  $\boldsymbol{K}_2 = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m]^T$  为执行器卡死位置参数;  $\boldsymbol{u}_c(t) = [u_{c_1}(t), \dots, u_{c_m}(t)]^T$  为待设计的控制输入.

**假设 1.** 在系统 (1) 发生式 (2) 形式的执行器故障时, 依然可以利用无故障或故障后仍可用的执行器控制系统完成任务.

假设 1 保证了系统容错控制律的存在性, 是可以对系统进行容错控制的必要条件.

为了处理执行器冗余的问题, 将  $m$  个执行器分在  $q$  ( $1 \leq q < m$ ) 个组中<sup>[12]</sup>, 表示为

$$\left\{ \{u_{11}, \dots, u_{1d_1}\}, \dots, \{u_{k1}, \dots, u_{kd_k}\}, \dots, \{u_{q1}, \dots, u_{qd_q}\} \right\} \quad (4)$$

上式表示  $d_k$  ( $k = 1, \dots, q$ ) 个输入  $u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{kd_k}$  分在第  $k$  组中,  $d_1 + d_2 + \dots + d_q = m$ .

由执行器分组结果, 可将控制输入记为

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{w}(t) \quad (5)$$

$$\boldsymbol{u}_c(t) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{w}_c(t) \quad (6)$$

其中,  $\boldsymbol{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_q(t)]^T \in \mathbf{R}^{q \times 1}$  是执行器正常时待设计的控制律,  $\boldsymbol{w}_c(t) = [w_{c1}(t), \dots, w_{cq}(t)]^T \in \mathbf{R}^q$  是执行器故障时的控制律表示形式.

$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mq} \end{bmatrix}$  是控制分配矩阵,  $b_{ij} = \begin{cases} 0, & u_i(t) \text{ 不在 } j \text{ 组} \\ b_j, & u_i(t) \text{ 在 } j \text{ 组} \end{cases}$ , 其中,  $b_j$  是

用来调节对应的系统执行器对控制输入影响的比例参数. 根据式 (5), 可将系统 (1) 改写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})B\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (7)$$

取  $\mathbf{y}_r(t) = [y_{r1}, y_{r2}, \dots, y_{rq}]^T \in \mathbf{R}^q$  为系统参考输出, 系统输出跟踪误差记为

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_r \quad (8)$$

**假设 2.** 系统状态可控, 且在  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  时,  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{B}$  非奇异.

假设 2 中系统状态可控是设计不确定性估计器的前提, 其他假设条件是系统可以求解最优控制的前提.

定义系统 (7) 的代价函数为

$$V(\mathbf{e}, t) = \int_t^\infty [\mathbf{e}^T(\tau)Q\mathbf{e}(\tau) + \mathbf{w}^T(\tau)R\mathbf{w}(\tau)]d\tau \quad (9)$$

其中,  $Q \in \mathbf{R}^{q \times q}$ ,  $R \in \mathbf{R}^{m \times m}$  是正定常数矩阵, 并且存在连续控制函数  $\mathbf{w}(t)$  使得系统输出跟踪参考输出.

把式 (8) 代入式 (9), 可得用  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{w}(t)$  和  $\mathbf{y}_r(t)$  表示的代价函数

$$V(\mathbf{x}) = \int_t^\infty [(\mathbf{h}(\mathbf{x}(\tau)) - \mathbf{y}_r(\tau))^T Q (\mathbf{h}(\mathbf{x}(\tau)) - \mathbf{y}_r(\tau)) + \mathbf{w}^T(\tau)R\mathbf{w}(\tau)]d\tau \quad (10)$$

本文的研究目标为针对具有执行器故障 (2) 的系统 (1) 设计最优自适应补偿控制律, 通过求解使代价函数 (9) 最小的近似最优控制输入, 使得系统 (1) 能够实现对参考输出信号  $\mathbf{y}_r$  的跟踪.

## 2 容错控制律设计

### 2.1 不确定性估计器设计

由于系统动态方程中含有不确定项  $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\Delta f_1(\mathbf{x}), \Delta f_2(\mathbf{x}), \dots, \Delta f_n(\mathbf{x})]^T$ , 本文设计神经网络估计器来估计  $\Delta f_i(\mathbf{x})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\Delta f_i(\mathbf{x})$  可以表示为

$$\Delta f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{W}_i^T \boldsymbol{\theta}_i(\mathbf{x}) + \varepsilon_{f_i}$$

式中,  $\boldsymbol{\theta}_i(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{m_i}$  是基函数,  $\mathbf{W}_i \in \mathbf{R}^{m_i}$  是权值向量,  $\varepsilon_{f_i}$  是估计器的估计误差, 满足  $\|\varepsilon_{f_i}\| \leq \bar{\varepsilon}_{f_i}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{f_i} > 0$ . 神经网络对不确定项  $\Delta f_i(\mathbf{x})$  的估计可以表示为

$$\Delta \hat{f}_i(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{W}}_i^T \boldsymbol{\theta}_i(\mathbf{x}) \quad (11)$$

其中,  $\hat{\mathbf{W}}_i$  是  $\mathbf{W}_i$  的估计值.

定义系统状态  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 的估计  $\hat{x}_i$  为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i &= f_i(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{W}}_i^T \boldsymbol{\theta}_i(\mathbf{x}) + g_i(\mathbf{x})u + \Gamma_{3i}\tilde{x}_i + \\ &\quad \Gamma_{4i}\tilde{x}_i(\tilde{x}_i\Gamma_{4i}\tilde{x}_i) \end{aligned} \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{1 \times m}$ ,  $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$  为状态估计误差,  $\Gamma_{3i}$  和  $\Gamma_{4i}$  是正常数. 由此可得:

$$\dot{\tilde{x}}_i = \tilde{\mathbf{W}}_i^T \boldsymbol{\theta}_i(\mathbf{x}) + \varepsilon_{f_i} - \Gamma_{3i}\tilde{x}_i - \Gamma_{4i}\tilde{x}_i(\tilde{x}_i\Gamma_{4i}\tilde{x}_i) \quad (13)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{W}}_i = \mathbf{W}_i - \hat{\mathbf{W}}_i$ .

设计神经网络权值调整律为

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}}_i = \boldsymbol{\theta}_i(\mathbf{x})\tilde{x}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

定义李雅普诺夫函数  $V_1 = \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}) + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}}$ , 其中,  $\tilde{\mathbf{W}}^T = [\tilde{\mathbf{W}}_1^T \dots \tilde{\mathbf{W}}_n^T]$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}^T = [\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_n]$ . 可得:

$$\dot{V}_1 = \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}}) + \tilde{\mathbf{x}}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = -\tilde{\mathbf{x}}^T \Gamma_3 \tilde{\mathbf{x}} - (\tilde{\mathbf{x}}^T \Gamma_4 \tilde{\mathbf{x}})^2 < 0 \quad (15)$$

其中,  $\Gamma_3 = \text{diag}\{\Gamma_{31}, \dots, \Gamma_{3n}\}$ ,  $\Gamma_4 = \text{diag}\{\Gamma_{41}, \dots, \Gamma_{4n}\}$ . 表明系统的状态估计可以逼近实际系统状态,  $\Delta \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$  可实现对  $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})$  的逼近.

