

一种基于 CGLS 和 LSQR 的联合优化的匹配追踪算法

陈善雄¹ 熊海灵¹ 廖剑伟¹ 周骏¹ 左俊森¹

摘要 在压缩感知理论中,设计好的稀疏重构算法是一个比较重要,同时也是一个具有挑战性的问题.稀疏重构的基本目标是用较少的数据样本,通过解一个优化问题完成信号或者图像重构.关于稀疏重构过程,一个重要的研究方向是在数据受噪声干扰的情况下,如何高效快速地重建原信号.本文提出了基于共轭梯度最小二乘法 (Conjugate gradient least squares, CGLS) 和最小二乘 QR 分解 (Least squares QR, LSQR) 的联合优化的匹配追踪算法.该算法采用 Alpha 散度来测量 CGLS 和 LSQR 之间的离散度 (差异度),并通过离散度来选择最优的解序列.实验分析表明基于 CGLS 和 LSQR 的联合优化的匹配追踪算法在压缩采样的信号受噪声干扰情况下具有较好的恢复能力.

关键词 压缩感知, 匹配追踪, 稀疏恢复, 噪声

引用格式 陈善雄,熊海灵,廖剑伟,周骏,左俊森.一种基于 CGLS 和 LSQR 的联合优化的匹配追踪算法.自动化学报,2018,44(7): 1293–1303

DOI 10.16383/j.aas.2018.c160569

A Matching Pursuit Algorithm of Jointing Optimization Based on CGLS and LSQR

CHEN Shan-Xiong¹ XIONG Hai-Ling¹ LIAO Jian-Wei¹ ZHOU Jun¹ ZUO Jun-Sen¹

Abstract For compressed sensing theory, to design a good sparse reconstruction algorithm is a challenge. The basic purpose of sparse reconstruction is to implement the signal or image reconstruction by solving optimization problem on the condition of fewer data samples. For the sparse reconstruction, an important aspect is how to reconstruct original signal when data is contaminated by noise. In this article, we present a matching pursuit algorithm, in which the conjugate gradient least squares (CGLS) method combines the least squares QR (LSQR) method to solve the optimization. This algorithm uses alpha divergence to measure dispersion between CGLS and LSQR, then selects optimization solution sequence in light of the dispersion. Experiment shows that the matching pursuit algorithm has excellent reconstruction performance when the signal of compressed sampling is contaminated.

Key words Compressed sensing, matching pursuit, sparse reconstruction, noise

Citation Chen Shan-Xiong, Xiong Hai-Ling, Liao Jian-Wei, Zhou Jun, Zuo Jun-Sen. A matching pursuit algorithm of jointing optimization based on CGLS and LSQR. *Acta Automatica Sinica*, 2018, 44(7): 1293–1303

当前,用于信号恢复的稀疏重构算法主要分为两大类:凸优化算法和贪婪算法.通常情况下,利用基于 L_1 范数的凸优化算法来解稀疏恢复的欠定问题.因而信号恢复问题转化成寻求凸函数的最优解问题.常见凸函数求解算法有基追踪算法 (Basis pursuit, BP)^[1]、最小角回归算法 (Least angle regression, LARS)^[2]、梯度投影稀疏重构算法 (Gradient projection sparse reconstruction, GPSR)^[3]

等.凸优化方法给出了最强的稀疏恢复的保证,在测量矩阵满足一定的条件下它能精确重建所有的稀疏信号,同时需要测量的次数也较少^[4],然而,其最大的缺点在于重建速度慢,对于大尺度的重建问题实现困难.

贪婪算法主要思想是利用采样矩阵在投影序列中搜索最稀疏的矢量^[5].目前贪婪算法包括正交匹配追踪 (Orthogonal matching pursuit, OMP)^[6]、稀疏自适应匹配追踪 (Sparsity adaptive matching pursuit, SAMP)^[7]、正则正交匹配追踪 (Regularized orthogonal matching pursuit, ROMP)^[8]、分级正交匹配追踪 (Stagewise orthogonal matching pursuit, StOMP)^[9] 和压缩感知匹配追踪 (Compressive sampling orthogonal matching pursuit, CoSaOMP)^[10–11].目前,贪婪算法是重建速度最快的算法,尽管最初提出的 OMP 算法在重建效率上并不是很理想,但是随后提出的各种改进算法无

收稿日期 2016-08-16 录用日期 2017-05-06
Manuscript received August 16, 2016; accepted May 6, 2017
国家自然科学基金 (61303227), 中国博士后基金 (2015M580765), 重庆市博士后科研项目 (Xm2016041) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61303227), China Postdoctoral Science Foundation (2015M580765), and Chongqing Postdoctoral Science Foundation (Xm2016041)
本文责任编辑 孙富春
Recommended by Associate Editor SUN Fu-Chun
1. 西南大学计算机与信息科学学院 重庆 400715
1. College of Computer and Information Science, Southwest University, Chongqing 400715

论是在重建速度还是重建精度上都得到了很大改进.

通常, 凸优化算法能在较低采样率下实现精确的重构, 但也带来了计算上的巨大开销, 且其算法迭代次数容易受到收敛标准的干扰^[12]. 匹配追踪算法对低维和小尺度的信号数据表现出较好的性能. 然而, 如果信号受到噪声干扰, 或者处理尺度较大, 其重构的精度和健壮性得不到保障.

本文提出一种基于共轭梯度最小二乘法 (Conjugate gradient least squares, CGLS) 和最小二乘 QR 分解 (Least squares QR, LSQR) 联合优化的匹配追踪算法实现噪声干扰下的精确的稀疏恢复. CGLS 方法是一种解决不对称线性方程和最小二乘问题的共轭梯度法^[13], LSQR 是基于双对角化的 Golub 和 Kahan 方法^[14]. LSQR 与标准的共轭梯度法类似, 但其拥有更好的数值处理特性. CGLS 和 LSQR 这两种方法能够用于解约束条件为 $\min \|Ax - b\|_2$ 方程式, 其中 A 是一个高维稀疏矩阵. 两种算法对不同的数据拟合表现出不同的精准性. 本文利用 Alpha 散度来度量两种方法间的离差度, 实现在稀疏恢复中两种方法交替迭代选择最优的解. 实验表明本文提出的方法在噪声干扰的环境下其性能优于传统匹配追踪算法的重构性能.

