第 43 卷 第 7 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 43, No. 7
2017 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 2017

关于二型模糊集合的一些基本问题

王飞跃 [1,2]　　莫 红 [3]

摘　要　采用集合论的方法给出了单位模糊集合和二型模糊集合及其在一点的限制等定义, 使得二型模糊集合更易于理解. 通过定义嵌入单位模糊集合来描述一般二型模糊集合, 并给出离散、半连通二型模糊集合的表达式. 根据论域、主隶属度及隶属函数的特性将二型模糊集合分为四种类型: 离散、半连通、连通及复合型, 并根据连通的特点将连通二型模糊集合分为单连通及多连通两类. 利用支集的闭包 (Closure of support, CoS) 划分法表述主隶属度及区间二型模糊集合. 提出了 CoS 二、三次划分法分别来表述单、复连通二型模糊集合, 并使每一个子区域的上下边界及次隶属函数在该子区域上的限制分别具有相同的解析表述式. 最后, 探讨了二型模糊集合在一点的限制、主隶属度、支集、嵌入单位模糊集合之间的关系.

关键词　二型模糊集合, 主隶属度, 支集的闭包, 单位模糊集合, 嵌入单位模糊集合, 二型模糊集合在一点的限制

引用格式　王飞跃, 莫红. 关于二型模糊集合的一些基本问题. 自动化学报, 2017, **43**(7): 1114−1141

DOI　10.16383/j.aas.2017.c160638

Some Fundamental Issues on Type-2 Fuzzy Sets

WANG Fei-Yue [1,2]　　MO Hong [3]

Abstract　New and revised definitions such as unit fuzzy sets, type-2 fuzzy sets (T2 FSs) and their restriction at a point are introduced by the method of set theory to make them easily understandable. All the definitions are uniform and formal, and able to represent type-2 fuzzy sets conveniently. An embedded unit fuzzy set is defined to describe general T2 FSs and the representations of discrete and partially connected T2 FSs are given as well. Based on the universes of discourse, primary membership grade, and membership function, type-2 fuzzy sets are divided into four classes: discrete, partially connected, connected, and compounded. Connected T2 FSs are further classified into two types: single connected and multi-connected. The partition method for closure of support (CoS) is used to represent the primary membership grades and interval type-2 fuzzy sets. A method of second/third partition for CoS is proposed to represent single connected/multi-connected T2 FS, respectively after CoS is divided twice and three times; the upper and lower membership functions, and the restriction of the secondary membership function have same analytic expressions, respectively. Finally, the connections among the restriction of T2 FS at a point, primary membership function, CoS, embedded type-1 fuzzy set are discussed.

Key words　Type-2 fuzzy sets (T2 FS), primary membership grade, closure of support (CoS), unit fuzzy set, embedded unit fuzzy set, restriction of type-2 fuzzy set at a point

Citation　Wang Fei-Yue, Mo Hong. Some fundamental issues on type-2 fuzzy Sets. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(7): 1114−1141

1975 年, 扎德 (L. A. Zadeh) 提出二型模糊集合[1], 然而, 对其关注和研究, 却是在近二十年. 今天, 二型模糊集合理论与应用得到了人们的广泛兴趣[2−6], 这是因为对于如何确定一个模糊集合的隶属函数, 不同的人有不同的认识, 而二型模糊集合能较好地解决语言歧义与数据噪声问题. Mendel 等相继在二型模糊逻辑系统、二型模糊控制与应用方面做了大量的工作[7−10], 特别是把对区间二型模糊集合分析转化为对其对应不确定覆盖域 (Footprint of uncertainty, FOU) 的上下边界 (即两个一型模糊集合) 进行讨论[11−13], 极大地促进了相关工作. 二型模糊理论与方法已应用于相似性度量[14], 神经网络[15] 等方面, 在国内, 莫红和王飞跃等将区间二型模糊集合应用于建立语言动力学轨迹[16] 并分析其稳定性[17], 张伟斌, 李成栋等分别将二型模糊集合应用于短时交通流预测[18], 移动机器人[19] 等.

由 Zadeh 定义[20], 人们很容易理解一个模糊集合的隶属函数就是一个常规函数: 定义域为给定论域, 隶属度对应该常规函数的函数值, 其取值

收稿日期 2016-09-14　修改日期 2016-12-14　录用日期 2017-04-21
Manuscript received September 14, 2016; revised December 14, 2016; accepted April 21, 2017
国家自然科学基金 (61533019, 71232006, 61233001, 61074093, 61473048) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61533019, 71232006, 61233001, 61074093, 61473048)
1. 中国科学院自动化研究所复杂系统管理与控制国家重点实验室 北京 100190　2. 国防科学技术大学军事计算实验与平行系统技术研究中心 长沙 410073　3. 长沙理工大学电气与信息工程学院 长沙 410114
1. The State Key Laboratory of Management and Control for Complex Systems, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190　2. Research Center for Computational Experiments and Parallel Systems Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073　3. School of Electric and Information Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114

范围是单位区间. 该定义至今既未有任何变化, 也没有歧义. 所以, 根据该定义, 对于一个具体的模糊集合, 人们不难写出对应的隶属函数, 进而给出一个模糊集合的表述式, 并得出相应的函数图象.

然而, 对于一个具体的二型模糊集合, 人们至今还很难做到这一点, 即给出类似一型模糊集合的表述式, 其中一个重要的原因就是二型模糊集合的定义对于工程人员来说晦涩难懂, 对应的图形也没有很好的直观性.

因此, 常常有这样的问题: 一个二型模糊集合到底是个什么样子? 能够像一型模糊集合那样方便给出一个二型模糊集合的表达式吗? 对于一个具体的二型模糊集合, 只有能够给出其相应的表述式时, 才能在此基础上真正地开展二型模糊集合相关的理论与应用研究, 因此如何表述二型模糊集合, 即如何给出一个二型模糊集合的隶属函数成了解决二型模糊集合理论的关键问题之一.

2009 年之前, 对于一个给定的二型模糊集合 (离散二型模糊集合除外), 人们没有给出其便于计算与推理的表述式, 通常的方法是采用 FOU 的上下边界来处理二型模糊集合的相关问题[21]. 从一定程度上来说, 二型模糊系统理论的成功源于 FOU 的上下边界是两个一型模糊集合, 而一型模糊集合在其定义、表述及推理等方面相对比较完善. 然而, 对任意的主变量, 只有其对应的主隶属 (Primary membership) 连通时, 一个二型模糊集合的 FOU (或区间二型模糊集合) 才由 FOU 的上下边界唯一确定. 但是, 并非每一个二型模糊集合的主隶属都是连通的, 如离散二型模糊集合对应的主隶属不连通, 复合、多连通二型模糊集合对应的主隶属在某些点也可能不连通. 所以, 采用 FOU 并不能描述所有的区间二型模糊集合, 更不能描述一般的而行模糊集合. 因此, 采用 FOU 的上下边界来讨论对应的 FOU 及 (区间) 二型模糊集合具有很大的局限性.

另一方面, 在二型模糊集合的相关定义与公式中, 主隶属一般表示为单位区间的子集, 即 $J_x \subseteq I$, 该公式也被大多数从事二型模糊集合工作的研究人员所接受. 基于主隶属为单位区间的子集, Mo 和 Wang 等修正了 FOU 的定义及对应公式, 提出了 FOU 划分方法来表述主隶属、FOU 及区间二型模糊集合, 并阐述了二型模糊集合的主隶属函数、FOU 等之间的关系[21], 相继将二型模糊集合的表述方法应用于心理危机干预等方面[22]. 后来, 因为主隶属 J_x 具有明显的歧义 (见第 1.2 节评述部分), 所以, Mo 和 Wang 等在给出二型模糊集合定义时, 采用 L_x 表示主隶属度, 以区别主隶属 J_x[22], 这里, 主隶属度 L_x 满足 $L_x \subset I$. 本文仍然采用 L_x 来表示主隶属度.

其实, 在给出一个二型模糊集合的表述式时, 需要给出其主隶属的范围, 但 Mendel 在文献 [23−25] 中, 对主隶属 J_x 给出了相互矛盾的公式: 一方面, J_x 表示为单位区间 I 的一个子集 (有时为一个闭区间), 另一方面, J_x 是 $X \times I$ 的一个子集, 是由元素 (x, u) 构成的集合. 根据文献 [26] 知, (x, u) 为 $X \times I$ 中的元素. 因此, 一个集合不可能同时满足既是 I 的子集, 又是 $X \times I$ 的子集. 在文献 [26], Mendel 等将主隶属 J_x 定义为二型模糊集合隶属函数在点 x 的支集, 即主隶属 J_x 满足 $J_x \subset X \times I$, 并不是 I 的子集, 但文献 [26] 给出的三个表格中, 二型模糊集合的相关概念与公式大多数是以 J_x 为 I 的子集, 即 $J_x \subseteq I$ 为基础建立起来的, 这两者相互矛盾, 因此需要完善二型模糊集合理论. 而 Mendel 关于主隶属及 FOU 不正确的定义与表述公式是人们不能给出区间二型模糊集合表述式的另一根源.

近年来, Mendel 等试图建立二型模糊集合的新定义[24−26], 其中, 次变量的取值范围均为 $[0, 1]$, 但是没有指出隶属函数的取值范围为 $[0, 1]$. 明显, 离散二型模糊集合并不满足该定义. 因此, 文献 [26] 增加了次变量所在论域 U 为离散的情形, 却没有讨论 u 与主变量 x 有何种关系. 读者很难由该定义表述一个二型模糊集合, 而 Mendel 以这个很难理解的定义为基础, 给出了主隶属的定义, 这就让人们更难以明白和运用主隶属. 特别地, 一直以来, 没有相关的实例帮助读者认识如何表述主隶属, 如何表述 FOU 及一般的二型模糊集合.

为了使得二型模糊集合的所有定义能够一致化与形式化, 阐述定义之间的相互关系, 本文在文献 [22] 的基础上给出了关于二型模糊集合的一系列新定义, 采用集合的形式描述了二型模糊集合的特征, 为了简化对二型模糊集合的表述, 将次隶属函数限制在其支集的闭包上, 根据二型模糊集合的新定义, 将二型模糊集合分为离散型、半连通型、连通型及复合型四种, 并给出不同类型二型模糊集合的表述式方法: 离散二型模糊集合的一般表述式; 对于半连通二型模糊集合, 将嵌入单位模糊集合分成三角型、梯形及高斯型三种情形给出其对应的表述式; 提出了二型模糊集合的次隶属函数的支集闭包二、三次划分法来分别表述单连通与多连通区间二型模糊集合; 对于复合型二型模糊集合, 将其分解为前面三种类型再进行表述, 最后, 讨论了二型模糊集合的一些要素之间的关系, 便于读者能更清楚了解二型模糊集合.

本文安排如下: 第 1 节介绍相关术语; 第 2 节给出了二型模糊集合的相关定义; 第 3 节讨论二型模糊集合的分类、表述及实例; 第 4 节提出了一些与二型模糊集合相关结论; 最后, 第 5 节小结本文.

1 相关定义与术语

本节将介绍常规集合理论与 (二型) 模糊集合的相关定义与术语, 并给出相应的评述.

1.1 模糊集合与二型模糊集合的定义

定义 1. 设 $I=[0,1]$, 论域 X 上的一个模糊集合 $\widetilde{A}$ 定义为

$$\mu_{\widetilde{A}}: X \to I \tag{1}$$

记为,

$$x \mapsto u \tag{2}$$

即, 对于任意 $x\in X$, 存在 $u\in I$, 使得 $\mu_{\widetilde{A}}(x)=u$, 这里, $\mu_{\widetilde{A}}$ 为模糊集合 $\widetilde{A}$ 的隶属函数, 在点 x 的函数值被称为 $\widetilde{A}$ 在该点的隶属度, $\mapsto$ 表示集合中元素的对应关系 (下同).

论域 X 上的一个模糊集合 $\widetilde{A}$ 的支集定义为论域中使隶属度 $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ 为正值的元素. 记为 $supp(\widetilde{A})$, 即

$$supp(\widetilde{A})=\{x|\mu_{\widetilde{A}}(x)>0\} \tag{3}$$

1975 年, Zadeh 将二型模糊集合定义为 [1]:

定义 2. 若一个模糊集合的隶属函数为一个一型模糊集合, 则该模糊集合为一个二型模糊集合[1].