### 2.2 最优控制律设计

令  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ , 当控制输入  $\mathbf{w}(t)$  在容许范围内时代价函数 (10) 的哈密顿函数可以表示为

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = r(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + V_x^T(\mathbf{x})[\mathbf{F}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})B\mathbf{w}] \quad (16)$$

其中,  $r(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = (\mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{y}_r(t))^T Q (\mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{y}_r(t)) + \mathbf{w}^T(t)R\mathbf{w}(t)$ ,  $V_x(\mathbf{x})$  是  $V(\mathbf{x})$  对  $\mathbf{x}$  的偏导. 因为使代价函数 (10) 最小的最优控制输入也使哈密顿函数 (16) 最小, 所以可以通过求解方程  $\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{w})/\partial \mathbf{w} = 0$ , 得到最优控制输入, 记为

$$\mathbf{w}^* = -\frac{1}{2}R^{-1}g^T(\mathbf{x})V_x^*(\mathbf{x}) \quad (17)$$

最优代价函数  $V_x^*(\mathbf{x})$  满足 HJB 方程  $0 = \min[H(\mathbf{x}, \mathbf{w}, V_x^*(\mathbf{x}))]$ . 把式 (17) 代入式 (16) 中可得最优控制输入的充分必要条件

$$\begin{aligned} 0 &= Q(\mathbf{x}) + V_x^{*T}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \\ &\quad \frac{1}{4}V_x^{*T}(\mathbf{x})g(\mathbf{x})R^{-1}g^T(\mathbf{x})V_x^*(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (18)$$

式中,  $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{y}_r(t))^T Q (\mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{y}_r(t))$ . 当控制输入为最优控制输入  $\mathbf{w}^*(t)$  时, 记系统的闭环动态方程  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})B\mathbf{w}^*$  满足

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})B\mathbf{w}^*\| \leq K^* \quad (19)$$

其中,  $K^*$  为常数.

设计在线神经网络把代价函数 (10) 表示成

$$V(\mathbf{x}) = \Theta^T \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}) + C \quad (20)$$

其中,  $\Theta \in \mathbf{R}^L$  是在线神经网络的目标权值向量,  $\phi(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^L$  是有  $N$  个隐层神经元并满足  $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  的线性无关的基向量,  $\varepsilon(\mathbf{x})$  是在线估计器的重构误差,  $C$  是与  $\mathbf{x}$  无关的常函数, 在控制律设计时不需求出其值. 选择合适的  $\phi(\mathbf{x})$  满足  $\|\nabla_x \phi(\mathbf{x})\| > 0$ . 例如, 如果  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ ,  $\phi(\mathbf{x}) = [x_1, x_2, x_1 x_2]^T$ , 那么  $\|\nabla_x \phi(\mathbf{x})\| = \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2} > 0$ . 选择激活函数构造基向量使得

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = V_x(\mathbf{x}) = \nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \Theta + \nabla_x \varepsilon(\mathbf{x}) \quad (21)$$

是渐近逼近的. 根据 Weierstrass 高阶逼近定理, 只要  $V(\mathbf{x})$  足够光滑这样的基函数就是存在的. 在线神经网络的目标常值向量、重构误差及重构误差对  $\mathbf{x}$  的偏导上界分别记为  $\|\Theta\| \leq \Theta_M$ ,  $\|\varepsilon(\mathbf{x})\| \leq \varepsilon_M$ ,  $\left\| \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\| = \|\nabla_x \varepsilon(\mathbf{x})\| \leq \varepsilon'_M$  [11].

把式 (21) 分别代入式 (17) 和式 (18), 可得:

$$\mathbf{w}^* = -\frac{1}{2} R^{-1} (g(\mathbf{x}) B)^T (\nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \Theta + \nabla_x \varepsilon(\mathbf{x})) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} H^*(\mathbf{x}, \Theta) &= Q(\mathbf{x}) + \Theta^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) - \\ &\frac{1}{4} \Theta^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) D \nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \Theta + \varepsilon_{\text{HJB}} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

其中,  $D = g(\mathbf{x}) B R^{-1} B^T g^T(\mathbf{x}) > 0$ , 且  $D_{\min} \leq \|D\| \leq D_{\max}$ ,  $D_{\min}$ 、 $D_{\max}$  是已知的给定常数.  $\varepsilon_{\text{HJB}}$  是在线神经网络重构引起的残差

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{HJB}} &= \nabla_x^T \varepsilon \left( F(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} D (\nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \Theta + \nabla_x \varepsilon) \right) + \\ &\frac{1}{4} \nabla_x^T \varepsilon D \nabla_x \varepsilon = \\ &\nabla_x^T \varepsilon (F(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) B \mathbf{w}^*) + \frac{1}{4} \nabla_x^T \varepsilon D \nabla_x \varepsilon \end{aligned}$$

根据式 (14) 以及  $g(\mathbf{x}) B$  和  $\nabla_x \varepsilon$  的上界, 可得  $\varepsilon_{\text{HJB}}$  的上界  $|\varepsilon_{\text{HJB}}| \leq \varepsilon'_M K^* + \varepsilon'_M{}^2 D_{\max}$ .

把在线神经网络对 (21) 的估计值表示为

$$\hat{V}(\mathbf{x}) = \nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \hat{\Theta} \quad (24)$$

其中,  $\hat{\Theta}$  是对目标权值  $\Theta$  的估计值. 同理, 对最优控制输入的估计值表示为

$$\hat{\mathbf{w}} = -\frac{1}{2} R^{-1} (g(\mathbf{x}) B)^T \nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \hat{\Theta} \quad (25)$$

由式 (24) 和式 (25) 可得哈密顿函数的估计值

$$\begin{aligned} \hat{H}(\mathbf{x}, \hat{\Theta}) &= Q(\mathbf{x}) + \hat{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) \hat{F}(\mathbf{x}) - \\ &\frac{1}{4} \hat{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) D \nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \hat{\Theta} \end{aligned} \quad (26)$$

为了使神经网络权值的估计值  $\hat{\Theta}$  使  $\hat{H}(\mathbf{x}, \hat{\Theta})$  最小, 设计在线神经网络权值调整算法

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Theta}} &= -\frac{\alpha_1 \hat{\sigma}}{(\hat{\sigma}^T \sigma + 1)^2} \times \\ &\left( Q(\mathbf{x}) + \hat{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) \hat{F}(\mathbf{x}) - \right. \\ &\left. \frac{1}{4} \hat{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) D \nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \hat{\Theta} \right) + \\ &\frac{1}{2} \sum (\mathbf{e}, \hat{\mathbf{w}}) \alpha_2 \nabla_x \phi(\mathbf{x}) D \left( \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \right)^T \mathbf{e} \end{aligned} \quad (27)$$