1 基本问题描述

目前匹配追踪系列算法主要思路在于对下列最小二乘问题找到一个最优解:

$$\|b - Ax\|_2 = \min_{y \in \mathbf{R}^n} \|b - Ay\|_2 \quad (1)$$

对于该问题, 这里引入分裂迭代法和 Krylov 子空间迭代法进行求解. 在 Krylov 子空间, 对于标准的最小二乘问题, LSQR 求解方式类似于共轭梯度算法. 在利用匹配追踪求解 x_k 的过程中, 它们都能实现残量 $\|r_k\| (r_k = b - Ax_k)$ 的逐步约减, 同时进一步说明了 LSQR 和 CGLS 的交替迭代能产生最佳的解序列的可能. 本文任务在于如何在 LSQR 和 CGLS 之间选择最优解序列使匹配追踪的残量最小化, 从而确保解序列的最优性.

2 共轭梯度最小二乘法

假定 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 考虑 LS 问题 (1) 对应的法方程为

$$A^T Ax = A^T b \quad (2)$$

这里 $A^T A$ 是 n 阶实对称矩阵. 则求解线性方程组的问题可以转化为求二次函数 (3) 的极小点问题.

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A^T Ax - (A^T b)^T x \quad (3)$$

事实上, 函数 $f(x)$ 的梯度 $g(x)$ 为

$$g(x) = \nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T = A^T Ax - A^T b \quad (4)$$

进一步, 对于任意的非零向量 $p \in \mathbf{R}^n$ 和实数 t , 有

$$f(x + tp) - f(x) \approx tg^T(x)p + \frac{1}{2} t^2 p^T A^T Ap \quad (5)$$

若 u 是函数 (2) 的解, 则有 $g(u) = 0$. 因此对任意的非零向量 $p \in \mathbf{R}^n$, 则有如下子问题:

$$f(u + tp) - f(u) \begin{cases} > 0, & t \neq 0 \\ = 0, & t = 0 \end{cases}$$

故 u 是函数 $f(x)$ 的极小点. 反之, 因 $A^T A$ 正定, 所以在 \mathbf{R}^n 中二次函数 $f(x)$ 有唯一的极小点, 若 u 是 $f(x)$ 的极小点, 则

$$f(u + tp) - f(u) = tg^T(u)p + \frac{1}{2} t^2 p^T A^T Ap \quad (6)$$

于是有

$$\left. \frac{df(u + tp)}{dt} \right|_{t=0} = g^T(u)p = 0 \quad (7)$$

考虑到 p 的随机性, 必须有 $g(u) = 0$, 从而 u 是方程组 (2) 的解. 若向量序列 $p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(k-1)} \in \mathbf{R}^n$ 满足:

$$p^{(i)T} A^T Ap^{(j)} = 0, \quad i \neq j \quad (8)$$

且 $p^{(k)} \neq 0, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, 则称向量序列 $\{p^{(k)}\}$ 为 \mathbf{R}^n 中关于 $A^T A$ 的一个共轭向量序列. 假定 $x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ 是任意给定一个初始向量, 而 $k = 0, 1, 2, \dots$, 则以 $x^{(k)}$ 作为起点沿方向 $p^{(k)}$ 求函数 $f(x)$ 在直线 $x = x^{(k)} + tp^{(k)}$ 上的极小点, 则可以得到:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)} \quad (9)$$

$$s^{(k)} = A^T (b - Ax^{(k)}), \quad \alpha_k = \frac{s^{(k)T} p^{(k)}}{p^{(k)T} A^T Ap^{(k)}} \quad (10)$$

这里 $p^{(k)}$ 表示了搜索方向, 式 (9) 称为共轭方向法. 特别地, 如果取 $p^{(0)} = s^{(0)}$, 有:

$$p^{(k+1)} = s^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)} \\ \beta_k = -\frac{s^{(k+1)T} A^T Ap^{(k)}}{p^{(k)T} A^T Ap^{(k)}} \quad (11)$$

则为共轭梯度法. 由式 (9) ~ (11) 可知, 若存在 $k \geq 0$, 使 $s^{(k)} = 0$, 则 $x^{(k)}$ 为 LS 问题的解, 且有 $\alpha_k = \beta_k = 0, s^{(k+1)} = p^{(k+1)} = 0$. 为了更清晰地展示 CGLS 算法的执行步骤, 下面给出了 CGLS 算法流程:

列, 计算平面的旋转变换 $Q_k = G_{k,k+1}Q_k$ 使得

$$G_{k,k+1}G_{k-1,k} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_k \\ \beta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_k \\ \rho_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G_{k,k+1} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_k \\ \bar{\phi}_{k+1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

理论上, LSQR 和 CGLS 产生相同的近似序列 $x^{(k)}$, 然而, Paige 和 Sanuders 证明^[15], 当要执行很多迭代, 或 A 是病态矩阵时, LSQR 在数值上更可靠.

根据 LSQR 的数值计算方法, 我们给出了 LSQR 算法执行的步骤:

算法 2. 最小二乘的 QR 算法 (LSQR)

输入: $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ 迭代终止阈值 $tol > 0$

输出: 解序列 \mathbf{x}

1) 初始化: $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbf{R}^n$

2) $\mathbf{x}^{(0)} = 0; \beta_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{b}; \alpha_1 \mathbf{v}_1 = A^T \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1;$

$\bar{\varphi}_1 = \beta_1; \bar{\rho}_1 = \alpha_1;$

3) for $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, 当 $w_{i+1} > tol$ 时, 重复如下步骤

4) $\beta_{i+1} \mathbf{u}_{i+1} = A \mathbf{v}_i - \alpha_i \mathbf{u}_i; \alpha_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} = A^T \mathbf{u}_{i+1} - \beta_{i+1} \mathbf{v}_i$

5) $(c_i, s_i, \rho_i) = \text{givrot}(\bar{\rho}_i, \beta_{i+1})$

6) $\theta_i = s_i \alpha_{i+1}; \bar{\rho}_{i+1} = c_i \alpha_{i+1}; \varphi_i = c_i \bar{\varphi}_i; \bar{\varphi}_{i+1} = -s_i \bar{\varphi}_i$

7) $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i-1)} + (\varphi_i / \rho_i) \mathbf{w}_i; \mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{v}_{i+1} - (\theta_i / \rho_i) \mathbf{w}_i$
结束

这里 givrot 为计算 givens 旋转的算法, 旋转的纯量 $\alpha_i \geq 0$ 和 $\beta_i \geq 0$ 使得相应的向量单位化.

