

不确定系统的鲁棒与随机模型预测控制算法比较研究

谢澜涛¹ 谢磊¹ 苏宏业¹

摘要 近几十年来, 不确定系统模型预测控制的理论和应用得到了飞速发展. 本文简要地回顾了不确定系统中鲁棒模型预测控制和随机模型预测控制的发展历史, 总结了它们的相关应用, 并较为细致地分析了线性不确定系统模型预测控制的各种主要算法. 通过总结各种算法的通用模型、运作方式、问题规模, 以及它们保证递归可行性、稳定性的方法, 分析了部分算法可行域间的关系, 揭示了各种算法的主要特点、适用场合和未来可发展方向, 并通过仿真实例直观地分析了各种算法的性能和可靠性.

关键词 不确定系统, 鲁棒模型预测控制, 随机模型预测控制, 稳定性, 可行性

引用格式 谢澜涛, 谢磊, 苏宏业. 不确定系统的鲁棒与随机模型预测控制算法比较研究. 自动化学报, 2017, 43(6): 969–992

DOI 10.16383/j.aas.2017.c170082

A Comparative Study on Algorithms of Robust and Stochastic MPC for Uncertain Systems

XIE Lan-Tao¹ XIE Lei¹ SU Hong-Ye¹

Abstract In recent years, the development of model predictive control (MPC) of uncertain systems has been remarkable. This paper briefly reviews the development of robust MPC and stochastic MPC, summarizes their applications, and expounds and discusses the main algorithms of linear uncertain systems in these two fields. By summarizing their general models, the ways they work, computational complexities, and the ideas they use to ensure recursive feasibility and stability, we reveal the relationship of feasible sets among some of them and unravel the main features of these algorithms and their application situations. Finally, we demonstrate the performance of all the algorithms through certain simulation cases and give some indication on the future development of these two fields.

Key words Uncertain system, robust MPC, stochastic MPC, stability, feasibility

Citation Xie Lan-Tao, Xie Lei, Su Hong-Ye. A comparative study on algorithms of robust and stochastic MPC for uncertain systems. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(6): 969–992

模型预测控制 (Model predictive control, MPC) 指的是一类通过显式的系统过程模型来预测其未来响应并求解能使系统表现最优的输入量的计算机算法的总称^[1–2]. MPC 的思想最早可追溯到十九世纪六十年代. 由于 MPC 概念简单, 并且能够有效地处理复杂系统的约束问题, 实现复杂控制目标, 使得 MPC 在过程工业、汽车、能源、环境、

航空、医疗等一系列领域取得了广泛的应用^[2–5]. MPC 的一般工作流程可概括如下: 1) 在当前时刻, 获取系统状态测量值; 2) 求解一个优化控制问题 (Optimal control problem, OCP) 得到预测时域控制率; 3) 仅将预测时域中第一个控制量作为系统输入; 4) 在下一时刻再回到 1). 这个过程被一直重复进行, 因此 MPC 又叫做滚动时域控制.

能否准确对系统的未来响应进行预测将直接影响 MPC 应用的效果, 而预测的准确性又取决于系统模型是否准确. 模型的不确定性有时会导致被控系统反应迟钝, 甚至不稳定^[6]. 虽然滚动时域的方式使得 MPC 具有一定的鲁棒性^[5], 但传统的 MPC 并不是为处理系统不确定性而设计的, 其鲁棒稳定性的实现要求外部噪声足够小或者状态约束不存在^[7], 所以它仍然无法满足一般情况下不确定系统控制的需求. 为了系统地解决这个问题, Campo 等在 1987 年率先提出了 Min-max 鲁棒模型预测控制 (Robust model predictive control, RMPC) 的算法^[8], 随后 Allwright 等在文献 [9–10] 中将这种 Min-max

收稿日期 2017-02-17 录用日期 2017-05-22
Manuscript received February 17, 2017; accepted May 22, 2017
企业资源计划 (ERP)/制造执行系统 (MES) 与控制系统之间软件互联互通接口规范标准研究和试验验证平台建设, 国家自然科学基金 (61621002), 浙江省自然科学基金杰出青年项目 (LR17F030002) 资助
Supported by Research on Interface Specification Standard and Test Platform Construction between Control Systems and Enterprise Resource Planning /Manufacturing Execution System, National Natural Science Foundation of China (61621002), Outstanding Young Project of Zhejiang Natural Science Foundation of China (LR17F030002)

本文责任编辑 王伟
Recommended by Associate Editor WANG Wei
1. 浙江大学智能与系统控制研究所工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027
1. State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Cyber-Systems Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027

RMPC 的思想进一步完善. Min-max RMPC 考虑了由不确定性引起的“最坏”的情况, 如果系统能在这种“最坏”的情况下稳定运行, 则对于未来发生的任何一种不确定性, 系统仍然可以稳定运行^[11-12]. 虽然这种考虑“最坏”情况的设计方法使得约束能被所有不确定性所满足, 但这种方法却是十分保守的, 甚至会导致控制问题不可解. 在 Min-max RMPC 算法发展同时, Blanchini 和 Kouvaritakis 等为处理系统的不确定性提出了另一种基于 Tube 的 RMPC 算法^[13-15]. 早期的基于 Tube 的算法和 Min-max 算法一样, 也十分的保守. 为了减少考虑不确定性带来的保守性, Raković 和 Cannon 等近期提出了新型的基于 Tube 的 RMPC 算法^[16-21], 通过采用分离控制策略, 将名义系统(无不确定性系统)从实际系统中分离出来, 把对实际系统的控制转化为对名义系统的控制, 把系统状态控制在一个状态约束的子集当中, 这个子集就是所谓的 Tube. Tube 的存在保证了实际系统对约束的满足, 这种特性使得设计更简单快速的算法成为可能.

系统中的不确定性也可以看作噪声. RMPC 算法只能处理有界、确定噪声, 并且要求约束也是有界的. 如果把随机噪声当作确定有界干扰来处理, 会使得控制器过于保守, 较大的随机噪声分布范围甚至会导致 RMPC 控制器找不到可行解. 随机模型预测控制 (Stochastic MPC, SMPC) 利用了噪声的随机特性并且能处理更多约束类型. 在 SMPC 算法当中, 人们通常求取的是惩罚函数的最小期望值^[7], 而用到的随机特性通常是噪声的期望和协方差 (如文献 [22-23]), 有时还会用到噪声的概率密度分布函数 (如文献 [24-25]). 对于无界噪声, SMPC 算法一般考虑以下三种约束: 均值约束^[26]、概率约束 (又叫机会约束)^[18, 22] 和有界输入约束^[27-28]. 这种情况下, SMPC 算法设计难点在于处理无界噪声, 因为噪声的无界特性会在下一时刻将系统状态拉至过远

而导致相关 OCP 没有可行解. 当然, SMPC 也是可以处理有界噪声下的有界状态约束的, 只要把概率约束中的概率当作 1 来处理, 例如文献 [18] 和 [29].

RMPC 和 SMPC 算法主要研究的是参数不确定性、外部不确定性或结构不确定性, 结构不确定性可以转化为参数不确定处理^[30]. 本文主要讨论外部不确定性, 读者可以将处理外部不确定性的一些方法拓展到参数不确定性或者更复杂的情况上去. 例如, 当线性系统中参数和外部不确定性都出现时, 在 RMPC 算法中可以通过将两种不确定性分离, 并通过适当的 LMI 转换就可以进行求解^[31], 而在 SMPC 算法中也有类似的通过情景优化的方法来解决^[32].

本文的目的在于归纳总结和分析各种典型的 RMPC 和 SMPC 算法 (如图 1 所示), 揭示这些算法的特点, 并对可以用于相同控制对象的算法以表 1 为依据通过仿真实例来比较算法的优劣. 在前文已经介绍了 MPC、RMPC 和 SMPC 的主要特点, 在下一节将介绍两大类主要的 RMPC 算法, 并通过一个 2 维的仿真实例展示各种算法的特性. 然后, 探究 4 种主要的 SMPC 算法, 并通过一个 7 维的仿真实例来展示各种算法的不同. 最后, 通过这些算法的应用来说明这些算法使用的广泛性, 并总结和展望 RMPC 和 SMPC 的一些未来可研究方向.

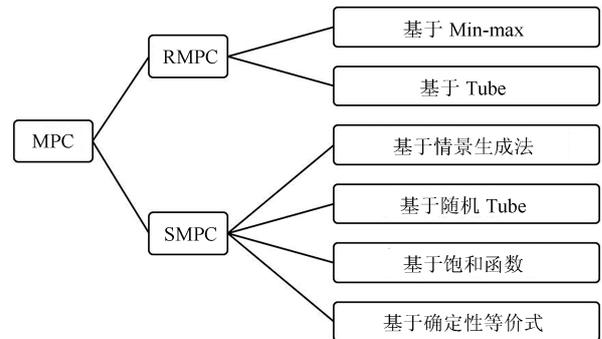


图 1 主要讨论算法

Fig.1 Main algorithms

表 1 算法主要参数

Table 1 Main parameters of algorithms

说明	
问题规模	变量数目: 指最终 OCP 决策变量的数量, 包括所有的松弛变量. 约束数目: 是指最终 OCP 的约束数目. 平均 CPU 时间: 指每一次求解最终 OCP 所花费的平均时间.
本质属性	可行域范围: 假设 OCP ^M 的所有决策变量为 $\Theta^M(x_k)$, 其中 x_k 是算法 M 下的初始状态, OCP ^M 的可行域可定义为: $F^M = \{x \exists \Theta^M(x) \text{ 使得 OCP}^M \text{ 有可行解}\}$

符号和定义: 正整数集和实数集分别表示为 \mathbf{N} 和 \mathbf{R} . $\mathbf{N}_{[a,b]} = \{a, a+1, \dots, b\}$ 表示从 a 到 b 的整数集. X 表示一个集合, 则 $\mathbf{x} \in X^n$ 表示向量 \mathbf{x} 由 n 个分量组成, 且每个分量 $x_i \in X, i = 1, \dots, n$. 对于集合 $X \subseteq \mathbf{R}^n$ 和 $Y \subseteq \mathbf{R}^n$, Minkowski 集合加法定义为 $X \oplus Y = \{x+y | x \in X, y \in Y\}$, $x+X$ 表示 $\{x\} \oplus X$. Pontryagin 几何减法定义为 $X \ominus Y = \{x | x \oplus Y \subseteq X\}$. 对于 $\alpha \in \mathbf{R}$ ($M \in \mathbf{R}^{m \times n}$), αX (MX) := $\{\alpha x$ (Mx) $| x \in X\}$. $\text{co}\{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ 表示点集 $\{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ 的凸包. $\mathbf{E}(\cdot)$ 表示期望, $\mathbf{E}_{x_k}(\cdot)$ 表示给定 x_k 的条件期望, $\text{Pr}(\cdot)$ 表示概率. $\|\cdot\|$ 表示标准欧几里得范数, $\|\cdot\|_1$ 表示 ℓ_1 范数, $\|\cdot\|_\infty$ 表示 ℓ_∞ 范数. 对于 $n \times 1$ 的矩阵 $M(w) = \{m_1(w), \dots, m_n(w)\}^T$ 和 $w \in W$, 定义 $\max_{w \in W} M(w) := \{\max_{w \in W} m_1(w), \dots, \max_{w \in W} m_n(w)\}^T$.

1 鲁棒模型预测控制 (RMPC)

鲁棒模型预测控制处理的是一类有界噪声问题, 带外部噪声的线性不确定系统可表示为^[12, 33-36]:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k \quad (1)$$

其中, 系统状态 $x_k \in \mathbf{R}^n$, 系统输入 $u_k \in \mathbf{R}^m$, 外部噪声 $w_k \in \mathbf{R}^r$. 外部噪声 w 的值在时刻 k 和未来自知, 只知道它的取值范围, 而且 (不失一般性) 可以表示为:

$$w_k \in W := \{w : Mw \leq m\} \quad (2)$$

一些文献 (如文献 [34-37]) 处理的外部噪声取值范围为 ∞ 范数类型 (即 $\|w\|_\infty \leq \epsilon$), 这可以看作是式 (2) 的一种特殊情况. 外部噪声可能来自于周围环境噪声, 也可能来自于对模型失配部分的重构. RMPC 中的约束通常都是包含原点的凸集, 设闭合凸集 $X = \{x | E_x x \leq \mathbf{1}\}$, $U = \{u | E_u u \leq \mathbf{1}\}$, 则系统的状态约束和输入约束可分别表示为:

$$x_k \in X, u_k \in U \quad (3)$$

部分如文献 (如文献 [34-35]) 会考虑 u 和 x 的联合约束 (即 $E_x x + E_u u \leq \mathbf{1}$). 联合约束在表达上更具一般性, 但它不利于体现外部干扰在不同控制率下对输入约束和状态约束的影响, 同时也不利于应用到基于 Tube 的算法当中. 在实际应用中, 独立的约束更常见, 所以之后的章节中不对联合约束的情况进行讨论.

1.1 Min-max RMPC

如文献 [33] 所描述, Min-max RMPC 的 OCP

一般可表示为:

$$\begin{aligned} \min_{\{u_{k+j}\}} \max_{\{w_{k+j}\}} : & \sum_{j=0}^{N-1} x_{k+j}^T Q x_{k+j} + \\ & u_{k+j}^T R u_{k+j} + J_N(x_{k+N}) \\ \text{s.t.} & \\ & x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k \\ & x_{k+j} \in X, \forall w_{k+j} \in W, j \in \mathbf{N}_{[0, N-1]} \\ & u_{k+j} \in U, \forall w_{k+j} \in W, j \in \mathbf{N}_{[0, N-1]} \\ & x_{k+N} \in X_N \end{aligned} \quad (4)$$

其中输入约束 $U = \{u | E_u u \leq \mathbf{1}\}$, 状态约束 $X = \{x | E_x x \leq \mathbf{1}\}$, 终值约束 $X_N = \{x | E_f x \leq \mathbf{1}\}$, $J_N(x) = x^T P x$ 为终值惩罚, N 为预测时域, Q, R 为权重正定矩阵.

为了使表达更为直观简洁, 使用紧凑结构来重新书写式 (4). 定义 $\mathbf{x} = \{x_k^T \ x_{k+1}^T \ \dots \ x_{k+N-1}^T\}^T$, $\mathbf{u} = \{u_k^T \ u_{k+1}^T \ \dots \ u_{k+N-1}^T\}^T$, $\mathbf{w} = \{w_k^T \ w_{k+1}^T \ \dots \ w_{k+N-1}^T\}^T$, OCP (4) 可改写为:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{w}} : & \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + x_{k+N}^T P x_{k+N} \\ \text{s.t.} & \\ & \mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + G\mathbf{w} \\ & \mathcal{E}_x \mathbf{x} \leq \mathbf{1}, \quad \forall \mathbf{w} \in W^N \\ & \mathcal{E}_u \mathbf{u} \leq \mathbf{1}, \quad \forall \mathbf{w} \in W^N \\ & x_{k+N} \in X_N \end{aligned} \quad (5)$$

式中其他矩阵的定义在此省略. 为了求解式 (5), 通常将这样一种 Min-max 形式的 OCP 转化成为标准的优化问题, 如 LP、QP 或者 SDP. 转化的困难主要来源于两方面: 一是怎样处理 Min-max 形式的目标函数; 二是怎样让约束摆脱噪声 $\mathbf{w} \in W^N$ 的干扰. 为了解决这两个问题, 学者们做了很多的努力, 这里总结比较常用的策略:

S1 目标函数: 将 Min-max 形的目标函数由

$$\min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{w}} : \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + x_{k+N}^T P x_{k+N}$$

转化成

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}, c} : c \quad \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + \\ & x_{k+N}^T P x_{k+N} \leq c, \quad \forall \mathbf{w} \in W^N \end{aligned} \quad (6)$$

决策变量 c 可以被当作是 $\max(\cdot)$ 部分的上界. 文献 [8] 利用枚举法列举 W^N 所有的顶点, 将式 (6) 中的约束转化为 $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + x_{k+N}^T P x_{k+N} \leq c$, $w_i^v \in W_v^N, i = 1, \dots, n_v$, 其中 W_v^N 是由 W^N

所有顶点组成的集合, n_v 为顶点的个数. 枚举顶点法实质上是基于这样一个性质^[38]: 如果 C 为闭合凸集且 $f: C \rightarrow \mathbf{R}$ 为凸函数, 若 f 在 C 上存在最大值, 那么这个最大值将在 C 的某个极点处取得. 文献 [30, 34] 利用 Schur 补将式 (6) 中的约束转化为一个不确定的线性矩阵不等式 (LMI), 然后通过一个半定松弛过程 (具体见文献 [39]) 将不确定 LMI 转化为确定的 LMI. 由于枚举法引入的约束随着 w 的维数和预测时域 N 的增加而急剧增加, 导致 OCP 的求解速度变得非常缓慢, 所以在实际应用中并不是一个很好的选择, 而 LMI 则没有这样的问题.

S2 约束处理: 通过枚举 W^N 所有顶点的方法 (如文献 [8]) 可以保证“最坏”的情况也能够被满足, 或将原约束分离为确定和不确定两部分, 通过运行一个局部优化问题求解不确定部分的最大值, 即“最坏”情况 (如文献 [39–40]):

$$\{\text{确定部分}\} + \max_w \{\text{不确定部分}\} \leq \mathbf{1} \quad (7)$$

决策变量是否出现在不确定部分会使得求解 $\max_w \{\text{不确定部分}\}$ 的方法略有不同. 同样, 对于约束的处理, 枚举法会使得 OCP 的约束数量急剧增加, 而局部优化求解的方法则没有这方面的问题.