其中,  $\hat{\sigma} = \nabla_x \phi(\mathbf{x}) \hat{F}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \nabla_x \phi(\mathbf{x}) D \nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \hat{\Theta}$ ,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  是设计的参数, 满足  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ ,

$$\sum (\mathbf{e}, \hat{\mathbf{w}}) = \begin{cases} 0, & \text{若 } \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}} \leq 0 \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \quad (28)$$

### 2.3 自适应补偿控制律设计

考虑执行器故障的情况, 控制律应满足

$$K_1 B w_c(t) + K_2 = B \hat{\mathbf{w}}(t) \quad (29)$$

其中,  $K_1 = \text{diag}\{K_{11}, \dots, K_{1m}\} = \sum_{l=1}^m K_{1l} N_l$ ,  $N_l \in \mathbf{R}^{m \times m}$  ( $l = 1, \dots, m$ ) 是主对角线第  $l$  个元素为 1 且其他元素为 0 的对角矩阵. 设计控制律

$$\hat{\mathbf{w}}_c = \left( \sum_{l=1}^m \hat{K}_{1l} N_l B \right)^{-1} [B \hat{\mathbf{w}}(t) - \hat{K}_2] \quad (30)$$

其中,  $\hat{K}_{1l}$ ,  $\hat{K}_2$  为  $K_{1l}$ ,  $K_2$  的估计值. 设计自适应参数调整律为

$$\dot{\hat{K}}_{1l} = \begin{cases} \frac{\alpha_2}{\Gamma_{1l}} \mathbf{e}^T \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} g(\mathbf{x}) N_l B \hat{\mathbf{w}}_c(t), & |\chi| > a \\ \frac{\alpha_2}{\Gamma_{1l}} \mathbf{e}^T \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} g(\mathbf{x}) N_l B \hat{\mathbf{w}}_c(t), \\ \quad (\chi = a, \dot{\chi} \geq 0) \text{ 或 } (\chi = -a, \dot{\chi} \leq 0) \\ 0, & (\chi = a, \dot{\chi} < 0) \text{ 或 } (\chi = -a, \dot{\chi} > 0) \end{cases} \quad (31)$$

$$\dot{\hat{K}}_2 = \alpha_2 \Gamma_2 g^T(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \right)^T \mathbf{e} \quad (32)$$

式中,  $l = 1, \dots, m$ ,  $\Gamma_1 = \text{diag}\{\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \dots, \Gamma_{1m}\} \in \mathbf{R}^{m \times m} > 0$  和  $\Gamma_2 \in \mathbf{R}^{m \times m} > 0$  均为正定增益对角矩阵, 需要根据系统的实际情况进行设计和调节.  $\chi$  和  $\dot{\chi}$  分别是矩阵  $\sum_{l=1}^m \hat{K}_{1l} N_l B$  主对角线上绝对值最小的元素和与之对应的导数.

设矩阵  $\sum_{l=1}^m \hat{K}_{1l} N_l B$  主对角线上绝对值最小的元素的绝对值为  $b$ , 则总会存在一个很小的正数  $a$

满足  $a < b$ . 因此虽然矩阵  $\sum_{l=1}^m \hat{K}_{1l} N_l B$  是未知的, 但设计的自适应控制律 (30) 能够保证矩阵  $\hat{K}_1 B$  是非奇异的, 这也就确保了本文设计的容错律是可行的.

**定理 1.** 对于存在执行器故障 (2) 的非线性系统 (1), 设计控制律 (30), 设计神经网络权值更新律 (27), 自适应参数调整律 (31) 和 (32), 闭环跟踪控制系统稳定, 且跟踪误差和神经网络估计误差一致最终有界.

**证明.** 见附录 A. □

### 3 仿真算例

以文献 [30] 中的飞翼飞行器作为控制对象, 来验证本文控制律的控制效果. 该飞行器的纵向非线性运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= f_1 + G_1(u_1 + u_2) + \Delta f_1 \\ \dot{\alpha} &= f_2 + G_2(u_1 + u_2) + \Delta f_2 \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{q} &= f_4 + G_{41}(u_1 + u_2) + \\ &\quad G_{42}(u_3 + u_4 + u_5 + u_6) + \Delta f_4 \end{aligned} \quad (33)$$

其中,  $V$  是飞行速度;  $\alpha$  是迎角;  $\theta$  是俯仰角;  $q$  是俯仰角速率; 输入变量  $u_1$ 、 $u_2$  表示两个发动机的油门开度; 输入变量  $u_3$  和  $u_4$  分别为左右内升降舵偏角,  $u_5$  和  $u_6$  分别为左右外升降舵偏角.  $f_1, f_2, f_4, G_1, G_2, G_4$  表达式详见文献 [30]. 取  $V, \alpha, \theta, q$  分别为系统状态  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 系统输入  $u = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]$ .  $\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_4$  分别为关于  $f_1, f_2, f_4$  的不确定项, 本文设定  $\Delta f_1 = 0.2f_1, \Delta f_2 = -0.2f_2, \Delta f_4 = -0.1f_4$ .

为了满足假设 2 中条件  $\frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) B$  是列满秩矩阵, 需要把  $x_3$  的动态方程改写. 由方程  $\dot{q} = f_4 + G_{41}u_1 + G_{42}u_2$  可得  $q = \frac{2V}{c_A C_{Lq}} (\frac{2I_y}{\rho V^2 S_{CA}} \dot{q} - C_{m0} - C_{m\alpha}\alpha - \frac{c_A}{2V} C_{m\dot{\alpha}} \dot{\alpha}) - \frac{4VI_y}{c_A C_{Lq} \rho V^2 S_{CA}} (G_{41}u_1 + G_{42}u_2)$ . 于是,  $x_3$  的动态方程可以改写为

$$\dot{\theta} = f_3 + G_{31}u_1 + G_{32}u_2$$

其中,  $f_3 = \frac{2V}{c_A C_{Lq}} (\frac{2I_y}{\rho V^2 S_{CA}} \dot{q} - C_{m0} - C_{m\alpha}\alpha - \frac{c_A}{2V} C_{m\dot{\alpha}} \dot{\alpha}), G_{31} = -\frac{4VI_y}{c_A C_{Lq} \rho V^2 S_{CA}} G_{41}, G_{32} = -\frac{4VI_y}{c_A C_{Lq} \rho V^2 S_{CA}} G_{42}$ .

