

# 基于事件触发的三阶离散多智能体系统一致性分析

董滔<sup>1,2,3</sup> 李小丽<sup>1</sup> 赵大端<sup>1</sup>

**摘要** 研究了基于事件触发控制的三阶离散多智能体系统的一致性问题. 首先, 基于位置、速度和加速度三者的测量误差, 设计了一个新颖的事件触发控制机制. 然后, 利用不等式技巧, 得到了使离散多智能体系统达到一致的充分条件. 所得到的条件揭示了系统的通信拓扑的 Laplacian 矩阵特征值和耦合强度对于系统一致性的影响. 此外, 还给出了事件触发控制器排除类 Zeno 行为的确定条件, 这意味着事件触发控制器不会每个迭代时刻都更新. 最后, 通过仿真实验验证了所获得理论结果的正确性和可用性

**关键词** 多智能体系统, 离散时间, 事件触发一致, 类 Zeno 行为

**引用格式** 董滔, 李小丽, 赵大端. 基于事件触发的三阶离散多智能体系统一致性分析. 自动化学报, 2019, 45(7): 1366–1372

**DOI** 10.16383/j.aas.2017.c170406

## Event-triggered Consensus of Third-order Discrete-time Multi-agent Systems

DONG Tao<sup>1,2,3</sup> LI Xiao-Li<sup>1</sup> ZHAO Da-Duan<sup>1</sup>

**Abstract** This paper concerns with the event-triggered consensus problem for third-order discrete-time multi-agent systems. First, a novel event-based control scheme for third-order discrete-time multi-agent systems is designed. The event trigger function for each agent is based on the measurement error of position, speed and acceleration. Then, by utilizing the inequality technique, some sufficient conditions are obtained to make the agent achieve consensus. Our conditions reveal how the Laplacian matrix eigenvalues and coupling strengths affect the consensus of discrete-time multi-agent systems with event-trigger control strategy. Moreover, the Zeno-like behavior is avoided under certain conditions, which means the controller cannot update at each time instant. Finally, the correctness and availability of the proposed method are validated via some simulation experiments.

**Key words** Multi-agent systems, discrete-time, event-triggered consensus, zeno-like behavior

**Citation** Dong Tao, LI Xiao-Li, Zhao Da-Duan. Event-triggered consensus of third-order discrete-time multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(7): 1366–1372

近些年来, 由于多智能体协同控制在编队控制<sup>[1]</sup>、机器人网络<sup>[2]</sup>、群集行为<sup>[3]</sup>、移动传感器<sup>[4–5]</sup>

等方面的广泛应用, 多智能体系统的协同控制问题受到了众多研究者的广泛关注. 一致性问题是多智能体系统协同控制领域的一个关键问题, 其目的是通过与邻居之间的信息交换, 使所有智能体的状态达成一致. 迄今为止, 对多智能体一致性的研究也已取得了丰硕的成果, 根据多智能体的动力学模型分类, 主要可以将其分为以下 4 种情形: 一阶<sup>[6–9]</sup>、二阶<sup>[10–13]</sup>、三阶<sup>[14–15]</sup>、高阶<sup>[16–18]</sup>.

在实际应用中, 由于 CPU 处理速度和内存容量的限制, 智能体不能频繁地进行控制以及与其邻居交换信息. 因此, 事件触发控制策略作为减少控制次数和通信负载的有效途径, 受到了越来越多的关注. 到目前为止, 对事件触发控制机制的研究也取得了许多成果<sup>[19–23]</sup>. Xiao 等<sup>[19]</sup> 基于事件触发控制策略, 解决了带有领航者的离散多智能体系统的跟踪问题. 通过利用状态测量误差并且基于二阶离散多智能体系统动力学模型, Zhu 等<sup>[20]</sup> 提出了一种自触发的控制策略, 该策略使得所有智能体的状态均达到一致. Huang 等<sup>[21]</sup> 研究了基于事件触发策略的 Lur'e 网络的跟踪问题. 针对不同的领航者–跟随者系统, Xu 等<sup>[22]</sup> 提出了 3 种不同类型的事件触发控

收稿日期 2017-07-25 录用日期 2017-11-06

Manuscript received July 25, 2017; accepted November 6, 2017  
国家自然科学基金 (61503310), 中央高校基本科研业务费 (XDJK2016B018, XDJK2017D170, XDJK2017D183), 中国博士后基金 (2016M600720), 重庆市博士后项目 (Xm2016003), 重庆市基础科学与前沿技术研究项目 (cstc2019jcyj-msxm2105), 重庆市技术创新与应用示范项目 (cstc2018jszx-cydzX0171) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61503310), Fundamental Research Funds for the Central Universities (XDJK2016B018, XDJK2017D170, XDJK2017D183), China Postdoctoral Foundation (2016M600720), Chongqing Postdoctoral Project (Xm2016003), Chongqing Basic Science and Frontier Technology Project (cstc2019jcyj-msxm2105), and Chongqing Technological Innovation and Application Project (cstc2018jszx-cydzX0171)

本文责任编辑 陈龙

Recommended by Associate Editor CHEN Long

1. 西南大学电子信息工程学院 重庆 400715 2. 智能传动与控制技术国家地方联合工程实验室 (西南大学) 重庆 400715 3. 重庆长安汽车股份有限公司 重庆 401220

1. College of Electronics and Information Engineering, Southwest University, Chongqing 400715 2. National Local Joint Engineering Laboratory of Intelligent Transmission and Control Technology, Southwest University, Chongqing 400715 3. Chongqing Changan Automobile Company Limited, Chongqing 401220

制器, 包含分簇式控制器、集中式控制器和分布式控制器, 以此来解决对应的一致性问题. 然而, 大多数现有的事件触发一致性成果集中于考虑一阶多智能体系统和二阶多智能体系统, 很少有成果研究三阶多智能体系统的事件触发控制问题, 特别是对于三阶离散多智能体系统, 成果更是少之又少. 所以, 设计相应的事件触发控制协议来解决三阶离散多智能体系统的一致性问题已变得尤为重要.