Min-max RMPC 算法根据控制率是否为与系统状态相关的函数 (即 $u = \phi(x)$, 其中 $\phi(x)$ 通常是仿射的) 可分为开环和闭环两大类. 如图 2 所示, 在本文中把控制序列为 $\{u_{k+j}\}$ 的算法称为开环 Min-max (Open-loop min-max, OL2M) RMPC, 如文献 [8, 10]; 把控制率为 $u_{k+j} = Kx_{k+j} + v_{k+j}$ (其中 v_{k+j} 为新的决策变量, K 为反馈矩阵) 的算法称为定常反馈 Min-max (Fixed feedback min-max, FF2M) RMPC, 如文献 [33, 41]; 控制率为 $u_{k+j} = K_j x_{k+j} + v_{k+j}$ (其中 K_j 也是决策变量) 的算法称为动态反馈 Min-max (Dynamic feedback min-max, DF2M) RMPC, 如文献 [34, 42]; 双模式枚举 Min-max (Dual mode enumeration min-max, DME2M) RMPC 特指由 Sokaert 和 Mayne 在 1998 年提出的一种控制率 $u_{k+j} = f(w_{k,l}, w_{k+1,l}, \dots, w_{k+j-1,l})$ 的算法, 其中 $f(\cdot)$ 为一个非线性函数, $\{w_{k+j,l}\}$ 为 W 的各个顶点, 详见文献 [12]. 这些算法都采用了 S1 和 S2 提及的策略来处理 Min-max 的 OCP 问题, 它们的特点将在后面进行讨论.

开环 Min-max (Open-loop min-max, OL2M) RMPC: 作为最简单的控制结构, OL2M RMPC 的 OCP 中的决策变量为 $\{u_k^T, u_{k+1}^T, \dots, u_{k+N-1}^T\}$, 通过利用 S1 和 S2, Min-max OCP 可以被转化为一个标准的 LP 问题 (如文献 [8]) 或 SDP 问题 (如文献 [39]).

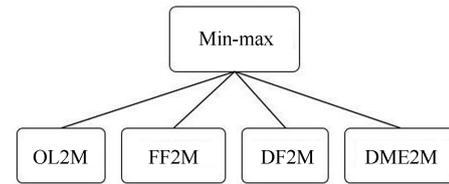


图 2 主要的 Min-max RMPC 算法
Fig. 2 Main algorithms of min-max RMPC

定常反馈 Min-max (Fixed feedback min-max, FF2M) RMPC: 在经典控制论中使用闭环回路往往可以实现更好的控制效果, 模型预测中采用反馈校正的方法也能实现闭环回路. 反馈的关键是利用可测量的系统状态信息, 对原预测系统进行矫正. 另一种利用系统状态信息的方法是在输入中直接引入状态信息, FF2M RMPC 就是这样一种闭环控制算法, 控制率 $u_{k+j} = Kx_{k+j} + v_{k+j}$ 为系统状态的线性函数, 通常选取能使得 $A + BK$ 幂零的 K ^[33], 即存在特定的整数 s 使得 $(A + BK)^s = 0$. 这种定常反馈的好处在文献 [41] 中已经进行了详细的叙述, 总的来说就是反馈的存在使得式 (7) 中的 $\max_w \{\text{不确定部分}\}$ 部分在一定程度上得到抑制, 从而使得约束得以放宽, 降低了保守性. 但是, 由此并不能断言 FF2M RMPC 一定比 OL2M RMPC 好, 因为这种约束的放宽往往是针对状态约束而言的, 而对于输入约束, 由于反馈的存在, 使得干扰也进入了输入, 从而导致经过局部优化后的输入约束变得更加狭小. 比较极端的情况是, 输入约束本来就很小, 而干扰比较大, 经过 S2 的局部优化后输入约束会变为空集从而导致 OCP 不可解. 同样, FF2M RMPC 的 OCP 也可被转化为一个标准的 LP 或 SDP 问题.

动态反馈 Min-max (Dynamic feedback min-max, DF2M) RMPC: 在反馈控制中, K 的选择将极大地影响控制效果, 为了综合 K 的选取与控制器的设计, 一种自然的想法是将反馈矩阵 K 也设置成决策变量, 控制率则变为 $u_{k+j} = K_j x_{k+j} + v_{k+j}$. 动态反馈使得 OCP 的自由度增加, 使得保守性得以降低. 事实上, OL2M RMPC 和 FF2M RMPC 分别属于 DF2M RMPC 的一种特殊情况, 当 $K_j = \mathbf{0}, \forall j$ 时, 则为 OL2M RMPC, 当 $K_j = K, \forall j$ 时则为 FF2M RMPC.

但不幸的是, 控制率 $u_{k+j} = K_j x_{k+j} + v_{k+j}$ 并不能直接应用于 OCP(4), 它会使得 OCP(4) 变成非凸问题. 在发现控制率 $u_{k+j} = K_j x_{k+j} + v_{k+j}$ 实质上是干扰 w 的函数后, 文献 [34] 提出了干扰仿射控制率 $u_{k+j} = \sum_{i=0}^{j-1} L_{j,i} G w_{k+i} + v_{k+j}$, 文献 [42] 则进一步证明了干扰仿射控制率和状态仿射控制率 $u_{k+j} = \sum_{i=0}^j K_{j,i} x_{k+i} + v_{k+j}$ 实际存在着——对应

关系, 而更有利的是, 干扰仿射控制率能继续保持原 OCP 的凸特性, 所以一般用干扰仿射来代替状态仿射的情况.

双模式枚举 Min-max (Dual mode enumeration min-max, DME2M) RMPC: Scokaert 和 Mayne 在文献 [12] 中提出了一种 DME2M RMPC 的算法. 这种算法本质上是一种开环算法, 不同的干扰实现对应着不同的决策变量, 同时利用了双模策略来保证了算法的可行性与稳定性. 双模算法是一种被广泛应用的确保持可行与稳定性的算法, 如基于 Tube 的算法^[19-20, 43] 或基于动态规划的算法^[44-45]. 在双模算法当中, 有个概念是十分重要的:

鲁棒控制不变 (Robust control invariant, RCI) 集^[12, 46]:

如果需要满足约束 X 和 U 的系统 (1) 在控制率 $u_k = Kx_k$ 和初始状态 $x_k \in S$ 的情况下满足 $Kx_k \in U$ 且 $(A + BK)x_k + Gw_k \in S, \forall w_k \in W$, 则集合 $S \subseteq X \subseteq \mathbf{R}^n$ 叫做鲁棒控制不变 (RCI) 集, K 可离线计算得到.

注意. 文献中有很多对于不变集的定义, 例如文献 [31] 把如上这样的集合 S 叫做正鲁棒不变 (Robustly positively invariant, RPI) 集, 而文献 [16] 和 [46] 又用正鲁棒不变 (RPI) 集来定义不需要满足状态反馈控制率和系统约束的不变集, 为了避免混淆, 本文中鲁棒控制不变 (RCI) 集指的是如文献 [12, 46] 中所定义的集合.

在 DME2M RMPC 算法中, S 为 RCI 集, 则双模算法可概括为:

- 如果 $x_k \notin S$, “外部控制器”作用, 通过求解相应的 OCP, 将 x 引导至 S 中.
- 如果 $x_k \in S$, “内部控制器”作用, 不需求解任何 OCP, 直接将输入设置为 $u_k = Kx_k$, K 为与 RCI 集 S 相关的反馈矩阵. 由 RCI 集的特性可知, 系统状态将始终处于 S 中, 并最终趋于稳定.

文献 [12] 中的“外部控制器”实质上求解的是一个开环 OCP 问题. 对于预测时域为 N 的控制器, 噪声 W 的所有顶点实现可用集合 $W_l = \{w_{k,l}, w_{k+1,l}, \dots, w_{k+N-1,l}\}, l \in \mathbf{N}_{[1, n_v^N]}, w_{k+j,l} \in W_v$ 表示, 其中 n_v 为 w 顶点的数目, n_v^N 表示 n_v 的 N 次幂, W_v 为 W 所有顶点的集合. 每一种顶点实现 W_l 都有与之对应的决策序列 $\mathbf{u}_l = \{u_{k,l}, u_{k+1,l}, \dots, u_{k+N-1,l}\}, l \in \mathbf{N}_{[1, n_v^N]}, u_{k+j,l} \in U$ 和相应的状态序列 $\mathbf{x}_l = \{x_{k,l}, x_{k+1,l}, \dots, x_{k+N-1,l}\}, l \in \mathbf{N}_{[1, n_v^N]}, x_{k+j,l} \in X$. 则“外部控制器”求解的 OCP 可描述见附录中的 (A1).

式 (A1) 是已经枚举过的开环 OCP, 通过策略 S1 可以很容易地进行求解. 由于不同的噪声顶点实现对应不同的决策组合, 使得 OCP 的自由度比一般开环 OCP 更高, 所以这种双模枚举的算法保守性会更低. 可以看到, 由于噪声顶点实现有 n_v^N 种组合, 所以决策变量数由普通开环 OCP 的 $N \times m$ 个提高到 $n_v^N \times N \times m$ 个, 如果没有因果约束的限制, 即使求解出所有的决策变量, 控制器也不知道选择哪一个输入给系统, 且系统稳定性也无法保证, 所以文献 [12] 用因果约束又将决策变量数目降低到 $(n_v^0 + n_v^1 + \dots + n_v^{N-1}) \times m$ 个. 由前文知, 这种顶点实现决定决策变量的方法也可应用到闭环控制策略中, 但由于它仍属于枚举法, 当 N 增大, 或噪声维数增多时, 计算量过于庞大, 导致此种算法并不实用. 但这种 DME2M RMPC 算法的意义非凡, 它提供了一种直观地确保可行性和稳定性的双模结构, 被后期大量的学者和算法广泛采用.

可行性与稳定性: 算法可行性是指对应 OCP 有可行解的特性, 对于 RMPC 来说, 算法可行性往往与系统的约束以及噪声的取值范围有关. OCP (4) 可行的必要条件为:

$$P_i \subseteq Q_i, i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

其中 $Q_i = \bigoplus_{j=0}^{i-1} A^j B U_{i-1-j}$, $P_i = \bigoplus_{j=0}^{i-1} A^j G W_{i-1-j}$.

可行必要条件指出了系统约束和噪声的取值范围需满足的关系式, 它在系统设计阶段能给予设计者很好的帮助. 例如, 通过 Matlab 的 MPT 工具箱^[47], 很容易对式 (8) 中的关系进行测试. 如果条件没有满足, 则无论设计什么样的模型预测控制器, 系统的递归可行性都是没有办法保证的. 设计者就不需要花费时间去调试不同的算法和设计不同控制率上, 而是把精力放在如何从硬件或周围环境中降低噪声范围, 如何扩大输入约束, 或者扩大状态约束上.

当提及稳定性的时候, 是以算法的可行性为前提的. 以上算法中, 除了 DME2M, 还没有讨论稳定性所需要满足的条件. 系统稳定性可通过终值约束和终值惩罚满足一定条件来实现^[48], 或者使用无穷预测时域^[32-33], 但通过无穷预测时域实现的稳定性往往要求系统为渐进稳定系统或者系统矩阵 (A, B) 可控. 为了保证 OL2M, FF2M, DF2M RMPC 的稳定性, 终值惩罚 $J_N(x) = x^T P x$ 和终值约束 X_N 需满足^[39, 48]: A1: X_N 为 RCI 集; A2: 当 $u_k = Kx_k$ 时, 对于 $\forall x_k \in X_N$ 和 $\forall w_k \in W$ 有 $J_N(x_{k+1}) - J_N(x_k) \leq -x_k^T Q x_k - u_k^T R u_k$. 如果不考虑稳定性, 仅保证算法的递归可行性的话, A1 就足够了.

表 2 Min-max 算法的问题规模
Table 2 Problem scale of algorithms

算法	变量数目	约束数目
OL2M	$Nm + Nr + 1$	$1LMI + Nn_{hx} + Nn_{hu} + n_s$
OL2M*	$Nm + Nr + 1$	$(q^N - 1)(1L + Nn_{hx} + n_s) + Nn_{hu}$
FF2M	$Nm + Nr + 1$	$1LMI + Nn_{hx} + Nn_{hu} + (2Nr + 1)n_s$
FF2M*	$Nm + Nr + 1$	$(q^N - 1)(Nn_{hx} + Nn_{hu} + (2Nr + 1)n_s + 1)$
DF2M	$N(N - 1)/2 + Nm + N^2(n_{hx} + n_{hu})r + Nr + 1$	$1LMI + Nn_{hx} + 2N^2(n_{hx} + n_{hu})r + Nn_{hu} + (2Nr + 1)n_s$
DF2M*	$N(N - 1)/2 + Nm + N^2(n_{hx} + n_{hu})r + Nr + 1$	$(q^N - 1)(Nn_{hx} + 2N^2(n_{hx} + n_{hu})r + Nn_{hu} + (2Nr + 1)n_s + 1)$
DME2M*	$(q^N - 1)m/(q - 1) + 1$	$q^N(1 + Nn_{hx} + Nn_{hu} + n_s)$

最大的 RCI 集: 为了降低算法的保守性, X_N 需要尽可能大. 当 $u_k = Kx_k$, 且需满足约束 X 和 U 时, 系统 (1) 的最大的 RCI 集 S_M 可如下求出^[31]:

$$S_M = \{s \in \mathbf{R}^n | E_x(A + BK)^j s \leq \mathbf{1} - H_j^x, E_u K(A + BK)^j s \leq \mathbf{1} - H_j^u, j \in \mathbf{N}_{[0,v]}\} \quad (9)$$

其中 $H_j^x = \max_{w_i \in W} \sum_{i=0}^{j-1} E_x(A + BK)^i G w_i$, $H_j^u = \max_{w_i \in W} \sum_{i=0}^{j-1} E_u K(A + BK)^i G w_i$, v 为使得对 $\forall s \in S_M$ 有 $E_x(A + BK)^{v+1} s \leq \mathbf{1} - H_{v+1}^x$ 和 $E_u K(A + BK)^{v+1} s \leq \mathbf{1} - H_{v+1}^u$ 的最小整数. 这样的 RCI 集存在的一个必要条件为 $\max(H_j^u) \leq \mathbf{1}$ 且 $\max(H_j^x) \leq \mathbf{1}$.

同样的, 最大的控制不变 (Control invariant, CI) 集 S_{0M} 可以通过令 $H_j^x = 0$ and $H_j^u = 0$ 用同样的方法求得. 如果对于需满足约束 X 和 U 的系统 (1) 满足: $S_0 \subseteq X, KS_0 \subseteq U$ 且 $(A + BK)S_0 \subseteq S_0$, 则 S_0 叫做控制不变 (CI) 集, 更多和不变集的相关信息可查阅综述文献 [46].

Min-max 算法的问题规模总结如表 2, 其中带 * 表示求解中利用枚举法进行转化.

参数不确定系统处理的是形如 $\min_u \max_{(A,B) \in \Omega} J(x,u)$, s.t. $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, x \in X, u \in U$ 的问题^[49], 其中参数不确定集 $\Omega = co\{(A_1, B_1), \dots, (A_{n_o}, B_{n_o})\}$. 一种自然的想法是类似外部不确定问题那样采用枚举法, 然而参数不确定性使得优化问题对 (A, B) 是非凸的, 枚举法并不能保证目标函数的最优和约束的满足. 文献 [30] 利用不变椭圆集 $P(Q_p) = \{x | x^T Q_p x \leq 1\}$ 和 LMI 解决了上述问题. 具体过程可分为三步: 1) 将预测时域设置为无穷大, 并作相关假设保证惩罚函数有上界; 2) 采用反馈控制率 $u = Kx$, 其中 $K = YQ_p^{-1}$, Y, Q_p 为决策变量, 并建立使惩罚函数上界相关不等式得以满足的 LMI; 3) 在 $u = Kx$ 作用下, 未来状态实际上都会保持在不变椭圆集 $P(Q_p)$ 中, 再建立使 $P(Q_p) \subseteq X$ 和 $KP(Q_p) \subseteq U$ 成立的 LMI. 这样原问题就被转化成了 SDP 问题, 同时不变集和无穷时域的应用保证了递归可行性

和稳定性. 文献 [30] 的这种方法被大量学者处理 RMPC 问题或 LPV 问题所采用, 如文献 [50–53].

1.2 基于 Tube 的 RMPC

基于 Tube 的 RMPC 首先由文献 [13] 提出, 之后被文献 [15, 19–20, 43, 54–55] 等所发展. 其基本思想是通过某种控制率将系统的状态 x_{k+j} 控制在一个可以叫做 Tube 的集合 X_{k+j} 中, 这个 Tube 集合为系统约束 X 的子集, 然后将整个 Tube 引导至一个希望的位置. 这种对于 Tube 的操作让人们可以直接处理不确定性所带来的对于系统动态和约束的影响^[56]. 此算法的一大优势是可以将系统确定部分和不确定部分分离, 使得控制器可以将很多工作离线计算完成, 这个特点使基于 Tube 的算法得到广泛发展和应用. 本文讨论三种典型的基于 Tube 的 RMPC 算法 (如图 3 所示): 基于 Rigid tube (RT) 的 RMPC^[55], 基于 Homothetic tube (HT) 的 RMPC^[19] 和基于 Parameterized tube (PT) 的 RMPC^[20].

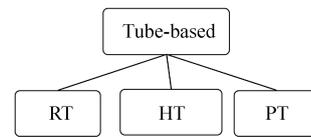


图 3 基于 Tube 的 RMPC
Fig. 3 Tube-based RMPC

对于这些基于 Tube 的 RMPC, 可以给出一个通用的 OCP:

$$\begin{aligned} \min_v &: \sum_{j=0}^{N-1} (|X_{k+j}|_T + \ell_s(X_{k+j})) + \ell(v) + \ell_f(X_{k+N}) \\ \text{s.t.} & \\ & x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k \\ & x_{k+j} \in X_{k+j} \subseteq X, \quad j \in \mathbf{N}_{[0,N-1]} \\ & u_{k+j} \in U_{k+j} \subseteq U, \quad j \in \mathbf{N}_{[0,N-1]} \\ & x_{k+N} \in X_{k+N} \subseteq X_f \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $|X_{k+j}|_T$ 表示从 X_{k+j} 到目标集合 T 距离的测度, 可以叫做“位置控制”. $\ell_s(X_{k+j})$ 表示对集合 X_{k+j} 形状 (包括大小) 的惩罚, 可以叫做“形状控制”. $\ell(v)$ 表示对决策变量 v 的惩罚. $\ell_f(X_{k+N})$ 为终值惩罚.