系统输出  $y = [x_1, x_3]^T$ , 参考信号分别为  $205 + 10\sin(0.1t)$  和  $10\sin(0.1t)$ . 给定系统的代价函数 (9) 中  $Q = [100, 100], R = [100, 1]$ . 系统和观测状态的初始状态都设为  $x(0) = [200 \text{ m/s}, 0, 3^\circ, 0]^T$ . 神经网络权值初始值全部设为 0, 这就意味着不需要给系统设置一个容许范围内的初始控制输入. 选

取代价函数在线估计神经网络基函数为  $\phi(x) = [\sin x_3 \cos x_2, x_4 x_1, x_1 x_2, -\cos x_2, x_1, x_2, -\sin x_2 / \cos x_1, x_4, x_1^2, x_2^2, \sin x_3 \sin x_2 / x_1, x_4^2]$ , 自适应增益矩阵  $\Gamma_1 = 1000I_{6 \times 6}, \Gamma_2 = \text{diag}\{0.001, 0.001, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1\}$ , 在线神经网络调整参数  $\alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 1$ . 设飞行器在  $t = 100 \text{ s}$  时, 右侧外升降舵  $u_6$  发生卡死在  $u_6 = 6^\circ$  的故障; 在  $t = 200 \text{ s}$  时, 左侧外升降舵  $u_5$  发生  $\lambda_5 = 0.4$  的失效故障; 在  $t = 300 \text{ s}$ , 左侧内升降舵  $u_3$  发生卡死在  $u_3 = -8^\circ$  的故障, 并且右侧内升降舵  $u_4$  发生  $\lambda_4 = 0.6$  的失效故障. 将本文方法与文献 [13] 中所述的指定性能边界的方法比较, 在进行仿真时对比两种方法的控制效果, 仿真结果如图 1~6 所示.

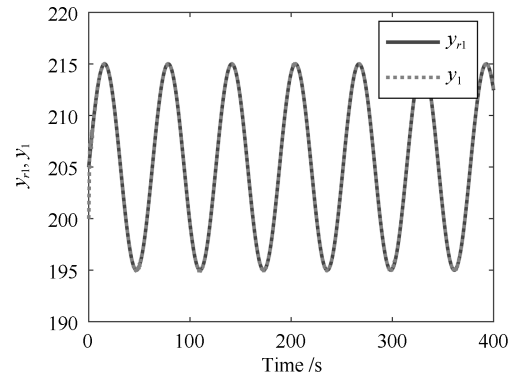


图 1 本文方法的  $y_1$  和  $y_{r1}$

Fig. 1  $y_1$  and  $y_{r1}$  of the proposed method

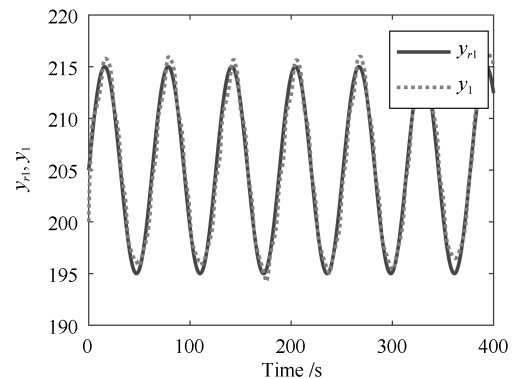


图 2 文献 [13] 方法的  $y_1$  和  $y_{r1}$

Fig. 2  $y_1$  and  $y_{r1}$  of [13]

由图 1~图 4 可知, 在执行器出现卡死或失效故障后, 两种控制方法均可以实现对给定参考信号跟踪, 而本文方法具有更好的跟踪性能. 图 5 与图 6 为在两种控制方法下系统跟踪误差的对比图, 可以看出在当前参数设置下,  $t = 0 \text{ s} \sim 100 \text{ s}$  系统无故障时前者对  $y_{r1}$  的跟踪效果比后者好, 两种方法对  $y_{r2}$  的跟踪效果差别不明显.  $t = 100 \text{ s} \sim 400 \text{ s}$  故障发生后, 前者跟踪效果几乎不受影响, 而后者由于故障的原因则出现一定程度的跟踪误差增大. 无论

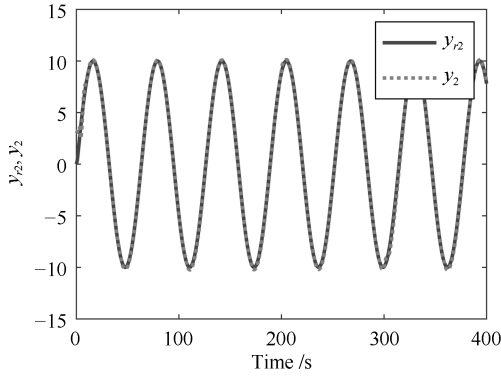


图 3 本文方法的  $y_2$  和  $y_{r2}$   
Fig. 3  $y_2$  and  $y_{r2}$  of the proposed method

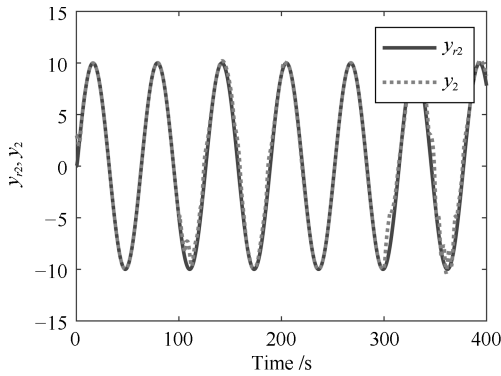


图 4 文献 [13] 方法的  $y_2$  和  $y_{r2}$   
Fig. 4  $y_2$  and  $y_{r2}$  of [13]

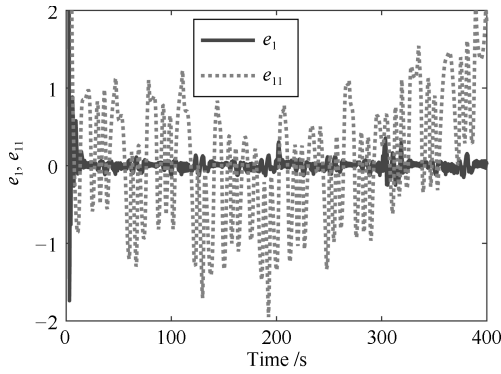


图 5 本文和文献 [13] 方法的  $y_1$  跟踪误差  $e_1, e_{11}$   
Fig. 5 Tracking errors  $e_1, e_{11}$  of  $y_1$  by the proposed method and [13]

对于执行器卡死故障 ( $t = 100\text{s} \sim 200\text{s}$ )、失效故障 ( $t = 200\text{s} \sim 300\text{s}$ )、以及卡死和失效组合故障 ( $t = 300\text{s} \sim 400\text{s}$ ), 相比可以看出前者具有更好的容错性能。

图 7 为系统状态估计误差  $\tilde{x}_2$  曲线, 可以看出系统状态估计误差较小, 表明  $\Delta \hat{f}(\mathbf{x})$  可以逼近  $\Delta f(\mathbf{x})$ . 图 8 为不确定项估计神经网络权值变化曲线, 虽然初始值设为 0, 但是随着时间的推移和系统的变化自

适应调整, 逐渐收敛到目标权值, 说明本文不确定项估计器设计的有效性.