4 基于 CGLS 与 LSQR 的组合优化匹配追踪算法

通常, 根据 CGLS 算法和 LSQR 算法对最小二乘问题进行求解, 可以得到两组解序列. 但这两组解序列并不是最优解, 特别在压缩感知过程中, 受到噪声干扰时, 匹配追踪的算法通过求解最小二乘问题恢复得到的信号精度较低 (比如在测量值包含了高斯白噪声的情况下, 实验表明其恢复精度下降比较严重). 因此, 针对噪声环境下的稀疏恢复问题可以表示为

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} + \mathbf{z} \quad (22)$$

其中, \mathbf{z} 表示噪声干扰项, $\|\mathbf{z}\|_2 < \varepsilon$. 对于式 (22) 仍然可以通过 L_1 范数的最小化约束来求解

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min \|\mathbf{x}\|_1, \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \leq \varepsilon \quad (23)$$

为了求解式 (23), 我们提出一种方法用于提高噪声干扰下的稀疏恢复的精度. 该方法通过从算法 1 和算法 2 产生的解序列中迭代选择出最优的序列去逼近真实解, 从而确保精确恢复. 为了判断和选择每步

迭代中产生的两种解序列哪个更优, 这里我们采用了 Alpha 散度来计算两个解序列间的离差程度, 并设定离差度阈值, 通过对两种序列的 Alpha 散度的计算与离差阈值的比较, 选择较优的解序列作为两种算法下一迭代的输入, 循环执行, 直到收敛.

Alpha 散度, 也称为 Renyi 散度, 是信息几何学中所提出的概念, 它主要用于对两个数据集之间的差异度进行度量^[16]. 对于两个数据集 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} , 其 Alpha 散度对象函数表示为

$$D_\alpha[\mathbf{p}||\mathbf{q}] = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \int \alpha \mathbf{p} + (1-\alpha)\mathbf{q} - \mathbf{p}^\alpha \mathbf{q}^{1-\alpha} d\mu \quad (24)$$

其中, $\alpha \in (-\infty, \infty)$. 对于 Alpha 散度而言有如下特性:

1) Alpha 散度的函数 ($D_\alpha[\mathbf{p}||\mathbf{q}]$) 相对于 \mathbf{p} 与 \mathbf{q} 而言是凸函数.

2) 当 $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, $D_\alpha[\mathbf{p}||\mathbf{q}] = 0$

3) 在 $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ 时, $D_\alpha[\mathbf{p}||\mathbf{q}] \geq 0$

Alpha 散度函数表达式 (24), 通常也表示为

$$D_\beta[\mathbf{p}||\mathbf{q}] = \frac{4}{(1-\beta)} \int \frac{1-\beta}{2} \mathbf{p} + \frac{1+\beta}{2} \mathbf{q} - \mathbf{p}^{\frac{1-\beta}{2}} \mathbf{q}^{\frac{1+\beta}{2}} d\mu \quad (25)$$

其中, $\alpha = (1-\beta)/2$, 因此 $1-\alpha = (1+\beta)/2$. 当 Alpha 散度用于离散数据集的度量时, 数据集 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} 的 Alpha 散度表达式为

$$D_\alpha[\mathbf{p}||\mathbf{q}] = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha p_{ij} + (1-\alpha)q_{ij} - Y_{ij}^\alpha q_{ij}^{1-\alpha} \quad (26)$$

依据式 (25), 式 (26) 通常被表示为

$$D^\beta(\mathbf{q}||\mathbf{p}) = \sum_{ik} p_{ik} \frac{\left(\frac{p_{ik}}{q_{ik}}\right)^{\beta-1} - 1}{\beta(\beta-1)} + \frac{q_{ik} - p_{ik}}{\beta} \quad (27)$$

其中, $\beta = (1+\alpha)/2$ 由 Alpha 散度作为两种算法产生序列的离差度量标准, 可以避免采用单一算法进行恢复或者采用传统欧氏距离作为数据集差异标准进行恢复而带来的收敛到局部最优, 从而造成在噪声干扰下的恢复精度不高的缺点. 因此我们可以通过 Alpha 散度在每步迭代中来优化选择解序列, 从而得出更精确解. 根据 Alpha 散度理论, 我们选择恰当的 β ($\beta = 0.5$) 值建立散度方程^[17]. 同时为了确保收敛方向和加快收敛速度, 引入了权重参数 $1/w_i = |x_i^{(n)}|^2$. 权重 $\mathbf{w}_{(n)}$ 是通过上一步的值 $\mathbf{w}_{(n-1)}$ 迭代计算出来, 权重参数可以逐步修正收敛方向. 为

了计算权重参数 \mathbf{w} , 这里进一步定义产生函数, 对于 $\varepsilon > 0$ 和权重 $\mathbf{w} \in \mathbf{R}$, $w_j > 0, j = 1, \dots, N$, 有:

$$\mathcal{F}z, \mathbf{w}, \varepsilon = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^N z_j^2 w_j + \sum_{j=1}^N (\varepsilon^2 w_j + w_j^{-1}) \right], \quad z \in \mathbf{R}^N \quad (28)$$

由于 \mathcal{F} 是凸的, 因此对于给定 \mathbf{w} 和 ε , 可以求 z 使函数 \mathcal{F} 最小化 0. 这里通过迭代法来确定函数 \mathcal{F} 的最小值和每次迭代的权重. 为了方便分析这个过程, 假定 $r(z)$ 是对 z 的绝对值按降序排列的集合, $z \in \mathbf{R}^N$, 因此 $r(z)_i$ 是集合 $\{|Z_j|, j = 1, \dots, N\}$ 中第 i 个最大元素. 因此我们选取初始值 $w^0 = (1, \dots, 1), \varepsilon_0 = 1, x_{n+1}$ 的迭代计算式为

$$x^{n+1} = \arg \min_{z \in \mathbf{R}} \mathcal{F}(z, w^n, \varepsilon_n) = \arg \min_{z \in \mathbf{R}} \|z\|_{l_2(w^n)} \quad (29)$$

其中, $\varepsilon_{n+1} = \min(\varepsilon_n, \frac{r(x_{n+1})_{K+1}}{N})$ 故权重系数 w 的迭代表示为

$$w_{n+1} = \arg \min_{w > 0} \mathcal{F}(x_{n+1}, w, \varepsilon_{n+1}) \quad (30)$$

计算权重系数的关键在于需要每次迭代求解 x_{n+1} , 根据最小二乘的计算方法,

$$\mathbf{x}^{n+1} = D_n \Phi^T (\Phi D_n \Phi)^{-1} \mathbf{y} \quad (31)$$

其中, D_n 是 $N \times N$ 的对角矩阵, 它的第 j 个对角元素是 w_j^n , 通过求解 x_{n+1} , 则权重 w_{n+1} 可以下式求出

$$w_j^{n+1} = ((x_j^{n+1})^2 + \varepsilon_{n+1}^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad j = 1, \dots, N \quad (32)$$

根据上面的分析, 我们给出基于 CGLS 和 LSQR 的联合优化的匹配追踪算法 (Combinatorial Optimization MP Based CGLS and LSQR, COCLMP), 该算法本质上也是寻求式 (1) 的最优解. 算法流程如下:

算法 3. 基于 CGLS 与 LSQR 的组合优化匹配追踪算法

输入: 感知矩阵 Φ , 测量向量 \mathbf{b} , 权重阈值 ε , 收敛阈值 δ
输出: \mathbf{x} 的稀疏逼近 $\hat{\mathbf{x}}$ (\mathbf{x} 的解), 重建误差 \mathbf{r}

1) 初始化冗余向量 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, 索引集合 $\Lambda_t = \varphi$, 迭代计数 $t = 1$

2) 循环开始

找到索引 λ_t 使得 $\lambda_t = \arg \max_{j \in (M - \Lambda_t)} |(\mathbf{r}_{t-1}, \Phi_j)|$, $M =$

$1, 2, \dots, M$ 表示集合 M 中去掉 Λ_t 中的元素

3) 令 $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$

4) 计算新的近似 $\hat{\mathbf{x}}_j = \Phi_{\Lambda_t}^{\perp} \mathbf{y}$, 其中 Φ^{\perp} 表示 Φ 的伪逆

$$\Phi^{\perp} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$$

5) $\mathbf{y}^{(j)} \leftarrow$ LSQR ($\Phi_{\Lambda_t}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{x}}_j$) $\hat{\mathbf{x}}_j$ 作为 LSQR 算法的初始向量

$\mathbf{z}^{(j)} \leftarrow$ CGLS ($\Phi_{\Lambda_t}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{x}}_j$) $\hat{\mathbf{x}}_j$ 作为 CGLS 算法的初始向量

$$w_j^{n+1} = ((x_j^{n+1})^2 + \varepsilon_{n+1}^2)^{-1/2}, j = 1, \dots, N$$

6) 计算两个序列的 Alpha 散度

$$D^{\beta}(\mathbf{y}^{(j)} \|\mathbf{z}^{(j)}) = \sum_{ik} p_{ik} \frac{(z_{ik}^{(j)}/y_{ik}^{(j)})^{\beta-1} - 1}{\beta(\beta-1)} + \frac{y_{ik}^{(j)} - z_{ik}^{(j)}}{\beta}$$

如果 $D^{\beta}(\mathbf{x}_1 \|\mathbf{x}_2) < tol$

$$\hat{\mathbf{x}}_j \leftarrow \mathbf{w} \mathbf{y}_1 + (1 - \mathbf{w}) \mathbf{z}_2$$

否则

$$\hat{\mathbf{x}}_j \leftarrow (1 - \mathbf{w}) \mathbf{y}_1 + \mathbf{w} \mathbf{z}_2$$

7) 当 $\|\hat{\mathbf{x}}_j - \hat{\mathbf{x}}_{j-1}\|_2 \leq \delta$ 或者达到迭代次数, 转到步骤 8; 否则, 转到步骤 5, $\hat{\mathbf{x}}_j$ 作为 LSQR 和 CGLS 的输入.

8) $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_j$

9) 更新冗余向量 $\mathbf{r}_t = \mathbf{b} - a_{\Lambda_t} \mathbf{x}$

10) 如果满足 $\|\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_{t-1}\|_2 < \varepsilon$ or $N = \Lambda_t$, 则输出 \mathbf{x} , $\mathbf{r} = \mathbf{r}_t$,

算法结束; 否则, $t = t + 1$ 转步骤 2.

COCLMP 算法是用上一步的解序列作为下一步 LSQR 和 CGLS 算法的输入产生新的解序列, 然后通过 Alpha 散度选择较优解序列, 作为下一次 LSQR 和 CGLS 算法的输入, 不断迭代, 直到满足收敛条件. COCLMP 算法最大的特点在于通过 Alpha 散度量两个解序列的差异进而使得解序列逐步逼近最优解. 目前大多数匹配追踪算法进行稀疏恢复的过程中, 都采用了把解欠定方程问题, 转变为一个解最小二乘问题的思路, 而 COCLMP 算法通过迭代优化求解的方法得到序列的方式, 相对于 OMP、StOMP、CoSaOMP、ROMP 等算法来说可以提高恢复精度.

这里分析一下 COCLMP 算法的复杂度, 算法开始时, 为了求解索引 λ_t , 需要感知矩阵 Φ 与误差 \mathbf{r} 内积运算 $O(mNM)$ 次, m 是算法需要的迭代次数, LSQR 与 CGLS 的计算复杂度分别为 $O(Mn^2)$ 和 $O(m\sqrt{n})$, COCLMP 算法的迭代包含了 LSQR 与 CGLS 的计算过程, 因此整个 COCLMP 算法时间复杂度为 $O(m^2nM)$. 从以上分析上可以看出, COCLMP 算法时间复杂度略高于单独每个的算法.

进一步, 可以讨论算法的收敛性. 这里考虑 COCLMP 算法恢复任意一个 K 稀疏信号需要的迭代次数的上界. 给定一个任意 K 稀疏信号 \mathbf{x} , 按照其降序的形式排列它的元素. 假设有:

$$|x_1| \geq |x_2| \geq \dots \geq |x_K| > 0$$

并且有 $x_j = 0, \forall j > K$. 进一步定义

$$\rho_{\min} = \frac{|x_k|}{\|\mathbf{x}\|_2} = \frac{\min_{1 \leq i \leq K} x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^K x_i^2}} \quad (33)$$

令 n_{it} 代表算法恢复信号 \mathbf{x} 的迭代次数, 那么

可以根据 c_k (信号的稀疏度) 和 ρ_{\min} 确定 n_{it} 的上界. 令 \tilde{T} 为 T 在 $\frac{-\log \rho_{\min}}{-\log c_k} + 1$ 次迭代后的估计. 假设 $T \not\subseteq \tilde{T}$, 则有:

$$\|\mathbf{x}_{T-\tilde{T}}\|_2 = \sqrt{\sum_{i \in T-\tilde{T}} x_i^2} \geq \min_{i \in T} |x_i| = \rho_{\min} \|\mathbf{x}\|_2 \quad (34)$$

考虑到算法以 Alpha 散度作为每步迭代过程逐步收敛, 因此有:

$$D^\beta(\mathbf{x}_{T-\tilde{T}}\|\mathbf{x}) \leq (c_k)^{n_{it}} \rho_{\min} D^\beta(\hat{\mathbf{x}}_{T-\tilde{T}}\|\mathbf{x}) \leq \rho_{\min} D^\beta(\hat{\mathbf{x}}_{T-\tilde{T}}\|\mathbf{x}) \quad (35)$$