RT 和 HT RMPC 中的 T 为 $\{0\}$, 而 PT RMPC 中为一个 RCI 集 S . 约束 $x_{k+j} \in X_{k+j} \subseteq X$ 需要被分为 $x_{k+j} \in X_{k+j}$ 和 $X_{k+j} \subseteq X$ 两部分来单独处理, 通常用所属递归法

$$x_k \in X_k \xrightarrow{u_k} x_{k+1} \in X_{k+1} \quad (11)$$

来保证系统状态待在对应 Tube 中, 即 $x_{k+j} \in X_{k+j}$, 第二部分则可直接通过约束 $X_{k+j} \subseteq X$ 保证. $u_{k+j} \in U_{k+j} \subseteq U$ 同样可直接在约束中保证.

各种算法对于 Tube 的控制各不相同, 在 RT RMPC 中, 只通过控制 Tube 的中心来控制 Tube 的位置, 如图 4(a) 所示. 在 HT RMPC 中, Tube 的位置和大小同时都可被控制, 如图 4(b) 所示. 而 PT RMPC 提供了更多的自由度, 通过控制 Tube 的顶点, 不仅可以控制 Tube 的位置和大小, 还可以控制其形状, 如图 4(c) 所示.

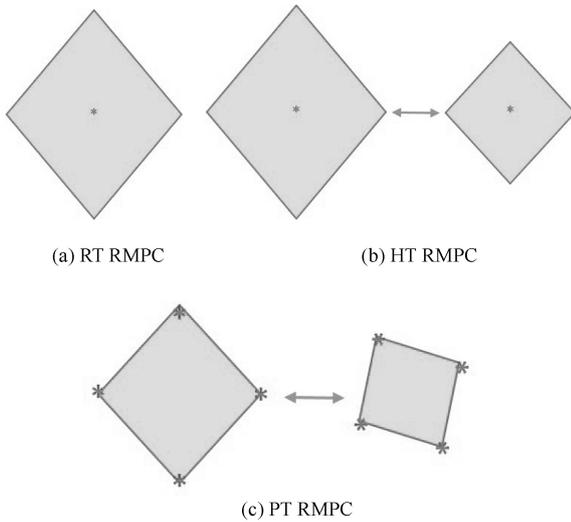


图 4 对于 Tube 的控制
Fig. 4 Manipulation of tubes

RT 和 HT RMPC 都采用分离控制率 $u = K(x - \bar{x}) + v$, 将系统的确定部分和不确定部分分离开来:

$$x_{k+j} = \bar{x}_{k+j} + e_{k+j} \quad (12a)$$

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bv_k \quad (12b)$$

$$e_{k+1} = (A + BK)e_k + Gw_k \quad (12c)$$

其中式 (12b) 为名义系统模型, 式 (12c) 为不确定部分. 当 K 被时变参数 K_{k+j} 代替时, 式 (12) 仍然成

立, 只需把式 (12c) 替换为 $e_{k+1} = (A + BK_k)e_k + Gw_k$. PT RMPC 采用了更为复杂的参数化控制策略, 但它仍然是基于名义系统 (12b) 的. 这三种算法的目标函数都不包含不确定部分的, 更多细节将随后讨论.

Rigid tube (RT) RMPC: 由于控制率 $u_{k+j} = K(x_{k+j} - \bar{x}_{k+j}) + v_{k+j}$ 可以将不确定系统进行分离, 得到确定的名义系统部分和不确定噪声部分. 文献 [55] 由此设计了只需控制确定的名义系统状态的 RT RMPC 算法. RT RMPC 中的 Tube 形式为 $X_{k+j} = \bar{x}_{k+j} + S_r$ 和 $U_{k+j} = KS_r + v_{k+j}$, 其中 S_r 为正鲁棒不变 (RPI) 集^[16]:

正鲁棒不变 (Robustly positively invariant, RPI) 集: 集合 S_r 叫做系统 (1) 的正鲁棒不变集, 如果当 $u_k = Kx_k$ 时, 对于 $\forall x_k \in S_r$ 和 $\forall w_k \in W$ 有 $(A + BK)x_k + Gw_k \in S_r$ 成立.

在控制率的作用下, 有 $(A + BK)S_r + GW \subseteq S_r$ 成立, 所以所属递归式 (11) 自然成立. 由于 X_{k+j} 和 U_{k+j} 需要分别为 X 和 U 的子集, 所以希望 S_r 尽可能小, 系统 (1) 的最小 RPI 集可通过 $S_r = \bigoplus_{j=0}^{\infty} (A + BK)^j GW$ 求得^[57], 或通过 $S_r = \frac{1}{1-\rho} \bigoplus_{j=0}^{r-1} (A + BK)^j GW$ 近似求得^[16], 其中 r 和 $\rho \in [0, 1)$ 满足 $(A + BK)^r GW \subseteq \rho GW$. 其实, 直接使用 S_r 是十分保守的, 一种有效地降低保守性的方法是令 $X_{k+j} = \bar{x}_{k+j} + \bigoplus_{i=0}^{j-1} (A + BK)^i GW$. 相比于使用无穷时域的 RPI 集, 这里得到的 Tube 将会更小. 但这种方法的提升和 PT RMPC 比起来, 效果是有限的, 所以没有学者单独以此提出过一种算法.

由文献 [55] 知, RT RMPC 中“位置控制”为 $|X_{k+j}|_T = \bar{x}_{k+j}^T Q \bar{x}_{k+j}$, 惩罚每个 Tube 的中心点到 $T = \{0\}$ 的距离. 由于 S_r 的形状是固定的, 所以没有“形状控制”, 即 $\ell_s(X_{k+j}) = 0$. $\ell(v)$ 则为 $\sum_{j=0}^{N-1} v_{k+j}^T R v_{k+j}$, 为了保证稳定性, $\ell_f(x) = x^T P x$ 和 X_f 需满足:

$$B1: (A + BK)X_f \subseteq X_f, X_f \subseteq X \ominus S_r, KX_f \subseteq U \ominus KS_r$$

$$B2: \ell_f((A + BK)x) - \ell_f(x) \leq -x^T Q x - (Kx)^T R K x, \forall x \in X_f$$

因此, RT RMPC 的 OCP 可见附录中的 (A2).

文献 [31] 提出了一种等价于文献 [55] 中 RT RMPC 的不同表达式, 这种方法里利用了系统 (1) 的分解模型:

$$x_{k+j} = \bar{x}_{k+j} + e_{k+j} \quad (13a)$$

$$\bar{x}_{k+1} = (A + BK)\bar{x}_k + Bc_k \quad (13b)$$

$$e_{k+1} = (A + BK)e_k + Gw_k \quad (13c)$$

其中 $u_{k+j} = Kx_{k+j} + c_{k+j}$. 注意式 (13b) 和 (12b) 之间的不同, 这种分解模型在基于 Tube 的 SMPC 中同样被广泛应用.

Homothetic tube (HT) RMPC: 由于 RT RMPC 算法中 Tube 的大小是不能改变的, 且 Tube 在设计的过程中过度地考虑了未来所有时刻噪声的影响, 使得 Tube 体积较大, 保守性太强, 所以文献 [19] 设计了一种 Tube 大小可控的 HT RMPC 算法. 在控制率 $u_{k+j} = K(x_{k+j} - \bar{x}_{k+j}) + v_{k+j}$ 下, HT RMPC 中 Tube 为 $X_{k+j} = \bar{x}_{k+j} + \alpha_{k+j}S_r$ 和 $U_{k+j} = K\alpha_{k+j}S_r + v_{k+j}$ (其中决策变量 $\alpha_{k+j} \geq 0$). 集合 S_r 同样为 RPI 集.

在 HT RMPC 中, 所属递归式 (11) 并不能单独靠控制率而得到. 由于控制 Tube 大小的决策变量 α_{k+j} 的存在, 同样的控制率并不能保证 $(A+BK)\alpha_{k+j}S_r + GW \subseteq \alpha_{k+j+1}S_r$, 需要显示地将之作为约束条件加入到 OCP 中才能保证所属递归式 (11) 成立.

由文献 [19] 知, “位置控制”为 $|X_{k+j}|_T = \bar{x}_{k+j}^\top Q \bar{x}_{k+j}$, “形状控制”为 $\ell_s X_{k+j} = q_\alpha (\alpha_{k+j} - \bar{\alpha})^2$, 其中 $\bar{\alpha} = (1-\lambda)^{-1}\mu$, $\lambda = \min_\beta \{\beta : GW \subseteq \beta S_r\}$, $\mu = \min_\beta \{\beta : (A+BK)S_r \subseteq \beta S_r\}$. $\ell(v)$ 为 $\sum_{j=0}^{N-1} v_{k+j}^\top R v_{k+j}$, 为了保证算法稳定性 $\ell_f(x, \alpha) = x^\top P x + p_\alpha (\alpha - \bar{\alpha})^2$ 需满足 $X_f(\alpha)$:

C1: $X_f \subseteq X - \alpha S_r$, $KX_f \subseteq X - K\alpha S_r$, $(A+BK)X_f \subseteq X - (\lambda\alpha + \mu)S_r$, $K(A+BK)X_f \subseteq X - K(\lambda\alpha + \mu)S_r$

C2: $(A+BK)^\top P(A+BK) - P + Q + K'RK \preceq 0$, $p_\alpha \geq (1-\lambda^2)^{-1}q_\alpha$

HT RMPC 的最终 OCP 可见附录中的 (A3).

Parameterized tube (PT) RMPC: HT RMPC 使得 Tube 算法的保守性在一定程度上得到了降低, 但仍存在两个问题, 一是 Tube 可能在某些方向上还有缩小的可能; 二是如果系统约束和 Tube 不在相同的朝向, 即使 Tube 体积很小, 但在

某些方向上仍会使得紧缩后的系统约束没有多少余量. PT RMPC 就是解决了这两个问题的一种算法. 在 PT RMPC 中的 Tube 和控制率更为复杂, 这种复杂给求解 OCP 提供了更多的自由度. 根据文献 [20], W 被描述为 $W = \text{co}\{\tilde{w}_l \in \mathbf{R}^r, l \in \mathbf{N}_{[1,q]}\}$, 其中 q 为 W 的顶点数. 为了保证稳定性, OCP 中的终值约束为一个 RCI 集 $S = \{x : E_s x \leq \mathbf{1}\}$, Tube 和控制率如表 3 所示.

通过这样的参数化, 可确保 $x_{k+j} \in X_{k+j}$ 和 $u_{k+j} \in U_{k+j}$, 且参数满足

$$\begin{aligned} x_{k+j+1}^{i=0} &= Ax_{k+j}^{i=0} + Bu_{k+j}^{i=0}, \forall j \in \mathbf{N}_{[0, N-1]} \\ x_{k+j+1}^{i,l} &= Ax_{k+j}^{i,l} + Bu_{k+j}^{i,l}, \\ &\forall i \in \mathbf{N}_{[1, j-1]}, \forall j \in \mathbf{N}_{[2, N-1]}, \forall l \in \mathbf{N}_{[1, q]} \\ x_{k+j}^{i=j,l} &= G\tilde{w}_l, \forall l \in \mathbf{N}_{[1, q]} \end{aligned} \quad (14)$$

PT RMPC 中的目标集合 T 为终值约束 S . 点到集合距离测度有许多不同的定义, 如文献 [20, 31], 这里讨论容易理解的文献 [31] 中的定义:

点 x 到集合 S 的距离: 如果 $x \in S$ 则 $|x|_S = 0$, 否则 $|x|_S = \max\{E_s x\} - 1$. 所以集合 X 到 S 的距离定义为 $|X|_S = \max_{x \in X} |x|_S$. 则 PT RMPC 中的 OCP(10) 最终可见附录中的 (A4).

基于 Tube 的 RMPC 算法的问题规模如表 4 所示. 设集合 $X_f = \{x | E_f x \leq \mathbf{1}\}$ 和 $S_r = \{x | E_{sr} x \leq \mathbf{1}\}$ 的表达为不可约, 则 n_f 表示 E_f 的行数, n_{sr} 表示 E_{sr} 的行数.

各个算法的保守性是不一样的, 往往保守性越大, 可行域越小. 各算法可行域之间的关系可以通过以下定理来说明:

定理 1. 假设集合 $A \rightarrow B$ 表示 $A \subseteq B$, $A \dashrightarrow B$ 表示在一定条件下 $A \subseteq B$, 对于满足约束 X 和 U 的系统 (1), 以上算法的可行域满足如图 5 所示关系.

表 3 PT RMPC 的 Tube 和参数化

Table 3 Tubes and parameterization of PT RMPC

输入 Tube	状态 Tube	参数化
$\mathfrak{U}_k = \{U_k, U_{k+1}, \dots, U_{k+N-1}\}$	$\mathfrak{X}_k = \{X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+N-1}\}$	$x_{k+j} = \sum_{i=0}^j x_{k+j}^i$
其中	其中	其中, $\forall i \in \mathbf{N}_{[1, j]}, \forall j \in \mathbf{N}_{[1, N]}$
$U_{k+j} = \bigoplus_{i=0}^j U_{k+j}^i, \forall j \in \mathbf{N}_{[0, N-1]}$	$X_{k+j} = \bigoplus_{i=0}^j X_{k+j}^i, \forall j \in \mathbf{N}_{[0, N]}$	$x_{k+j}^i = \sum_{l=1}^q \lambda_{k+j}^l x_{k+j}^{i,l}$
$U_{k+j}^{i=0} = \{u_{k+j}^{i=0} \in \mathbf{R}^m\}, \forall j \in \mathbf{N}_{[0, N-1]}$	$X_{k+j}^{i=0} = \{x_{k+j}^{i=0} \in \mathbf{R}^n, \forall j \in \mathbf{N}_{[0, N]}\}$	且 $\sum_{l=1}^q \lambda_{k+j}^l = 1$
$U_{k+j}^{i,l} = \text{co}\{u_{k+j}^{i,l} \in \mathbf{R}^m, \forall l \in \mathbf{N}_{[1, q]}\},$	$X_{k+j}^{i,l} = \text{co}\{x_{k+j}^{i,l} \in \mathbf{R}^n, l \in \mathbf{N}_{[1, q]}\},$	$u_{k+j} = \sum_{i=0}^j u_{k+j}^i$
$\forall i \in \mathbf{N}_{[1, j]}, \forall j \in \mathbf{N}_{[1, N-1]}\}$	$\forall i \in \mathbf{N}_{[1, j-1]}, \forall j \in \mathbf{N}_{[2, N]}\}$	其中 $\forall i \in \mathbf{N}_{[1, j]}, \forall j \in \mathbf{N}_{[1, N-1]}$
	$X_{k+j}^{i=j} = GW = \text{co}\{x_{k+j}^{i=j,l} = G\tilde{w}_l,$	$u_{k+j}^i = \sum_{l=1}^q \lambda_{k+j}^l u_{k+j}^{i,l},$
	$\forall l \in \mathbf{N}_{[1, q]}, \forall j \in \mathbf{N}_{[1, N]}\}$	λ_{k+j}^l 同 x_{k+j}^i

表 4 基于 Tube 的 RMPC 算法的问题规模
Table 4 Problem scale tube-based RMPC

算法	变量数目	约束数目
RT	$Nm + n$	$Nn_{hx} + Nn_{hu} + n_f + n_{sr}$
HT	$Nm + n + 1$	$N(n_{hx} + n_{hu} + 1) + n_f + n_{sr}$
PT	$(N - 1)^2/2(mq + n_{hx} + n_{hu}) + N(n + n_h + 1) + N^2$	$N(N + 1)/2 + 3N + Nn_s + N(N - 1)(3(1 + q)q/2 + 2)/2 + n_{hx} + n_{hu} + N(1 + q)qn_s/2 + n_s$

证明. 如图 5 所示, 在第 2.1 节中已经提到过 OL2M RMPC 和 FF2M RMPC 为 DF2M RMPC 的一种特殊情况, 所以 ① 和 ② 可直接得到. 由于 RT RMPC 和 HT RMPC 的基本 OCP 都为 (10), 要想证明 ③, 只需证明 HT RMPC 的 Tube $X_{k+j}^{HT}(\bar{x}_{k+j}, \alpha_{k+j})$ 和 $U_{k+j}^{HT}(\bar{x}_{k+j}, \alpha_{k+j})$ 存在特定的 α_{k+j}^* 使之与 RT RMPC 的 Tube $X_{k+j}^{RT}(\bar{x}_{k+j})$ 和 $U_{k+j}^{RT}(\bar{x}_{k+j})$ 相同. 显然存在 $\alpha_{k+j}^* = 1$, 因此, ③ 得证. 同理, 当 $S_r \subseteq X$ 且 $X_f(\alpha_N) \subseteq S$ 时, 由于 PT RMPC 的常规意义下的 Tube $x_{k+j}^0 \oplus \bigoplus_{i=0}^j D_{k+j}^i$ 和 $u_{k+j}^0 \oplus \bigoplus_{i=0}^j V_{k+j}^i$ (见附录) 的自由度远大于 HT RMPC, 所以对于每一个 HT RMPC 的 Tube, PT RMPC 都能与之匹配, 则 ④ 得证. 另外, ④ 成立的两个条件是很容易实现的, 所以一般情况可以把 ④ 当作实线. 当 $X_f \subseteq S_c$, 其中 $S_c = S \ominus \bigoplus_{i=0}^{N-1} (A + BK)^i GW$, ⑤ 可被实现. OL2M RMPC 中的状态约束等价于 $\bar{x}_{k+j} \in X_j^{OL2M} = X \ominus \bigoplus_{i=0}^j (A + BK)^i GW$, 由于 $S_r = \bigoplus_{j=0}^{\infty} (A + BK)^j GW$, 有 $X_j^{RT} \subseteq X_j^{OL2M}$, 同时 $\bar{x}_k \oplus S_r \subseteq X$, 可以得到 $F^{RT} \subseteq F^{OL2M}$. ⑥ 也可简单地被证明, 因为 DF2M RMPC 的反

馈控制率可以当作是 PT RMPC 的一种特例, 只需 $u_{k+j}^{i,l} = L_{k+j}^i \tilde{w}_l$, 其中 $\sum_{l=1}^q \lambda_{k+j}^l L_{k+j}^i = L_{j,i}$, $w_{k+i} = \sum_{l=1}^q \lambda_{k+j}^l \tilde{w}_l$ 且 $\sum_{l=1}^q \lambda_{k+j}^l = 1$. \square

1.3 仿真和分析

采用文献中广泛应用的仿真系统模型^[17, 19, 55]:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + w_k \quad (15)$$

$X = \{x \mid -10 \leq x_1 \leq 2, -10 \leq x_2 \leq 10\}$,
 $U = \{u \mid -1 \leq u_1 \leq 1\}$, $W = \{w \mid -0.01 \leq w_1 \leq 0.01, -0.01 \leq w_2 \leq 0.01\}$.