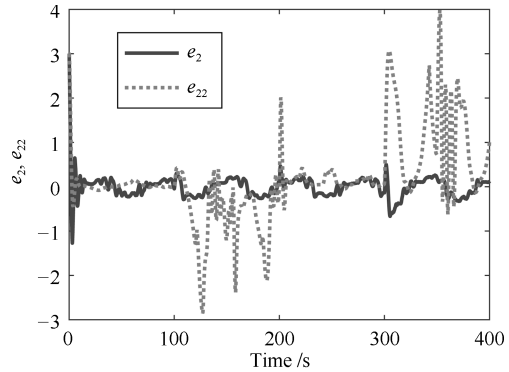


图 6 本文和文献 [13] 方法的  $y_2$  跟踪误差  $e_2, e_{22}$   
Fig. 6 Tracking errors  $e_2, e_{22}$  of  $y_2$  by the proposed method and [13]

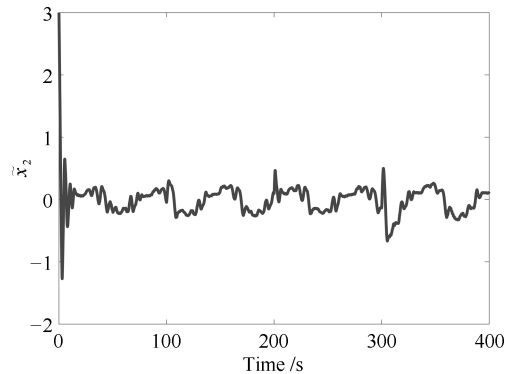


图 7 系统状态误差估计  $\tilde{x}_2$   
Fig. 7 Estimating error of system state  $\tilde{x}_2$

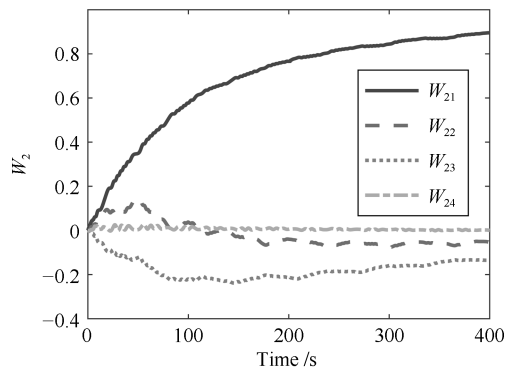


图 8 不确定项估计神经网络权值  $W_2$   
Fig. 8 Weights  $W_2$  of uncertainty estimating neural network

#### 4 结束语

本文针对一类具有不确定项以及执行器故障的 MIMO 仿射非线性系统的输出跟踪问题, 考虑系统的执行器卡死、部分失效及其组合故障, 提出了一种基于动态规划的最优自适应补偿控制方案. 在构造

系统状态估计器估计系统不确定项的基础上, 设计了最优自适应补偿跟踪控制律. 提出的控制方法能够使闭环系统的所有状态有界, 并有效跟踪参考信号. 仿真结果表明了本文设计方法的有效性.

附录 A

定理 1 证明.

选取系统 Lyapunov 函数为

$$V_L(t) = \frac{1}{2}\alpha_2 e^T e + \frac{1}{2}\tilde{K}_2^T \Gamma_2^{-1} \tilde{K}_2 + \frac{1}{2}\text{tr}[\tilde{K}_1^T \Gamma_1 \tilde{K}_1 + \frac{1}{2}\tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta} + \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{W}^T \tilde{W}) + \frac{1}{2}\tilde{x}^T \tilde{x}$$

其中,  $\tilde{\Theta}$ ,  $\tilde{K}_1$ ,  $\tilde{K}_2$  是参数估计误差,  $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$ ,  $\tilde{K}_1 = K_1 - \hat{K}_1$ ,  $\tilde{K}_2 = K_2 - \hat{K}_2$ .

求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_L(t) = & \alpha_2 e^T \left( \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} F(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) (K_1 B \hat{w}_c + K_2) - \dot{y}_r \right) + \dot{K}_2^T \Gamma_2^{-1} \tilde{K}_2 + \text{tr}[\tilde{K}_1^T \Gamma_1 \dot{\tilde{K}}_1] + \\ & \tilde{\Theta}^T \dot{\tilde{\Theta}} + \text{tr}(\tilde{W}^T \dot{\tilde{W}}) + \tilde{x}^T \dot{\tilde{x}} = \\ & \alpha_2 e^T \left( \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) (\hat{K}_1 B \hat{w}_c + \hat{K}_2) - \dot{y}_r \right) + \alpha_2 e^T \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} g(\mathbf{x}) (\tilde{K}_1 B \hat{w}_c + \tilde{K}_2) + \dot{K}_2^T \Gamma_2^{-1} \tilde{K}_2 + \text{tr}[\tilde{K}_1^T \Gamma_1 \dot{\tilde{K}}_1] + \\ & \tilde{\Theta}^T \dot{\tilde{\Theta}} + \text{tr}(\tilde{W}^T \dot{\tilde{W}}) + \tilde{x}^T \dot{\tilde{x}} \end{aligned} \quad (A1)$$

明显有  $\dot{\tilde{K}}_1 = -\dot{\hat{K}}_1$ ,  $\dot{\tilde{K}}_2 = -\dot{\hat{K}}_2$ ,  $\dot{\tilde{\Theta}} = -\dot{\hat{\Theta}}$ , 又由式 (13)、(14)、(27)、(28) 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_L(t) = & \alpha_2 e^T \left( \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} (F(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) B \hat{w}) - \dot{y}_r \right) + \\ & \tilde{\Theta}^T \dot{\tilde{\Theta}} - \tilde{x}^T \Gamma_3 \tilde{x} - (\tilde{x}^T \Gamma_4 \tilde{x})^2 = \\ & \alpha_2 e^T \left( \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} (F(\mathbf{x}) - D \nabla_e^T \phi(\mathbf{x}) \hat{\Theta} / 2) - \dot{y}_r \right) + \\ & \tilde{\Theta}^T \frac{\alpha_1 \hat{\sigma}}{(\hat{\sigma}^T \hat{\sigma} + 1)^2} Q(\mathbf{x}) + \hat{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) \hat{F}(\mathbf{x}) - \\ & \frac{1}{4} \hat{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) D \nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \hat{\Theta} + \\ & \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T \sum (e, \hat{w}) \alpha_2 \nabla_x \phi(\mathbf{x}) D \left( \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \right)^T e - \\ & \tilde{x}^T \Gamma_3 \tilde{x} - (\tilde{x}^T \Gamma_4 \tilde{x})^2 \end{aligned} \quad (A2)$$

由式 (23) 可得  $Q(\mathbf{x}) = -\Theta^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) + \frac{1}{4} \Theta^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) D \nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \Theta - \varepsilon_{\text{HJB}}$ , 并记  $\dot{\mathbf{x}}^* = F(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) B w^*$ ,  $\rho = (\hat{\sigma}^T \hat{\sigma} + 1)$ . 定义矩阵  $\Gamma_3$  的最小