其中, 后面的不等式根据 $c_k < 1$ 的假设, 与 c_k 的定义矛盾, 所以有 $n_{it} < \frac{-\log \rho_{\min}}{-\log c_k} + 1$, 且存在 $n_{it} < \frac{1.5K}{-\log c_k}$, 所以算法的上界为

$$n_{it} \leq \min \left(\frac{-\log \rho_{\min}}{-\log c_k} + 1, \frac{1.5K}{-\log c_k} \right) \quad (36)$$

5 实验及分析

本节通过实验进一步分析我们提出的基于 LSQR 和 CGLS 联合优化方法与其他重构算法的重构能力, 分析其在噪声干扰下进行稀疏重构的性能. 实验中噪声干扰的强度采用 SNR (Signal to noise ratio, SNR) 表示, 取值为 10, 20, 30, \dots , 100. 实验对 OMP、StOMP、CoSaOMP、ROMP 和 COCLMP 分别进行. 这前几种算法都属于匹配追踪算法系列, 它们共同的特点把解欠定方程问题转化为一个最小二乘问题. 通常情况匹配追踪系列算法在对最小二乘问题求解时, 大都采用求伪逆的方式来寻找近似解, 但是在压缩感知过程中, 噪声的干扰使得这样的方式重构的信号精度较差, 而 COCLMP 算法可以较好地解决这类问题, 能实现较好的重构精度.

5.1 噪声干扰的稀疏信号重构

当压缩采样过程中, 信号受到噪声干扰, 其重构效果也会受到影响. 在这个部分, 我们进行噪声干扰下的压缩采样和重构的实验. 这里采用高斯白噪声叠加到原始信号上的方式形成混合信号, 用 SNR 表示原信号与噪声的强度的关系, SNR 值越小相对于原信号而言噪声能量越大. 这里 SNR 的取值为 10, 20, 30, \dots , 100. 实验中采用长度 $N = 1024$, 稀疏度 $s = 60$ 的信号, 利用随机矩阵作为采样矩阵. 实验分析表明了采样次数为 600 是较好的采样次数^[12], 因此我们构建的随机矩阵仅需要 600 行来生成采样矩阵.

为了量化实验结果, 这里采用原信号 x_{true} 与重构信号 x_{rec} 的信噪比 (SNR) 来表示恢复结果, SNR

定义如下:

$$\text{SNR}(x_{true}, x_{rec}) = 20 \lg \frac{\|x_{true}\|_2}{\|x_{true} - x_{rec}\|_2} \quad (37)$$

我们对比了 OMP、StOMP、CoSaOMP、ROMP、COCLMP 这 5 种算法在噪声影响下的恢复效果. 图 1 展示了在压缩采样的次数为 600 的情况下, 带有噪声的重构效果. 其中采样时原信号与噪声的 SNR 值为 30, 经过不同算法恢复后再次计算 SNR 值, 经观测可得到 OMP 算法的 SNR 值为 13.2507, StOMP 算法的 SNR 值为 14.0217, CoSaOMP 算法的 SNR 值为 12.0766, ROMP 的 SNR 值为 9.1521, COCLMP 的 SNR 为 16.841. 从图 1 中也可以看出 ROMP 算法重构效果较其他算法差 (实心圆代表的原始信号, 与空心圆代表的恢复信号的重合程度较其他算法低).

为了进一步分析 4 种算法在噪声下的重构性能, 考虑高斯白噪声下, SNR = 10, 20, 30, \dots , 100, 对每种强度的噪声进行 100 次重复实验, 观测平均 SNR (其计算方法如式 (37)) 的变化情况.

如图 2 所示, OMP、StOMP、CoSaOMP、ROMP、COCLMP 这 5 种算法在噪声影响下对信号的重构性能. 测量阶段较低的 SNR 意味着噪声能量较强, 可以看出这 5 种算法在噪声下的恢复能力并不强, 其重构性能较差. 这说明对于干扰比较严重的情况下, 压缩感知要想完整地重构信号还是比较困难的; 而随着 SNR 值的提高, 即干扰信号逐渐减弱, 可以看到重构效果逐渐变好, COCLMP 算法相对于其他 4 种算法其抗噪的性能提升更明显. 进一步提高采样阶段的 SNR 值, 其重构效果提升较缓慢, 这是因为这一阶段噪声相对较弱, 算法重构能力趋于稳定.

5.2 对噪声图像的重构

本节通过噪声下对图像压缩采样重构性能的研究, 进一步分析本文提出的 COCLMP 算法与其他算法在重构过程中的抗噪能力. 本节选用的噪声为高斯噪声, σ 表示标准方差, 用 PSNR (Peak signal to noise ratio) 表示重构图像的信噪比^[18].

其表达式如下:

$$\text{PSNR} = 10 \times \lg \left(\frac{(2^n - 1)^2}{\text{MSE}} \right) \quad (38)$$

其中, MSE 是原图像与处理图像之间均方误差. Peak 就是指 8 bits 表示法, 最大值 255. MSE 指 Mean square error, PSNR 的单位为 dB. PSNR 值