评述: 在该定义中, 扎德并没有指出一型模糊集合的论域, 但现在一般将单位区间或其子集作为一型模糊集合的论域.

该定义可以写成以下表述形式:

定义 3. 论域 X 上的一个二型模糊集合 ω 定义如下[27]

$$\mu_\omega: X \to I^I \tag{4}$$

即, 对任意 $x\in X$, 存在一个映射 $f_x\in I^I$, 使得

$$\mu_\omega(x)=f_x \tag{5}$$

这里, $I^I=\{f|f:I\to I\}$.

关于二型模糊集合的定义, 还有以下形式:

定义 4. 一个二型模糊集合 ω 可以等价定义为一个可测量的隶属函数[28]:

$$\mu_\omega: X\times[0,1]\to[0,1] \tag{6}$$

及

$$\mu_\omega: X\to\{f\in\Omega:[0,1]\to[0,1]\} \tag{7}$$

这里, Ω 表示定义在单位区间 $[0,1]$ 上的可容许的次隶属函数集合.

定义 5. 一个二型模糊集合 ω 可以表示为一个二型隶属函数[29] $\mu_\omega^2(x,u)$, 其中, $x\in X$, $u\in J_x\subseteq[0,1]$, 即,

$$\omega=\{((x,u),\mu_\omega^2(x,u))|x\in X,u\in J_x\subseteq[0,1]\} \tag{8}$$

或者

$$\omega=\int_{x\in X}\int_{u\in J_x}\frac{\mu_\omega^2(x,u)}{(x,u)} \tag{9}$$

其中, x (或 u) 为主 (或次) 变量, $J_x\subseteq[0,1]$ 为主隶属, $0\le\mu_\omega^2(x,u)\le1$ 为次隶属度, $\int\int$ 表示所有可容许 x 与 u 之并, 对于离散论域的情形, $\int$ 就用 $\sum$ 来代替.

文献 [21], 通过引入多值映射, 将 J_x 定义为二型模糊集合的主隶属度, 即主隶属函数的函数值, 且 $J_x\subseteq[0,1]$, 其二型模糊集合定义如下:

定义 6. 设 ω 为论域 X 上的一个二型模糊集合, μ_ω^1 为一个多值映射, 定义为

$$\mu_\omega^1: X\to\Omega^* \tag{10}$$

$$x\mapsto J_x \tag{11}$$

μ_ω^2 为一个常规的函数, 定义如下

$$\mu_\omega^2: \cup_{x\in X}x\times J_x\to I \tag{12}$$

$$x\times u\mapsto z \tag{13}$$

这里, μ_ω^1、μ_ω^2 分别称为主、次隶属函数, 对 $\forall x\in X$, 主隶属度 J_x 随 x 的变化而改变, Ω^* 为 I 的所有非空闭子集构成的集合.

同时, 二型模糊集合还被定义为[21]:

定义 7. 论域 X 上的一个二型模糊集合 ω 的隶属函数定义为

$$\mu_\omega: X\to\cup_{x\in X}I^{J_x} \tag{14}$$

即, 对任意 $x\in X$, 存在函数 $f\in I^{J_x}$, 使得

$$\mu_\omega(x)=f \tag{15}$$

其中, $I^{J_x}=\{f|f:J_x\to I\}, f=\mu_\omega(x)$.

J_x 被定义为二型模糊集合主隶属函数的函数值, 同时还是单位模糊集合 f_x 的支集的闭包, 表示如下:

$$J_x=\overline{\{u|u\in I,f_x(u)>0\}} \tag{16}$$

且

$$l_x=\overline{\{(x,u)|u\in I,f_x(u)>0\}} \tag{17}$$

满足:

$$FOU(\omega)=\bigcup_{x\in X}l_x=\overline{\{(x,u)|x\in X,u\in I,\mu_\omega^2(x,u)>0\}}$$

文献 [22] 重新定义二型模糊集合为:

定义 8. 设 $C(2^I)$ 是由单位区间 I 的全体非空闭子集构成的一个集合. 论域 X 上的一个二型模糊集合 ω 定义为

$$\omega = \{(x,u,z)|\forall x\in X, \forall u\in L_x\in C(2^I),\\ z=\mu_\omega^2(x,u)\in I\}$$

其中, x,u,z 分别为主、次、第三变量, L_x 为主隶属度, 由一个多值映射定义而得:

$$\mu_\omega^1 : X\to C(2^I) \tag{18}$$

即对 $\forall x\in X$, 存在 $L_x\in C(2^I)$, 使

$$\mu_\omega^1(x) = L_x \tag{19}$$

称 μ_ω^1 为主隶属函数, 设 μ_ω^2 为一个次隶属函数, 定义如下

$$\mu_\omega^2 : \cup_{x\in X} x\times L_x\to I \tag{20}$$

这里, 次隶属函数可以看成是一个以 $\cup_{x\in X} x\times L_x$ 为论域的一型模糊集合的隶属函数.

1.2 评述

在 Mendel 给出的二型模糊集合理论中, 主隶属 J_x 起着至关重要的作用, 但主隶属有三种明显不同的含义:

1) 主隶属为单位区间的子集, 即 $J_x\subseteq I$. 在二型模糊集合理论的绝大多数定义与公式中均采用 $J_x\subseteq I$, 如文献 [26] 中表 1 和 3 中相关的公式;

2) 主隶属为 $x\times I$ 的子集, 即 $J_x\subseteq x\times I$, 如文献 [26] 中表 2 中前三个公式;

3) 主隶属 $J_x = FOU$, 即 J_x 是 $X\times I$ 的子集, 如文献 [25] 中提及 "J_x, the support of the secondary MFs (see Fig. 3) satisfied $J_x\subseteq[0,1]$", 然而, 在文献 [26] 中, 式 (20) 表明 FOU 是次隶属函数的支集.

显然, 以上关于主隶属 J_x 的描述让人很难理解相关的术语和公式. 由文献 [25] 中的表 1～3 知, 二型模糊集合理论中大多数定义与公式以" 主隶属 J_x 是单位区间 [0, 1] 的一个子集" 为基础建立起来的, 即 $J_x\subseteq[0,1]$, 但文献 [24−26, 30] 中, Mendel 等又将主隶属 J_x 定义为二型模糊集合的隶属函数在一点的支集, 即 $J_x\subseteq x\times[0,1]$, 如此, 则二型模糊集合理论中的大量公式与定义都需要修正, 从而引起二型模糊集合理论的混乱, 也让读者不知所措.

在论文 [26] 中, Mendel 通过次隶属函数来定义主隶属 J_x 与 I_x, 此举的确不可取. 因为对于一个二型模糊集合, 人们已经很难给出其次隶属函数的解析表达式, 而在此基础上定义的主隶属 J_x 及 I_x 更难以表述. 本文作者将二型模糊集合在点 x 的主隶属度记为 $L_x\subseteq I$, 代替 $J_x\subseteq X\times I$, 以示区别, 通过引入主隶属函数, 就可以像定义一型模糊集合的隶属度一样给出主隶属度的表述式, 从而不难给出区间二型模糊集合及一般二型模糊集合的表述式.

2 二型模糊集合的相关定义

本节除了给出二型模糊集合的新定义外, 还给出了一些相关要素的定义, 如单位模糊集合, 嵌入单位模糊集合, 隶属函数在一点的限制等, 这些定义将有助于人们更好地了解二型模糊集合.

2.1 二型模糊集合

定义 9. 二型模糊集合的二段式定义表述为

$$\mu_\omega : X\to \cup_{x\in X} I^{L_x} \tag{21}$$

$$x\mapsto f_x \tag{22}$$

这里, μ_ω 为二型模糊集合的隶属函数, I^{L_x} 表示定义在 $L_x\in C(2^I)$ 上的模糊集合全体构成的集合, 即

$$I^{L_x} = \{f_x|f_x : L_x\to I\} \tag{23}$$

特别地, 若对 $\forall x\in X$, 都有 $L_x = I$, 则该定义可以表示为

$$\mu_\omega : X\to I^I \tag{24}$$

$$x\mapsto g_x \tag{25}$$

这里, I^I 表示定义在 I 上的模糊集合全体构成的集合, 即

$$I^I = \{g_x|g_x : I\to I\} \tag{26}$$

对于一个模糊集合, 若对 $\forall x\in X$, 都有 $L_x = I$, 则 Zadeh 关于二型模糊集合定义就是定义 9 的特别情形, 将 Zadeh 定义下的模糊集合记为 $\widetilde{\omega}$. 若 $\exists x_0\in X$, 使得 $L_{x_0}\neq I$, 则存在 $\widetilde{\omega}\in I^I$ 使得 $\mu_\omega^2 = \mu_{\widetilde{\omega}}^2|_{\overline{supp(\widetilde{\omega})}}$.

这样不用考虑 Zadeh 定义下次隶属度为 0 的点, 可以简化二型模糊集合的表述式与对实际问题的描述, $\widetilde{\omega}|_{\overline{supp(\widetilde{\omega})}} = \omega$, 下面无特殊说明, 二型模糊集合为 ω.

称以单位区间的子集为论域的模糊集合为单位模糊集合. 如式 (24) 与 (27) 中的 f_x 与 g_x 均为单位模糊集合.

如果对 $\forall x\in X$, $\forall u\in L_x$, 都有 $\mu_\omega^2(x,u) = 1$, 则称 ω 为一个区间二型模糊集合.

2.2 二型模糊集合在一点的限制

二型模糊集合 ω 的主隶属函数在点 $x\in X$ 的限制记为 $\mu_\omega^1|_x$, 其定义如下:

$$\mu_\omega^1|_x : \{x\}\to C(2^I) \tag{27}$$

$$x\mapsto L_x \tag{28}$$

因为次隶属函数定义在 $\cup_{x\in X}x\times L_x\subseteq X\times I$ 上, 所以次隶属函数 μ_ω^2 在点 (x,u) 的限制为 $\mu_\omega^2|_{(x,u)}$, 定义如下:

$$\mu_\omega^2|_{(x,u)}:(x,u)\rightarrow I$$

称 μ_ω^2 与 $X\times I\times I$ 中的 $x=e\in X$ 的交集为嵌入单位模糊集合 f_e^*, 定义为

$$f_e^*:\{e\}\times L_e\rightarrow I \tag{29}$$

$$e\times u\rightarrow z(u) \tag{30}$$

即

$$f_e^*=\cup_{u\in L_e}e\times u\times z(u) \tag{31}$$

二型模糊集合的隶属函数 μ_ω 在点 $e\in X$ 的限制为 $\mu_\omega|_e$, 定义如下:

$$\mu_\omega|_e:\{e\}\rightarrow I^{L_e} \tag{32}$$

$$e\mapsto f_e \tag{33}$$

即

$$\mu_\omega|_e=e\times f_e \tag{34}$$

称 f_e 为单位模糊集合, 表示为

$$f_e=\{(u,z)|u\in L_e,z=\mu_{f_e}(u)\in[0,1]\} \tag{35}$$

或

$$f_e=\int_{u\in L_e}\frac{\mu_{f_e}(u)}{u} \tag{36}$$

明显, $f_e^*=e\times f_e$, 可表示为

$$f_e^*=\{(e,u,z)|u\in L_e,z=\mu_{f_e}(u)\in[0,1]\} \tag{37}$$

或

$$f_e^*=\int_{u\in L_e}\frac{\mu_{f_e}(u)}{(e,u)} \tag{38}$$

例 1. 设论域 $X=\{1,3,7\}$ 上的一个二型模糊集合的主隶属度定义为

$$L_x=\begin{cases}[0.2,0.5], & 若\ x=1\\ [0.3,0.7], & 若\ x=3\\ [0.5,0.9], & 若\ x=7\end{cases}$$

已知, $L_3=[0.3,0.7]$, 定义在 L_3 上的一个单位模糊集合 f_3 表示为

$$\mu_{f_3(u)}=\begin{cases}5u-1.5, & 若\ 0.3\le u\le 0.5\\ 3.5-5u, & 若\ 0.5<u\le 0.7\end{cases}$$

或

$$f_3(u)=\int_{0.3\le u\le 0.5}\frac{5u-1.5}{u}+\int_{0.5<u\le 0.7}\frac{3.5-5u}{u} \tag{39}$$

如图 1 所示.