奇异值和最大奇异值分别为  $\sigma_m(\Gamma_3)$  和  $\sigma_M(\Gamma_3)$ , 则  $\tilde{x}^T \Gamma_3 \tilde{x} \geq \|\tilde{x}\|^2 \sigma_m(\Gamma_3)$ . 又由系统状态估计误差动态方程 (13) 可得  $\|\tilde{x}\| \geq \sigma_M^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3) \|\Delta \tilde{f}(\mathbf{x})\|$ , 所以  $-\tilde{x}^T \Gamma_3 \tilde{x} \leq -\sigma_m(\Gamma_3) \|\tilde{x}\|^2 \leq -\sigma_m(\Gamma_3) \sigma_M^{-1}(\Gamma_3) \|\Delta \tilde{f}(\mathbf{x})\|^2$ . 分别计算  $\tilde{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) D \nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \tilde{\Theta}$  和  $\tilde{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) (\dot{\mathbf{x}}^* + \frac{1}{2} D \nabla_x \varepsilon)$  的平方, 并应用不等式条件  $D_{\min} \leq \|D\| \leq D_{\max}$ , 结合 (19) 中系统动态方程满足的上界条件并应用柯西-许瓦兹不等式可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_L(t) \leq & \alpha_2 e^T \left( \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} (F(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) B \hat{w}) - \dot{y}_r \right) + \\ & \frac{32769}{D_{\min}^4} \alpha_1 K^{*4} - \frac{\alpha_1}{64\rho^2} \tilde{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) \times \\ & D \nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \tilde{\Theta} + \frac{3\alpha_1}{2\rho^2} \|\tilde{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x})\|^2 |\varepsilon_{\text{HJB}}| - \\ & \left( \frac{1}{2} \sigma_m(\Gamma_3) \sigma_M^{-1}(\Gamma_3) - \frac{5\alpha_1}{2\rho^2} \|\nabla_x \phi(\mathbf{x}) \Theta\|^2 - \right. \\ & \left. \frac{\alpha_1}{2\rho^2} |\varepsilon_{\text{HJB}}| \right) \|\Delta \tilde{f}(\mathbf{x})\|^2 - \left( \sigma_m^2(\Gamma_4) \sigma_M^{-2}(\Gamma_4) - \right. \\ & \left. \frac{4096\alpha_1}{D_{\min}^4 \rho^2} \right) \|\Delta \tilde{f}(\mathbf{x})\|^4 - \frac{1}{2} \tilde{x}^T \Gamma_3 \tilde{x} + \\ & \frac{4\alpha_1}{\rho^2} |\varepsilon_{\text{HJB}}|^2 + \frac{2048\alpha_1}{D_{\min}^4 \rho^2} \|D \nabla_x \varepsilon\|^4 + \\ & \frac{\alpha_1}{2\rho^2} K^{*2} |\varepsilon_{\text{HJB}}| + \frac{\alpha_1}{4\rho^2} \|D \nabla_x \varepsilon\|^2 - \\ & \frac{1}{2} \sum (e, \hat{w}) \alpha_2 \tilde{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) D \left( \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \right)^T e \end{aligned} \quad (A3)$$

分别考虑  $\sum (e, \hat{w}) = 0$  和  $\sum (e, \hat{w}) = 1$  两种情况<sup>[28]</sup>. 当  $\sum (e, \hat{w}) = 0$  时, 由式 (28) 可知, 式 (A3) 中的第一项小于 0. 所以存在正常数  $\dot{e}_{\min}$  满足  $0 < \dot{e}_{\min} < \|\dot{e}\|$ . 由于  $\left\| \frac{1}{\rho^2} \right\| = \left\| \frac{1}{(\hat{\sigma}^T \hat{\sigma} + 1)^2} \right\| \leq 1$ , 假设  $\|\Delta \tilde{f}(\mathbf{x})\| \leq \Delta \tilde{f}_{\max}$ ,  $\left\| \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\| \leq h'_M$ , 式 (A3) 可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}_L(t) \leq & -\alpha_2 \dot{e}_{\min} \|e\| - \\ & \frac{\alpha_1}{64\rho^2} (\tilde{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) D \nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \tilde{\Theta})^2 - \\ & \frac{1}{D_{\min}^4} \sigma_m^2(\Gamma_4) \sigma_M^{-2}(\Gamma_4) - 4096\alpha_1 \|\tilde{f}(\mathbf{x})\|^4 - \\ & \frac{1}{2} (\sigma_m(\Gamma_3) \sigma_M^{-1}(\Gamma_3) - 5\alpha_1 \|\nabla_x \phi(\mathbf{x}) \Theta\|^2 - \\ & \alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}|) \|\tilde{f}(\mathbf{x})\|^2 + \frac{3\alpha_1}{2\rho^2} \|\tilde{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x})\|^2 \times \\ & |\varepsilon_{\text{HJB}}| + \beta_1 - \frac{1}{2} \tilde{x}^T \Gamma_3 \tilde{x} \end{aligned} \quad (A4)$$

式中  $\beta_1 = \frac{32769}{D_{\min}^4} \alpha_1 K^{*4} + \frac{\alpha_1}{2\rho^2} K^{*2} |\varepsilon_{\text{HJB}}| +$

$\frac{\alpha_1}{4\rho^2} \|D\nabla_x \varepsilon\|^2 + \frac{4\alpha_1}{\rho^2} |\varepsilon_{\text{HJB}}|^2 + \frac{2048}{D_{\min}^4 \rho^2} \alpha_1 \|D\nabla_x \varepsilon\|^4$ . 选择合适的参数  $\alpha_1, \alpha_2$ , 使其满足下列不等式

$$\begin{aligned} \sigma_m(\Gamma_3)\sigma_M^{-1}(\Gamma_3) - 5\alpha_1 \|\nabla_x \phi(\mathbf{x})\Theta\|^2 - \alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}| > 0 \\ \sigma_m^2(\Gamma_4)\sigma_M^{-2}(\Gamma_4) - \frac{4096}{D_{\min}^4} \alpha_1 > 0 \end{aligned}$$

那么若不等式 (A5) 成立, 则式 (A4) 小于 0.