选择控制时域为 $N = 5$, 仿真时域为 $T_N = 20$. 仿真结果和可行域如图 6~图 10 所示. 从图 6 可以看到所有 RMPC 算法都满足约束要求 (曲线几

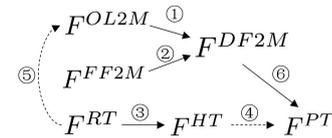


图 5 可行域关系

Fig. 5 Relationships of feasible sets

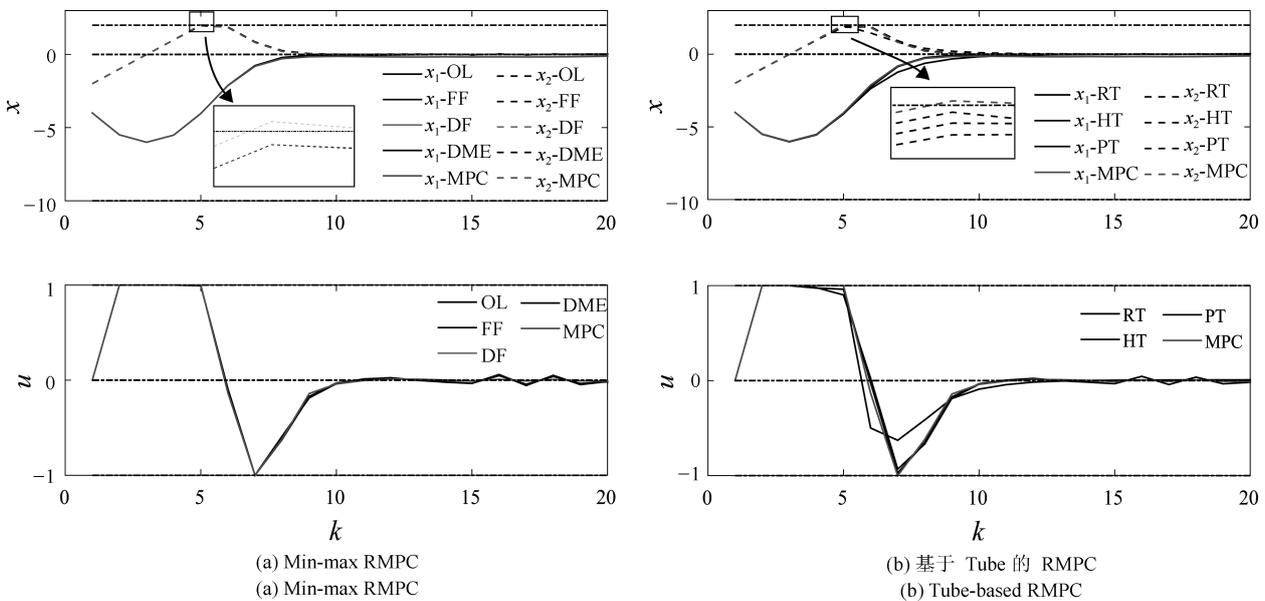


图 6 仿真结果
Fig. 6 Simulation result

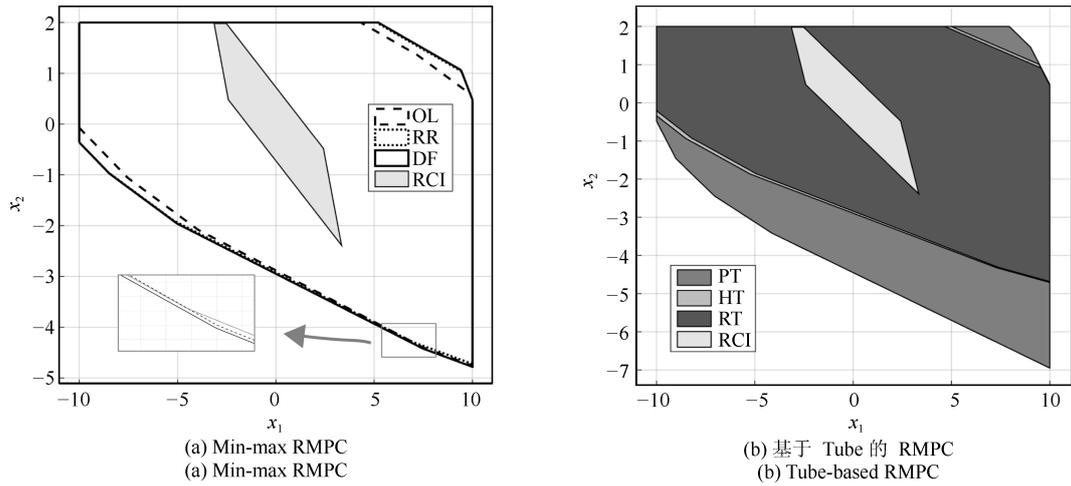


图7 可行域
Fig. 7 Feasible set

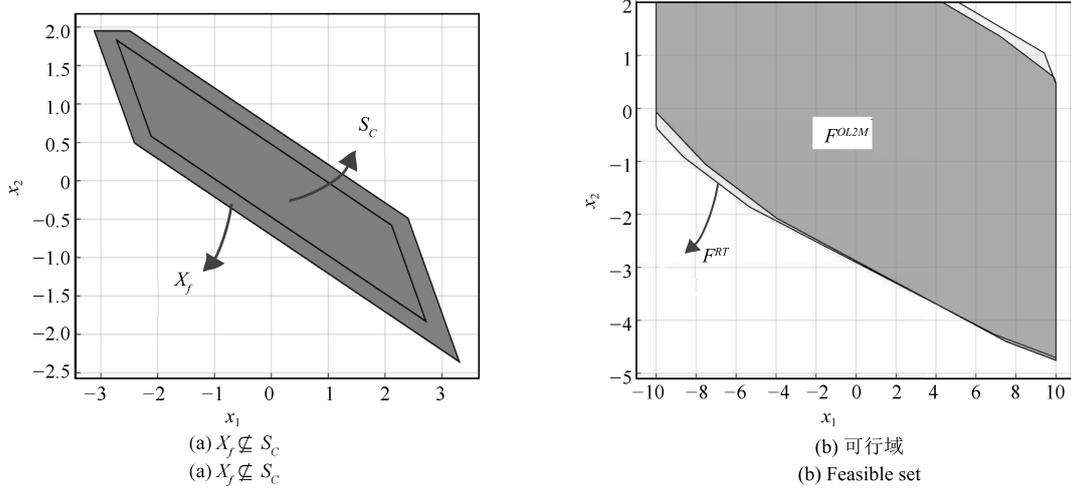


图8 不满足条件时 OL2M 和 RT RMPC 的可行域
Fig. 8 Feasible sets of OL2M and RT RMPC beyond condition

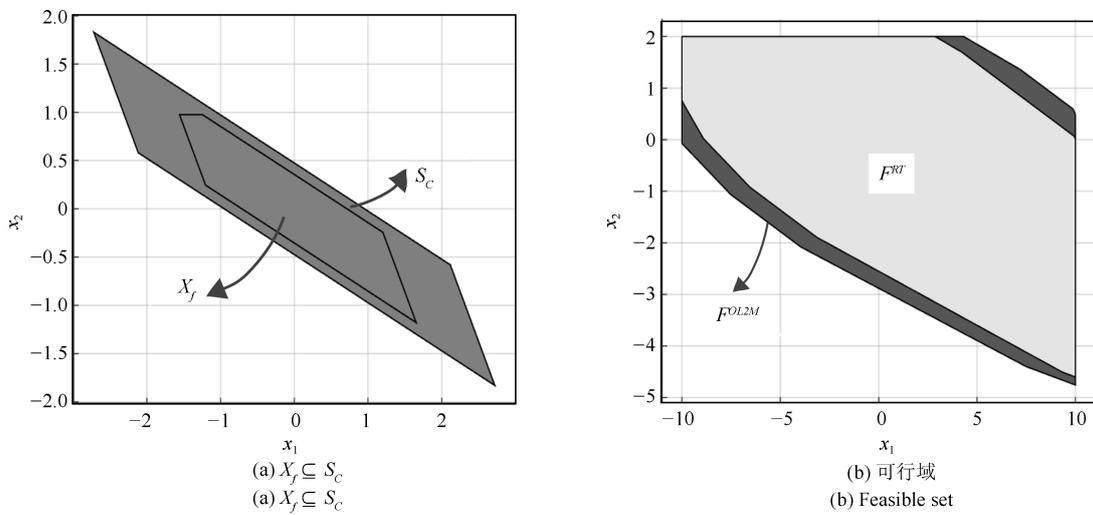


图9 满足条件时 OL2M 和 RT RMPC 的可行域
Fig. 9 Feasible sets of OL2M and RT RMPC under condition

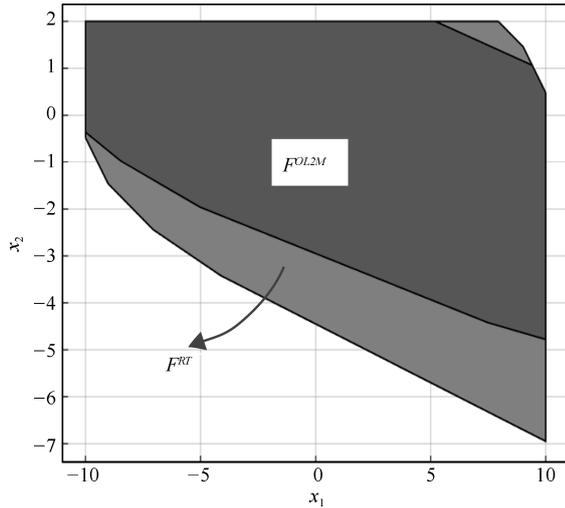


图 10 DF2M 和 PT RMPC 的可行域

Fig. 10 Feasible sets of DF2M and PT RMPC

乎重合), 而 MPC 算法则违反了约束. 从图 7(a) 可以看到 $F^{OL2M} \subseteq F^{DF2M}$ 和 $F^{FF2M} \subseteq F^{DF2M}$. DME2M RMPC 算法作为一种特殊的开环算法, 通过增加 OCP 的自由度使得其可行域也得以扩大, 在本例中, $F^{DME2M} = F^{DF2M}$, 但是其变量数目, 特别是约束数目太多, 使得求解平均用时为 88.9s, 远远高于其他非枚举算法. 从图 8~图 9 可以看到, 当 $X_f \not\subseteq S_c$ 时, 不能保证 $F^{RT} \subseteq F^{OL2M}$, 而如图 9(b) 所示, 当 $X_f \subseteq S_c$ 时, 有 $F^{RT} \subseteq F^{OL2M}$. 所有仿真结果都符合定理 1.

仿真由 CPU 为 Intel(R) Core(TM) i7-4600 @2.1 GHz 2.7 GHz 的电脑完成, 从表 5 和可行域图中可以看到以下规律:

1) 有效的决策变量越多, 可行域越大.

2) 同类型算法结构下 (Min-max 或者基于 Tube 的算法), 变量数目和约束数目越多, 平均 CPU 时间就越大.

由于 PT RMPC 的终值约束为 RCI 集, 所以可以将 DME2M RMPC 中的双模式方法直接应用到 PT RMPC 中, 即一旦 x_k 进入 RCI 集, 就直接启用控制输入 $u_k = Kx_k$. 双模式方法的启用可以大大缩短平均计算时间, 在此例中, 双模式方法下的 PT RMPC 算法平均 CPU 时间为 0.16s.

表 5 RMPC 算法对比

Table 5 Comparison of RMPC algorithms

算法	变量数目	约束数目	平均 CPU 时间 (s)
MPC	5	30	0.2884
OL2M	16	1LMI + 35	0.3884
OL2M*	16	25 585	49.4144
FF2M	16	1LMI + 135	1.1977
FF2M*	16	139 128	267.5556
DF2M	326	1LMI + 735	1.9504
DF2M*	326	752 928	1 444.8
DME2M*	342	36 864	88.9460
RT	7	81	0.3247
HT	8	86	0.3329
PT	140	636	0.7974

2 随机模型预测控制 (SMPC)

随机模型预测控制利用噪声的统计特性来实现控制目标, 能够有效地处理机会约束或者有界约束下的系统控制问题. 由于机会约束系统在一定程度上允许约束被违反, 它通常对噪声的取值范围是不敏感的. 而对于有界约束系统, 无界噪声的出现往往给系统控制带来巨大的挑战. 本文讨论应用较为广泛的基于情景生成法、基于随机 Tube 和基于确定性等价式的 SMPC 算法, 以及一种处理有界约束系统下无界噪声的 SMPC 算法. 各算法处理的约束和噪声类型如表 6 所示.

SMPC 的 OCP 的一般形式表示如下^[5, 32, 65]:

$$\min_{\{\pi_{k+j}\}_{j=0}^{N-1}} \mathbf{E}_{x_k} \left[\sum_{j=0}^{N-1} J(x_{k+j}, \pi_{k+j}) + J_N(x_{k+N}) \right]$$

s.t.

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k$$

$$Pr(E_x x_{k+j} \leq \mathbf{1}) \geq 1 - \epsilon, \quad j \in \mathbf{N}_{[0, N-1]}$$

$$Pr(E_u u_{k+j} \leq \mathbf{1}) \geq 1 - \epsilon, \quad j \in \mathbf{N}_{[0, N-1]}$$

$$T_f(\cdot) \leq 0$$

(16)

其中 $\{\pi_{k+j}(\cdot)\}_{j=0}^{N-1}$ 为控制率, $T_f(\cdot) \leq 0$ 为终值约束. 当 $\epsilon = 0$ 时, 表示有界约束. 如表 6 所示,

表 6 主要 SMPC 算法

Table 6 Main SMPC algorithms

算法	主要文献	可处理约束	噪声类型
基于情景生成法	[58–60]	机会状态和输入约束 (概率 < 1)	无界或有界随机
基于随机 Tube	[18, 29, 61]	机会状态和输入约束 (概率 ≤ 1)	有界随机
基于饱和函数	[24–25, 27]	有界输入约束	无界随机
基于确定性等价式	[22–23, 62–64]	机会状态和输入约束 (概率 < 1)	无界或有界随机

并不是所有的算法都可以处理 $\epsilon = 0$ 的情况的. 当 $\epsilon = 0$ 时, 不适当的算法可能会不可行或者求解非常困难. OCP (16) 可以看作是一个随机规划问题, 随后将讨论这个问题的一些解决方法.

2.1 基于情景生成的 (Scenario generation, SG) SMPC

情景生成法实质上是一种随机规划中的随机模拟技术, 基于 SG 的 SMPC 由 Calafiore 和 Campi 在 2005 年提出^[58]. 这一类方法利用干扰概率密度函数对独立同分布 (Independent identically distributed, IID) 的干扰进行大量的采样 (这些采样也可以叫做情景), 来构造一个基于情景的 OCP, 当情景数目达到一定量时 (这个数目往往是可以定量确定的), 情景 OCP 的解能在较大概率上成为原 OPC 的解. 和基于采样的 (Sample-based) 算法 (如文献 [66–67]) 不同的是, 基于采样的算法通过对干扰采样并利用大数定理来估算扰动的期望以及概率分布, 构建基于期望和概率 (而不是采样) 的 OCP, 且基于采样的算法往往无法确定合适的采样数目.