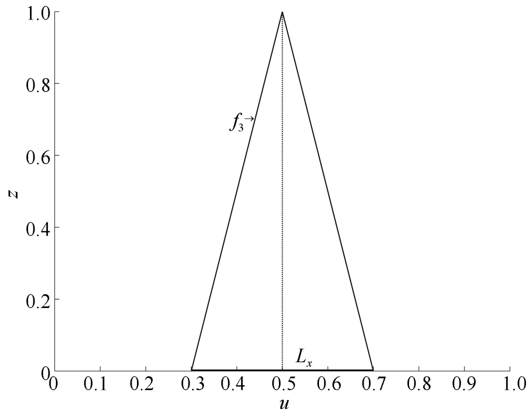


图 1 单位模糊集合

Fig. 1 Unit fuzzy set

由图 1 知, 单位模糊集合 f_3 以主隶属度 $L_3\subseteq I$ 为论域, 对应的隶属函数为连续函数, 因此, f_3 的支集为 $(0.3,0.7)$, 是一个开集, 不包含 L_3 的左右两个端点 0.3, 0.7, 其支集的闭包即为主隶属度 $L_3=[0.3,0.7]$.

进一步, 对应的嵌入单位模糊集合 f_3^* 的隶属函数表示为

$$\mu_{f_3^*(u)}=\begin{cases}5u-1.5, & 若\ x=3,0.3\le u\le 0.5\\ 3.5-5u, & 若\ x=3,0.5<u\le 0.7\end{cases}$$

则

$$f_3^*(u)=\int_{u\in[0.3,0.5]}\frac{5u-1.5}{(3,u)}+\int_{u\in(0.5,0.7]}\frac{3.5-5u}{(3,u)} \tag{40}$$

如图 2 所示.

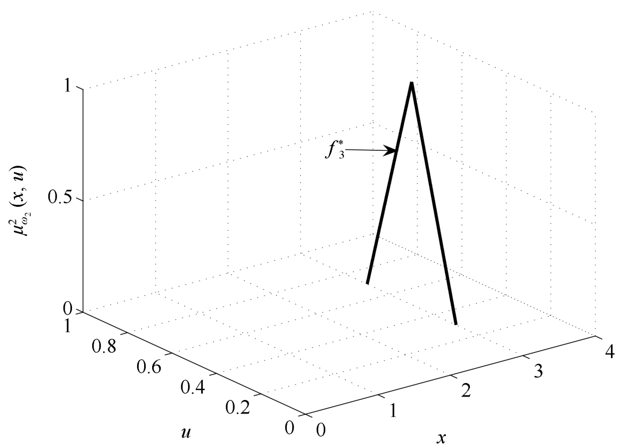


图 2 嵌入单位模糊集合

Fig. 2 Embedded unit fuzzy set

2.3　二型模糊集合的支集

由 Zadeh 关于模糊集合支集的定义, 二型模糊集合 ω 的支集为在 $X\times I$ 中使得次隶属度大于 0 的全体元素构成的集合, 记为 $supp(\omega)$, 即

$$supp(\omega)=\{(x,u)|\mu_\omega^2(x,u)>0\} \tag{41}$$

因为 $(0,1]$ 为单位区间 $[0,1]$ 的开集, 若 μ_ω^2 为一个连续函数, 则由连续函数的性质, $supp(\omega)$ 为 $X\times I$ 中的一个开集. 记 $CoS(\omega)$ 为支集 $supp(\omega)$ 的闭包 (Closure of support), 表示为

$$CoS(\omega)=\overline{\{(x,u)|\mu_\omega^2(x,u)>0\}} \tag{42}$$

明显, $CoS(\omega)$ 为 $X\times I$ 中的一个闭子集, 且

$$CoS(\omega)=\bigcup_{x\in X} x\times L_x \tag{43}$$

二型模糊集合在 $x=e$ 的限制 $\omega|_e$ 支集的闭包定义为

$$CoS(\omega|_e)=\overline{\{(e,u)|\mu_{\omega|_e}^2(e,u)>0\}} \tag{44}$$

记为 $CoS(\omega|_e)$, 且 $CoS(\omega|_e)=e\times L_e$.

明显,

$$CoS(\omega)=\bigcup_{e\in X} e\times L_e$$

根据主隶属度的特点, 可以将 L_x 分为以下几种情形:

1) 离散型

$$L_x=\{a_x^1,\cdots,a_x^{n_x}\},\ a_x^n\in[0,1] \tag{45}$$

2) 连通型

$$L_x=[a_x,b_x],\ 0\leq a_x\leq b_x\leq 1 \tag{46}$$

3) 复合型

$$L_x=\{a_x^1,\cdots,a_x^{n_x}\}\bigcup\bigcup_{i=1}^N[a_{ix},b_{ix}] \tag{47}$$

对应地, 二型模糊集合支集的闭包 $CoS(\omega)$ 可以分成以下几类:

2.3.1　离散的 CoS

论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 对任意 $x\in X, L_x$ 离散, 则称 $CoS(\omega)$ 是离散的, 可以表示为

$$\begin{aligned}CoS(\omega)=\{&(x_1,a_1^1),(x_1,a_1^2),\cdots,(x_1,a_1^{n_1}),\\&(x_2,a_2^1),(x_2,a_2^2),\cdots,(x_2,a_2^{n_2}),\\&\vdots\\&(x_n,a_n^1),(x_n,a_n^2),\cdots,(x_n,a_n^{n_n})\}\end{aligned}$$

文献 [21] 中的图 5 即为一个离散 CoS.

2.3.2　半连通 CoS

论域 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$, $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$, $L_{x_i}=[a_{x_i},b_{x_i}]$, 则称 $CoS(\omega)$ 半连通, 表示为

$$CoS(\omega)=\sum_{i=1}^n x_i\times[a_{x_i},b_{x_i}] \tag{48}$$

文献 [21] 中图 6 即为一个半连通 CoS.

2.3.3　连通 CoS

若 CoS 中的任意两点可以由含于 CoS 中的线连接起来, 则称 CoS 是连通的.

连通的 CoS 可以分为两类: 单连通 CoS, 多连通 CoS (又称复连通).

2.3.3.1 单连通 CoS

论域 X 及 CoS 连通, 对 $x\in X$, $L_x=[a_x,b_x]$ 连通, 则称 $CoS(\omega)$ 单连通, 可以表示为

$$CoS(\omega)=\bigcup_{i=1}^N x\times[a_x,b_x] \tag{49}$$

图 3 就是一个单连通的 $CoS(\omega)$.

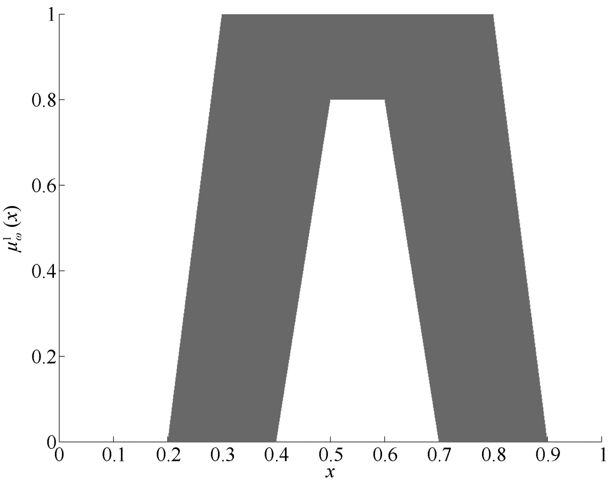


图 3　单连通 CoS

Fig. 3　Single connected CoS

2.3.3.2 多连通 CoS

论域 X 与 CoS 连通, 存在 $x_0\in X$, 使得 L_{x_0} 非连通, 则称 CoS 为多连通区域.

图 4 即为一个多连通 CoS.

如果 CoS 多连通, 对任意 $x\in X$, $L_x=\{a_x^1,\cdots,a_x^N\}$ 离散, 其中, $0\leq a_x^i\leq 1$, $1\leq i\leq N$. 且

$$A^i=\{(x,a_x^i)|x\in X\} \tag{50}$$

为论域 X 上的一个连通的模糊集合, 明显,

$$CoS = \bigcup_{i=1}^{N} A^i \tag{51}$$

则称 $CoS(\omega)$ 线连通. 图 19 即为一个线连通 CoS.

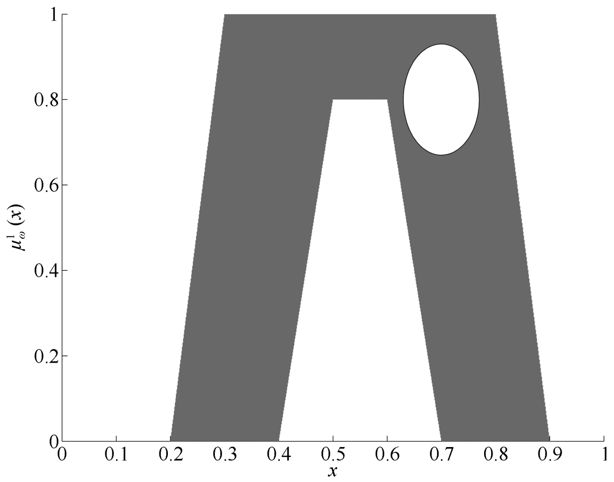


图 4 多连通 CoS

Fig. 4 Multi-connected CoS

2.3.4 复合 $\boldsymbol{CoS}$

不属于上述三种类型的 CoS, 都称为复合型 CoS. 一个复合 CoS 可以分解为两种或两种以上上述类型的 CoS 之并的形式.

2.4 $\boldsymbol{x, u, z}$-截图

设论域 X 上的一个二型模糊集合 ω 与 $x = x_0$ 相交得到的交集称为 x_0-截图, 表示为

$$\begin{cases} z = \mu_\omega^2(x, u) \\ x = x_0 \end{cases}$$

即 $z = \mu_\omega^2(x_0, u)$. 明显, x_0-截图即为一个横坐标为 x_0 的嵌入单位模糊集合 $f^*_{x_0}$.

类似地, 可以定义二型模糊集合的 u_0-截图与 z_0-截图.

二型模糊集合 ω 与 $u = u_0$ 相交得到的交集称为 u_0-截图, 表示为

$$\begin{cases} z = \mu_\omega^2(x, u) \\ u = u_0 \end{cases}$$

即 $z = \mu_\omega^2(x, u_0)$. 明显, 当 X 为实数空间时, u_0-截图为 $X \times I \times I$ 中主隶属度为 u_0 的一条 (或多条) 曲线, 或一个点 (或点列).

二型模糊集合 ω 与 $z = z_0$ 相交得到的交集称为 z_0-截图, 表示为

$$\begin{cases} z = \mu_\omega^2(x, u) \\ z = z_0 \end{cases}$$

即 $z_0 = \mu_\omega^2(x, u)$. 明显, 当 X 为实数空间时, z_0-截图为 $X \times I \times I$ 中次隶属度为 z_0 的一条 (或多条) 曲线, 或一个点 (或点列).

2.5 上下边界

对于论域 X 的一个二型模糊集合 ω, 若其主隶属度 L_x 连通, 即 $L_x = [a_x, b_x]$, 则集合 $\{(x, b_x)|x \in X\}$ 与 $\{(x, a_x)|x \in X\}$ 分别称为 $CoS(\omega)$ 的上、下边界, 分别记为 $UMF(CoS(\omega)), LMF(CoS(\omega))$, 即

$$UMF(CoS(\omega)) = \{(x, b_x)|x \in X, b_x = sup\mu_\omega^1(x)\} \tag{52}$$

$$LMF(CoS(\omega)) = \{(x, a_x)|x \in X, a_x = inf\mu_\omega^1(x)\} \tag{53}$$

实际上, $UMF(CoS(\omega)), LMF(CoS(\omega))$ 为定义在论域 X 上的两个一型模糊集合. 由此可见, 对于一个二型模糊集合 ω, 若对 $\forall x \in X$, 其主隶属度 L_x 连通, 则其支集的闭包 $CoS(\omega)$ 由其上、下边界唯一确定. 所以只有当对 $\forall x \in X$, 其主隶属度 L_x 连通时, $CoS(\omega)$ 可由其上、下边界唯一确定, 在此基础上, 将对区间二型模糊集合的讨论转化为其对应的 CoS 的上下边界上进行才合适.