接下来考虑  $\sum(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{w}}) = 1$  的情况, 此时控制输入 (25) 可能是不稳定的. 由式 (A3) 加减  $\frac{1}{2}\alpha_2 \mathbf{e}^T \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} D(\nabla_x^T \phi(\mathbf{x})\Theta + \nabla_x \varepsilon)$ , 并应用均值不等式可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_L(t) \leq & -\frac{3}{4}\alpha_2 \dot{\mathbf{e}}_{\min}^* \frac{\|\mathbf{e}\|}{4} + \frac{\alpha_2}{4\bar{Q}_{\min}} h_M'^2 D_{\max}^2 \varepsilon_M'^2 - \\ & \frac{\alpha_1}{64\rho^2} (\tilde{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x}) D \nabla_x^T \phi(\mathbf{x}) \tilde{\Theta})^2 + \\ & \frac{3\alpha_1}{2\rho^2} \|\tilde{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x})\|^2 |\varepsilon_{\text{HJB}}| - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\sigma_m(\Gamma_3)\sigma_M^{-1}(\Gamma_3) - 5\alpha_1 \|\nabla_x \phi(\mathbf{x})\Theta\|^2 - \\ & \alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}|) \|\tilde{f}(\mathbf{x})\|^2 - (\sigma_m^2(\Gamma_4)\sigma_M^{-2}(\Gamma_4) - \\ & \frac{4096\alpha_1}{D_{\min}^4}) \|\tilde{f}(\mathbf{x})\|^4 + \beta_1 - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \Gamma_3 \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

式中,  $\dot{\mathbf{e}}_{\min}^* > 0$  满足  $\dot{\mathbf{e}}_{\min}^* \leq \|\dot{\mathbf{e}}^*\|$ , 其中,  $\dot{\mathbf{e}}^* = \left(\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T}\right)^T (F(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})Bw^*) - \dot{y}_r$ .  $\bar{Q}_{\min} > 0$  满足  $\bar{Q}_{\min} \leq \|\dot{\mathbf{e}}^*\|$ .

若下列不等式 (A6) 成立, 则式 (A4) 小于 0.

不等式 (A5) 和 (A6) 保证了当  $\|\mathbf{e}\| \geq b_e$ ,  $\|\tilde{\Theta}\| \geq b_{\Theta}$  时  $\dot{V}_L(t) < 0$ , 其中,  $b_e = \max(b_{e0}, b_{e1})$ ,  $b_{\Theta} = \max(b_{\Theta0}, b_{\Theta1})$  是正常数并可以通过选择合适的参数  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  来减小它们的值.

$$\|\mathbf{e}\| \geq \frac{1}{\alpha_2 \dot{\mathbf{e}}_{\min}^*} \left( \beta_1 + \frac{36\alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}|^2}{D_{\min}^2} \right) \equiv b_{e0}$$

$$\text{或 } \|\tilde{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x})\|^2 \geq \sqrt{\frac{64 \left( \beta_1 + \frac{36\alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}|^2}{D_{\min}^2} \right)}{\alpha_1 D_{\min}}} + \frac{48 |\varepsilon_{\text{HJB}}|}{D_{\min}^2} \equiv b_{\Theta0}$$

$$\text{或 } \|\tilde{\mathbf{x}}\| \geq \sqrt{2 \left( \beta_1 + \frac{36\alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}|^2}{D_{\min}^2} \right)} \equiv b_{x0} \quad (\text{A5})$$

$$\text{或 } \|\Delta \tilde{f}(\mathbf{x})\|^2 \geq \frac{\sqrt{\left( (\sigma_m(\Gamma_3)\sigma_M^{-1}(\Gamma_3) - 5\alpha_1 \|\nabla_x \phi(\mathbf{x})\Theta\|^2 - \alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}|)^2 + 4 \left( \sigma_m^2(\Gamma_4)\sigma_M^{-2}(\Gamma_4) - \frac{4096\alpha_1}{D_{\min}^4} \right) \left( \beta_1 + \frac{36\alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}|^2}{D_{\min}^2} \right) \right)}}{2 \left( \sigma_m^2(\Gamma_4)\sigma_M^{-2}(\Gamma_4) - \frac{4096\alpha_1}{D_{\min}^4} \right)} \equiv b_{f0}$$

$$\|\mathbf{e}\| \geq \frac{1}{\alpha_2 \dot{\mathbf{e}}_{\min}^*} \left( \beta_1 + \frac{36\alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}|^2}{D_{\min}^2} + \frac{\alpha_2 h_M'^2 D_{\max}^2 \varepsilon_M'^2 \rho^2}{4\bar{Q}_{\min}} \right) \equiv b_{e1}$$

$$\text{或 } \|\tilde{\Theta}^T \nabla_x \phi(\mathbf{x})\|^2 \geq \sqrt{\frac{64 \left( \beta_1 + \frac{36\alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}|^2}{D_{\min}^2} + \frac{\alpha_2 h_M'^2 D_{\max}^2 \varepsilon_M'^2 \rho^2}{4\bar{Q}_{\min}} \right)}{\alpha_1 D_{\min}}} + \frac{48 |\varepsilon_{\text{HJB}}|}{D_{\min}^2} \equiv b_{\Theta1}$$

$$\text{或 } \|\tilde{\mathbf{x}}\| \geq \sqrt{2 \left( \beta_1 + \frac{36\alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}|^2}{D_{\min}^2} + \frac{\alpha_2 h_M'^2 D_{\max}^2 \varepsilon_M'^2 \rho^2}{4\bar{Q}_{\min}} \right)} \equiv b_{x1}$$

$$\text{或 } \|\Delta \tilde{f}(\mathbf{x})\|^2 \geq \frac{\left[ \sqrt{\left( (\sigma_m(\Gamma_3)\sigma_M^{-1}(\Gamma_3) - 5\alpha_1 \|\nabla_x \phi(\mathbf{x})\Theta\|^2 - \alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}|)^2 + 4 \left( \sigma_m^2(\Gamma_4)\sigma_M^{-2}(\Gamma_4) - \frac{4096\alpha_1}{D_{\min}^4} \right) \left( \beta_1 + \frac{36\alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}|^2}{D_{\min}^2} + \frac{\alpha_2 h_M'^2 D_{\max}^2 \varepsilon_M'^2 \rho^2}{4\bar{Q}_{\min}} \right) \right)} - \left( \sigma_m(\Gamma_3)\sigma_M^{-1}(\Gamma_3) - 5\alpha_1 \|\nabla_x \phi(\mathbf{x})\Theta\|^2 - \alpha_1 |\varepsilon_{\text{HJB}}| \right) \right]}{2 \left( \sigma_m^2(\Gamma_4)\sigma_M^{-2}(\Gamma_4) - \frac{4096\alpha_1}{D_{\min}^4} \right)} \equiv b_{f1} \quad (\text{A6})$$

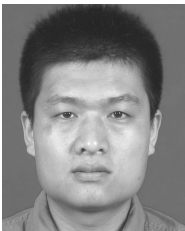


因此, 根据李雅普诺夫推论<sup>[20]</sup>, 系统输出跟踪误差  $e$  和在线神经网络估计误差  $\|\tilde{\theta}\|$  在  $\sum(e, \dot{w}) = 0$  和  $\sum(e, \dot{w}) = 1$  两种情况下都能保持一致最终有界.  $\square$