研究基于 SG 的 SMPC 的稳定性的文献比较少, 学者们更多关注的是算法的可行性和最优性, 例如文献 [68–69]. 因此, 式 (16) 中的终值约束和终值惩罚常常被省略. 对于基于干扰仿射反馈和状态仿射反馈的控制率来说, OCP (16) 可以被转化为文献 [58–59] 中所描述的基于 SG 算法的一般形式:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^{n_v}} \mathbf{E}_{x_k} [J(x_k, \mathbf{w}, \mathbf{v})] \\ & \text{s.t.} \\ & \Pr(h(x_k, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq \mathbf{1}) \geq 1 - \epsilon \end{aligned} \quad (17)$$

其中 \mathbf{v} 为 n_v -维的决策变量, \mathbf{w} 为干扰向量. 基于 SG 的 SMPC 要求 $J(x_k, \mathbf{w}, \mathbf{v})$ 和 $h(x_k, \mathbf{w}, \mathbf{v})$ 对于 \mathbf{v} 来说是凸的, 而对 IID 干扰的概率密度分布没有要求, 所以这种方法也可以用到参数不确定问题上. 通过采样, 随机 OPC (17) 可用情景 OCP 替代:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^{n_v}} \mathbf{E}_{x_k} [J(x_k, \mathbf{w}, \mathbf{v})] \\ & \text{s.t.} \\ & h(x_k, \mathbf{w}^j, \mathbf{v}) \leq \mathbf{1}, \quad j \in \mathbf{N}_{[1, N_s]} \end{aligned} \quad (18)$$

其中 \mathbf{w}^j 为根据 \mathbf{w} 的概率分布函数进行的采样, N_s 为需要的采样数. 当 $N_s \geq \bar{N}(n_v, \epsilon, \eta)$ 时, 式 (18) 的解 \mathbf{v}^* 有 $1 - \eta$ 的概率为式 (17) 的可行解. 文献 [58] 给出的采样数为 $\bar{N}(n_v, \epsilon, \eta) = n_v/\epsilon\eta - 1$, 文献 [70] 把这个数目降为 $\bar{N}(n_v, \epsilon, \eta) = (2/\epsilon) \ln(1/\eta) + 2n_v + (2n_v/\epsilon) \ln(2/\eta)$ 或类似的文献 [71] 中的 $\bar{N}(n_v, \epsilon, \eta) = (2/\epsilon)(\zeta - 1 + \ln(1/\eta))$, 其中 ζ 为

所谓的 Helley's 维度. 文献 [72] 再次把采样数目降为 $\bar{N}(n_v, \epsilon, \eta) = (1/\epsilon)(e/(e-1))(\ln(1/\eta) + n_v - 1)$. 虽然所需采样数被显著地减小了, 但在保证 \mathbf{v}^* 为原 OCP 的可行解的概率不低于 $1 - \eta$ 的前提下如何降低采样数仍是一个开放问题. 另外, 由于式 (18) 的采样可以离线进行, 所以即使是很大的采样数目, 也不会对算法的在线运算速度有太大的影响.

2.2 基于随机 Tube 的 (Stochastic tube, ST) SMPC

基于 ST 的 SMPC 主要由文献 [18, 29, 61] 提出, 算法具有以下特点: 1) 只能处理有界噪声 (即 $w \in W$), 例如, 截断正态分布噪声; 2) 控制率为 $u = Kx + c$ 且利用了分解模型 (13); 3) 采用双模式控制策略和无限预测时域 (即 $N \rightarrow +\infty$) 来保证可行性和稳定性, 所以式 (16) 中的终值约束 $J_N(x_{k+N}) = 0$. 算法允许 $\epsilon = 0$. 文献 [18] 和 [29] 中只处理了状态约束, 但是由于反馈控制率 $u = Kx + c$ 使输入中引入了状态, 使得输入约束也可以被用类似方法处理, 如文献 [61]. 接下来, 仅用状态约束来介绍基于 ST 的 SMPC 的算法的基本原理.

从通用 OCP (16) 可以看到 $X = \{x | E_x x \leq \mathbf{1}\}$, 定义 $E_{k+j} = \bigoplus_{i=0}^{j-1} (A + BK)^i G W$, 由文献 [29] 可知, 状态 Tube 为 $X_{k+j} = \bar{x}_{k+j} + E_{k+j}$. 分解模型确保了 $x_{k+j} \in X_{k+j}$, 状态约束则可转化为 $\Pr(X_{k+j} \subseteq X) \geq 1 - \epsilon$, 即等价于 $\bar{x}_{k+j} + \beta_{k+j} \in X$, 其中 $\beta_{k+j} \in \{\beta | \Pr(\beta \in E_{k+j}) \geq 1 - \epsilon\}$. 进一步可转化 $E_x \bar{x}_{k+j} + \gamma_{k+j} \leq \mathbf{1}$, 其中 $\gamma_{k+j} = \gamma_{k+1} + \sum_{i=1}^{j-1} \max_{e_{k+i} \in E_{k+i}} E_x e_{k+i}$ 且 $\gamma_{k+1} = \arg\{\min_{w \in W} \gamma \text{ s.t. } \Pr(E_x G w \leq \gamma) \geq 1 - \epsilon\}$. 很显然, 对比式 (17), γ_{k+1} 可通过基于 SG 的方法求得, 或者可通过下文讨论的确定性等价法法求取. 注意, $\gamma_{k+j} \leq \mathbf{1}$ 是确保求解正确的前提条件.

终值约束为 $\bar{x}_{k+N} \in X_N$, 其中 $X_N = \{x | E_x (A + BK)^l \leq \mathbf{1} - \gamma_{N+l}, l \in \mathbf{N}_{[1, \hat{N}]}; E_x (A + BK)^l \leq \mathbf{1} - \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i, l \in \mathbf{N}_{[\hat{N}+1, n^*]}\}$, \hat{N} 由设计者决定, 且 n^* 要足够大. 根据文献 [73], $\min \mathbf{E}_{x_k} [\sum_{j=0}^{\infty} x_{k+j}^T Q x_{k+j} + u_{k+j}^T R u_{k+j}]$ 将转换为有限时域的形式. 至此, OCP(16) 就被转化成了标准的 QP 问题求解.

2.3 基于饱和函数的 (Saturation functions, SF) SMPC

基于 SF 的 SMPC 最先由 Hokayem 在文献 [24] 中提出, 文献 [24] 适用于 Schur 稳定系统 (即 $|\lambda_i(A)| < 1, i \in \mathbf{N}_{[1, n]}$), 文献 [25] 将之扩展到 Lyapunov 稳定系统 (即 $|\lambda_i(A)| \leq 1, i \in$

$\mathbf{N}_{[1,n]}$, 其中某些 $|\lambda_j(A)| = 1$). 文献 [27] 则进一步将该方法应用到系统状态不可测的情况下, 其主要方法是通过观测器来估算当前系统状态值.

基于 SF 的 SMPC 考虑了噪声为无界, 且约束为有界输入的情况. 该算法的控制率为 $u_{k+j} = \sum_{i=0}^{j-1} L_{j,i} G w_{k+i} + v_{k+j}$, 如果不加控制, 有界输入约束 $\|u\|_{\infty} \leq U_{\max}$ 显然无法得以满足. 因此, 文献 [24] 将控制率中的噪声项 Gw 替换为一个饱和函数 $\psi(Gw) = [\psi_1^T(G_1 w) \cdots \psi_m^T(G_m w)]^T$ (满足 $\sup_{w \in \mathbf{R}} |\psi_i(G_i w)| \leq \phi_{\max} \leq U_{\max}$) 其中 G_i 为矩阵 G 的第 i 行. 对于饱和函数 $\psi_i(G_i w)$ 的选择是开放的, 文献 [24] 选择 $\psi_i(t) = M\alpha t / \sqrt{1 + \alpha t^2}$, 其中 $M \in \mathbf{R}$ 为给定权重, $\alpha \in \mathbf{R}$ 为给定斜率. 给定控制率后, 目标函数中的期望也可求解为显示的确定形式, 有界输入约束则可转化为 $\max_{i \in \mathbf{N}_{[1,m]}} (|v_i| + \|G_i\|_1 \phi_{\max}) \leq U_{\max}$, 其中 v_i 为 v 的第 i 行. 因此, 在假设 $\mathbf{E}[\|w\|^2] \leq \infty$ 和 $\mathbf{E}_{x_0}[\psi_i(G_i w)] = 0$ 成立的情况下, 随机 OCP 至此就被转化成为标准的 QP 问题. 稳定性方面, 文献 [24] 进一步证明了状态方差是有界的, 即 $\mathbf{E}[\|x_k\|^2] \leq \infty, k \geq 0$.

对于 Lyapunov 稳定系统, 文献 [25] 将系统矩阵 (A, B) 转化为 $\begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_o \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_s \\ B_o \end{bmatrix}$ 的形式, 其中 A_s 为 Schur 稳定 A_o 为正交阵, 且 $\lambda(A_o) = \mathbf{1}$. 为了保证系统具有和文献 [24] 一样的稳定性, 文献 [25] 对正交部分增加了“负漂移条件”的约束, 且假设 $U_{\max} \geq U^*$ 也需要成立, 其中 U^* 为和“负漂移条件”相关的一个常量.

2.4 基于确定性等价式的 (Deterministic equivalents, DE) SMPC

确定性等价式是随机规划中处理机会约束的一种常用方法, 文献 [62] 将之应用到模型预测控制中. 基于确定性等价式的 SMPC 有两大特点, 一是利用确定性等价式将机会约束转化为确定约束, 二是将目标函数利用状态的期望和协方差迭代式直接表示为确定形式. 这样, 随机 MPC 就转化成了确定 MPC 问题. 若已知噪声的期望和协方差, 当随机噪声的密度分布可知时, 可以利用累积概率函数的反函数将机会约束确定化, 如文献 [62]; 而当随机噪声的密度分布不可知时, 可利用坎泰利不等式 (又叫切比雪夫单边不等式) 将机会约束确定化, 这种方法由文献 [63] 提出, 文献 [22] 更详细地介绍了这种算法并通过引入可选的初始约束来提高算法性能. 文献 [23] 将之扩展到系统状态需要用观测器观测的情形, 文献 [64] 随之又将其进一步扩展到系统带有乘法扰动的情況.

对于线性外部干扰系统, 可采用控制率 $u_{k+j} =$

$K_{k+j}(x_{k+j} - \bar{x}_{k+j}) + v_{k+j}$ 将其进行分离. 这种控制率和干扰反射反馈率 $u_{k+j} = \sum_{i=0}^{j-1} L_{j,i} G w_{k+i} + v_{k+j}$ 有着密切的关系. 若 $e_k = x_k - \bar{x}_k = 0$, 由于 $e_{k+j} = x_{k+j} - \bar{x}_{k+j} = \sum_{i=0}^{j-1} (A + BK_{k+i})^i G w_{k+j-1-i} + (\prod_{i=0}^{j-1} (A + BK_{k+i})) e_k$, 所以有 $L_{j,j-1} = K_{k+j}$ 且 $L_{j,i} = K_{k+j} (A + BK_{k+i}), i \in \mathbf{N}_{[0,j-2]}$. 在前面已经讨论过, 如果把 K 换为 K_k (12) 仍然成立, 只不过在 SMPC 中, \bar{x}_k 表示的是状态期望 $\mathbf{E}(x_k)$.

假设 $\mathbf{E}(e_k) = 0$, 定义 $\Xi_k = \mathbf{E}(e_k e_k^T)$, $\Lambda = \mathbf{E}(w_k w_k^T)$, 则有:

$$\Xi_{k+1} = (A + BK_k) \Xi_k (A + BK_k)^T + G \Lambda G^T \quad (19)$$

机会约束 $Pr[E_{xi} x \leq 1] \geq 1 - \epsilon$ (其中 E_{xi} 为 E_x 的第 i 行) 可被替换为:

$$E_{xi} \bar{x} \leq 1 - \sqrt{E_{xi} \Xi E_{xi}^T} \Phi(\epsilon) \quad (20)$$

其中, 当随机噪声服从正态分布时, 式 (20) 可通过正态分布标准化得到^[62], 且 $\Phi(\epsilon) = \mathcal{N}^{-1}(1 - \epsilon)$, \mathcal{N}^{-1} 为标准正态分布的累积概率反函数. 当噪声的密度分布不可知时, 式 (20) 通过坎泰利不等式得到^[63], 且 $\Phi(\epsilon) = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}$. 由于采用无下标的 x , 所以 Ξ 也不用下标, 当 x 表示 x_k 时, Ξ 相应地表示 Ξ_k . 但是式 (20) 对于 Ξ 是非线性的, 难以直接求解, 需要进行线性化:

$$\Psi(E_{xi}, \bar{x}, \Xi) := \{E_{xi} \bar{x} \leq (1 - 0.5\alpha) - \frac{E_{xi} \Xi E_{xi}^T}{2\alpha} \Phi^2(\epsilon)\} \quad (21)$$

其中 $\alpha \in [0, 1]$ 为一个自由设计量. 由于坎泰利不等式没有用到噪声的密度分布信息, 导致其本身是比较保守的, 而线性化进一步引入了更多的保守性, 这点随后将通过仿真实例展说明. 机会输入约束也可以通过类似方法处理得到 $\Psi(E_{ui}, v, U)$, 其中 $U = K \Xi K^T$.

递归可行性和稳定性可通过如下方式获得: 1) 初始化 为了利用系统状态的最新信息来提高控制器性能, 文献 [22] 提出初始化约束 $(\bar{x}_k, \Xi_k) \in \{\text{I-1: } (x_k, \mathbf{0}), \text{I-2: } (\bar{x}_{k|k-1}, \Xi_{k|k-1})\}$ 且在 $k=0$ 时有 $(\bar{x}_k, \Xi_k) = (x_0, \mathbf{0})$. I-1 叫做重置初始化, I-2 叫名义初始化. 2) 终值惩罚 $J_N(x_{k+N}) = x_{N+k}^T P x_{N+k}$ 其中 P 为代数 Lyapunov 方程 $(A + B\bar{K})^T P (A + B\bar{K}) - P = -Q - \bar{K}^T R \bar{K}$ 的解, 其中 \bar{K} 通过求解关于 A, B, Q, R 的离散代数 Riccati 方程而得. 3) 终值约束 $\Xi_{k+N} \preceq \bar{\Xi}$ 且 $\bar{x}_{k+N} \in X_N$ 其中 $\bar{\Xi}$ 为 $\bar{\Xi} = (A + B\bar{K}) \bar{\Xi} (A + B\bar{K})^T + G \bar{\Lambda} G^T$ 的解, 其中 $\bar{\Lambda} \succeq \Lambda$, X_N 为名义系统 $\bar{x}_{k+1} = A \bar{x}_k + B v_k$ 在约束 $\Psi(E_{xi}, \bar{x}, \bar{\Xi})$ 和 $\Psi(E_{ui}, v, \bar{K} \bar{\Xi} \bar{K}^T)$ 及 \bar{K} 下的 CI 集.

此时, 从式 (19) 可以看到, Ξ_{k+j} 对于 $[K_k, K_{k+1}, \dots, K_{k+j-1}]$ 仍然是非线性的, 不能被标准的优化控制器求解. 文献 [23] 和 [63] 将式 (19) 转化为 LMI, 同时目标函数可改写为 $\sum_{j=0}^{N-1} \bar{x}_{k+j}^T Q \bar{x}_{k+j} + v_{k+j}^T R v_{k+j} + \bar{x}_{k+N}^T Q \bar{x}_{k+N} + \sum_{j=0}^{N-1} \text{tr}\{(Q + K_{k+j}^T R K_{k+j}) \Xi_{k+j}\} + \text{tr}\{P \Xi_{k+N}\}$, 至此, 原 OCP 已被转化为标准的 SDP 问题.

2.5 仿真实例

仿真模型为一个常压等离子射流仪 (APPJ)^[74], APPJ 的线性化连续模型为式 (22):

以采样时间 $T_s = 5$ 对连续模型进行离散化, 同时将预测时域选择为 $N = 9$, 仿真时域 $T_N = 50$.

由于基于 ST 的 SMPC 利用了情景生成法进行求解, 这里仅展示基于 ST 的仿真结果. 当 $X = \{x | \text{Pr}\{-6 \leq x_1 \leq 6, -6 \leq x_2 \leq 6, -6 \leq x_3 \leq 6, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \mathbf{R}\} \geq 0.8\}$, $W = \{w | w \sim \mathcal{N}(0, 0.1^2), -1 \leq w \leq 1\}$, $\eta = 0.1$, $\bar{N}(n_v, \epsilon, \eta) = (1/\epsilon)(e/(e-1))(\ln(1/\eta) + n_v - 1)$, $x_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.8)^T$ 时, 基于 ST 的仿真结果如图 11 所示, 可以看到, 系统表现没有违反约束.

对于基于 SF 的 SMPC, $U = \{u | \text{Pr}\{-1 \leq u_1 \leq 1, -1 \leq u_2 \leq 1\} \geq 0.8\}$, $U_{\max} = 1$, $x_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$, $M = 0.1$, $\alpha = 1$, 仿真结果如图 12 所示, 由于饱和函数的存在, 使得无论是在仿真时域还是在预测时域, 都没有约束被违反. 如果不使用饱和函数, 而直接使用反馈率 $u_{k+j} = \sum_{i=0}^{j-1} L_{j,i} G w_{k+i} + v_{k+j}$, 仿真结果如图 13 所示. 可以看到, 在仿真时域同样能够满足约束, 这

是因为 $u_k = v_k$, 并没有噪声被引入第一个输入值. 而在预测时域却可以看到输入约束被严重违反, 这样就不能保证系统的闭环稳定性了.