3 二型模糊集合的分类与表述

根据论域及主隶属是否连通, 本节将二型模糊集合分为四类: 离散型, 半连通型, 连通型及复合型. 对于每一种类型, 给出其对应的表述式. 本节对于二型模糊集合表述的讨论限于 $X \subseteq R$, 对于其他情形, 需要根据具体的情况写出相应的表述式.

3.1 离散二型模糊集合

若 X, L_x 均为离散集合, 则 ω 为一个离散二型模糊集合, 表示为

$$\omega = \sum_{x \in X} \sum_{u \in L_x} \frac{\mu_\omega^2(x, u)}{(x, u)} \tag{54}$$

不妨设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_K\}$, 二型模糊集合 ω 的主隶属度 L_x 定义如下:

$$\mu_\omega^1(x) = L_x = \begin{cases} \{u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{1N_1}\}, & 若\ \ x = x_1 \\ \{u_{21}, u_{22}, \cdots, u_{2N_2}\}, & 若\ \ x = x_2 \\ \qquad\vdots \\ \{u_{K1}, u_{K2}, \cdots, u_{KN_K}\}, & 若\ \ x = x_K \end{cases}$$

次隶属函数定义如下:

$$\mu_\omega^2(x,u)=\begin{cases}a_{11}, & 若\ x=x_1,u=u_{11}\\ a_{12}, & 若\ x=x_1,u=u_{12}\\ \quad\vdots & \\ a_{1N_1}, & 若\ x=x_1,u=u_{1N_1}\\ a_{21}, & 若\ x=x_2,u=u_{21}\\ a_{22}, & 若\ x=x_2,u=u_{22}\\ \quad\vdots & \\ a_{2N_2}, & 若\ x=x_2,u=u_{2N_2}\\ \quad\vdots & \\ a_{K1}, & 若\ x=x_K,u=u_{K1}\\ a_{K2}, & 若\ x=x_K,u=u_{K2}\\ \quad\vdots & \\ a_{KN_K}, & 若\ x=x_K,u=u_{KN_K}\end{cases}$$

则此离散二型模糊集合可以表述为

$$\begin{aligned}\omega=&\frac{a_{11}}{(x_1,u_{11})}+\frac{a_{12}}{(x_1,u_{12})}+\cdots+\frac{a_{1N_1}}{(x_1,u_{1N_1})}+\\ &\frac{a_{21}}{(x_2,u_{21})}+\frac{a_{22}}{(x_2,u_{22})}+\cdots+\\ &\frac{a_{2N_2}}{(x_2,u_{2N_2})}+\cdots+\frac{a_{K1}}{(x_K,u_{K1})}+\\ &\frac{a_{K2}}{(x_K,u_{K2})}+\cdots+\frac{a_{KN_K}}{(x_K,u_{KN_K})}=\\ &\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N_k}\frac{a_{kn}}{(x_k,u_{kn})}\end{aligned}\tag{55}$$

例 2. 设论域 $X=\{2,5,8\}$ 上的一个离散二型模糊集合 ω_1 的主隶属度定义为

$$\mu_{\omega_1}^1(x)=L_x=\begin{cases}\{0.2,0.4\}, & 若\ x=2\\ \{0.5,0.7\}, & 若\ x=5\\ \{0.8,1\}, & 若\ x=8\end{cases}$$

对应的次隶属度定义为

$$\mu_{\omega_1}^2(x,u)=\begin{cases}0.2, & 若\ x=2,u=0.2\\ 0.1, & 若\ x=2,u=0.4\\ 0.4, & 若\ x=5,u=0.5\\ 0.5, & 若\ x=5,u=0.7\\ 0.7, & 若\ x=8,u=0.8\\ 0.9, & 若\ x=8,u=1\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}CoS(\omega_1)=\{&(2,0.2),(2,0.4),(5,0.5),\\ &(5,0.7),(8,0.8),(8,1)\}\end{aligned}$$

为 $X\times I$ 中的六个点.

$$\begin{aligned}\omega_1=&\frac{0.2}{(2,0.2)}+\frac{0.1}{(2,0.4)}+\frac{0.4}{(5,0.5)}+\\ &\frac{0.5}{(5,0.7)}+\frac{0.7}{(8,0.8)}+\frac{0.9}{(8,1)}\end{aligned}$$

为 $X\times I\times I$ 中的六个点, 见图 5 中 $*$ 所示位置.

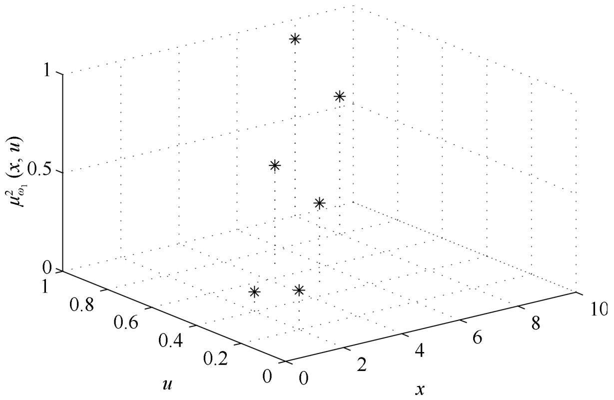


图 5　离散二型模糊集合

Fig. 5　Discrete type-2 fuzzy set

3.2　半连通二型模糊集合

若 X 离散, L_x 连通, 且对 $\forall x\in X$, 次隶属函数 $\mu_\omega^2(x,u)$ 在 $x\times L_x$ 上关于变量 u 连续, 则称 ω 为一个半连通二型模糊集合.

一个半连通二型模糊集合 ω 可以表示为

$$\omega=\sum_{x\in X}\int_{u\in L_x}\frac{\mu_\omega^2(x,u)}{(x,u)}\tag{56}$$

不妨设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_K\}$, 其主隶属度定义如下:

$$\mu_\omega^1(x)=L_x=\begin{cases}[a_1,b_1], & 若\ x=x_1\\ [a_2,b_2], & 若\ x=x_2\\ \quad\vdots & \\ [a_K,b_K], & 若\ x=x_K\end{cases}$$

因为二型模糊集合 ω 的次隶属函数 $\mu_\omega^2(x,u)$ 在点 (x_k,u) 的隶属度为嵌入单位模糊集合 $f_{x_k}^*$ 在点 (x_k,u) 的隶属度, 所以如何定义次隶属函数, 只需要确定对应的嵌入单位模糊集合 f_{x_k} 的隶属函数即可. 对于任意 $x=x_k,k=1,2,\cdots,K$, 且 $L_{x_k}=[a_k,b_k]$ 为单位模糊集合 f_{x_k} 的支集的闭包. 因此, f_{x_k} 的隶属函数只需考虑在 $L_{x_k}=[a_k,b_k]$ 上的部分即可.

单位模糊集合的隶属函数为三角形 (或梯形、高斯型) 的半连通二型模糊集合称为半连通三角 (或梯形、高斯) 二型模糊集合, 下面分别讨论这三种情形的二型模糊集合.

3.2.1 半连通三角二型模糊集合

若 ω 为论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 上一个半连通三角二型模糊集合, 即 f_{x_k} 为三角型模糊集合, 则其隶属函数为分段函数, 故 f_{x_k} 的隶属函数为

$$f_{x_k}(u)=\begin{cases}\dfrac{h_k(u-a_k)}{c_k-a_k}, & 若\ u\in[a_k,c_k]\\ \dfrac{h_k(u-b_k)}{c_k-b_k}, & 若\ u\in(c_k,b_k]\end{cases}$$

这里, $0\le a_k\le b_k\le 1, 0\le h_k\le 1$, 则

$$\mu_{\omega}^2(x,u)=\begin{cases}\dfrac{h_1(u-a_1)}{c_1-a_1}, & 若\ x=x_1,u\in[a_1,c_1]\\ \dfrac{h_1(u-b_1)}{c_1-b_1}, & 若\ x=x_1,u\in(c_1,b_1]\\ \dfrac{h_2(u-a_2)}{c_2-a_2}, & 若\ x=x_2,u\in[a_2,c_2]\\ \dfrac{h_2(u-b_2)}{c_2-b_2}, & 若\ x=x_2,u\in(c_2,b_2]\\ \vdots & \\ \dfrac{h_K(u-a_K)}{c_K-a_K}, & 若\ x=x_K,\\ & u\in[a_K,c_K]\\ \frac{h_K(u-b_K)}{c_K-b_K}, & 若\ x=x_K,\\ & u\in(c_K,b_K]\end{cases}$$

则该二型模糊集合可以表示为

$$\begin{aligned}\omega=&\int_{u\in[a_1,c_1]}\frac{\frac{h_1(u-a_1)}{c_1-a_1}}{(x_1,u)}+\int_{u\in(c_1,b_1]}\frac{\frac{h_1(u-b_1)}{c_1-b_1}}{(x_1,u)}+\\&\int_{u\in[a_2,c_2]}\frac{\frac{h_2(u-a_2)}{c_2-a_2}}{(x_2,u)}+\int_{u\in(c_2,b_2]}\frac{\frac{h_2(u-b_2)}{c_2-b_2}}{(x_2,u)}+\cdots+\\&\int_{u\in[a_K,c_K]}\frac{\frac{h_K(u-a_K)}{c_K-a_K}}{(x_K,u)}+\int_{u\in(c_K,b_K]}\frac{\frac{h_K(u-b_K)}{c_K-b_K}}{(x_K,u)}=\\&\sum_{k=1}^{K}\Big(\int_{u\in[a_k,c_k]}\frac{\frac{h_k(u-a_k)}{c_k-a_k}}{(x_k,u)}+\int_{u\in(c_k,b_k]}\frac{\frac{h_k(u-b_k)}{c_k-b_k}}{(x_k,u)}\Big)\end{aligned}\tag{57}$$

例 3. 设 ω_2 是定义在论域 $X=\{1,3\}$ 上的一个半连通二型模糊集合, 其主隶属度定义为

$$L_x=\begin{cases}[0.3,0.5], & 若\ x=1\\ [0.6,0.8], & 若\ x=3\end{cases}$$

次隶属函数定义为

$$\mu_{\omega_2}^2(x,u)=\begin{cases}6(u-0.3), & 若\ x=1,u\in[0.3,0.4]\\ 6(0.5-u), & 若\ x=1,u\in(0.4,0.5]\\ 4(u-0.3), & 若\ x=3,u\in[0.3,0.5]\\ 4(0.7-u), & 若\ x=3,u\in(0.5,0.7]\end{cases}$$

则

$$CoS(\omega_2)=1\times[0.3,0.5]+3\times[0.3,0.7]\tag{58}$$

明显, $CoS(\omega_2)\subseteq X\times I$.

从而, 二型模糊集合 ω_2 可以表述为

$$\begin{aligned}\omega_2=&\int_{0.3\le u\le 0.4}\frac{6(u-0.3)}{(1,u)}+\int_{0.4<u\le 0.5}\frac{6(0.5-u)}{(1,u)}+\\&\int_{0.3\le u\le 0.5}\frac{4(u-0.3)}{(3,u)}+\int_{0.5<u\le 0.7}\frac{4(0.7-u)}{(3,u)}\end{aligned}$$

如图 6 所示.

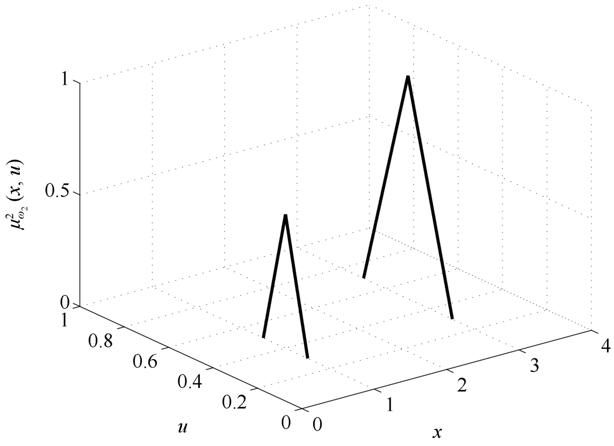


图 6 半连通二型模糊集合

Fig. 6 Partially connected T2 fuzzy set

由图 6 可知, 二型模糊集合 ω_2 由两个嵌入单位模糊集合 f_1^* 与 f_3^* 构成, 记为

$$\omega_2=f_1^*\bigcup f_3^*\tag{59}$$

且每个嵌入单位模糊集合的隶属函数就是两个对应的单位模糊集合的隶属函数.