本文研究了基于事件触发控制机制的三阶离散多智能体系统的一致性问题, 文章主要有以下三点贡献:

- 1) 利用位置、速度和加速度三者的测量误差, 设计了一种新颖的事件触发控制机制.
- 2) 利用不等式技巧, 分析得到了保证智能体渐近收敛到一致状态的充分条件. 与现有的事件触发文献 [19–22] 不同的是, 所得的一致性条件与通信拓扑的 Laplacian 矩阵特征值和系统的耦合强度有关.
- 3) 给出了排除类 Zeno 行为的参数条件, 进而使得事件触发控制器不会每个迭代时刻都更新.

## 1 预备知识

### 1.1 代数图论

智能体间的通信拓扑结构用一个有向加权图来表示, 记为  $\mathcal{G} = \{\vartheta, \varsigma, \Delta\}$ . 其中,  $\vartheta = \{1, 2, \dots, n\}$  表示顶点集,  $\varsigma \subseteq \vartheta \times \vartheta$  表示边集,  $\Delta = (a_{ij})_{n \times n}$  称作邻接矩阵,  $a_{ij}$  表示边  $(j, i) \in \varsigma$  的权值. 当  $(j, i) \in \varsigma$  时, 有  $a_{ij} > 0$ ; 否则, 有  $a_{ij} = 0$ .  $a_{ij} > 0$  表示智能体  $i$  能收到来自智能体  $j$  的信息, 反之则不成立. 对任意一条边  $j$ , 节点  $j$  称为父节点, 节点  $i$  则称为子节点, 节点  $i$  是节点  $j$  的邻居节点. 假设通信拓扑中不存在自环, 即对任意  $i \in \vartheta$ , 有  $a_{ii} = 0$ .

定义  $L = (l_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为图  $\mathcal{G}$  的 Laplacian 矩阵, 其中元素满足  $l_{ij} = -a_{ij} \leq 0, i \neq j$ ;  $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \geq 0$ . 智能体  $i$  的入度定义为  $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ , 因此可得到  $L = D - \Delta$ , 其中,  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . 如果有向图中存在一个始于节点  $i$ , 止于节点  $j$  的形如  $(i, j_1), (j_1, j_2), \dots, (j_m, j)$  的边序列, 那么称存在一条从  $i$  到  $j$  的有向路径. 特别地, 如果图中存在一个根节点, 并且该节点到其他所有节点都有有向路径, 那么称此有向图存在一个有向生成树. 另外, 如果有向图  $\mathcal{G}$  存在一个有向生成树, 则 Laplacian 矩阵  $L$  有一个 0 特征值并且其他特征值均含有正实部.

### 1.2 模型描述

考虑多智能体系统由  $n$  个智能体组成, 其通信拓扑结构由有向加权图  $\mathcal{G}$  表示, 其中每个智能体可

看作图  $\mathcal{G}$  中的一个节点, 每个智能体满足如下动力学方程:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = x_i(k) + v_i(k) \\ v_i(k+1) = v_i(k) + z_i(k) \\ z_i(k+1) = z_i(k) + u_i(k) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $x_i(k) \in \mathbf{R}$  表示位置状态,  $v_i(k) \in \mathbf{R}$  表示速度状态,  $z_i(k) \in \mathbf{R}$  表示加速度状态,  $u_i(k) \in \mathbf{R}$  表示控制输入.

基于事件触发控制机制的控制器协议设计如下:

$$u_i(k) = \lambda b_i(k_p^i) + \eta c_i(k_p^i) + \gamma g_i(k_p^i), k \in [k_p^i, k_{p+1}^i) \quad (2)$$

其中,  $\lambda > 0, \eta > 0, \gamma > 0$  表示耦合强度,

$$\begin{aligned} b_i(k) &= \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(k) - x_i(k)), \\ c_i(k) &= \sum_{j \in N_i} a_{ij} (v_j(k) - v_i(k)), \\ g_i(k) &= \sum_{j \in N_i} a_{ij} (z_j(k) - z_i(k)). \end{aligned}$$

触发时刻序列定义为:

$$k_{p+1}^i = \inf \{k : k > k_p^i, E_i(k) > 0\} \quad (3)$$

$E_i(k)$  为触发函数, 具有以下形式:

$$\begin{aligned} E_i(k) &= |e_{bi}(k)| + |e_{ci}(k)| + |e_{gi}(k)| - \delta_2 \beta^k - \\ &\quad \delta_1 |b_i(k_p^i)| - \delta_1 |c_i(k_p^i)| - \delta_1 |g_i(k_p^i)| \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \beta > 0, e_{bi}(k) = b_i(k_p^i) - b_i(k), e_{ci}(k) = c_i(k_p^i) - c_i(k), e_{gi}(k) = g_i(k_p^i) - g_i(k)$ .