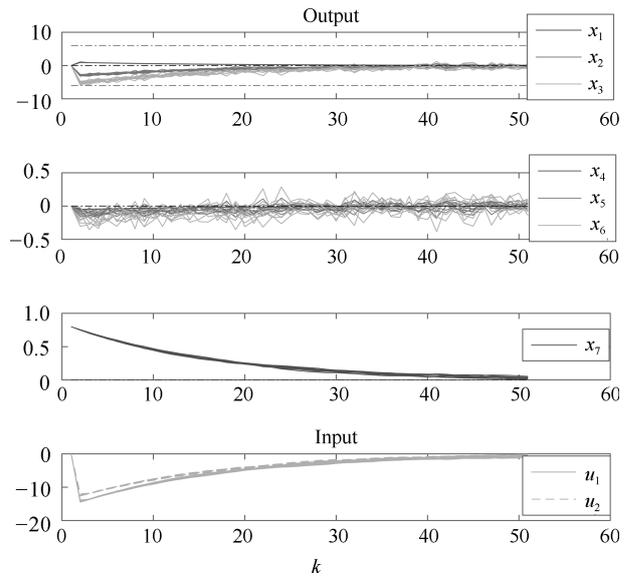


图 11 基于 ST 的 SMPC
Fig. 11 ST-based SMPC

对于基于 DE 的 SMPC, $X = \{x | \text{Pr}\{-4 \leq x_1 \leq 4, -4 \leq x_2 \leq 4, -4 \leq x_3 \leq 4, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \mathbf{R}\} \geq 0.8\}$, $U = \{u | \text{Pr}\{-1 \leq u_1 \leq 1, -1 \leq u_2 \leq 1\} \geq 0.8\}$, $W = \{w | w \sim \mathcal{N}(0, 0.1^2)\}$, $x_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.2)^T$. 图 14(a) 展示了 100 次仿真结果, 只有 15 次违反约束, 违反率为 15%, 满

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2815 & 0 & 0 & -19973 & 0 & 0 & 0 \\ 2199 & -2277 & 0 & 0 & -13256 & 0 & 0 \\ 0 & 2247 & -2773 & 0 & 0 & -9152 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2476 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2199 & -2510 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2247 & -2580 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0015 & 0 & 0 & 0 & -0.0024 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$B = \begin{bmatrix} -5818.1 & 6553.8 \\ 708.8 & 0 \\ 668.2 & 0 \\ 8.5 & 0 \\ 12.1 & 0 \\ 17 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -0.8195 \\ -0.6981 \\ -13521 \\ -0.7359 \\ -11543 \\ -16407 \\ 0 \end{bmatrix}$$

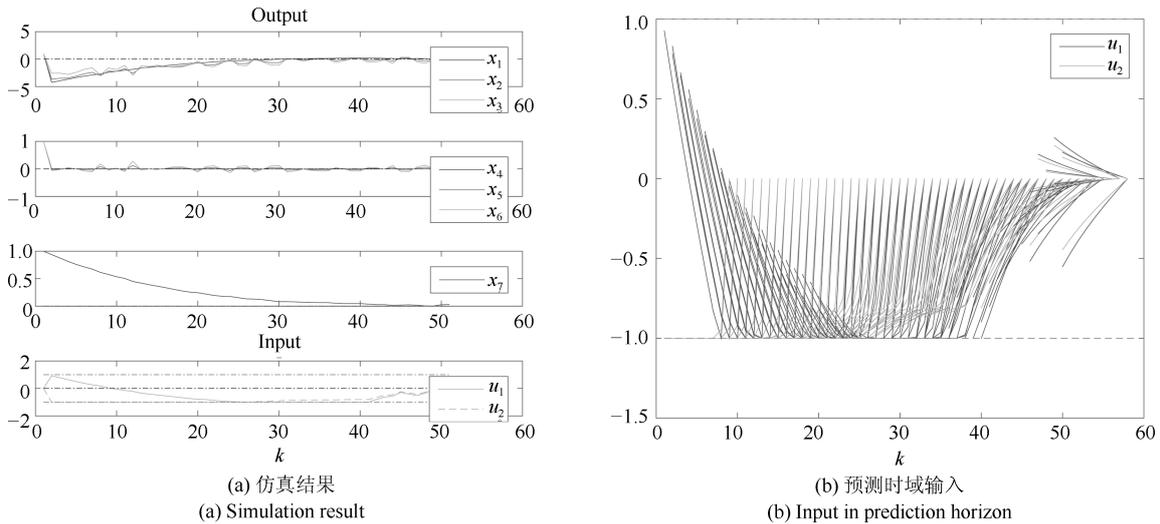


图 12 饱和函数下的仿真结果
 Fig. 12 Simulation result with SF

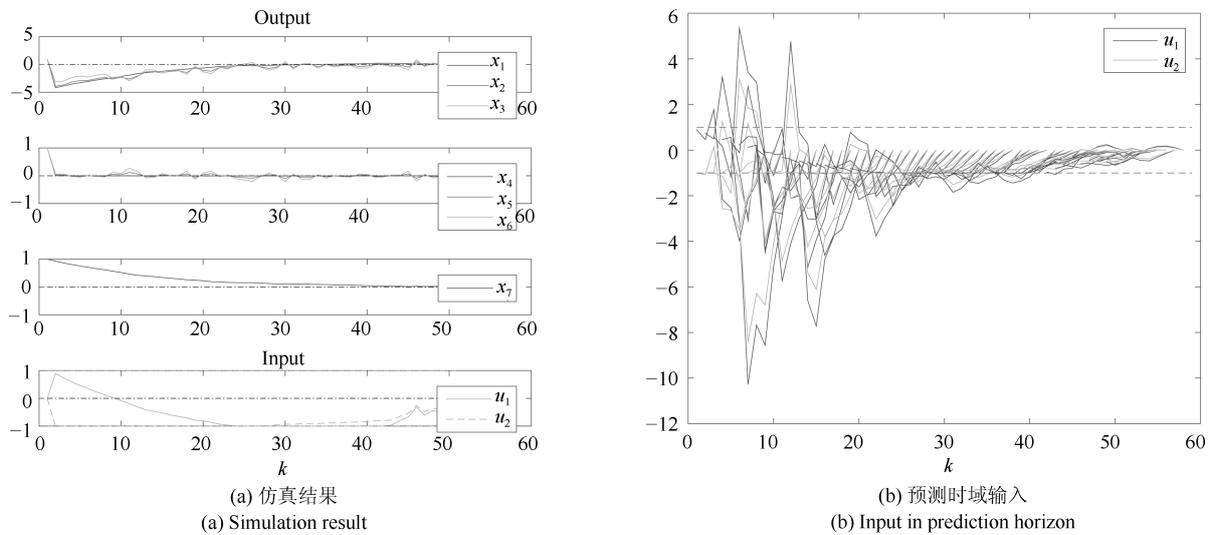


图 13 没有饱和函数时的仿真结果
 Fig. 13 Simulation result without SF

足要求. 图 14(b) 为基于 DE 的 SMPC 的可行域, 其中红色的为线性化之前的可行域, 而蓝色的为线性化之后的, 可以看到红色比蓝色大很多, 说明线性化后的系统更为保守.

3 RMPC 和 SMPC 的应用

随着 RMPC 算法和 SMPC 算法的不断发展和日益成熟, 使其在各领域得到了较为广泛的应用. 表 7 汇总了近年来(自 2010 年) 本文所讨论的 RMPC 算法和 SMPC 算法的部分应用场合. 括号内的英文缩写表示应用的算法, 其中 TB 表示基于 Tube (Tube-based) 的算法, 包括本文涉及的 RT、HT 和 PT 三种, MM 表示 Min-max 算法, 其他 SMPC 算

法缩写和上文一致. 可以看到, 除了传统的流程工业中的应用, 近年来一些新兴领域, 如无人汽车、智能家居、飞行器、机器人、风力发电、水资源、城市交通等都有本文 RMPC 和 SMPC 算法的应用场景. 同时, 在电网、医疗、金融等方面 RMPC 和 SMPC 也有不俗的表现.

从表 7 中可以发现, 基于 Min-max 的 RMPC 相比于基于 Tube 的算法应用更为广泛一些, 这是因为基于 Min-max 的算法概念和结构更为简单, 易于在复杂实际对象控制中扩展, 容易被工程师所接纳和采用. 类似的, SMPC 的算法中以基于 SG 和基于 DE 的算法应用最为广泛, 这是因为这两类算法分别代表了随机规划中处理机会约束的两种常用技术, 即随机模拟和确定性等价. 基于 ST 的算法在使

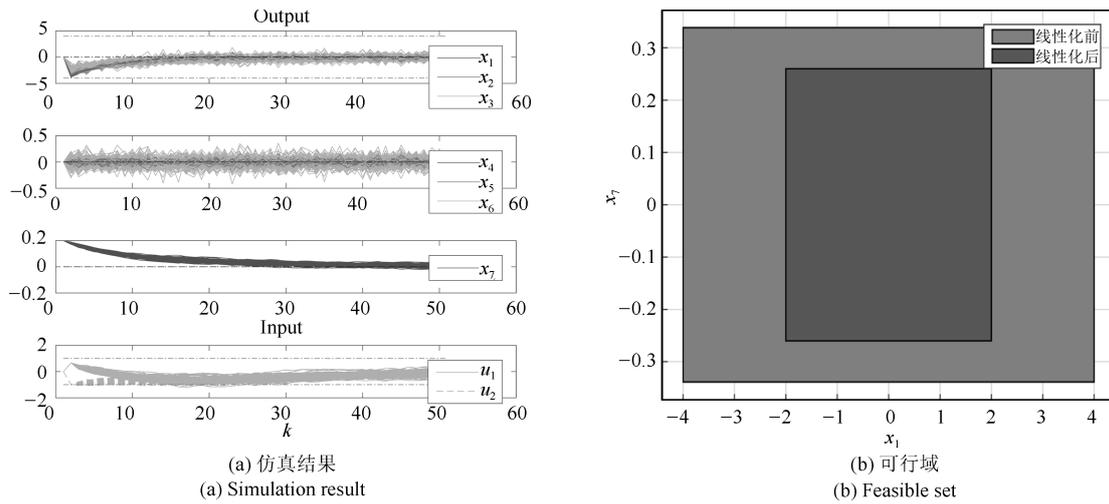


图 14 基于 CI 的 SMPC 仿真结果
Fig. 14 Simulation result of CI-based SMPC

表 7 RMPC 和 SMPC 应用
Table 7 Applications of RMPC and SMPC algorithms

	随机模型预测控制	鲁棒模型预测控制
无人汽车	驾驶转向控制 ^[75] (DE) 车辆导航 ^[76] (ST) 变道辅助 ^[77] (SG)	轨迹跟踪 ^[83] (TB) 传动动力系统控制 ^[84] (MM)
	巡航控制 ^[78] (SG) 车道保持与避障 ^[79] (ST) ^[80] (DE)	车道保持与避障 ^[85] (TB)
智能家居	自动驾驶控制 ^[81] (SG) 驾驶员行为建模 ^[82] (DE)	
	房屋气候控制 ^[86] (SG) 房屋遮阳镜片控制 ^[87] (DE)	温度控制 ^[90] (MM) 变风量空调系统控制 ^[91] (MM)
电子电路	房屋能量控制 ^[88] (SG) 暖通空调系统建模与能量控制 ^[89] (SG)	
	网络直流电机控制系统 ^[92] (DE)	永磁同步电机驱动器 ^[93] (TB) 电子电路 ^[94] (MM)
飞行器		热力电路 ^[95] (MM)
	能源管理系统 ^[96] (DE)	起落架系统振动抑制 ^[97] (MM)
机器人		无人直升机轨迹跟踪控制 ^[98] (MM) 无人机飞行控制 ^[99] (MM)
	机器人导航与避障 ^[101] (DE)	高超声速飞行器飞行控制 ^[100] (MM)
医疗	常压等离子射流控制 ^[74] (ST) 急救车辆调度 ^[103] (SG)	轨迹跟踪 ^[102] (TB)
	药房库存管理 ^[104] (DE)	静脉麻醉控制 ^[105] (MM)
过程工业		浮选过程控制 ^[107] (MM) 热交换网控制 ^[108] (MM)
	过程控制 (四罐过程) ^[106] (DE)	连续搅拌反应釜 ^[109] (MM) 燃煤电站锅炉燃烧系统 ^[110] (MM)
电网	微电网能量管理系统 ^[113] (DE) 微电网操控 ^[114] (SG)	蒸馏塔控制 ^[111] (MM) 热轧带钢自动厚度控制 ^[112] (MM)
	能源储存与生产的优化调度 ^[115] (SG)	可再生能源微电网控制 ^[118] (MM)
风力发电	电力调度 ^[116] (SG) 能源局域网优化调度 ^[117] (SG)	
	风力涡轮机机械疲劳抑制 ^[119] (DE)	风力涡轮机阻尼控制 ^[122] (MM) 风力涡轮机控制 ^[123] (MM)
水资源	电池储能系统控制 ^[120] (DE)	
	风力发电系统控制 ^[121] (DE)	
城市交通	饮用水网络 ^[124] (DE) 水资源管理与利用 ^[125] (DE)	城市道路交通网控制 ^[128] (MM) 地铁列车调度 ^[129] (MM)
	铁路货运车规模与分配控制 ^[126] (DE)	
金融	能源管理 ^[127] (SG)	
	动态套期保值和期权定价 ^[130] (SG) 欧式期权动态对冲 ^[131] (SG)	
其他	多层供应链管理 ^[132] (SG) 智能热网中的能量平衡 ^[133]	内燃机的热量管理 ^[135] (MM) 基于图像的视觉伺服控制 ^[136] (MM)
	(SG) 云副本放置技术 ^[134] (DE)	

用过程中也需用到这两种技术来处理其中的子问题, 相对较为复杂, 且对系统模型更为敏感, 应用较少. 而基于 SF 的 SMPC 算法难以应用于实际对象是因为应用中很少会考虑绝对意义的无界噪声, 且该算法仅适用于有界输入约束, 而实际应用中常常会伴有状态约束, 并且饱和函数的运用使得算法过于局限. 但是这种算法弥补了 SMPC 在有界约束下处理无界噪声的理论空白, 具有重要的意义.

4 总结与展望

本文回顾了 RMPC 和 SMPC 中主要的算法及各种算法的主要特点和运作方式. 可以看到, 所有的算法都是求解一个带约束的 OCP 问题以实现控制目标. 递归可行性可以通过选择合适的终值约束来实现, 而稳定性则一般是通过终值约束和终值惩罚共同作用或者是选择无穷预测时域来实现. 对于有界干扰, RMPC 和 SMPC 都能渐近收敛到 RCI 集. 而对于无界噪声, 正如 Mayne 在文献 [32] 中所指出, SMPC 的稳定性要想被很好的解决, 还有很长一段路要走.

事实上, 保守性没有明确定义. 但是可以从上述算法讨论看出, 对于不确定系统, 最终处理的约束往往是被紧缩过的, 而保守性越大, 指的就是约束紧缩程度越大, 系统表现为距离约束边界越远. 同时, 保守性和算法可行域有着密切关系, 往往保守性越大, 可行域越小.

虽然近几十年来 RMPC 和 SMPC 得到了长足的发展, 但在他们的实际应用中, 仍有许多需要解决的问题. 如系统规模变大时, 求解不变集、LMI、紧缩约束等计算量是十分庞大的, 当计算时间过长, 系统状态与测量状态相差较远时, 控制效果会很不理想, 特别是对于快速动态系统, 要求更快的运算速度. 另外, 在实际过程中如何确定噪声结构类型和取值范围、如何建立系统模型、如何设计保守性低的算法也将极大地影响控制效果. 这些问题的可能解决办法和未来可能的研究方向如下:

观测器和控制器的综合: 当系统状态不可测或只有部分可测时, 利用观测器对状态进行观测来设计反馈控制器往往效果更好. 有时为了实现一些特殊目的也需要获取某些新变量的信息, 如为了实现无偏 (Offset-free) 跟踪需要将噪声看作新状态进行观测. 观测器中的不同预测增益矩阵 (滤波增益矩阵) L 对控制器的影响也会显著不同, 极端情况甚至会使得控制器不稳定. 如何把 L 和反馈控制率进行综合设计, 可否利用可测的部分状态信息来修正观测值, 都是值得探索的话题.

前馈与反馈的综合: 在经典控制论中, 前馈的引

入常常能有效地提高控制器的表现. 而在模型预测当中, 研究前馈的工作还相对较少, 文献 [137] 讨论了这方面的内容, 如何把前馈的设计和反馈结合起来, 以及前馈在 RMPC 中的应用, 特别是 SMPC 的应用仍需要更多的工作.

模型及优化问题的简化: 简化模型和优化问题主要是为了提高运算速率, 可以从模型降阶、模型转化、优化问题的分解方面考虑. 模型降阶在传统 MPC 上的工作已经有不少, 而在 RMPC 和 SMPC 方面仍有不足, 特别是利用离线数据进行模型校准问题, 仍是需要攻克的难点. 利用基函数对原模型进行转化也是一个可研究的方向, 如文献 [138–139] 等利用混沌多项式展开模型把高维系统模型转化为基函数的参数模型从而实现快速运算, 类似的还有径向基函数模型. 这些模型在 RMPC 和 SMPC 的相关研究还较少, 例如现在对于基函数的选择往往是固定的, 是否可以根据测量数据自适应地调整基函数, 仍需要更多的研究. 有时对优化问题进行分解, 将线上计算部分和线下计算部分尽可能分离, 或将复杂问题分解为可并行处理的子问题, 往往可根据对象特性适当考虑.

轨迹跟踪问题: RMPC 中的轨迹跟踪已有较多研究, SMPC 领域相对较少, 特别是对时变轨迹的跟踪问题. 目前 SMPC 中对轨迹的跟踪往往是利用状态期望去跟踪轨迹, 如果轨迹具有统计特性时 (如上层计算传递下来的带有概率分布的轨迹), 在惩罚函数中引入跟踪误差的期望和方差项, 能否提高跟踪效果, 如何解决其带来的计算问题, 还需要更多的研究. 另外, 基于不变集的算法一般来说是不太适合跟踪轨迹的, 因为系统状态最终都会收敛到不变集, 如果跟踪轨迹不在不变集内, 是否可设计不变集跟随轨迹变动的算法呢. 前馈往往可以提供更多跟踪轨迹的信息, 跟踪中引入前馈或许会有好的效果.

多领域的综合: 文献 [140–141] 等对 RMPC 在经济 MPC (EMPC) 的应用进行了研究, 而近期文献 [142] 将 SMPC 与 EMPC 进行了较好的综合, 但这方面的研究相对来说是比较少的, 仍有较多的工作可以进行. 文献 [143] 最近提出了一种迭代 MPC 的算法, 可对这种方法在 RMPC 和 SMPC 上的应用进行研究.

更多应用: 从第 3 节的表 7 可以看到, RMPC 和 SMPC 的应用是比较广泛的, 但在医疗、金融、云计算、城市交通领域的应用相对较少, 进一步加深对这些领域的研究, 把理论和实际更紧密结合, 探索 RMPC 和 SMPC 更多的适用场景, 在促进各领域发展的同时也能促进 RMPC 和 SMPC 算法本身的研究进展.