3.2.2 半连通梯形二型模糊集合

若 ω 为论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 上的一个半连通梯形二型模糊集合, 则其对应的单位模糊集合 f_{x_k} 可以表示为

$$f_{x_k}(u)=\begin{cases}\dfrac{h_k(u-a_k)}{c_k-a_k}, & 若\ u\in[a_k,c_k]\\ h_k, & 若\ u\in(c_k,d_k]\\ \dfrac{h_k(u-b_k)}{d_k-b_k}, & 若\ u\in(d_k,b_k]\end{cases}$$

这里, $0 \le a_k \le b_k \le 1, 0 \le h_k \le 1$, 则

$$\mu_{\omega}^2(x,u)=\begin{cases}\frac{h_1(u-a_1)}{c_1-a_1}, & 若\ x=x_1, u\in[a_1,c_1]\\ h_1, & 若\ x=x_1, u\in(c_1,d_1]\\ \frac{h_1(u-b_1)}{d_1-b_1}, & 若\ x=x_1, u\in(d_1,b_1]\\ \frac{h_2(u-a_2)}{c_2-a_2}, & 若\ x=x_2, u\in[a_2,c_2]\\ h_2, & 若\ x=x_2, u\in(c_2,d_2]\\ \frac{h_2(u-b_2)}{d_2-b_2}, & 若\ x=x_2, u\in(d_2,b_2]\\ \vdots & \\ \frac{h_K(u-a_K)}{c_K-a_K}, & 若\ x=x_K, u\in[a_K,c_K]\\ h_K, & 若\ x=x_K, u\in(c_K,d_K]\\ \frac{h_K(u-b_K)}{d_K-b_K}, & 若\ x=x_K, u\in(d_K,b_K]\end{cases}$$

则该二型模糊集合可以表示为

$$\begin{aligned}\omega =&\int_{u\in[a_1,c_1]}\frac{\frac{h_1(u-a_1)}{c_1-a_1}}{(x_1,u)}+\int_{u\in(c_1,d_1]}\frac{h_1}{(x_1,u)}+\\ &\int_{u\in(d_1,b_1]}\frac{\frac{h_1(u-b_1)}{d_1-b_1}}{(x_1,u)}+\int_{u\in[a_2,c_2]}\frac{\frac{h_2(u-a_2)}{c_2-a_2}}{(x_2,u)}+\\ &\int_{u\in(c_2,d_2]}\frac{h_2}{(x_2,u)}+\int_{u\in(d_2,b_2]}\frac{\frac{h_2(u-b_2)}{d_2-b_2}}{(x_2,u)}+\\ &\cdots+\\ &\int_{u\in[a_K,c_K]}\frac{\frac{h_K(u-a_K)}{c_K-a_K}}{(x_K,u)}+\int_{u\in(c_K,d_K]}\frac{h_K}{(x_K,u)}+\\ &\int_{u\in(d_K,b_K]}\frac{\frac{h_K(u-b_K)}{d_K-b_K}}{(x_K,u)}=\\ &\sum_{k=1}^{K}\left(\int_{u\in[a_k,c_k]}\frac{\frac{h_k(u-a_k)}{c_k-a_k}}{(x_k,u)}+\int_{u\in(c_k,d_k]}\frac{h_k}{(x_k,u)}+\right.\\ &\left.\int_{u\in(d_k,b_k]}\frac{\frac{h_k(u-b_k)}{d_k-b_k}}{(x_k,u)}\right)\end{aligned}$$

例 4. 设 ω_3 是定义在论域 $X=\{2,6\}$ 上的一个半连通二型模糊集合, 其主隶属度定义为

$$L_x=\begin{cases}[0.2,0.5], & 若\ x=2\\ [0.4,0.7], & 若\ x=6\end{cases}$$

次隶属函数定义为

$$\mu_{\omega_3}^2(x,u)=\begin{cases}8(u-0.2), & 若\ x=2, u\in[0.2,0.3]\\ 0.8, & 若\ x=2, u\in[0.3,0.4]\\ 8(0.5-u), & 若\ x=2, u\in(0.4,0.5]\\ 10(u-0.4), & 若\ x=6, u\in[0.4,0.5]\\ 1, & 若\ x=6, u\in(0.5,0.6]\\ 10(0.7-u), & 若\ x=6, u\in(0.6,0.7]\end{cases}$$

则

$$CoS(\omega_3)=2\times[0.2,0.5]+6\times[0.4,0.7] \qquad (60)$$

明显, $CoS(\omega_3)\subseteq X\times I$.

因此, ω_3 可以表述为

$$\begin{aligned}\omega_3 =&\int_{0.2\le u\le 0.3}\frac{8(u-0.2)}{(2,u)}+\int_{0.3\le u\le 0.4}\frac{0.8}{(2,u)}+\\ &\int_{0.4<u\le 0.5}\frac{8(0.5-u)}{(2,u)}+\int_{0.4\le u\le 0.5}\frac{10(u-0.4)}{(6,u)}+\\ &\int_{0.5\le u\le 0.6}\frac{1}{(6,u)}+\int_{0.6<u\le 0.7}\frac{10(0.7-u)}{(6,u)}\end{aligned}$$

如图 7 所示.

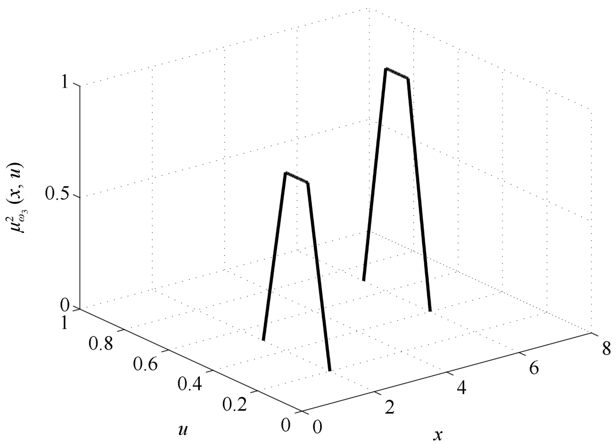


图 7 半连通二型模糊集合

Fig. 7 Partially connected T2 fuzzy set

由图 7 知, 半连通二型模糊集合 ω_3 由两个嵌入单位模糊集合 f_2^* 与 f_6^* 构成, 且 f_2^* 与 f_6^* 的隶属函数均为梯形.

3.2.3 半连通高斯二型模糊集合

若 ω 为论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 上的一个半连通高斯二型模糊集合, 即单位模糊集合 f_{x_k} 的隶属函数为高斯型, 则 f_{x_k} 可以表示为

$$f_{x_k}(u)=\mathrm{e}^{-(u-c_k)^2} \qquad (61)$$

其中, $c_k\in[0,1]$. 则

$$\mu_\omega^2(x,u)=\begin{cases} t_1\mathrm{e}^{-r_1(u-c_1)^2}, & 若\ x=x_1, u\in[a_1,b_1] \\ t_2\mathrm{e}^{-r_2(u-c_2)^2}, & 若\ x=x_2, u\in[a_2,b_2] \\ \quad\vdots & \\ t_K\mathrm{e}^{-r_k(u-c_K)^2}, & 若\ x=x_K, u\in[a_K,b_K] \end{cases}$$

这里, $0\le a_k\le c_k\le b_k\le 1, 0\le t_k\le 1$, $0\le k\le K$. 该二型模糊集合可以表示为

$$\begin{aligned}\omega=&\int_{u\in[a_1,b_1]}\frac{t_1\mathrm{e}^{-r_1(u-c_1)^2}}{(x_1,u)}+\\ &\int_{u\in[a_2,b_2]}\frac{t_2\mathrm{e}^{-r_2(u-c_2)^2}}{(x_2,u)}+\cdots+\\ &\int_{u\in[a_K,b_K]}\frac{t_K\mathrm{e}^{-r_K(u-c_K)^2}}{(x_K,u)}=\\ &\sum_{k=1}^{K}\int_{u\in[a_k,b_k]}\frac{t_k\mathrm{e}^{-r_k(u-c_k)^2}}{(x_k,u)}\end{aligned}$$

例 5. 设 ω_4 是定义在论域 $X=\{3,5,7\}$ 上的一个半二型模糊集合, 其主隶属度定义为

$$L_x=\begin{cases}[0.1,0.7], & 若\ x=3\\ [0.3,0.9], & 若\ x=5\\ [0.4,1], & 若\ x=7\end{cases}$$

次隶属函数定义为

$$\mu_{\omega_4}^2(x,u)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-64(u-0.4)^2}, 若\ x=3, u\in[0.1,0.7]\\ \mathrm{e}^{-64(u-0.6)^2}, 若\ x=5, u\in[0.3,0.9]\\ \mathrm{e}^{-64(u-0.7)^2}, 若\ x=7, u\in(0.4,1]\end{cases}$$

则

$$CoS(\omega_4)=3\times[0.1,0.7]+5\times[0.3,0.9]+7\times[0.4,1] \tag{62}$$

明显, $CoS(\omega_4)\subseteq X\times I$.

因此, ω_4 可以表述为

$$\begin{aligned}\omega_4=&\int_{0.1\le u\le 0.7}\frac{\mathrm{e}^{-64(u-0.4)^2}}{(3,u)}+\\ &\int_{0.3\le u\le 0.9}\frac{\mathrm{e}^{-64(u-0.6)^2}}{(5,u)}+\\ &\int_{0.4<u\le 1}\frac{\mathrm{e}^{-64(u-0.7)^2}}{(7,u)}\end{aligned}$$

如图 8 所示.

由图 8 知, 二型模糊集合 ω_4 由三个嵌入单位模糊集合构成, 且每个嵌入单位模糊集合的隶属函数均为高斯型.

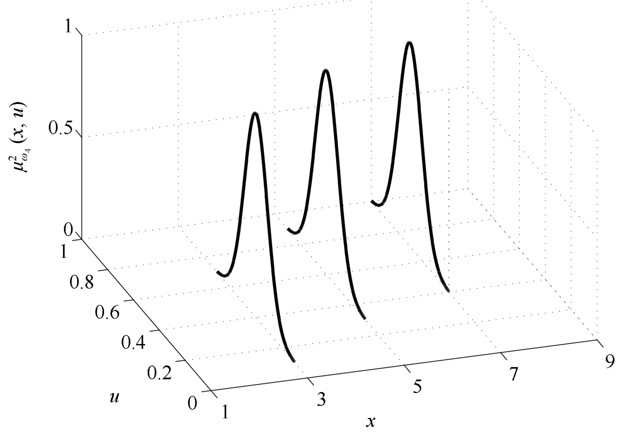


图 8 半连通二型模糊集合

Fig. 8 Partially connected T2 fuzzy set

一个半连通二型模糊集合的单位模糊集合的隶属函数可以有不同的表达式, 也就是说, 一个半离散二型模糊集合可以有不同类型的嵌入单位模糊集合构成, 由图 6～8 知, 嵌入单位模糊集合有助于半离散二型模糊集合的直观了解.

3.3 连通二型模糊集合

如果二型模糊集合 ω 是连通的, 那么对于集合 ω 内的任意两点都可以用含于 ω 的线连接起来. 因此定义为:

设 ω 是定义论域 X 上的一个二型模糊集合, 若隶属函数的闭包 $CoS(\omega)$ 连通, 且次隶属函数 $\mu_\omega^2(x,u)$ 在

$$CoS(\omega)=\bigcup_{x\in X}x\times L_x \tag{63}$$

上连续, 则称 ω 是论域 X 上的一个连通二型模糊集合, 表示为

$$\omega=\int_{x\in X}\int_{u\in L_x}\frac{\mu_\omega^2(x,u)}{(x,u)} \tag{64}$$

根据二型模糊集合的主隶属度、CoS 及次隶属函数的不同, 可以将二型模糊集合的连通分为以下三种情形: 线连通, 复连通, 单连通. 下面给出连通二型模糊集合的表述, 对于单 (或复) 连通二型模糊集合, 需要先采用 CoS 二 (或三) 次划分法来对 CoS 进行分割.