令  $\varepsilon_i(k) = x_i(k) - x_1(k), \varphi_i(k) = v_i(k) - v_1(k), \phi_i(k) = z_i(k) - z_1(k), i = 2, \dots, n$ .  $\varepsilon(k) = [\varepsilon_2(k), \dots, \varepsilon_n(k)]^T, \varphi(k) = [\varphi_2(k), \dots, \varphi_n(k)]^T, \phi(k) = [\phi_2(k), \dots, \phi_n(k)]^T$ .  $\psi(k) = [\varepsilon^T(k), \varphi^T(k), \phi^T(k)]^T, \tilde{e}_b = [e_{b2}(k), \dots, e_{bn}(k)]^T, \bar{e}_b = [e_{b1}(k), \dots, e_{b1}(k)]^T, \tilde{e}_c = [e_{c2}(k), \dots, e_{cn}(k)]^T, \bar{e}_c = [e_{c1}(k), \dots, e_{c1}(k)]^T, \tilde{e}_g = [e_{g2}(k), \dots, e_{gn}(k)]^T, \bar{e}_g = [e_{g1}(k), \dots, e_{g1}(k)]^T, \tilde{e}(k) = [\tilde{e}_b^T(k), \tilde{e}_c^T(k), \tilde{e}_g^T(k)]^T, \bar{e}(k) = [\bar{e}_b^T(k), \bar{e}_c^T(k), \bar{e}_g^T(k)]^T,$

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} d_2 + a_{12} & a_{13} - a_{23} & \cdots & a_{1n} - a_{2n} \\ a_{12} - a_{32} & d_3 + a_{13} & \cdots & a_{1n} - a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{12} - a_{n2} & a_{13} - a_{n3} & \cdots & d_n + a_{1n} \end{bmatrix}$$

再结合式 (1) 和式 (2) 可得到:

$$\psi(k+1) = Q_1 \psi(k) + Q_2 (\tilde{e}(k) - \bar{e}(k)) \quad (5)$$

$$\text{其中, } Q_1 = \begin{bmatrix} I_{n-1} & I_{n-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1} & I_{n-1} & I_{n-1} \\ -\lambda \hat{L}_{n-1} & -\eta \hat{L}_{n-1} & I_{n-1} - \gamma \hat{L}_{n-1} \end{bmatrix}, \\
 Q_2 = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & 0_{n-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1} & 0_{n-1} & 0_{n-1} \\ \lambda I_{n-1} & \eta I_{n-1} & \gamma I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

**定义 1.** 对于三阶离散时间多智能体系统 (1), 当且仅当所有智能体的位置变量、速度变量、加速度变量满足以下条件时, 称系统 (1) 能够达到一致.

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_j(k) - x_i(k)\| &= 0 \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_j(k) - v_i(k)\| &= 0 \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_j(k) - z_i(k)\| &= 0 \\
 \forall i, j &= 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

**定义 2.** 如果  $k_{p+1}^i - k_p^i > 1$ , 则称触发时刻序列  $\{k_p^i\}$  不存在类 Zeno 行为.

**假设 1.** 假设有向图中存在一个有向生成树.

## 2 一致性分析主要结果

假设  $\kappa$  是矩阵  $Q_1$  的特征值,  $\mu_i$  是  $L$  的特征值, 则有如下等式成立:

$$\begin{aligned}
 \det(\kappa I_{3n-3} - Q_1) &= \\
 \det \begin{pmatrix} (\kappa - 1)I_{n-1} & -I_{n-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1} & (\kappa - 1)I_{n-1} & -I_{n-1} \\ \lambda \hat{L}_{n-1} & \eta \hat{L}_{n-1} & (\kappa - 1)I_{n-1} + \gamma \hat{L}_{n-1} \end{pmatrix} &= \\
 \prod_{i=2}^n [(\kappa - 1)^3 + (\lambda + \eta(\kappa - 1) + \gamma(\kappa - 1)^2) \mu_i] & \\
 \text{令} & \\
 m_i(\kappa) = (\kappa - 1)^3 + & \\
 (\lambda + \eta(\kappa - 1) + \gamma(\kappa - 1)^2) \mu_i = 0, & \\
 i = 2, \dots, n & \quad (6)
 \end{aligned}$$

则有如下引理:

**引理 1**<sup>[15]</sup>. 如果矩阵  $L$  有一个 0 特征值且其他所有特征值均有正实部, 并且参数  $\lambda, \eta, \gamma$  满足下列条件:

$$\begin{cases} 3\lambda - 2\eta < 0 \\ (\gamma - \eta + \lambda)(\lambda - \eta) < -\frac{\lambda \Re(\mu_i)}{|\mu_i|^2} \\ (4\gamma + \lambda - 2\eta) < \frac{8\Re(\mu_i)}{|\mu_i|^2} \end{cases}$$

那么, 方程 (6) 的所有根都在单位圆内, 这也就意味着矩阵  $Q_1$  的谱半径小于 1, 即  $\rho(Q_1) < 1$ . 其中,  $\Re(\mu_i)$  表示特征值  $\mu_i$  的实部.

**引理 2**<sup>[23]</sup>. 如果  $\rho(Q_1) < 1$ , 那么存在  $M \geq 1$  和  $0 < \alpha < 1$  使得下式成立

$$\|Q_1\|^k \leq M\alpha^k, \quad k \geq 0$$

**定理 1.** 对于三阶离散多智能体系统 (1), 基于假设 1, 如果式 (2) 中的耦合强度满足引理 1 中的条件, 触发函数 (4) 中的参数满足  $0 < \delta_1 < 1, \delta_2 > 0, 0 < \alpha < \beta < 1$ , 则称系统 (1) 能够实现渐近一致.