附录

DME2M RMPC 的“外部控制器” OCP:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{u}_l} \max_l : \mathbf{x}_l^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_l + \mathbf{u}_l^T \mathbf{R} \mathbf{u}_l \\
 & \text{s.t.} \\
 & x_{k+1,l} = Ax_{k,l} + Bu_{k,l} + Gw_{k,l}, \forall l \in \mathbf{N}_{[1, n_v^N]} \\
 & \mathcal{E}_x \mathbf{x}_l \leq \mathbf{1}, \forall l \in \mathbf{N}_{[1, n_v^N]} \\
 & \mathcal{E}_u \mathbf{u}_l \leq \mathbf{1}, \forall l \in \mathbf{N}_{[1, n_v^N]} \\
 & x_{k+N,l} \in S, \forall l \in \mathbf{N}_{[1, n_v^N]} \text{ (终值约束)} \\
 & x_{k+j,l_1} = x_{k+j,l_2} \Rightarrow u_{k+j,l_1} = u_{k+j,l_2} \text{ (因果约束)}
 \end{aligned} \tag{A1}$$

RT RMPC 的 OCP:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\bar{\mathbf{x}}_k, \mathbf{v}} : \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{v} + \ell_f(\bar{x}_{k+N}) \\
 & \text{s.t.} \\
 & (12) \\
 & \bar{\mathbf{x}} \in (X \ominus S_r)^N \\
 & \mathbf{v} \in (U \ominus KS_r)^N \\
 & \bar{x}_{k+N} \in X_f \\
 & x_k \in \bar{x}_k \oplus S_r
 \end{aligned} \tag{A2}$$

其中, $\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_{k+N-1}\}$, $\mathbf{v} = \{v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+N-1}\}$, $A+BK$ 需要严格稳定. X_f 实际上是系统 (1) 在约束 $X \ominus S_r$ 和 $U \ominus KS_r$ 下的 CI 集.

HT RMPC 的 OCP:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\bar{x}_k, \{v_{k+j}\}, \{\alpha_{k+j}\}} : \sum_{j=0}^{N-1} \bar{x}_{k+j}^T \mathbf{Q} \bar{x}_{k+j} + v_{k+j}^T \mathbf{R} v_{k+j} + \\
 & q_\alpha (\alpha_{k+j} - \bar{\alpha})^2 + \bar{x}_{k+N}^T \mathbf{P} \bar{x}_{k+N} + p_\alpha (\alpha_N - \bar{\alpha})^2 \\
 & \text{s.t.} \\
 & (12) \\
 & \bar{x}_{k+j} \in X \ominus \alpha_{k+j} S_r, \quad j \in \mathbf{N}_{[0, N-1]} \\
 & v_{k+j} \in U \ominus K \alpha_{k+j} S_r, \quad j \in \mathbf{N}_{[0, N-1]} \\
 & (A+BK) \alpha_{k+j} S_r + G W \subseteq \alpha_{k+j+1} S_r, \quad j \in \mathbf{N}_{[0, N-1]} \\
 & \bar{x}_{k+N} \in X_f(\alpha_N) \\
 & x_k \in \bar{x}_k \oplus S_r
 \end{aligned} \tag{A3}$$

PT RMPC 的 OCP:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{u}_k, \mathfrak{H}_u, \mathfrak{H}_x} : \sum_{j=0}^{N-1} |X_{k+j}|_S \\
 & \text{s.t.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (14) \\
 & x_k^0 \in X \\
 & x_{k+j}^0 \oplus \bigoplus_{i=0}^j D_{k+j}^i \subseteq X, \forall j \in \mathbf{N}_{[1, N-1]} \\
 & X_{k+j}^i \subseteq D_{k+j}^i, \forall i \in \mathbf{N}_{[1, j]}, \forall j \in \mathbf{N}_{[1, N-1]} \\
 & u_k^0 \in U \\
 & u_{k+j}^0 \oplus \bigoplus_{i=0}^j V_{k+j}^i \subseteq U, \forall j \in \mathbf{N}_{[1, N-1]} \\
 & U_{k+j}^i \subseteq V_{k+j}^i, \forall i \in \mathbf{N}_{[1, j]}, \forall j \in \mathbf{N}_{[1, N-1]} \\
 & x_{k+N}^0 \oplus \bigoplus_{i=0}^N D_{k+N}^i \subseteq S \\
 & X_{k+N}^i \subseteq D_{k+N}^i, \forall i \in \mathbf{N}_{[1, N]}
 \end{aligned} \tag{A4}$$

其中, $x_k^0 = x_k$, $D_{k+j}^i = \{x | E_x x \text{ le } h_{x, k+j}^i\}$, $U_{k+j}^i = \{u | E_u u \leq h_{u, k+j}^i\}$, $\mathfrak{H}_u = \{\mathbf{h}_{u, k+1}, \mathbf{h}_{u, k+2}, \dots, \mathbf{h}_{u, k+N-1}\}$, $\mathbf{h}_{u, k+j} = \{h_{u, k+j}^1, h_{u, k+j}^2, \dots, h_{u, k+j}^j\}$, $\mathfrak{H}_x = \{\mathbf{h}_{x, k+1}, \mathbf{h}_{x, k+2}, \dots, \mathbf{h}_{x, k+N}\}$, $\mathbf{h}_{x, k+j} = \{h_{x, k+j}^1, h_{x, k+j}^2, \dots, h_{x, k+j}^j\}$. $x_{k+j}^0 \oplus \bigoplus_{i=0}^j D_{k+j}^i$ 和 $u_{k+j}^0 \oplus \bigoplus_{i=0}^j V_{k+j}^i$ 才是一般意义上的 Tube.

References

- 1 Kassmann D E, Badgwell T A, Hawkins R B. Robust steady-state target calculation for model predictive control. *AIChE Journal*, 2000, **46**(5): 1007–1024
- 2 Qin S J, Badgwell T A. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 2003, **11**(7): 733–764
- 3 Hrovat D, Di Cairano S, Tseng H E, Kolmanovsky I V. The development of model predictive control in automotive industry: a survey. In: Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Control Applications (CCA). Dubrovnik, Croatia: IEEE, 2012. 295–302
- 4 Xi Yu-Geng, Li De-Wei, Lin Shu. Model predictive control-status and challenges. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(3): 222–236 (席裕庚, 李德伟, 林姝. 模型预测控制—现状与挑战. *自动化学报*, 2013, **39**(3): 222–236)
- 5 Mesbah A. Stochastic model predictive control: an overview and perspectives for future research. *IEEE Control Systems*, 2016, **36**(6): 30–44
- 6 Wang Y J, Rawlings J B. A new robust model predictive control method I: theory and computation. *Journal of Process Control*, 2004, **14**(3): 231–247
- 7 Mayne D Q. Model predictive control: recent developments and future promise. *Automatica*, 2014, **50**(12): 2967–2986

- 8 Campo P J, Morari M. Robust model predictive control. In: Proceedings of the 1987 American Control Conference. Minneapolis, MN, USA: IEEE, 1987. 1021–1026
- 9 Allwright J C, Papavasiliou G C. On linear programming and robust model-predictive control using impulse-responses. *Systems & Control Letters*, 1992, **18**(2): 159–164
- 10 Zheng Z Q, Morari M. Robust stability of constrained model predictive control. In: Proceedings of the 1993 American Control Conference. San Francisco, California, USA: IEEE, 1993. 379–383
- 11 Lee J H, Yu Z H. Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters. *Automatica*, 1997, **33**(5): 763–781
- 12 Scokaert P O M, Mayne D Q. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(8): 1136–1142
- 13 Blanchini F. Control synthesis for discrete time systems with control and state bounds in the presence of disturbances. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1990, **65**(1): 29–40
- 14 Gossner J R, Kouvaritakis B, Rossiter J A. Stable generalized predictive control with constraints and bounded disturbances. *Automatica*, 1997, **33**(4): 551–568
- 15 Lee Y I, Kouvaritakis B. Constrained receding horizon predictive control for systems with disturbances. *International Journal of Control*, 1999, **72**(11): 1027–1032
- 16 Raković S V, Kerrigan E C, Kouramas K I, Mayne D Q. Invariant Approximations of Robustly Positively Invariant Sets for Constrained Linear Discrete-Time Systems Subject to Bounded Disturbances, Technical Report CUED/F-INFENG/TR.473, Department of Engineering, University of Cambridge, Cambridge, UK, 2004.
- 17 Limon D, Alvarado I, Alamo T, Camacho E F. Robust tube-based MPC for tracking of constrained linear systems with additive disturbances. *Journal of Process Control*, 2010, **20**(3): 248–260
- 18 Cannon M, Kouvaritakis B, Rakovic S V, Cheng Q F. Stochastic tubes in model predictive control with probabilistic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(1): 194–200
- 19 Raković S V, Kouvaritakis B, Findeisen R, Cannon M. Homothetic tube model predictive control. *Automatica*, 2012, **48**(8): 1631–1638
- 20 Raković S V, Kouvaritakis B, Cannon M, Panos C, Findeisen R. Parameterized tube model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(11): 2746–2761
- 21 Muñoz-Carpintero D, Kouvaritakis B, Cannon M. Striped parameterized tube model predictive control. In: Proceedings of the 19th IFAC World Congress. Cape Town, South Africa: IFAC, 2014. 11998–12003
- 22 Farina M, Giulioni L, Magni L, Scattolini R. A probabilistic approach to model predictive control. In: Proceedings of the 52nd Annual Conference on Decision and Control (CDC). Florence, Italy: IEEE, 2013. 7734–7739
- 23 Farina M, Giulioni L, Magni L, Scattolini R. An approach to output-feedback MPC of stochastic linear discrete-time systems. *Automatica*, 2015, **55**: 140–149
- 24 Hokayem P, Chatterjee D, Lygeros J. On stochastic receding horizon control with bounded control inputs. In: Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, Held Jointly with the 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 6359–6364
- 25 Hokayem P, Chatterjee D, Ramponi F, Chaloulos G, Lygeros J. Stable stochastic receding horizon control of linear systems with bounded control inputs. In: Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. Budapest, Hungary: MTNS, 2010. 31–36
- 26 Primbs J A, Sung C H. Stochastic receding horizon control of constrained linear systems with state and control multiplicative noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(2): 221–230
- 27 Hokayem P, Cinquemani E, Chatterjee D, Ramponi F, Lygeros J. Stochastic receding horizon control with output feedback and bounded controls. *Automatica*, 2012, **48**(1): 77–88
- 28 Lucia S, Zometa P, Kögel M, Findeisen R. Efficient stochastic model predictive control based on polynomial chaos expansions for embedded applications. In: Proceedings of the 54th Annual Conference on Decision and Control (CDC). Osaka, Japan: IEEE, 2015. 3006–3012
- 29 Kouvaritakis B, Cannon M, Raković S V, Cheng Q F. Explicit use of probabilistic distributions in linear predictive control. *Automatica*, 2010, **46**(10): 1719–1724
- 30 Kothare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 1996, **32**(10): 1361–1379
- 31 Kouvaritakis B, Cannon M. *Model Predictive Control: Classical, Robust and Stochastic*. Switzerland: Springer, 2015.
- 32 Mayne D. Robust and stochastic model predictive control: are we going in the right direction? *Annual Reviews in Control*, 2016, **41**: 184–192
- 33 Bemporad A, Morari M. Robust model predictive control: a survey, *Robustness in Identification and Control*. London: Springer, 1999. 207–226
- 34 Löfberg J. Approximations of closed-loop minimax MPC. In: Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, HI, USA: IEEE, 2003, **2**: 1438–1442
- 35 Alamo T, Ramirez D R, de La Peña D M, Camacho E F. Min-max MPC using a tractable QP problem. *Automatica*, 2007, **43**(4): 693–700

- 36 Gao Y, Chong K T. The explicit constrained min-max model predictive control of a discrete-time linear system with uncertain disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(9): 2373–2378
- 37 de la Peña D M, Ramírez D R, Camacho E F, Alamo T. Explicit solution of min-max MPC with additive uncertainties and quadratic criterion. *Systems & control letters*, 2006, **55**(4): 266–274
- 38 Bertsekas D P. *Nonlinear Programming* (Second edition). Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, 1999
- 39 Löfberg J. Minimax Approaches to Robust Model Predictive Control [Ph. D. dissertation], Linköping University, Sweden, 2003.
- 40 Wang Zhen-Ying. Constrained Robust Model Predictive Control of Discrete with Uncertain Disturbance Case [Master dissertation], Harbin University of Science and Technology, China, 2005.
(王振英. 不确定扰动情形下离散系统约束鲁棒模型预测控制 [硕士学位论文], 哈尔滨理工大学, 中国, 2005.)
- 41 Bemporad A. Reducing conservativeness in predictive control of constrained systems with disturbances. In: Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control. Tampa, FL, USA: IEEE, 1998, **2**: 1384–1389
- 42 Goulart P J, Kerrigan E C, Maciejowski J M. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints. *Automatica*, 2006, **42**(4): 523–533
- 43 Langson W, Chrysochoos I, Raković S V, Mayne D Q. Robust model predictive control using tubes. *Automatica*, 2004, **40**(1): 125–133
- 44 Gautam A, Chu Y C, Soh Y C. Optimized dynamic policy for receding horizon control of linear time-varying systems with bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(4): 973–988
- 45 Muñoz-Carpintero D, Cannon M, Kouvaritakis B. Robust MPC strategy with optimized polytopic dynamics for linear systems with additive and multiplicative uncertainty. *Systems & Control Letters*, 2015, **81**: 34–41
- 46 Blanchini F. Survey paper: set invariance in control. *Automatica*, 1999, **35**(11): 1747–1767
- 47 Herceg M, Kvasnica M, Jones C N, Morari M. Multi-parametric toolbox 3.0. In: Proceedings of the 2013 European Control Conference (ECC). Zurich, Switzerland: IEEE, 2013. 502–510
- 48 Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, Scokaert P O M. Constrained model predictive control: stability and optimality. *Automatica*, 2000, **36**(6): 789–814
- 49 Goodwin G C, Kong H, Mirzaeva G, Seron M M. Robust model predictive control: reflections and opportunities. *Journal of Control and Decision*, 2014, **1**(2): 115–148
- 50 Zheng P Y, Li D W, Xi Y G, Zhang J. Improved model prediction and RMPC design for LPV systems with bounded parameter changes. *Automatica*, 2013, **49**(12): 3695–3699
- 51 Ping Xu-Bin, Ding Bao-Cang, Han Chong-Zhao. Dynamic output feedback robust model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(1): 31–37
(平续斌, 丁宝苍, 韩崇昭. 动态输出反馈鲁棒模型预测控制. 自动化学报, 2012, **38**(1): 31–37)
- 52 Cuzzola F A, Geromel J C, Morari M. An improved approach for constrained robust model predictive control. *Automatica*, 2002, **38**(7): 1183–1189
- 53 Kouvaritakis B, Rossiter J A, Schuurmans J. Efficient robust predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(8): 1545–1549
- 54 Mayne D Q, Langson W. Robustifying model predictive control of constrained linear systems. *Electronics Letters*, 2001, **37**(23): 1422–1423
- 55 Mayne D Q, Seron M M, Raković S V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. *Automatica*, 2005, **41**(2): 219–224
- 56 Raković S V, Kouvaritakis B, Findeisen R, Cannon M. Simple homothetic tube model predictive control. In: Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems-MTNS. Budapest, Hungary: MTNS, 2010. 1411–1418
- 57 Kolmanovsky I, Gilbert E G. Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 1998, **4**(4): 317–367
- 58 Calafiore G, Campi M C. Uncertain convex programs: randomized solutions and confidence levels. *Mathematical Programming*, 2005, **102**(1): 25–46
- 59 Campi M C, Garatti S, Prandini M. The scenario approach for systems and control design. *Annual Reviews in Control*, 2009, **33**(2): 149–157
- 60 Schildbach G, Fagiano L, Frei C, Morari M. The scenario approach for stochastic model predictive control with bounds on closed-loop constraint violations. *Automatica*, 2014, **50**(12): 3009–3018
- 61 Cannon M, Cheng Q F, Kouvaritakis B, Raković S V. Stochastic tube MPC with state estimation. *Automatica*, 2012, **48**(3): 536–541
- 62 Schwarm A T, Nikolaou M. Chance-constrained model predictive control. *AIChE Journal*, 1999, **45**(8): 1743–1752
- 63 Magni L, Pala D, Scattolini R. Stochastic model predictive control of constrained linear systems with additive uncertainty. In: Proceedings of the 2009 European Control Conference (ECC). Budapest, Hungary: IEEE, 2009. 2235–2240
- 64 Farina M, Scattolini R. Model predictive control of linear systems with multiplicative unbounded uncertainty and chance constraints. *Automatica*, 2016, **70**: 258–265
- 65 Farina M, Giulioni L, Scattolini R. Stochastic linear model predictive control with chance constraints — a review. *Journal of Process Control*, 2016, **44**: 53–67