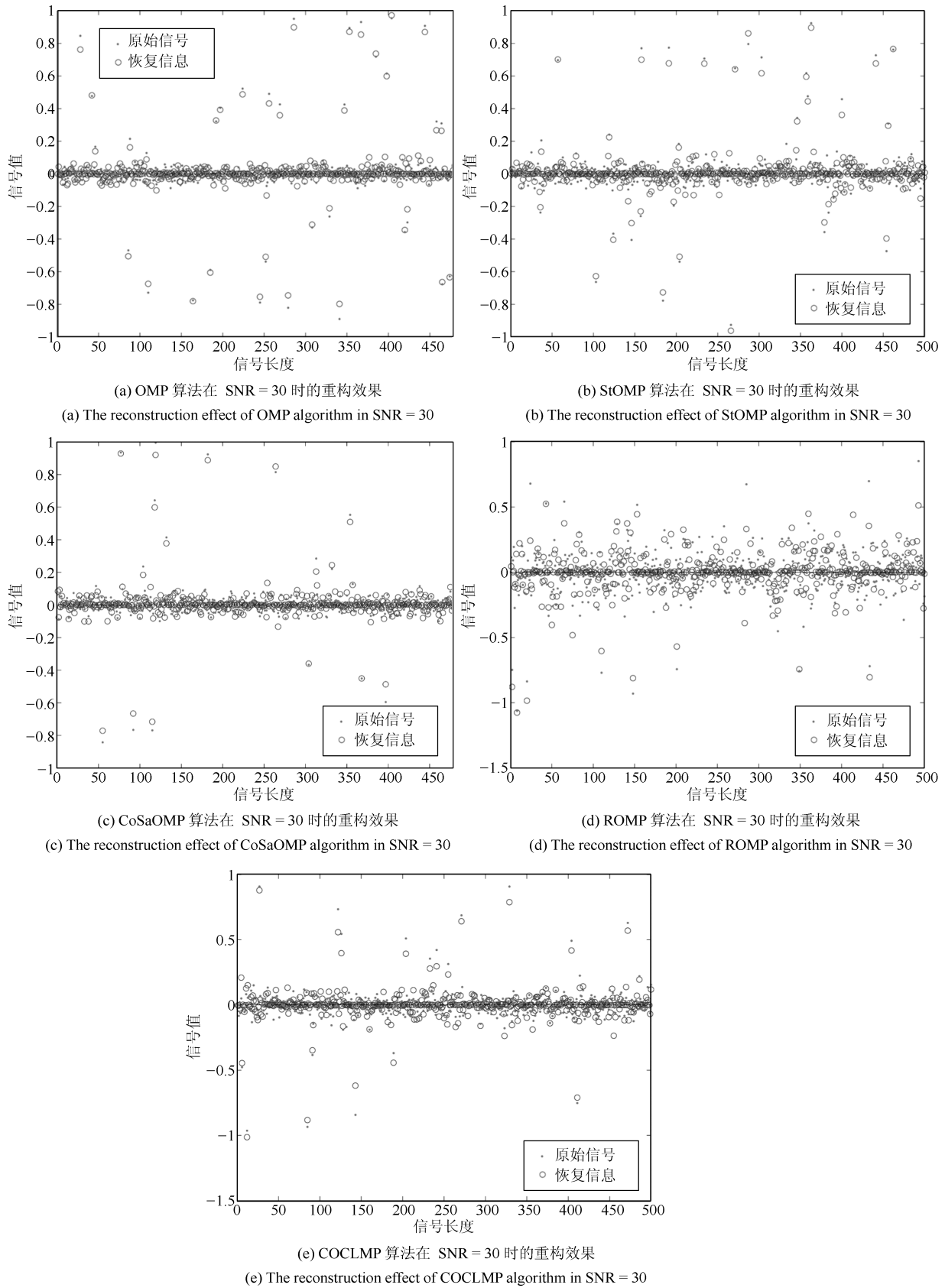


图 1 OMP、StOMP、CoSaOMP、ROMP 和 COCLMP 在噪声干扰下对稀疏信号的重构效果

Fig. 1 Reconstruction effect of sparse signals include noise for OMP, StOMP, CoSaOMP, ROMP, COCLMP

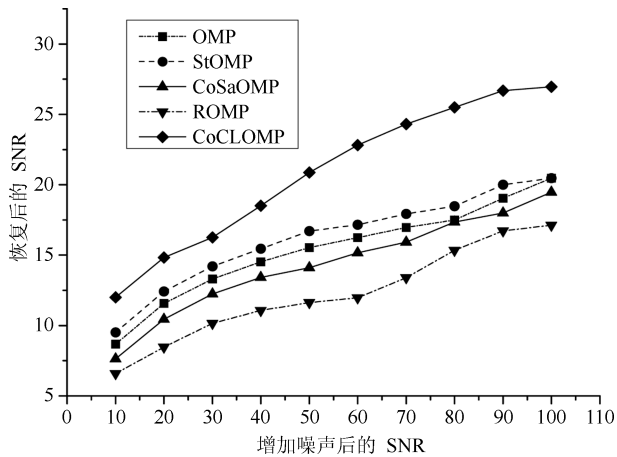


图 2 噪声干扰的不同采样次数下 OMP、StOMP、CoSaOMP、ROMP、COCLMP 算法重构结果

Fig. 2 Reconstruction result include noise under different sampling number for OMP, StOMP, CoSaOMP, ROMP, COCLMP

越大, 就代表失真越少^[19]. 5 种算法在不同标准方差下的重构效果如图 3 所示.

图 3 中展示了在增加的噪声标准方差为 10、20、30、40、50 情况下, OMP、StOMP、CoSaOMP、ROMP、COCLMP 算法对图像的重构效果. 从图 3 中可以看出, 随着噪声强度的增加, 重构效果逐渐变差, 特别是在噪声的标准方差为 50 的情况下, 各种算法重构效果差异不大. 但在噪声强度不太高的情况下, 即标准方差为 5 到 30 之间, 可以看出相比于其他算法, COCLMP 算法重构的图像效果更好, 由此表明 COCLMP 对于低噪声环境对图像进行压缩采样后的重构能力优于其他 4 种匹配追踪算法. 为了更好分析本文提出的 COCLMP 算法的性能, 实验进一步采用了数字图像处理标准测试图库 Lena、aerial、man、boat 图.

图 4 进一步列举出了在噪声的标准方差为 5, 10, ..., 50 情况, 这 5 种算法重构 Lena、

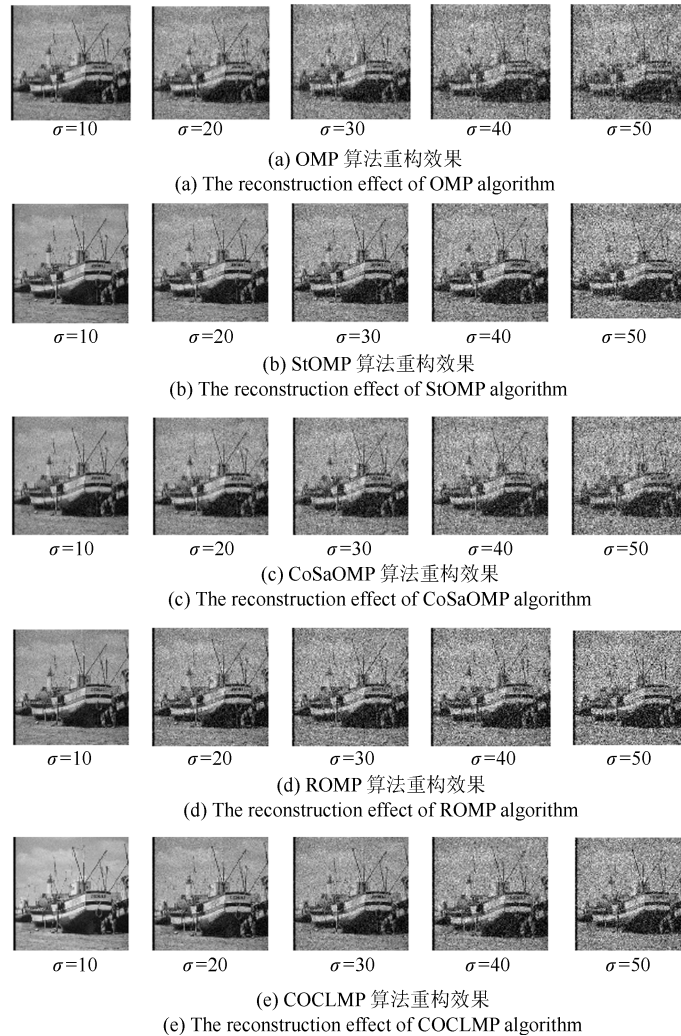


图 3 噪声干扰下 OMP、StOMP、CoSaOMP、ROMP、COCLMP 算法对图像的重构效果

Fig. 3 Image reconstruction effect include noise for OMP, StOMP, CoSaOMP, ROMP, COCLMP