**证明.** 令  $\omega(k) = \tilde{e}(k) - \bar{e}(k)$ , 式 (5) 能够被重新写成如下形式:

$$\psi(k) = Q_1^k \psi(0) + Q_2 \sum_{s=0}^{k-1} Q_1^{k-1-s} \omega(s) \quad (7)$$

根据引理 1 和引理 2 可知, 存在  $M \geq 1$  和  $0 < \alpha < 1$  使得下式成立.

$$\begin{aligned}
 \|\psi(k)\| &\leq \|Q_1\|^k \|\psi(0)\| + \\
 \|Q_2\| \sum_{s=0}^{k-1} \|Q_1\|^{k-1-s} \|\omega(s)\| &\leq \\
 M \|\psi(0)\| \alpha^k + & \\
 M \|Q_2\| \sum_{s=0}^{k-1} \alpha^{k-1-s} \|\omega(s)\| & \quad (8)
 \end{aligned}$$

由触发条件可得:

$$\begin{aligned}
 |e_{bi}(k)| + |e_{ci}(k)| + |e_{gi}(k)| &\leq \\
 \delta_1 |b_i(k_p^i)| + \delta_1 |c_i(k_p^i)| + & \\
 \delta_1 |g_i(k_p^i)| + \delta_2 \beta^k &\leq \\
 \delta_1 \|L\| \cdot \|\varepsilon(k)\| + \delta_1 \|L\| \cdot \|\varphi(k)\| + & \\
 \delta_1 \|L\| \cdot \|\phi(k)\| + \delta_1 |e_{bi}(k)| + & \\
 \delta_1 |e_{ci}(k)| + \delta_1 |e_{gi}(k)| + \delta_2 \beta^k & \quad (9)
 \end{aligned}$$

对上式移项可求解得:

$$\begin{aligned}
 |e_{bi}(k)| + |e_{ci}(k)| + |e_{gi}(k)| &\leq \\
 \frac{\delta_1 \|L\| \cdot \|\varepsilon(k)\|}{1 - \delta_1} + \frac{\delta_1 \|L\| \cdot \|\varphi(k)\|}{1 - \delta_1} + & \\
 \frac{\delta_1}{1 - \delta_1} \|L\| \cdot \|\phi(k)\| + \frac{\delta_2}{1 - \delta_1} \beta^k & \quad (10)
 \end{aligned}$$

又因为  $\|\varepsilon(k)\| \leq \|\psi(k)\|, \|\varphi(k)\| \leq \|\psi(k)\|$  和  $\|\phi(k)\| \leq \|\psi(k)\|$ , 可得出下列不等式:

$$\begin{aligned}
 |e_{bi}(k)| + |e_{ci}(k)| + |e_{gi}(k)| &\leq \\
 \frac{\delta_1 \|L\|}{1 - \delta_1} \cdot (\|\varepsilon(k)\| + \|\varphi(k)\| + \|\phi(k)\|) + & \\
 \frac{\delta_2 \beta^k}{1 - \delta_1} &\leq \frac{3\delta_1}{1 - \delta_1} \|L\| \cdot \|\psi(k)\| + \frac{\delta_2}{1 - \delta_1} \beta^k \quad (11)
 \end{aligned}$$

接着有如下不等式成立:

$$\|e(k)\| \leq \frac{3\sqrt{n}\delta_1}{1-\delta_1} \|L\| \cdot \|\psi(k)\| + \frac{\sqrt{n}\delta_2}{1-\delta_1} \beta^k \quad (12)$$

其中,  $e(k) = [e_b(k), e_c(k), e_g(k)]^T$ ,  $e_b(k) = [e_{b1}(k), \dots, e_{bn}(k)]$ ,  $e_c(k) = [e_{c1}(k), \dots, e_{cn}(k)]$ ,  $e_g(k) = [e_{g1}(k), \dots, e_{gn}(k)]$ .

注意到

$$\|\tilde{e}(k)\| + \|\bar{e}(k)\| \leq \sqrt{6(n-1)} \|e(k)\| \quad (13)$$

于是有

$$\begin{aligned} \|\omega(k)\| &= \|\tilde{e}(k) - \bar{e}(k)\| \leq \\ &\|\tilde{e}(k)\| + \|\bar{e}(k)\| \leq \\ &\frac{3\sqrt{6n(n-1)}\delta_1}{1-\delta_1} \|L\| \cdot \|\psi(k)\| + \\ &\frac{\sqrt{6n(n-1)}\delta_2}{1-\delta_1} \beta^k \end{aligned} \quad (14)$$

把式 (14) 代入式 (8) 可得

$$\begin{aligned} \|\psi(k)\| &\leq M \|\psi(0)\| \alpha^k + \\ &\frac{M \|Q_2\| \alpha^{k-1} \delta_1 3\sqrt{6n(n-1)} \|L\|}{1-\delta_1} \times \\ &\sum_{s=0}^{k-1} \alpha^{-s} \|\psi(s)\| + M \|Q_2\| \alpha^{k-1} \times \\ &\sum_{s=0}^{k-1} \alpha^{-s} \frac{\sqrt{6n(n-1)}\delta_2}{1-\delta_1} \beta^s \end{aligned} \quad (15)$$

接下来的部分, 将证明下列不等式成立.

$$\|\psi(k)\| \leq W \beta^k. \quad (16)$$

其中,  $W = \max\{\Theta_1, \Theta_2\}$ ,  $\Theta_1 = M \|\psi(0)\|$ ,  $\Theta_2 = \frac{\delta_2 M \|Q_2\| \sqrt{6n(n-1)}}{(\beta-\alpha)(1-\delta_1) - 3\delta_1 M \|Q_2\| \|L\| \sqrt{6n(n-1)}}$