3.3.1 单连通二型模糊集合

若次隶属函数支集的闭包 CoS 单连通, 且次隶属函数 $\mu_\omega^2(x,u)$ 在 $CoS(\omega)=\bigcup_{x\in X}x\times L_x$ 上连续, 则 ω 为一个单连通二型模糊集合, 表示为式 (64).

一个单连通二型模糊集合可以看成是其嵌入单位模糊集合沿着参变量所在轨迹移动所形成的图形.

也就是说, 一个单连通二型模糊集合对应的次隶属函数支集闭包及曲面均没有洞.

文献 [21] 提出了 FOU 划分法给出区间二型模糊集合的表述, 该文中的 FOU 即为本文的 $CoS(\omega)$, 因此, 该文中的 FOU 划分法即为本文中的 $CoS(\omega)$ 划分法, 步骤相同.

这里提出 $CoS(\omega)$ 二次划分法来表述一般二型模糊集合, 对 $CoS(\omega)$ 进行第一次划分得 P 个一级子区域 $Ap, p=1,2,\cdots,P$, 二型模糊集合 ω 的次隶属函数在每个一级子区域 Ap 具有相同的解析表达式; 对每个子区域 Ap 按照 CoS 划分法 (又称为 CoS 第一次划分) 进行第二次划分, 得 K_p 个二级子区域 Apk, $k=1,2,\cdots,K_p$, 使得每个二级子区域 Apk 的上下边界具有相同的解析表达式. 对于一般的二型模糊集合, 其次隶属函数的表述式一般由两个或两个以上的解析表达式给出. 这里, 不妨设由两个解析表达式给出 (对于由多个解析式给出的二型模糊集合, 可以依次类推), 设这两个解析表达式的几何图形的交线为曲线 q^*, 曲线 q^* 在 $CoS(\omega)$ 上的投影为曲线 q, 曲线 q 将 $CoS(\omega)$ 分为两部分 $A1$, $A2$, 得 $CoS(\omega)$ 的第一次划分, 再采用 CoS 划分法对 $A1$, $A2$ 进行分割, 得 $CoS(\omega)$ 的第二次划分.

在实际应用中, 隶属函数为三角形、梯形及高斯型的模糊集合应用较多, 若单位模糊集合的隶属函数为三角形 (或梯形、高斯型), 则称对应的连通二型模糊集合为单连通三角 (梯形、高斯) 二型模糊集合, 下面将给出这三类二型模糊集合的解析表达式.

3.3.1.1 单连通三角二型模糊集合

若 ω 是论域 X 上一个单连通二型模糊集合, 其单位模糊集合为三角隶属函数, 不妨设在该三角隶属函数在左右端点的值均为 0. 即对于 $x_0\in X$, 单位模糊集合 $f_{x_0}: L_{x_0}\to I$ 定义为

$$\mu_{f_{x_0}}=\begin{cases}\dfrac{h(x_0)(u-b_0)}{c_0-b_0}, & 若\ b_0\le u\le c_0\\ \dfrac{h(x_0)(u-a_0)}{c_0-a_0}, & 若\ c_0< u\le a_0\end{cases}$$

这里, $u\in L_{x_0}\subseteq I$.

对应的嵌入单位模糊集合 $f^*_{x_0}: x_0\times L_{x_0}\to I$ 定义为

$$\mu_{f^*_{x_0}}=\begin{cases}\dfrac{h(x_0)(u-b_0)}{c_0-b_0}, & 若\ x=x_0, b_0\le u\le c_0\\ \dfrac{h(x_0)(u-a_0)}{c_0-a_0}, & 若\ x=x_0, c_0< u\le a_0\end{cases}$$

易知, 嵌入单位模糊集合 $f^*_{x_0}$ 的三个顶点分别为 $A_0(x_0,a_0,0), C_0(x_0,c_0,h_0), B_0(x_0,b_0,0)$. 将 ω 看成 $X\times I\times I$ 中的曲面, 由空间解析几何相关理论与方法 [31], 当 x 在论域 X 变化时, 嵌入单位模糊集合的三个顶点变成动点 A, C, B, 在空间 $X\times I\times I$ 中的位置相应地发生改变, 其变化轨迹分别为空间 $X\times I\times I$ 中的三条曲线 a^*, c^*, b^*, 这三条曲线在底面 $X\times I$ 的投影为曲线 $\tilde{a}, \tilde{c}, \tilde{b}$. 其中, $\tilde{a}, \tilde{b}$ 为 $CoS(\omega)$ 的上下边界, 即两个一型模糊集合, $\tilde{c}$ 为含于 $CoS(\omega)$ 中的另一个模糊集合. 曲线 $\tilde{a}, \tilde{c}, \tilde{b}$ 在点 x 的隶属度分别为 $\tilde{a}(x), \tilde{c}(x), \tilde{b}(x)$, 且 $\tilde{b}(x)\le\tilde{c}(x)\le\tilde{a}(x)$, 因此可得

$$CoS(\omega)=\bigcup_{x\in X} x\times[\tilde{b}(x),\tilde{a}(x)] \tag{65}$$

由 $CoS(\omega)$ 划分法, $\tilde{c}$ 将 $CoS(\omega)$ 划分为两个区域 $A1$, $A2$, 其中, $A1$ 的上下边界分别为 $\tilde{a}, \tilde{c}$, $A2$ 的上下边界为 $\tilde{c}, \tilde{b}$, 如图 9 所示.

二型模糊集合在 $A1$ 上的次隶属函数的解析表达式为

$$\mu^2_\omega|_{A1}=\frac{\frac{h(x)(u-\tilde{a}(x))}{\tilde{c}(x)-\tilde{a}(x)}}{(x,u)} \tag{66}$$

其在 $A2$ 上的次隶属函数的解析表达式为

$$\mu^2_\omega|_{A2}=\frac{\frac{h(x)(u-\tilde{b}(x))}{\tilde{c}(x)-\tilde{b}(x)}}{(x,u)} \tag{67}$$

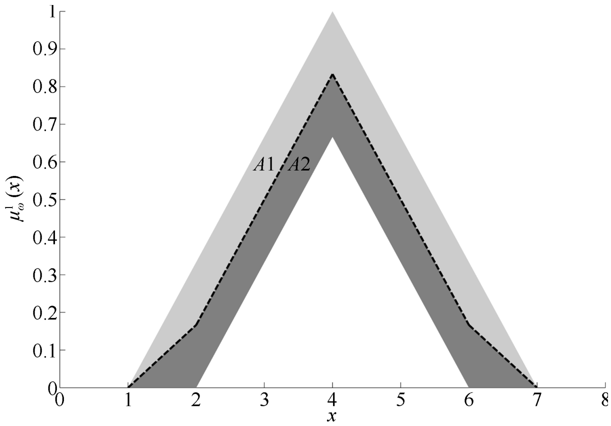


图 9　单连通三角二型模糊集合 CoS 的第一次划分

Fig. 9　The first partition for CoS of simply connected triangular T2 FS

因此, 由 $CoS(\omega)$ 划分法, ω 可以表述为

$$\omega=\int_{x\in X}\int_{u\in[\tilde{b}(x),\tilde{c}(x)]}\frac{\frac{h(x)(u-\tilde{b}(x))}{\tilde{c}(x)-\tilde{b}(x)}}{(x,u)}+\int_{x\in X}\int_{u\in(\tilde{c}(x),\tilde{a}(x)]}\frac{\frac{h(x)(u-\tilde{a}(x))}{\tilde{c}(x)-\tilde{a}(x)}}{(x,u)}$$

由 $CoS(\omega)$ 划分法, 得到两个一级子区域, 二型模糊集合 ω 在每个子区域上具有相同的次隶属函数, 不妨设曲线 $\tilde{a}, \tilde{c}, \tilde{b}$ 分别具有如下表达式的形式:

$$\tilde{a}(x)=\begin{cases}\tilde{a}_1(x), & \text{若 } a_0 \le x \le a_1\\ \tilde{a}_2(x), & \text{若 } a_1 < x \le a_2\\ \quad\vdots & \\ \tilde{a}_N(x), & \text{若 } a_{N-1} < x \le a_N\end{cases}$$

$$\tilde{c}(x)=\begin{cases}\tilde{c}_1(x), & \text{若 } c_0 \le x \le c_1\\ \tilde{c}_2(x), & \text{若 } c_1 < x \le c_2\\ \quad\vdots & \\ \tilde{c}_M(x), & \text{若 } c_{M-1} < x \le c_M\end{cases}$$

$$\tilde{b}(x)=\begin{cases}\tilde{b}_1(x), & \text{若 } b_0 \le x \le b_1\\ \tilde{b}_2(x), & \text{若 } b_1 < x \le b_2\\ \quad\vdots & \\ \tilde{b}_K(x), & \text{若 } b_{K-1} < x \le b_K\end{cases}$$

不妨设

$$\begin{aligned}&\{\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_{\tilde{N}}\} =\\ &\qquad \{a_0, a_1, \cdots, a_N\} \bigcup \{c_0, c_1, \cdots, c_M\}\\ &\{\tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_{\tilde{K}}\} =\\ &\qquad \{b_0, b_1, \cdots, b_K\} \bigcup \{c_0, c_1, \cdots, c_M\}\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \cdots < \tilde{a}_{\tilde{N}}\\ \tilde{b}_0 < \tilde{b}_1 < \cdots < \tilde{b}_{\tilde{K}}\end{aligned}$$

分别过 $\tilde{a}_i, i = 0, 1, \cdots, \tilde{N}$, $\tilde{b}_j, j = 0, 1, \cdots, \tilde{M}$ 作 u-轴的平行线, 运用 CoS 划分法分别对两个一级子区域 $A1$, $A2$ 进行第二次划分, 对应地得到 $\tilde{N}, \tilde{K}$ 个二级子区域, 使得每个子区域的上下边界都具有相同的解析表达式, 如图 10 所示.

对任意 $i \in 0, 1, \cdots, \tilde{N}$, 有

$$A1i = \bigcup_{x\in[b_{i-1}, b_i]} x \times [\widetilde{c}_i(x), \widetilde{a}_i(x)] \tag{68}$$

对任意 $j = 0, 1, \cdots, \tilde{M}$, 有

$$A2j = \bigcup_{x\in[a_{j-1}, a_j]} x \times [\widetilde{b}_j(x), \widetilde{c}_j(x)] \tag{69}$$

$$\begin{aligned}CoS(\omega) =& A1 \bigcup A2 = \left(\bigcup_{i=1}^{\tilde{N}} A1i\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{\tilde{M}} A2j\right) =\\ &\left(\bigcup_{i=1}^{\tilde{N}} \bigcup_{x\in[b_{i-1}, b_i]} x \times [\widetilde{c}_i(x), \widetilde{a}_i(x)]\right) \bigcup\\ &\left(\bigcup_{j=1}^{\tilde{M}} \bigcup_{x\in[a_{j-1}, a_j]} x \times [\widetilde{b}_j(x), \widetilde{c}_j(x)]\right)\end{aligned}$$

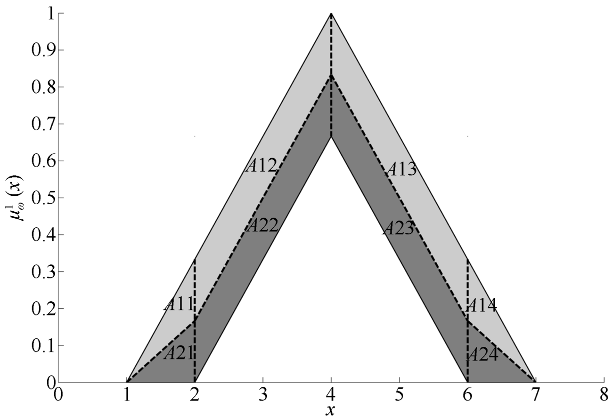


图 10 单连通三角二型模糊集合 CoS 的第二次划分

Fig. 10 The second partition for CoS of simply connected triangular T2 FS

经过二次划分, 二型模糊集合 ω 的次隶属函数不仅在每个二级子区域上具有相同的表述式, 且每个二级子区域的上下边界具有相同的解析表. 这样, ω 在 $A1$, $A2$ 上的限制的表达式分别为

$$\omega|_{A1} = \sum_{\tilde{n}=1}^{\tilde{N}} \int_{x\in[a_{\tilde{n}-1}, a_{\tilde{n}}]} \int_{u\in[b_n(x), c_m(x)]} \frac{\frac{h(x)(u-\tilde{b}(x))}{\tilde{c}(x)-\tilde{b}(x)}}{(x, u)}$$

$$\omega|_{A2} = \sum_{\tilde{k}=1}^{\tilde{K}} \int_{x\in[b_{\tilde{k}-1}, b_{\tilde{k}}]} \int_{u\in[c_m(x), a_k(x)]} \frac{\frac{h(x)(u-\tilde{a}(x))}{\tilde{c}(x)-\tilde{a}(x)}}{(x, u)}$$

从而 ω 可以表示为

$$\begin{aligned}\omega =& \sum_{\tilde{n}=1}^{\tilde{N}} \int_{x\in[a_{\tilde{n}-1}, a_{\tilde{n}}]} \int_{u\in[b_n(x), c_m(x)]} \frac{\frac{h(x)(u-\tilde{b}(x))}{\tilde{c}(x)-\tilde{b}(x)}}{(x, u)} +\\ &\sum_{\tilde{k}=1}^{\tilde{K}} \int_{x\in[b_{\tilde{k}-1}, b_{\tilde{k}}]} \int_{u\in[c_m(x), a_k(x)]} \frac{\frac{h(x)(u-\tilde{a}(x))}{\tilde{c}(x)-\tilde{a}(x)}}{(x, u)}\end{aligned}$$

如图 11 所示.