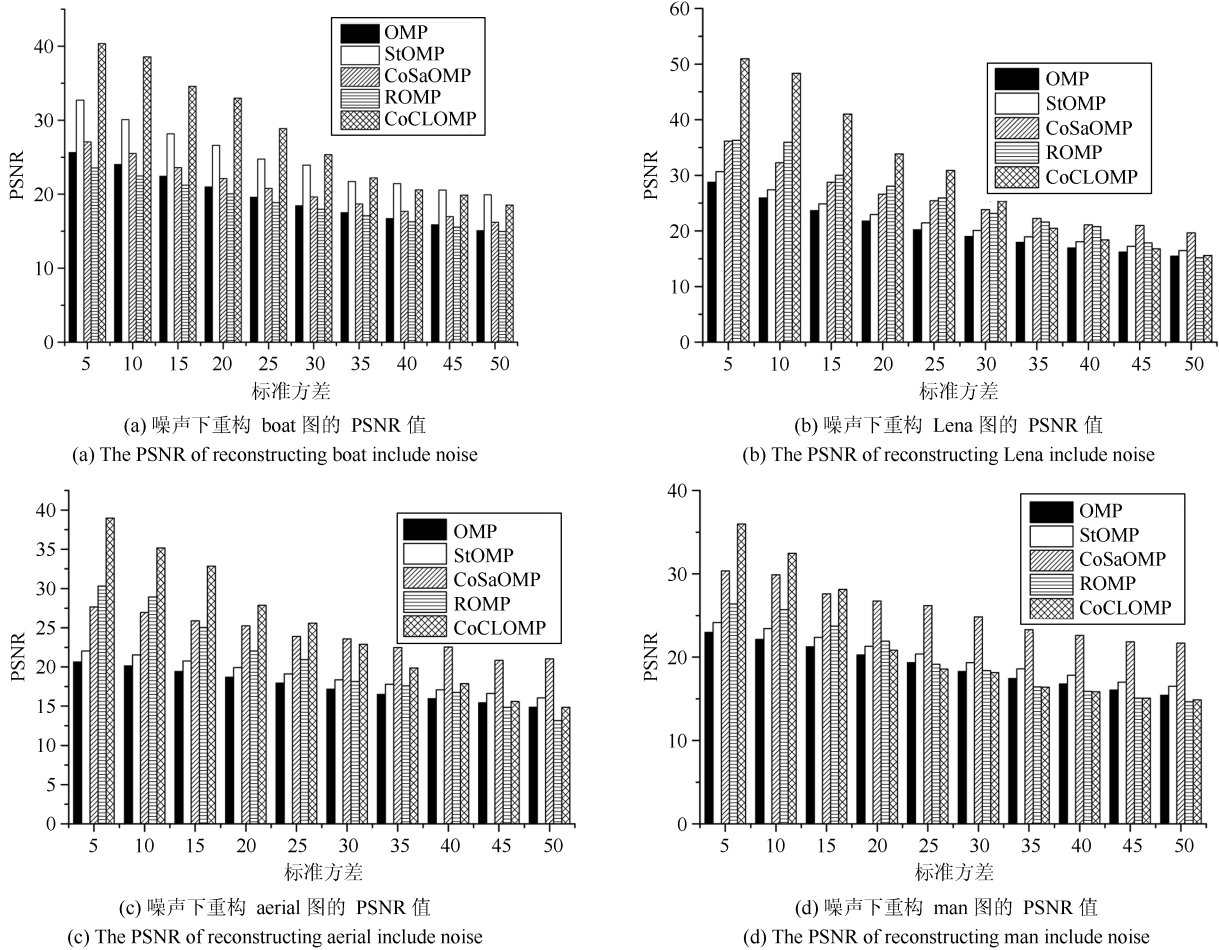


图 4 噪声下重构 Lena、aerial、man、boat 图的 PSNR

Fig. 4 The PSNR of reconstructing Lena, aerial, man, boat include noise

aerial、man、boat 图的峰值信噪比 (PSNR). 从图 4 中可以观察到在噪声的标准方差为 5, 10, ..., 30 时, COCLMP 算法重构图像的 PSNR 值都高于其他 4 种算法, 而在噪声强度较高的 30, 35, ..., 50 区间, COCLMP 算法并没表现出明显优势, 这与图 4 展示的结果一致. 也进一步说明了 COCLMP 算法对低能噪声干扰下进行压缩采样后的重构能力具有较大的提升. 但由于 COCLMP 算法在每次迭代过程中需要进行解序列的优化选择, 且其选择的权

重 w 的本身又是一个最优化问题, 其计算复杂较高, 因此算法收敛的时间相比其他算法时间较长, 对于进行实时的信号处理还需要进一步提高计算效率.

以上实验从信号和图像的角度对 COCLMP 算法进行测试, 从结果中可以分析出 COCLMP 算法同其他 4 种重构算法在无噪声的环境下, 重构能力基本相当. 其性能差异主要体现在当压缩采样受到噪声干扰的情况下, COCLMP 算法的重构效果好于其他 4 种算法. 当然这种较好的重构能力, 在低能

噪声干扰下表现得突出,而对于高噪声影响,由于本身压缩采样就是欠采样,所以采样数据本身受影响过大,较难实现精确重构.

6 结论

在本文中,我们提出一种基于 CGLS 和 LSQR 的联合优化的匹配追踪算法. 该算法根据匹配追踪系列算法需要解最小二乘问题这一特点,利用 CGLS 算法和 LSQR 算法产生该问题的两组解序列. 用上一步的解序列作为下一步 LSQR 和 CGLS 算法的输入产生新解序列,然后通过 Alpha 散度选择较优解序列,作为下一次 LSQR 和 CGLS 算法的输入,不断迭代,直到满足收敛条件. 该算法在噪声环境下的压缩感知的重构过程表现出较好的性能. 实验表明在高斯噪声下这种联合优化的匹配追踪算法对低噪声具有较好重构效果.