## References

- 1 Tao G. Adaptive control of systems with actuator failures. In: Proceedings of the 2008 Control and Decision Conference. Yantai, China: IEEE, 2008. 53–54
- 2 Tang X D, Tao G, Joshi S M. Adaptive actuator failure compensation for nonlinear MIMO systems with an aircraft control application. *Automatica*, 2007, **43**(11): 1869–1883
- 3 Zuo Z Q, Ho D W C, Wang Y J. Fault tolerant control for singular systems with actuator saturation and nonlinear perturbation. *Automatica*, 2010, **46**(3): 569–576
- 4 Dong L, Wang J H, Gu S S, Shi Y B, Zhao F M. Adaptive synchronization of leader-follower networked systems against communication attenuation and actuators faults. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2016, **14**(6): 1484–1492
- 5 Liu L J, Shen Y, Dowell E H, Zhu C H. A general  $H_\infty$  fault tolerant control and management for a linear system with actuator faults. *Automatica*, 2012, **48**(8): 1676–1682
- 6 Li X J, Yang G H. Robust adaptive fault-tolerant control for uncertain linear systems with actuator failures. *IET Control Theory & Applications*, 2012, **6**(10): 1544–1551
- 7 Zhang X D, Polycarpou M M, Parisini T. Fault diagnosis of a class of nonlinear uncertain systems with Lipschitz nonlinearities using adaptive estimation. *Automatica*, 2010, **46**(2): 290–299
- 8 Xu D Z, Jiang B, Liu H T, Shi P. Decentralized asymptotic fault tolerant control of near space vehicle with high order actuator dynamics. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, **350**(9): 2519–2534
- 9 Mao Z H, Wang Y, Jiang B, Tao G. Fault diagnosis for a class of active suspension systems with dynamic actuators' faults. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2016, **14**(5): 1160–1172
- 10 Tang X D, Tao G, Joshi S M. Adaptive actuator failure compensation for parametric strict feedback systems and an aircraft application. *Automatica*, 2003, **39**(11): 1975–1982
- 11 Yao X L, Tao G, Qi R Y, Jiang B Q. An adaptive actuator failure compensation scheme for a class of nonlinear MIMO systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, **350**(9): 2423–2441
- 12 Zhang Shao-Jie, Qiu Xiang-Wei, Liu Chun-Sheng, Hu Shou-Song. Adaptive compensation control based on MMST grouping for a class of MIMO nonlinear systems with actuator failures. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(11): 2445–2455  
(张绍杰, 邱相玮, 刘春生, 胡寿松. 基于 MMST 分组的一类 MIMO 非线性系统执行器故障自适应补偿控制. 自动化学报, 2014, **40**(11): 2445–2455)
- 13 Zhang S J, Qiu X W, Liu C S. Neural adaptive compensation control for a class of MIMO uncertain nonlinear systems with actuator failures. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2014, **33**(6): 1971–1984
- 14 Zhang S J, Qiu X W, Jiang B, Liu C S. Adaptive actuator failure compensation control based on MMST grouping for a class of MIMO nonlinear systems with guaranteed transient performance. *International Journal of Control*, 2015, **88**(3): 593–601
- 15 Bellman R E. *Dynamic Programming*. Princeton: Princeton University Press, 1957.
- 16 Zhang Hua-Guang, Zhang Xin, Luo Yan-Hong, Yang Jun. An overview of research on adaptive dynamic programming. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 303–311  
(张化光, 张欣, 罗艳红, 杨琨. 自适应动态规划综述. 自动化学报, 2013, **39**(4): 303–311)
- 17 Abu-Khalaf M, Lewis F L. Nearly optimal control laws for nonlinear systems with saturating actuators using a neural network HJB approach. *Automatica*, 2005, **41**(5): 779–791
- 18 Hanselmann T, Noakes L, Zaknich A. Continuous-time adaptive critics. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2007, **18**(3): 631–647
- 19 Zhang H G, Wei Q L, Liu D R. An iterative adaptive dynamic programming method for solving a class of nonlinear zero-sum differential games. *Automatica*, 2011, **47**(1): 207–214
- 20 Lewis F L, Jagannathan S, Yesildirek A. *Neural Network Control of Robot Manipulators and Nonlinear Systems*. Bristol, PA: Taylor & Francis Inc., 1998.
- 21 Murray J J, Cox C J, Lendaris G G, Saeks R. Adaptive dynamic programming. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, 2002, **32**(2): 140–153
- 22 Vamvoudakis K G, Lewis F L. Online actor-critic algorithm to solve the continuous-time infinite horizon optimal control problem. *Automatica*, 2010, **46**(5): 878–888
- 23 Dierks T, Jagannathan S. Optimal control of affine nonlinear continuous-time systems. In: Proceedings of the 2010 American Control Conference. Baltimore, MD, USA: IEEE, 2010. 1568–1573
- 24 Zhang H G, Cui L L, Zhang X, Luo Y H. Data-driven robust approximate optimal tracking control for unknown general nonlinear systems using adaptive dynamic programming method. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, **22**(12): 2226–2236
- 25 Dierks T, Jagannathan S. Online optimal control of nonlinear discrete-time systems using approximate dynamic programming. *Journal of Control Theory and Applications*, 2011, **9**(3): 361–369
- 26 Kiumarsi B, Lewis F L. Actor-critic-based optimal tracking for partially unknown nonlinear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, **26**(1): 140–151

- 27 Zargarzadeh H, Dierks T, Jagannathan S. Adaptive neural network-based optimal control of nonlinear continuous-time systems in strict-feedback form. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2014, **28**(3–5): 305–324
- 28 Zargarzadeh H, Dierks T, Jagannathan S. Optimal control of nonlinear continuous-time systems in strict-feedback form. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, **26**(10): 2535–2549
- 29 Sun K K, Li Y N, Tong S C. Fuzzy adaptive output feedback optimal control design for strict-feedback nonlinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, **47**(1): 33–44
- 30 Shuang W F, Zhang S, Wu X, van Kampen E, Chu Q. An anti-windup fault tolerant control scheme with guaranteed transient performance for tailless flying wing aircraft. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. Grapevine, TX, USA: AIAA, 2017-1253. 1-11



**张绍杰** 南京航空航天大学自动化学院副教授. 2009 年获得南京航空航天大学自动化学院博士学位. 主要研究方向为非线性系统控制, 容错控制, 飞行控制. 本文通信作者.

E-mail: zhangsj@nuaa.edu.cn

(**ZHANG Shao-Jie** Associate professor at the College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. He received his Ph.D. degree from the College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics

and Astronautics in 2009. His research interest covers nonlinear system control, fault tolerant control, flight control. Corresponding author of this paper.)



**吴雪** 南京航空航天大学自动化学院硕士生. 2014 年获得南京农业大学工学院学士学位. 主要研究方向为非线性系统控制, 容错控制.

E-mail: 739395831@qq.com

(**WU Xue** Master student at the College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. She received her bachelor degree from Nanjing Agricultural University in 2014. Her research interest covers nonlinear system control, and fault tolerant control.)



**刘春生** 南京航空航天大学自动化学院教授. 2006 年获得南京航空航天大学自动化学院博士学位. 主要研究方向为非线性系统控制, 容错控制.

E-mail: liuchsh@nuaa.edu.cn

(**LIU Chun-Sheng** Professor at the College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. She received her Ph.D. degree from the College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics in 2006. Her research interest covers nonlinear system control, and fault tolerant control.)