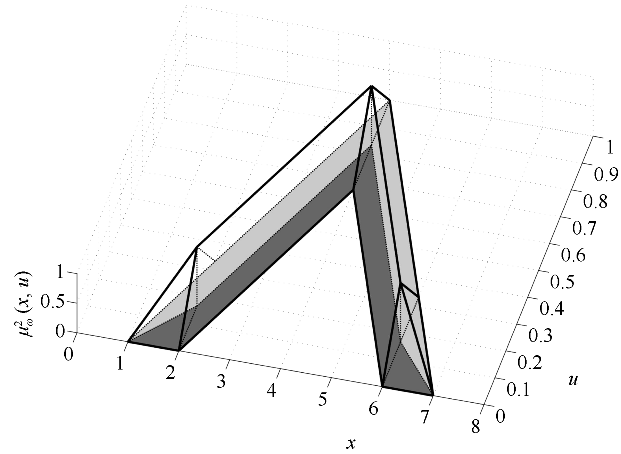


图 11　单连通三角二型模糊集合

Fig. 11　Simply connected triangular T2 FS

3.3.1.2 单连通梯形二型模糊集合

若 ω 是论域 X 上一个单连通二型模糊集合, 其单位模糊集合为梯形隶属函数, 不妨设该梯形隶属函数在左右端点的值均为 0. 即对于 $x_0 \in X$, 单位模糊集合 $f_{x_0}: L_{x_0} \to I$ 定义为

$$\mu_{f_{x_0}} = \begin{cases} \frac{h(x_0)(u-a_0)}{c_0-a_0}, & 若\ a_0 \le u \le c_0 \\ h(x_0), & 若\ c_0 \le u \le d_0 \\ \frac{h(x_0)(u-d_0)}{d_0-b_0}, & 若\ d_0 < u \le b_0 \end{cases}$$

这里, $u \in L_{x_0} \subseteq I$.

对应的嵌入单位模糊集合 $f^*_{x_0}$ 为

$$\mu_{f^*_{x_0}} = \begin{cases} \frac{h(x_0)(u-a_0)}{c_0-a_0}, & 若\ x=x_0, a_0 \le u \le c_0 \\ h(x_0), & 若\ x=x_0, c_0 \le u \le d_0 \\ \frac{h(x_0)(u-d_0)}{d_0-b_0}, & 若\ x=x_0, d_0 < u \le b_0 \end{cases}$$

嵌入单位模糊集合 $f^*_{x_0}$ 的四个顶点分别为 $A_0(x_0,a_0,0)$, $C_0(x_0,c_0,h_0)$, $D_0(x_0,d_0,h_0)$, $B_0(x_0,b_0,0)$, 将 ω 看成 $X\times I\times I$ 中的曲面. 这样, 当 x 在论域 X 变化时, $f^*_{x_0}$ 的四个顶点变成动点 A,C,D,B, 在空间 $X\times I\times I$ 中的变化轨迹分别为四条曲线 a^*,c^*,d^*,b^*, 在底面 $X\times I$ 的投影分别为 $\tilde{a},\tilde{c},\tilde{d},\tilde{b}$. 其中, $\tilde{a},\tilde{b}$ 为 $CoS(\omega)$ 的上下边界, 即两个一型模糊集合, $\tilde{c}$, $\tilde{d}$ 为含于 $CoS(\omega)$ 中的另外两个模糊集合. 曲线 $\tilde{a},\tilde{c},\tilde{d},\tilde{b}$ 在点 x 的隶属度分别为 $\tilde{a}(x),\tilde{c}(x),\tilde{d}(x),\tilde{b}(x)$, 且 $\tilde{a}(x)\le\tilde{c}(x)\le\tilde{d}(x)\le\tilde{b}(x)$, 因此,

$$CoS(\omega) = \bigcup_{x\in X} x\times[\tilde{a}(x),\tilde{b}(x)] \tag{70}$$

由 $CoS(\omega)$ 第一次划分法, $\tilde{c}$ 与 $\tilde{d}$ 将 $CoS(\omega)$ 划分为三个一级子区域 $A1$, $A2$, $A3$, 如图 12. 这三个子区域的上下边界分别为 $\tilde{c}$ 与 $\tilde{a}$, $\tilde{d}$ 与 $\tilde{c}$, $\tilde{b}$ 与 $\tilde{d}$.

在 $A1, A2, A3$ 上 ω 的次隶属函数的解析表达式分别为

$$\mu^2_\omega|_{A1}(x,u) = \frac{\frac{h(x)(u-\tilde{a}(x))}{\tilde{c}(x)-\tilde{a}(x)}}{(x,u)} \tag{71}$$

$$\mu^2_\omega|_{A2}(x,u) = \frac{h(x)}{(x,u)} \tag{72}$$

$$\mu^2_\omega|_{A3}(x,u) = \frac{\frac{h(x)(u-\tilde{b}(x))}{\tilde{d}(x)-\tilde{b}(x)}}{(x,u)} \tag{73}$$

经过 $CoS(\omega)$ 第一次划分法后, ω 可表示为

$$\begin{aligned} \omega = &\int_{x\in X}\int_{u\in[\tilde{a}(x),\tilde{c}(x)]} \frac{\frac{h(x)(u-\tilde{a}(x))}{\tilde{c}(x)-\tilde{a}(x)}}{(x,u)} + \\ &\int_{x\in X}\int_{u\in(\tilde{c}(x),\tilde{d}(x)]} \frac{h(x)}{(x,u)} + \\ &\int_{x\in X}\int_{u\in(\tilde{d}(x),\tilde{b}(x)]} \frac{\frac{h(x)(u-\tilde{b}(x))}{\tilde{d}(x)-\tilde{b}(x)}}{(x,u)} \end{aligned}$$

如图 12 所示.

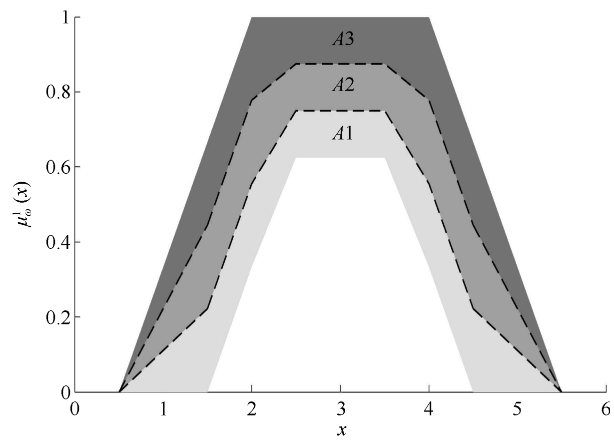


图 12　单连通梯形二型模糊集合 CoS 的第一次划分

Fig. 12　The first partition for CoS of simply connected trapezoidal T2 FS

根据 $A1, A2, A3$ 各自上下边界解析表达式的不同, 不妨设上下边界曲线 $\tilde{a},\tilde{c},\tilde{d},\tilde{b}$ 分别具有如下表达式的形式:

$$\tilde{a}(x) = \begin{cases} \tilde{a}_1(x), & 若\ a_0 \le x \le a_1 \\ \tilde{a}_2(x), & 若\ a_1 < x \le a_2 \\ \ \vdots & \\ \tilde{a}_N(x), & 若\ a_{N-1} < x \le a_N \end{cases}$$

$$\tilde{c}(x)=\begin{cases}\tilde{c}_1(x), & 若\ c_0\le x\le c_1\\ \tilde{c}_2(x), & 若\ c_1< x\le c_2\\ \quad\vdots & \\ \tilde{c}_M(x), & 若\ c_{M-1}< x\le c_M\end{cases}$$

$$\tilde{d}(x)=\begin{cases}\tilde{d}_1(x), & 若\ d_0\le x\le d_1\\ \tilde{d}_2(x), & 若\ d_1< x\le d_2\\ \quad\vdots & \\ \tilde{d}_L(x), & 若\ d_{L-1}< x\le d_L\end{cases}$$

$$\tilde{b}(x)=\begin{cases}\tilde{b}_1(x), & 若\ b_0\le x\le b_1\\ \tilde{b}_2(x), & 若\ b_1< x\le b_2\\ \quad\vdots & \\ \tilde{b}_K(x), & 若\ b_{K-1}< x\le b_K\end{cases}$$

进一步设

$$\{\tilde{a}_0,\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_{\tilde{N}}\}=\{a_0,a_1,\cdots,a_N\}\bigcup\{c_0,c_1,\cdots,c_M\}$$

$$\{\tilde{d}_0,\tilde{d}_1,\cdots,\tilde{d}_{\tilde{L}}\}=\{d_0,d_1,\cdots,d_L\}\bigcup\{c_0,c_1,\cdots,c_M\}$$

$$\{\tilde{b}_0,\tilde{b}_1,\cdots,\tilde{b}_{\tilde{K}}\}=\{b_0,b_1,\cdots,b_K\}\bigcup\{d_0,d_1,\cdots,d_L\}$$

且

$$\tilde{a}_0<\tilde{a}_1<\cdots<\tilde{a}_{\tilde{N}} \tag{74}$$

$$\tilde{d}_0<\tilde{d}_1<\cdots<\tilde{d}_{\tilde{L}} \tag{75}$$

$$\tilde{b}_0<\tilde{b}_1<\cdots<\tilde{b}_{\tilde{K}} \tag{76}$$

运用 CoS 二次划分法对三个子区域 $A1$, $A2$, $A3$ 进行第二次划分, 分别得到 $\tilde{P}$, $\tilde{L}$, $\tilde{K}$ 个二级子区域, 每个二级子区域的上下边界都具有相同的解析表达式, 如图 13 所示.