References

- Moshtaghpour A, Jacques L, Cambareri V, Degraux K, De Vleeschouwer C. Consistent basis pursuit for signal and matrix estimates in quantized compressed sensing. *IEEE Signal Processing Letters*, 2016, **23**(1): 25–29
- Zhao W Q, Beach T H, Rezgui Y. Efficient least angle regression for identification of linear-in-the-parameters models. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2017, **473**(2198): Article No. 20160775
- Lee H C, Song B, Kim J S, Jung J J, Li H H, Mutic S, et al. An efficient iterative CBCT reconstruction approach using gradient projection sparse reconstruction algorithm. *Oncotarget*, 2016, **7**(52): 87342–87350
- Xu Zhi-Qiang. Compressed sensing: a survey. *Science China: Mathematics*, 2012, **42**(9): 865–877
(许志强. 压缩感知. 中国科学: 数学, 2012, **42**(9): 865–877)
- Fang Hong, Yang Hai-Rong. Greedy algorithms and compressed sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(12): 1413–1421
(方红, 杨海蓉. 贪婪算法与压缩感知理论. 自动化学报, 2011, **37**(12): 1413–1421)
- Cohen A, Dahmen W, DeVore R. Orthogonal matching pursuit under the restricted isometry property. *Constructive Approximation*, 2017, **45**(1): 113–127
- Do T T, Gan L, Nguyen N, Tran T D. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing. In: *Proceedings of the 42th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*. Pacific Grove, CA, USA: IEEE, 2008. 581–587
- Needell D, Vershynin R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, **4**(2): 310–316
- Lee D. MIMO OFDM channel estimation via block stage-wise orthogonal matching pursuit. *IEEE Communications Letters*, 2016, **20**(10): 2115–2118
- Davenport M A, Needell D, Wakin M B. Signal space CoSaMP for sparse recovery with redundant dictionaries. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, **59**(10): 6820–6829
- Giryes R, Elad M. RIP-based near-oracle performance guarantees for SP, CoSaMP, and IHT. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(3): 1465–1468
- Ramirez-Giraldo J C, Trzasko J, Leng S, Yu L, Manduca A, McCollough C H. Nonconvex prior image constrained compressed sensing (NCPICCS): theory and simulations on perfusion CT. *Medical Physics*, 2011, **38**(4): 2157–2167
- Babaie-Kafaki S, Ghanbari R. A hybridization of the Hestenes-Stiefel and Dai-Yuan conjugate gradient methods based on a least-squares approach. *Optimization Methods and Software*, 2015, **30**(4): 673–681
- Shaw C B, Prakash J, Pramanik M, Yalavarthy P K. Least squares QR-based decomposition provides an efficient way of computing optimal regularization parameter in photoacoustic tomography. *Journal of Biomedical Optics*, 2013, **18**(8): Article No. 80501
- Paige C C, S M A. LSQR: an algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1982, **8**(1): 43–71
- Cichocki A, Zdunek R, Amari S I. Csiszár's divergences for non-negative matrix factorization: family of new algorithms. In: *Proceedings of the 2006 International Conference on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation*. Charleston, SC, USA: Springer, 2006. 32–39
- Cichocki A, Amari S I. Families of Alpha- Beta- and Gamma-divergences: flexible and robust measures of similarities. *Entropy*, 2010, **12**(6): 1532–1568
- Yu Nan-Nan, Qiu Tian-Shuang. Fusion technology of infrared and visible images in compressive sensing. *Signal Processing*, 2012, **28**(5): 692–698
(余南南, 邱天爽. 压缩传感条件下红外和可见光图像融合技术的研究. 信号处理, 2012, **28**(5): 692–698)
- Wang Qin, Shen Yuan-Tong. Multi-scale least squares support vector machine using compressive sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(4): 631–640
(王琴, 沈远彤. 基于压缩感知的多尺度最小二乘支持向量机. 自动化学报, 2016, **42**(4): 631–640)



陈善雄 西南大学计算机与信息科学学院副教授. 2013 年获得重庆大学计算机科学与技术博士学位. 主要研究方向为数据挖掘, 模式识别, 压缩感知. 本文通信作者. E-mail: csxpml@163.com
(**CHEN Shan-Xiong** Associate professor at the College of Computer and Information Science, Southwest University. He received his Ph. D. degree in computer science from Chongqing University in 2013. His research interest covers data mining, pattern recognition, compressed sensing. Corresponding author of this paper.)



熊海灵 西南大学计算机与信息科学学院教授. 2007 年获得西南大学数字农业方向农学博士学位. 主要研究方向为数据库与智能信息处理, 计算机模拟及其应用. E-mail: xionghl@swu.edu.cn

(**XIONG Hai-Ling** Professor at the College of Computer and Information Science, Southwest University. He received his Ph.D. degree in agronomy from Southwest University in 2007. His research interest covers database and intelligent information processing, computer simulation and application.)



廖剑伟 西南大学计算机与信息科学学院副教授. 2012 年获日本东京大学计算机科学博士学位. 主要研究方向为系统软件和高性能分布式存储. E-mail: liaotoad@gmail.com

(**LIAO Jian-Wei** Associate professor at the College of Computer and Information Science. He received his Ph.D. degree in computer science from Tokyo University in 2012. His research interest covers system software and high performance storage system.)

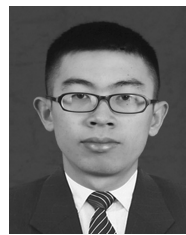
Ph.D. degree in computer science from Tokyo University in 2012. His research interest covers system software and high performance storage system.)



周骏 西南大学计算机与信息科学学院副教授. 2013 年获得电子科技大学计算机应用技术博士学位, 2014~2015 年在罗切斯特大学 (University of Rochester) 做博士后研究. 主要研究方向为图像处理, 计算机视觉, 分子影像. E-mail: zhouj@swu.edu.cn

(**ZHOU Jun** Associate professor at the College of Computer & Information Science, Southwest University. He received Ph.D. degree in computer science from the Electronic Science and Technology of China in 2013. He did one year postdoctor at University of Rochester, USA in August, from 2014 to 2015. His research interest covers image processing, computer vision, and molecular imaging.)

the College of Computer & Information Science, Southwest University. He received Ph.D. degree in computer science from the Electronic Science and Technology of China in 2013. He did one year postdoctor at University of Rochester, USA in August, from 2014 to 2015. His research interest covers image processing, computer vision, and molecular imaging.)



左俊森 西南大学计算机与信息科学学院硕士研究生. 主要研究方向为数据库与智能检索技术, 计算机模拟及其应用. E-mail: zuojunsen@email.swu.edu.cn

(**ZUO Jun-Sen** Master student at the College of Computer and Information Science, Southwest University. His research interest covers database and intelligent retrieval techniques, computer simulation and application.)

intelligent retrieval techniques, computer simulation and application.)