- 66 Batina I. Model Predictive Control for Stochastic Systems By Randomized Algorithms [Ph. D. dissertation], Technische Universiteit Eindhoven, Netherlands, 2004.
- 67 Blackmore L, Ono M, Bektassov A, Williams B C. A probabilistic particle-control approximation of chance-constrained stochastic predictive control. *IEEE Transactions on Robotics*, 2010, **26**(3): 502–517
- 68 Campi M C, Garatti S. The exact feasibility of randomized solutions of uncertain convex programs. *SIAM Journal on Optimization*, 2008, **19**(3): 1211–1230
- 69 Campi M C, Garatti S. A sampling-and-discarding approach to chance-constrained optimization: feasibility and optimality. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2011, **148**(2): 257–280
- 70 Calafiore G C, Campi M C. The scenario approach to robust control design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(5): 742–753
- 71 Calafiore G C. Random convex programs. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, **20**(6): 3427–3464
- 72 Alamo T, Tempo R, Luque A, Ramirez D R. Randomized methods for design of uncertain systems: sample complexity and sequential algorithms. *Automatica*, 2015, **52**: 160–172
- 73 Cannon M, Kouvaritakis B, Wu X J. Probabilistic constrained MPC for multiplicative and additive stochastic uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(7): 1626–1632
- 74 Gidon D, Graves D B, Mesbah A. Model predictive control of thermal effects of an atmospheric pressure plasma jet for biomedical applications. In: Proceedings of the 2016 American Control Conference (ACC). Boston, MA, USA: IEEE, 2016. 4889–4894
- 75 Wang Qiu, Qu Ting, Chen Hong. Steering control of autonomous vehicles based on stochastic model predictive control. *Information and Control*, 2015, **44**(4): 499–506 (王秋, 曲婷, 陈虹. 基于随机模型预测控制的自主车辆转向控制. 信息与控制, 2015, **44**(4): 499–506)
- 76 Carvalho A, Gao Y Q, Lefevre S, Borrelli F. Stochastic predictive control of autonomous vehicles in uncertain environments. In: Proceedings of the 12th International Symposium on Advanced Vehicle Control. Tuat, Japan: AVEC, 2014.
- 77 Schildbach G, Borrelli F. Scenario model predictive control for lane change assistance on highways. In: Proceedings of the 2015 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). Seoul, Korea: IEEE, 2015. 611–616
- 78 Moser D, Waschl H, Kirchsteiger H, Schmied R, del Re L. Cooperative adaptive cruise control applying stochastic linear model predictive control strategies. In: Proceedings of the 2015 European Control Conference (ECC). Linz, Austria: IEEE, 2015. 3383–3388
- 79 Liu C C, Carvalho A, Schildbach G, Hedrick J K. Stochastic predictive control for lane keeping assistance systems using a linear time-varying model. In: Proceedings of the 2015 American Control Conference (ACC). Chicago, IL, USA: ACC, 2015. 3355–3360
- 80 Gray A, Gao Y Q, Lin T, Hedrick J K, Borrelli F. Stochastic predictive control for semi-autonomous vehicles with an uncertain driver model. In: Proceedings of the 16th International IEEE Annual Conference on Intelligent Transportation Systems-(ITSC). The Hague, the Netherlands: IEEE, 2013. 2329–2334
- 81 Carvalho A, Lefèvre S, Schildbach G, Kong J, Borrelli F. Automated driving: the role of forecasts and uncertainty—a control perspective. *European Journal of Control*, 2015, **24**: 14–32
- 82 Qu Ting. Driver Behavior Modeling Based on Stochastic Model Predictive Control [Ph. D. dissertation], Jilin University, China, 2015. (曲婷. 基于随机模型预测控制的驾驶员行为建模 [博士学位论文], 吉林大学, 中国, 2015.)
- 83 Kayacan E, Ramon H, Saeys W. Robust trajectory tracking error model-based predictive control for unmanned ground vehicles. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2016, **21**(2): 806–814
- 84 Zhu X Y, Zhang H, Cao D P, Fang Z D. Robust control of integrated motor-transmission powertrain system over controller area network for automotive applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015, **58–59**: 15–28
- 85 Gao Y Q, Gray A, Tseng H E, Borrelli F. A tube-based robust nonlinear predictive control approach to semi-autonomous ground vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 2014, **52**(6): 802–823
- 86 Zhang X J, Grammatico S, Schildbach G, Goulart P, Lygeros J. On the sample size of randomized MPC for chance-constrained systems with application to building climate control. In: Proceedings of the 2014 European Control Conference (ECC). Strasbourg, France: IEEE, 2014. 478–483
- 87 Yao J. Determining the energy performance of manually controlled solar shades: a stochastic model based co-simulation analysis. *Applied Energy*, 2014, **127**: 64–80
- 88 Tanner R A, Henze G P. Stochastic control optimization for a mixed mode building considering occupant window opening behaviour. *Journal of Building Performance Simulation*, 2014, **7**(6): 427–444
- 89 Ma Y D, Matusko J, Borrelli F. Stochastic model predictive control for building HVAC systems: complexity and conservatism. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, **23**(1): 101–116
- 90 Xu X H, Wang S W, Huang G S. Robust MPC for temperature control of air-conditioning systems concerning on constraints and multitype uncertainties. *Building Services Engineering Research and Technology*, 2010, **31**(1): 39–55

- 91 Yang Shi-Zhong, Ren Qing-Chang. Robust model predictive control for variable air volume air conditioning system. *Computer Engineering and Applications*, 2013, **49**(6): 8–11, 104
(杨世忠, 任庆昌. 鲁棒模型预测控制在变风量空调系统中的应用. *计算机工程与应用*, 2013, **49**(6): 8–11, 104)
- 92 Ren M F, Zhang J H, Jiang M, Yu M, Xu J L. Minimum (h, ϕ) entropy control for non-Gaussian stochastic networked control systems and its application to a networked dc motor control system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, **23**(1): 406–411
- 93 Preindl M. Robust control invariant sets and Lyapunov-based mpc for ipm synchronous motor drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, **63**(6): 3925–3933
- 94 Zhao X D, Zhang L X, Shi P, Karimi H R. Robust control of continuous-time systems with state-dependent uncertainties and its application to electronic circuits. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, **61**(8): 4161–4170
- 95 Rhouma A, Bouani F. Robust model predictive control of uncertain fractional systems: a thermal application. *IET Control Theory & Applications*, 2014, **8**(17): 1986–1994
- 96 Shahsavari B, Maasoumy M, Sangiovanni-Vincentelli A, Horowitz R. Stochastic model predictive control design for load management system of aircraft electrical power distribution. In: Proceedings of the 2015 American Control Conference (ACC). Chicago, IL, USA: IEEE, 2015. 3649–3655
- 97 Hajiloo A, Xie W F. The stochastic robust model predictive control of shimmy vibration in aircraft landing gears. *Asian Journal of Control*, 2015, **17**(2): 476–485
- 98 Marantos P, Bechlioulis C P, Kyriakopoulos K J. Robust trajectory tracking control for small-scale unmanned helicopters with model uncertainties. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017, doi: 10.1109/TCST.2016.2642160
- 99 Alexis K, Papachristos C, Siegart R, Tzes A. Robust model predictive flight control of unmanned rotorcrafts. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2016, **81**(3–4): 443–469
- 100 Zhang Shao-Kang. Research on Robust Model Predictive Control Based on LPV Model for Hypersonic Vehicles [Master dissertation], Tianjin University, China, 2014.
(张少康. 基于 LPV 模型的高超声速飞行器鲁棒预测控制方法研究 [硕士学位论文], 天津大学, 中国, 2014.)
- 101 Blackmore L, Ono M, Williams B C. Chance-constrained optimal path planning with obstacles. *IEEE Transactions on Robotics*, 2011, **27**(6): 1080–1094
- 102 González R, Fiacchini M, Guzmán J L, Álamo T, Rodríguez F. Robust tube-based predictive control for mobile robots in off-road conditions. *Robotics and Autonomous Systems*, 2011, **59**(10): 711–726
- 103 Goodwin G C, Mediol A M. Scenario-based, closed-loop model predictive control with application to emergency vehicle scheduling. *International Journal of Control*, 2013, **86**(8): 1338–1348
- 104 Jurado I, Maestre J M, Velarde P, Ocampo-Martinez C, Fernandez I, Tejera B I, del Prado J R. Stock management in hospital pharmacy using chance-constrained model predictive control. *Computers in Biology and Medicine*, 2016, **72**: 248–255
- 105 Chang H, Krieger A, Astolfi A, Pistikopoulos E N. Robust multi-parametric model predictive control for LPV systems with application to anaesthesia. *Journal of Process Control*, 2014, **24**(10): 1538–1547
- 106 Jurado I, Millán P, Quevedo D, Rubio F R. Stochastic MPC with applications to process control. *International Journal of Control*, 2015, **88**(4): 792–800
- 107 Tang Y, Peng C, Yin S, Qiu J B, Gao H J, Kaynak O. Robust model predictive control under saturations and packet dropouts with application to networked flotation processes. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2014, **11**(4): 1056–1064
- 108 Bakošová M, Oravec J. Robust model predictive control for heat exchanger network. *Applied Thermal Engineering*, 2014, **73**(1): 924–930
- 109 Ghaffari V, Naghavi S V, Safavi A A. Robust model predictive control of a class of uncertain nonlinear systems with application to typical CSTR problems. *Journal of Process Control*, 2013, **23**(4): 493–499
- 110 Liu Zheng-Feng, Wang Jing-Cheng, Shi Yuan-Hao, Zhang Lang-Wen. Robust distributed model prediction control for coal-fired power plant boiler combustion system. In: Proceedings of the 25th Chinese Process Control Conference. Dalian, China, 2014. 6
(刘正峰, 王景成, 史元浩, 张浪文. 燃煤电站锅炉燃烧系统的鲁棒分布式模型预测控制. 见: 第 25 届中国过程控制会议. 大连, 中国: 中国自动化学会过程控制专业委员会, 2014. 6)
- 111 Yorgashov Yu A. Robust model predictive control of industrial reactive distillation column. *Journal of Shenyang University of Chemical Technology*, 2009, **23**(1): 92–96
- 112 Yang Bin-Hu, Yang Wei-Dong, Qu Lei. Robust predictive-model-control strategy for automatic gauge control in hot strip finishing milling. *Control Theory & Applications*, 2011, **28**(6): 799–804
(杨斌虎, 杨卫东, 曲蕾. 热轧带钢自动厚度控制鲁棒预测模型与控制策略. *控制理论与应用*, 2011, **28**(6): 799–804)
- 113 Cominesi S R, Farina M, Giulioni L, Picasso B, Scattolini R. Two-layer predictive control of a micro-grid including stochastic energy sources. In: Proceedings of the 2015 American Control Conference (ACC). Chicago, IL, USA: IEEE, 2015. 918–923
- 114 Hans C A, Sotasakis P, Bemporad A, Raisch J, Reincke-Collon C. Scenario-based model predictive operation control of islanded microgrids. In: Proceedings of the 54th Annual Conference on Decision and Control (CDC). Osaka, Japan: IEEE, 2015. 3272–3277
- 115 Zhu D H, Hug G. Decomposed stochastic model predictive control for optimal dispatch of storage and generation. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2014, **5**(4): 2044–2053

- 116 Patrinos P, Trimboli S, Bemporad A. Stochastic MPC for real-time market-based optimal power dispatch. In: Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC). Orlando, FL, USA: IEEE, 2011. 7111–7116
- 117 Zhang Yan, Zhang Tao, Liu Ya-Jie, Guo Bo. Stochastic model predictive control for energy management optimization of an energy local network. *Proceedings of the CSEE*, 2016, **36**(13): 3451–3462
(张彦, 张涛, 刘亚杰, 郭波. 基于随机模型预测控制的能源局域网优化调度研究. *中国电机工程学报*, 2016, **36**(13): 3451–3462)
- 118 Velarde P, Maestre J M, Ocampo-Martinez C, Bordons C. Application of robust model predictive control to a renewable hydrogen-based microgrid. In: Proceedings of the 15th European Control Conference (ECC). Aalborg, Denmark: ECC, 2016. 1209–1214
- 119 Rivero S, Mancini S, Sarzo F, Ferrari-Trecate G. Model predictive controllers for reduction of mechanical fatigue in wind farms. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017, **25**(2): 535–549
- 120 Kou P, Gao F, Guan X H. Stochastic predictive control of battery energy storage for wind farm dispatching: using probabilistic wind power forecasts. *Renewable Energy*, 2015, **80**: 286–300
- 121 Hu Jing. Research on application of stochastic model predictive control in wind power generation systems [Master dissertation], North China Electric Power University, China, 2015.
(胡婧. 随机模型预测控制在风力发电系统的应用 [硕士学位论文], 华北电力大学, 中国, 2015.)
- 122 Evans M A, Cannon M, Kouvaritakis B. Robust MPC tower damping for variable speed wind turbines. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, **23**(1): 290–296
- 123 Mirzaei M, Poulsen N K, Niemann H H. Robust model predictive control of a wind turbine. In: Proceedings of the 2012 American Control Conference (ACC). Montréal, Canada: IEEE, 2012. 4393–4398
- 124 Grosso J M, Ocampo-Martínez C, Puig V, Joseph B. Chance-constrained model predictive control for drinking water networks. *Journal of Process Control*, 2014, **24**(5): 504–516
- 125 Huang Chong-Yin, Luo Can, Zhao Yong, Han Shou-Dong. Application of stochastic predictive control model to sustainable utilization of water resources. *Water Resources and Power*, 2011, **29**(12): 16–20
(黄胤, 罗灿, 赵勇, 韩守东. 随机预测控制模型及其在水资源可持续中的应用. *水电能源科学*, 2011, **29**(12): 16–20)
- 126 Milenković M S, Bojović N J, Švadlenka L, Melichar V. A stochastic model predictive control to heterogeneous rail freight car fleet sizing problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2015, **82**: 162–198
- 127 Di Cairano S, Bernardini D, Bemporad A, Kolmanovsky I V. Stochastic MPC with learning for driver-predictive vehicle control and its application to HEV energy management. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014, **22**(3): 1018–1031
- 128 Tettamanti T, Luspay T, Kulcsár B, Péni T, Varga I. Robust control for urban road traffic networks. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2014, **15**(1): 385–398
- 129 Li S K, De Schutter B, Yang L X, Gao Z Y. Robust model predictive control for train regulation in underground railway transportation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2016, **24**(3): 1075–1083
- 130 Bemporad A, Bellucci L, Gabbriellini T. Dynamic option hedging via stochastic model predictive control based on scenario simulation. *Quantitative Finance*, 2014, **14**(10): 1739–1751
- 131 Zhang Wei-Guo, Du Qian. Dynamic hedging european option based on stochastic model predictive control. *Journal of South China University of Technology (Social Science Edition)*, 2016, **18**(4): 1–9
(张卫国, 杜谦. 基于随机模型预测控制的欧式期权动态对冲研究. *华南理工大学学报(社会科学版)*, 2016, **18**(4): 1–9)
- 132 Schildbach G, Morari M. Scenario-based model predictive control for multi-echelon supply chain management. *European Journal of Operational Research*, 2016, **252**(2): 540–549
- 133 Rostampour V, Keviczky T. Robust randomized model predictive control for energy balance in smart thermal grids. In: Proceedings of the 2016 European Control Conference (ECC). Aalborg, Denmark: IEEE, 2016. 1201–1208
- 134 Ghanbari H, Litoiu M, Pawluk P, Barna C. Replica placement in cloud through simple stochastic model predictive control. In: Proceedings of the 2014 IEEE 7th International Conference on Cloud Computing (CLOUD). Anchorage, AK, USA: IEEE, 2014. 80–87
- 135 Pizzonia F, Castiglione T, Bova S. A Robust Model Predictive Control for efficient thermal management of internal combustion engines. *Applied Energy*, 2016, **169**: 555–566
- 136 Hajiloo A, Keshmiri M, Xie W F, Wang T T. Robust online model predictive control for a constrained image-based visual servoing. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, **63**(4): 2242–2250
- 137 Carrasco D S, Goodwin G C. Feedforward model predictive control. *Annual Reviews in Control*, 2011, **35**(2): 199–206
- 138 Paulson J A, Mesbah A, Streif S, Findeisen R, Braatz R D. Fast stochastic model predictive control of high-dimensional systems. In: Proceedings of the 53rd Conference on Decision and Control. Los Angeles, California, USA: IEEE, 2014. 2802–2809

- 139 Terejanu G, Singla P, Singh T, Scott P D. Approximate interval method for epistemic uncertainty propagation using polynomial chaos and evidence theory. In: Proceedings of the 2010 American Control Conference. Baltimore, MD, USA: IEEE, 2010. 349–354
- 140 Bayer F A, Müller M A, Allgöwer F. Tube-based robust economic model predictive control. *Journal of Process Control*, 2014, **24**(8): 1237–1246
- 141 Hovgaard T G, Larsen L F S, Jorgensen J B. Robust economic MPC for a power management scenario with uncertainties. In: Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC). Orlando, FL, USA: IEEE, 2011. 1515–1520
- 142 Bayer F A, Lorenzen M, Müller M A, Allgöwer F. Robust economic model predictive control using stochastic information. *Automatica*, 2016, **74**: 151–161
- 143 Feller C, Ebenbauer C. A stabilizing iteration scheme for model predictive control based on relaxed barrier functions. *Automatica*, 2017, **80**: 328–339



谢澜涛 浙江大学控制科学与工程学院博士研究生. 主要研究方向为模型预测控制和机器学习.

E-mail: lantao@zju.edu.cn

(**XIE Lan-Tao** Ph.D. candidate at the College of Control Science and Engineering, Zhejiang University. His research interest covers model predictive control and machine learning.)



谢磊 浙江大学控制科学与工程学院教授. 主要研究方向为控制系统性能评估, 统计过程监控与故障诊断, 过程建模与先进控制. 本文通信作者.

E-mail: leix@iipc.zju.edu.cn

(**XIE Lei** Professor at the College of Control Science and Engineering, Zhejiang University. His research interest covers control performance assessment, statistical process monitoring and fault diagnosis, and process modeling and advanced control. Corresponding author of this paper.)



苏宏业 浙江大学控制科学与工程学院教授. 主要研究方向为控制理论与应用, 复杂过程先进控制和优化技术, 先进控制软件开发及应用.

hysu@iipc.zju.edu.cn

(**SU Hong-Ye** Professor at the College of Control Science and Engineering, Zhejiang University. His research interest covers control theory and application, complex process advanced control and optimization technology, and the software development and application of advanced control.)