首先, 证明对任意的  $\rho > 1$ , 下列不等式成立.

$$\|\psi(k)\| < \rho W \beta^k \quad (17)$$

利用反证法, 先假设式 (17) 不成立, 则必将存在  $k^* > 0$  使得  $\|\psi(k)\| \geq \rho W \beta^k$  并且当  $k \in (0, k^*)$  时  $\|\psi(k)\| < \rho W \beta^k$  成立. 因此, 根据式 (17) 可得:

$$\begin{aligned} \rho W \beta^{k^*} &\leq \|\psi(k^*)\| \leq \\ &M \|\psi(0)\| \alpha^{k^*} + \|Q_2\| \alpha^{k^*-1} M \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{k^*-1} \alpha^{-s} \left[ \frac{3\sqrt{6n(n-1)}\delta_1 \|L\| \cdot \|\psi(s)\|}{1-\delta_1} \right] + \\ &M \|Q_2\| \alpha^{k^*-1} \sum_{s=0}^{k^*-1} \alpha^{-s} \left[ \frac{\sqrt{6n(n-1)}\delta_2}{1-\delta_1} \beta^s \right] < \\ &\rho M \|\psi(0)\| \alpha^{k^*} + \rho M \|Q_2\| \alpha^{k^*-1} \times \\ &\sum_{s=0}^{k^*-1} \alpha^{-s} \left[ \frac{3\sqrt{6n(n-1)}\delta_1 \|L\| \cdot W \beta^s}{1-\delta_1} \right] + \\ &\rho M \|Q_2\| \alpha^{k^*-1} \sum_{s=0}^{k^*-1} \alpha^{-s} \left[ \frac{\sqrt{6n(n-1)}\delta_2 \beta^s}{1-\delta_1} \right] = \\ &\rho M \|\psi(0)\| \alpha^{k^*} - \\ &\rho \frac{M \|Q_2\| \sqrt{6n(n-1)} (3\delta_1 \|L\| W + \delta_2)}{(\beta-\alpha)(1-\delta_1)} \alpha^{k^*} + \\ &\rho \frac{M \|Q_2\| \sqrt{6n(n-1)} (3\delta_1 \|L\| W + \delta_2)}{(\beta-\alpha)(1-\delta_1)} \beta^{k^*} \end{aligned}$$

1) 当  $W = M \|\psi(0)\|$  时, 则有

$$\begin{aligned} &M \|\psi(0)\| - \\ &\frac{M \|Q_2\| \sqrt{6n(n-1)} (3\delta_1 \|L\| W + \delta_2)}{(\beta-\alpha)(1-\delta_1)} \geq 0 \end{aligned}$$

所以可得到

$$\rho W \beta^{k^*} \leq \|\psi(k^*)\| \leq \rho M \|\psi(0)\| \beta^{k^*} = \rho W \beta^{k^*} \quad (18)$$

2) 当  $W = \frac{\delta_2 M \|Q_2\| \sqrt{6n(n-1)}}{(\beta-\alpha)(1-\delta_1) - 3\delta_1 M \|Q_2\| \|L\| \sqrt{6n(n-1)}}$  时, 则有

$$\begin{aligned} &M \|\psi(0)\| - \\ &\frac{M \|Q_2\| \sqrt{6n(n-1)} (3\delta_1 \|L\| W + \delta_2)}{(\beta-\alpha)(1-\delta_1)} < 0 \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} \rho W \beta^{k^*} &\leq \|\psi(k^*)\| \leq \\ &\frac{\rho \delta_2 M \|Q_2\| \sqrt{6n(n-1)} \beta^{k^*}}{(\beta-\alpha)(1-\delta_1) - 3\delta_1 M \|Q_2\| \|L\| \sqrt{6n(n-1)}} = \\ &\rho W \beta^{k^*} \end{aligned} \quad (19)$$

根据以上结果, 式 (18) 和式 (19) 都与假设相矛盾. 这说明原命题成立, 即对任意的  $\rho > 1$ , 式 (17) 成立. 易知, 如果  $\rho \rightarrow 1$ , 则式 (16) 成立. 根据式 (16) 可知, 当  $k \rightarrow +\infty$  时, 有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\psi(k)\| = 0$ , 则系统 (5) 是收敛的. 由  $\psi(k)$  的定义可知, 系统 (1) 能够实现渐近一致.  $\square$

**定理 2.** 对于系统 (1), 如果定理 1 中的条件成立, 并且控制器 (2) 中的设计参数满足如下条件,

$$\delta_1 \in \left( \frac{(\beta - \alpha)}{(\beta - \alpha) + 3\sqrt{6n(n-1)M\|Q_2\|\|L\|}}, 1 \right)$$

$$\delta_2 > \frac{\|L\|\|\psi(0)\|M(1+\beta)}{\beta}$$

那么触发序列中的类 Zeno 行为将被排除.

**证明.** 易知排除类 Zeno 行为的关键是要证明不等式  $k_{p+1}^i - k_p^i > 1$  成立. 根据事件触发机制可知, 下一个触发时刻将会发生在触发函数 (4) 大于 0 时. 进而可得到如下不等式

$$|e_{bi}(k_{p+1}^i)| + |e_{ci}(k_{p+1}^i)| + |e_{gi}(k_{p+1}^i)| \geq \delta_1 |b_i(k_p^i)| + \delta_1 |c_i(k_p^i)| + \delta_1 |g_i(k_p^i)| + \delta_2 \beta^{k_{p+1}^i} \quad (20)$$

定义  $G_i(k_p^i) = |e_{bi}(k_p^i)| + |e_{ci}(k_p^i)| + |e_{gi}(k_p^i)|$ ,  $H_i(k_p^i) = |b_i(k_p^i)| + |c_i(k_p^i)| + |g_i(k_p^i)|$ . 结合式 (20), 可得到下式

$$G_i(k_{p+1}^i) \geq \delta_1 H_i(k_p^i) + \delta_2 \beta^{k_{p+1}^i} \quad (21)$$

结合式 (16) 和式 (21) 可得

$$\delta_2 \beta^{k_{p+1}^i} \leq G_i(k_{p+1}^i) - \delta_1 H_i(k_p^i) \leq \|L\| (\|\psi(k_p^i)\| + \|\psi(k_{p+1}^i)\|) \leq W \|L\| (\beta^{k_p^i} + \beta^{k_{p+1}^i}) \quad (22)$$

求解上式得

$$(\delta_2 - \|L\|W) \beta^{k_{p+1}^i} \leq \|L\|W \beta^{k_p^i} \quad (23)$$

根据式 (23) 可得

$$k_{p+1}^i - k_p^i > \frac{\ln \frac{W \|L\|}{\delta_2 - W \|L\|}}{\ln \beta} \quad (24)$$

基于 (24) 易知当  $\delta_2 > \frac{\|L\|W(1+\beta)}{\beta}$  时, 有如下不等式成立

$$\frac{\ln \frac{W \|L\|}{\delta_2 - W \|L\|}}{\ln \beta} > 1 \quad (25)$$

此外, 因为  $W = M \|\psi(0)\|$  以及

$$\delta_1 > \frac{(\beta - \alpha)}{(\beta - \alpha) + 3\sqrt{6n(n-1)M\|Q_2\|\|L\|}} \quad (26)$$

又可以得出

$$\delta_2 > \frac{\|L\|\|\psi(0)\|M(1+\beta)}{\beta} = \frac{\|L\|W(1+\beta)}{\beta} \quad (27)$$

该式意味着式 (25) 成立, 又结合式 (24) 易知  $k_{p+1}^i - k_p^i > 1$ , 即排除类 Zeno 行为的条件得已满足.  $\square$

**注 2.** 类 Zeno 行为广泛存在于基于事件触发控制机制的离散系统中. 然而, 当前极少有文献研究如何排除类 Zeno 行为, 尤其是对于三阶多智能体动态模型. 定理 2 给出了排除三阶离散多智能体系统的类 Zeno 行为的参数条件.

### 3 仿真实验

本部分将利用一个仿真实验来验证本文所提算法及理论的正确性和有效性. 假设三阶离散多智能体系统 (1) 包含 6 个智能体, 且有向加权通信拓扑结构如图 1 所示, 权重取值为 0 或 1, 可以明显地看出该图包含有向生成树 (满足假设 1).

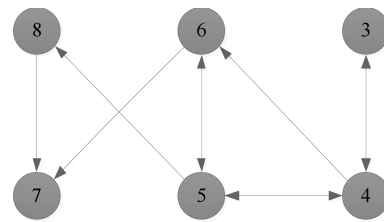


图 1 6 个智能体通信拓扑结构图  
Fig. 1 The communication topology with six agents

通过简单的计算可得,  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 0.6852$ ,  $\mu_3 = 1.5825 + 0.3865i$ ,  $\mu_4 = 1.5825 - 0.3865i$ ,  $\mu_5 = 3.2138$ ,  $\mu_6 = 3.9360$ . 令  $M = 1$ , 结合定理 1 和定理 2 可得到  $0.035 < \delta_1 < 1$ ,  $\delta_2 > 44.0025$ ,  $0 < \alpha < \beta < 1$ . 令  $\delta_1 = 0.2$ ,  $\delta_2 = 200$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $\beta = 0.9$ ,  $\lambda = 0.02$ ,  $\eta = 0.3$ ,  $\gamma = 0.5$ , 不难验证满足引理 1 的条件并且计算可知  $\rho(Q_1) = 0.9958 < 1$ . 三阶离散多智能体系统 (1) 的一致性结果如图 2 ~ 图 6 所示. 根据定理 1 可知, 基于控制器 (2) 和事件

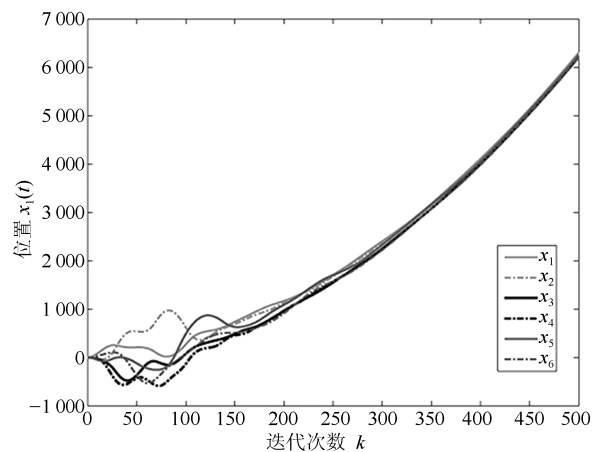


图 2 三阶离散多智能体系统的位置轨迹图  
Fig. 2 The trajectories of position in third-order discrete-time multi-agent systems

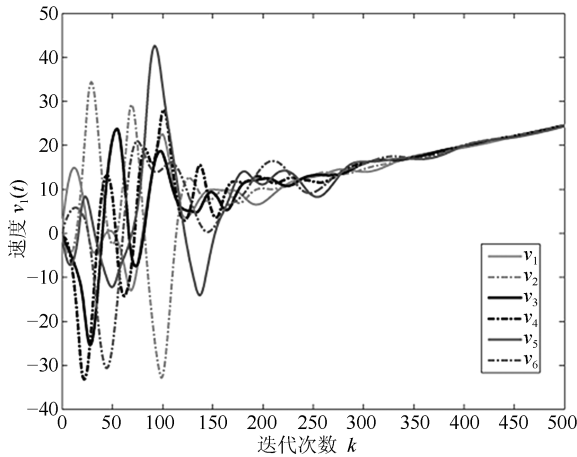


图3 三阶离散多智能体系统的速度轨迹图  
Fig. 3 The trajectories of speed in third-order discrete-time multi-agent systems

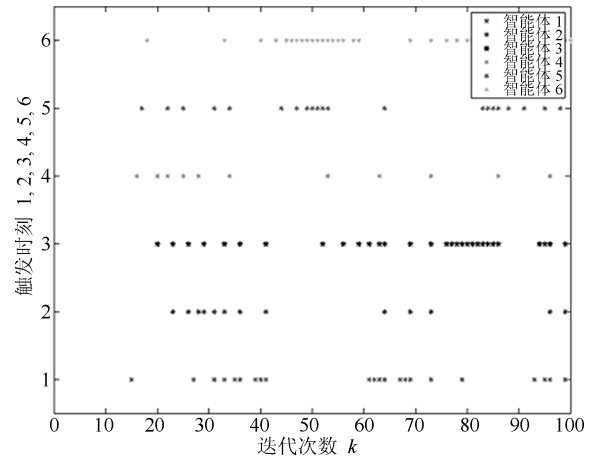


图6 100次迭代内所有智能体的触发时刻  
Fig. 6 Triggering instants of all agents within 100 iterations

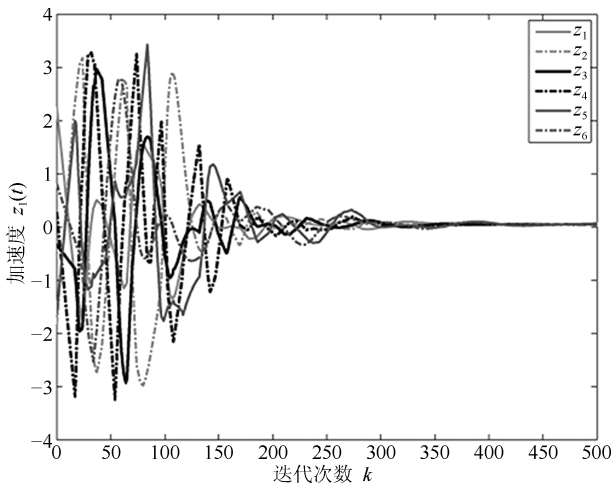


图4 三阶离散多智能体系统的加速度轨迹图  
Fig. 4 The trajectories of acceleration in third-order discrete-time multi-agent systems

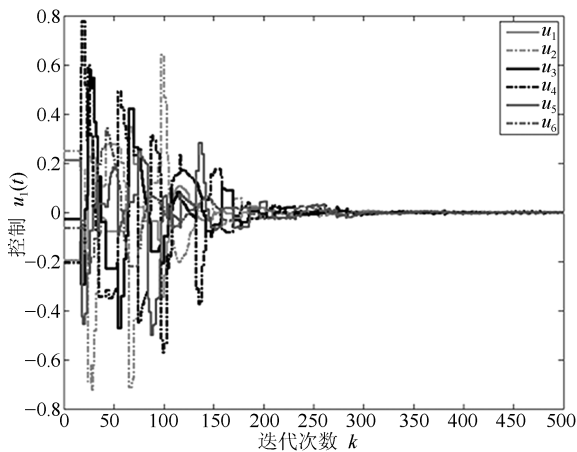


图5 三阶离散多智能体系统的控制轨迹图  
Fig. 5 The trajectories of control in third-order discrete-time multi-agent systems

触发函数 (4) 的系统 (1) 能实现一致. 从图 2 ~ 图 6 可以看出, 仿真结果与理论分析符合.

图 2 ~ 图 4 分别表征了系统 (1) 中所有智能体的位置、速度和加速度的轨迹, 从图中可以看出以上 3 个变量确实达到了一致. 图 5 展示了控制输入的轨迹. 为了更清楚地体现事件触发机制的优点, 图 6 给出了 0 ~ 100 次迭代内的各智能体的触发时刻轨迹. 从图 6 可以看出, 本文设计的事件触发协议确实达到了减少更新次数, 节省资源的目的.

#### 4 结论

针对三阶离散多智能体系统的一致性问题, 构造了一个新颖的事件触发一致性协议, 分析得到了在通信拓扑为有向加权图且包含生成树的条件下, 系统中所有智能体的位置状态、速度状态和加速度状态渐近收敛到一致状态的充分条件. 同时, 该条件指出了通信拓扑的 Laplacian 矩阵特征值和系统的耦合强度对系统一致性的影响. 另外, 给出了排除类 Zeno 行为的参数条件. 仿真实验结果也验证了上述结论的正确性. 将文中获得的结论扩展到拓扑结构随时间变化的更高阶多智能体网络是极有意义的. 这将是未来研究的一个具有挑战性的课题.

#### References

- 1 Morbidi F, Mariottini G L, Prattichizzo D. Observer design via immersion and invariance for vision-based leader-follower formation control. *Automatica*, 2010, **46**(1): 148–154
- 2 Zhang H T, Chen Z, Yan L, Yu W W. Applications of collective circular motion control to multirobot systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, **21**(4): 1416–1422
- 3 Zhang H T, Cheng Z M, Chen G R, Li C G. Model predictive control for second-order multi-agent systems with input constraints. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2015, **62**(6): 1599–1606

- 4 Stankovic M S, Johansson K H, Stipanovic D M. Distributed seeking of Nash Equilibria with applications to mobile sensor networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(4): 904–919
- 5 Hu J P, Hu X M. Nonlinear filtering in target tracking using cooperative mobile sensors. *Automatica*, 2011, **46**(12): 2041–2046
- 6 Yang Ruo-Han, Zhang Hao, Yan Huai-Cheng. Event-triggered cooperative output regulation of heterogeneous multi-agent systems with switching topology. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(3): 472–477  
(杨若涵, 张皓, 严怀成. 基于事件触发的拓扑切换异构多智能体协同输出调节. *自动化学报*, 2017, **43**(3): 472–477)
- 7 Zhao D D, Dong T. Reduced-order observer-based consensus for multi-agent systems with time delay and event trigger strategy. *IEEE Access*, 2017, **5**: 1263–1271
- 8 He W L, Zhang B, Han Q L, Qian F, Kurths J, Cao J D. Leader-following consensus of nonlinear multiagent systems with stochastic sampling. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, **47**(2): 327–338
- 9 Zhang Xie-Yan, Zhang Jing. Sampled-data consensus of multi-agent systems with general linear dynamics based on a continuous-time model. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(11): 2549–2555  
(张协衍, 章兢. 基于连续时间模型的多智能体系统采样数据一致性. *自动化学报*, 2014, **40**(11): 2549–2555)
- 10 Dong T, Liao X F. On the general consensus protocol in multiagent networks with double-integrator dynamics and coupling time delay. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, **2013**: Article No. 590894
- 11 Wang A J, Dong T, Liao X F. On the general consensus protocol in multi-agent networks with second-order dynamics and sampled data. *Asian Journal of Control*, 2016, **18**(5): 1914–1922
- 12 Huang N, Duan Z S, Chen G R. Some necessary and sufficient conditions for consensus of second-order multi-agent systems with sampled position data. *Automatica*, 2016, **63**: 148–155
- 13 Mu N K, Liao X F, Huang T W. Consensus of second-order multi-agent systems with random sampling via event-triggered control. *Journal of the Franklin Institute*, 2016, **353**(6): 1423–1435
- 14 Xin Y M, Li Y X, Huang X, Cheng Z S. Consensus of third-order nonlinear multi-agent systems. *Neurocomputing*, 2015, **159**: 84–89
- 15 Cao Y F, Sun Y G. Consensus of discrete-time third-order multi-agent systems in directed networks. *Neurocomputing*, 2016, **177**: 394–400
- 16 Hua C C, You X, Guan X P. Leader-following consensus for a class of high-order nonlinear multi-agent systems. *Automatica*, 2016, **73**: 138–144
- 17 Jiang F C, Wang L. Consensus seeking of high-order dynamic multi-agent systems with fixed and switching topologies. *International Journal of Control*, 2010, **83**(2): 404–420
- 18 Rezaee H, Abdollahi F. Consensus problem over high-order multiagent systems with uncertain nonlinearities under deterministic and stochastic topologies. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, **47**(8): 2079–2088
- 19 Liu X Y, Sun J, Dou L H, Chen J. Leader-following consensus for discrete-time multi-agent systems with parameter uncertainties based on the event-triggered strategy. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2017, **30**(1): 30–45
- 20 Zhu W, Pu H Z, Wang D D, Li H Q. Event-based consensus of second-order multi-agent systems with discrete time. *Automatica*, 2017, **79**: 78–83
- 21 Huang N, Duan Z S, Wen G H, Zhao Y. Event-triggered consensus tracking of multi-agent systems with Lur'e nonlinear dynamics. *International Journal of Control*, 2016, **89**(5): 1025–1037
- 22 Xu W Y, Ho D W C, Li L L, Cao J D. Event-triggered schemes on leader-following consensus of general linear multiagent systems under different topologies. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, **47**(1): 212–223
- 23 Zhang H, Feng G, Yan H C, Chen Q J. Observer-based output feedback event-triggered control for consensus of multi-agent systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, **61**(9): 4885–4894



董滔 西南大学电子信息工程学院副教授. 主要研究方向为多智能体系统控制, 神经网络, 非线性动力学系统, 分岔与混沌研究. 本文通信作者.  
E-mail: david.312@126.com

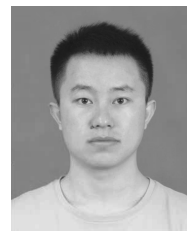
(DONG Tao Associate professor at the School of Electronics and Information Engineering, Southwest University.

His research interest covers multi agent system control, neural networks, nonlinear dynamical systems, bifurcation and chaos. Corresponding author of this paper.)



李小丽 西南大学电子信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为多智能体系统的一致和分布式优化.  
E-mail: xlli@swu.edu.cn

(LI Xiao-Li Master student in the Department of Electronics and Information Engineering, Southwest University. Her research interest covers consensus and distributed optimization of multi-agent systems.)



赵大端 西南大学电子信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为非线性动力学系统, 分布式优化一致, 多智能体系统一致.  
E-mail: zhaodaduan123@163.com

(ZHAO Da-Duan Master student in the Department of Electronics and Information Engineering, Southwest University. His research interest covers nonlinear dynamical systems, distributed optimization consensus, and consensus of multi-agent systems.)

His research interest covers nonlinear dynamical systems, distributed optimization consensus, and consensus of multi-agent systems.)