对于 $p\in\{0,\cdots,\tilde{P}\},l=\{0,\cdots,\tilde{L}\},k=\{0,\cdots,\tilde{K}\}$, 有

$$A1p=\bigcup_{x\in[b_{p-1},b_p]}x\times[\widetilde{d}_p(x),\widetilde{b}_p(x)]$$

$$A2l=\bigcup_{x\in[d_{l-1},d_l]}x\times[\widetilde{c}_l(x),\widetilde{d}_l(x)]$$

$$A3k=\bigcup_{x\in[a_{k-1},a_k]}x\times[\widetilde{a}_k(x),\widetilde{c}_k(x)]$$

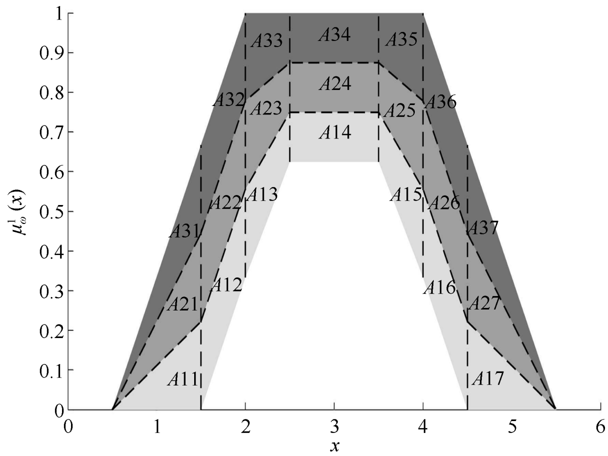


图 13 单连通梯形二型模糊集合 CoS 的第二次划分

Fig. 13 The second partition for CoS of simply connected trapezoidal T2 FS

因此, $CoS(\omega)$ 可以表示为

$$\begin{aligned}CoS(\omega)=&A1\bigcup A2\bigcup A3=\left(\bigcup_{p=1}^{\tilde{P}}A1p\right)\bigcup\\&\left(\bigcup_{l=1}^{\tilde{L}}A2l\right)\bigcup\left(\bigcup_{k=1}^{\tilde{K}}A2k\right)=\\&\left(\bigcup_{p=1}^{\tilde{P}}\bigcup_{x\in[b_{p-1},b_p]}x\times[\widetilde{d}_p(x),\widetilde{b}_p(x)]\right)\bigcup\\&\left(\bigcup_{l=1}^{\tilde{L}}\bigcup_{x\in[d_{l-1},d_l]}x\times[\widetilde{c}_l(x),\widetilde{d}_l(x)]\right)\bigcup\\&\left(\bigcup_{k=1}^{\tilde{K}}\bigcup_{x\in[a_{k-1},a_k]}x\times[\widetilde{a}_k(x),\widetilde{c}_k(x)]\right)\end{aligned}$$

二型模糊集合 ω 在 $A1$, $A2$, $A3$ 上的限制的表达式分别为

$$\omega|_{A1}=\sum_{\tilde{n}=1}^{\tilde{N}}\int_{x\in[a_{\tilde{n}-1},a_{\tilde{n}}]}\int_{u\in[a_n(x),c_m(x)]}\frac{\frac{h(x)(u-\tilde{a}(x))}{\tilde{c}(x)-\tilde{a}(x)}}{(x,u)}$$

$$\omega|_{A2}=\sum_{\tilde{l}=1}^{\tilde{L}}\int_{x\in[d_{\tilde{l}-1},d_{\tilde{l}}]}\int_{u\in[c_m(x),d_l(x)]}\frac{h(x)}{(x,u)}$$

$$\omega|_{A3}=\sum_{\tilde{k}=1}^{\tilde{K}}\int_{x\in[b_{\tilde{k}-1},b_{\tilde{k}}]}\int_{u\in[d_l(x),b_k(x)]}\frac{\frac{h(x)(u-\tilde{b}(x))}{\tilde{d}(x)-\tilde{b}(x)}}{(x,u)}$$

从而 ω 可以表示为

$$\omega=\sum_{\tilde{n}=1}^{\tilde{N}}\int_{x\in[a_{\tilde{n}-1},a_{\tilde{n}}]}\int_{u\in[a_n(x),c_m(x)]}\frac{\frac{h(x)(u-\tilde{a}(x))}{\tilde{c}(x)-\tilde{a}(x)}}{(x,u)}+\sum_{\tilde{l}=1}^{\tilde{L}}\int_{x\in[d_{\tilde{l}-1},d_{\tilde{l}}]}\int_{u\in[c_m(x),d_l(x)]}\frac{h(x)}{(x,u)}+\sum_{\tilde{k}=1}^{\tilde{K}}\int_{x\in[b_{\tilde{k}-1},b_{\tilde{k}}]}\int_{u\in[d_l(x),b_k(x)]}\frac{\frac{h(x)(u-\tilde{b}(x))}{\tilde{d}(x)-\tilde{b}(x)}}{(x,u)}$$

如图 14 所示.

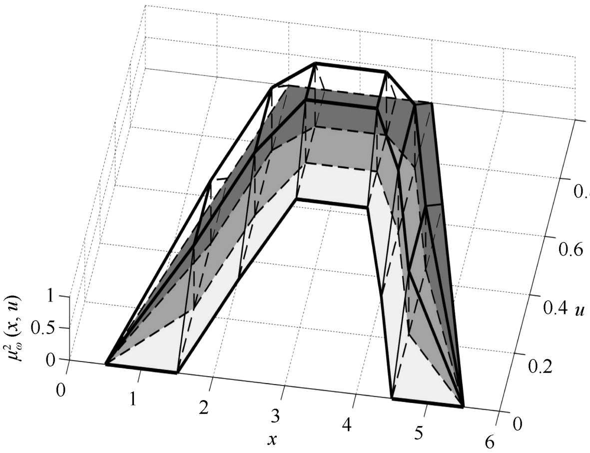


图 14　单连通梯形二型模糊集合

Fig. 14　Simply connected trapezoidal T2 FS

3.3.1.3 单连通高斯二型模糊集合

若论域 X 上一个单连通二型模糊集合 ω 的单位模糊集合为高斯型隶属函数, 对于 $x_0\in X$, 单位模糊集合 f_{x_0} 为

$$\mu_{f_{x_0}}=t(x_0)\mathrm{e}^{-r(x_0)(u-c(x_0))^2}\tag{77}$$

这里, $L_{x_0}=[a_0,b_0], u\in L_{x_0}\subseteq I$.

对应的嵌入单位模糊集合 $f_{x_0}^*$ 为

$$\mu_{f_{x_0}^*}=t(x_0)\mathrm{e}^{-r(x_0)(u-c(x_0))^2}, x=x_0\tag{78}$$

易知, 嵌入单位模糊集合 $f_{x_0}^*$ 的左端点, 中心及右端点分别为 $A_0(x_0,a_0,0)$, $C_0(x_0,c_0,0)$, $B_0(x_0,b_0,0)$, 当 x 在论域 X 变化时, 嵌入单位模糊集合的这三个点变成动点 A,C,B, 其变化轨迹分别为空间 $X\times I\times I$ 中的三条曲线 a^*,c^*,b^*, 这三条曲线在底面 $X\times I$ 的投影为曲线 $\tilde{a},\tilde{c},\tilde{b}$. 其中, $\tilde{a},\tilde{b}$ 为 $CoS(\omega)$ 的上下边界, 即两个一型模糊集合, $\tilde{c}$ 为含于 $CoS(\omega)$ 中的另一个模糊集合. 曲线 $\tilde{a},\tilde{c},\tilde{b}$ 在点 x 的隶属度分别为 $\tilde{a}(x),\tilde{c}(x),\tilde{b}(x)$, 且 $\tilde{a}(x)\le\tilde{c}(x)\le\tilde{b}(x)$, 所以,

$$CoS(\omega)=\bigcup_{x\in X}x\times[\tilde{a}(x),\tilde{b}(x)]\tag{79}$$

根据解析表达式的不同, 设曲线 $\tilde{a},\tilde{c},\tilde{b}$ 分别具有如下表达式的形式:

$$\begin{aligned}\tilde{a}&:u=\tilde{a}(x)\\ \tilde{c}&:u=\tilde{c}(x)\\ \tilde{b}&:u=\tilde{b}(x)\end{aligned}$$

例 6.　设论域 $X=[-20,20]$ 上的一个单连通二型模糊集合 ω_8 单位模糊集合 f_x 的隶属函数为高斯型, 表示如下:

$$f_x(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(u-c(x))^2}\tag{80}$$

其中, $u\in[a(x),b(x)]$, 且

$$a(x)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{32}}\tag{81}$$

$$b(x)=\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{72}}\tag{82}$$

$$c(x)=0.5\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{32}}+\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{72}}\right)\tag{83}$$

这里, $\tilde{b}(x),\tilde{a}(x)$ 即为 $CoS(\omega_8)$ 的上下边界.

因此, 对任意 $x\in[-20,20]$, 二型模糊集合 ω_8 主隶属度表示为

$$L_x=\left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{32}},\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{72}}\right]\tag{84}$$

从而,

$$CoS(\omega_8)=\bigcup_{x\in[-20,20]}x\times\left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{32}},\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{72}}\right]\tag{85}$$

对应的图形如图 15 所示.

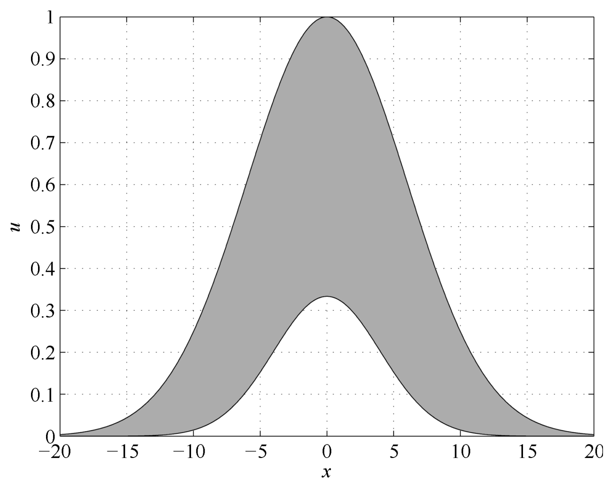


图 15　单连通高斯二型模糊集合的 CoS

Fig. 15　CoS of simply connected Gaussian T2 FS

该单连通高斯二型模糊集合对应的表述式为

$$\omega_8=\int_{x\in[-20,20]}\int_{u\in[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{32}},\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{72}}]}\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(u-c(x))^2}}{(x,u)} \tag{86}$$

如图 16 所示.

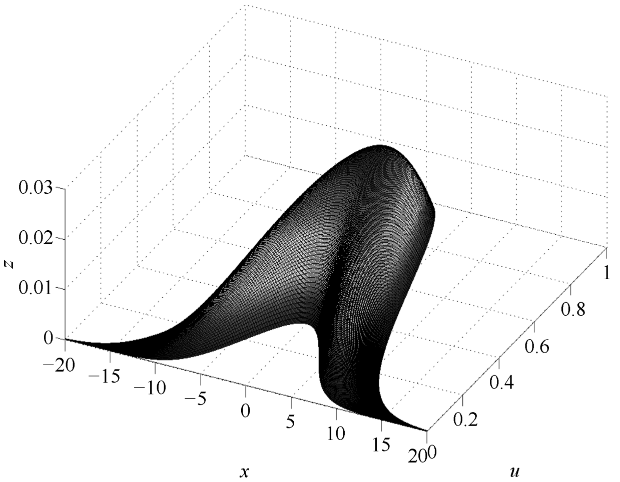


图 16 单连通高斯二型模糊集合

Fig. 16 Simply connected Gaussian T2 FS

由于 $CoS(\omega_8)$ 的上下边界及 ω_8 的单位模糊集合对应的隶属函数均为高斯型, 在对应的论域上只有一个解析表达式, 因此, 在给出 ω_8 的表述式时不需要对 CoS 进行划分, 故这类二型模糊集合的表述式比较简单.

对于 $CoS(\omega_8)$ 的上下边界不是高斯型, 则仍需要先对 $CoS(\omega_8)$ 进行划分, 因为次隶属函数在 $CoS(\omega_8)$ 上具有相同的解析表达式, 所以可以按照区间二型模糊集合的方法写出对应的解析表述式.

3.3.2 多连通二型模糊集合

对于一个多连通二型模糊集合 ω, 其对应的 $CoS\omega$ 也是多连通的, 也就是说, CoS 对应的区域至少含有一个洞, 这里, 不妨设只含有一个洞 (若含有多个洞, 则多次进行如下步骤即可), 不妨设在图 12 中挖了一个圆.

这里, 可用 CoS 三次划分法来表述这个多连通二型模糊集合. CoS 三次划分法分成两种方式: 第一种方式就是第一次划分用平行于 u 轴的直线将 CoS 划分为多个单连通区域 $CoS_1,CoS_2,\cdots,CoS_J$, 使得 $\omega|_{CoS_j}$ 即为一个单连通二型模糊集合, 再对每个 $\omega|_{CoS_j},1\le j\le J$, 按照单连通二型模糊集合的方法进行二次划分, 从而得到该多连通二型模糊集合的表达式; 第二种方式先运用单连通二型模糊集合的 CoS 二次划分法, 在得到类似图 13 的划分后的图形, 不妨设这个洞在划分后的子区域 $A24$ 中, 由洞的最左及最右端点, 分别作平行于 u 轴的直线, 将二级子区域 $A24$ 划分为四个三级子区域 $A241,A242,A243,A244$, 使得划分后的每个三级子区域的上下边界均具有相同的解析表达式, 如图 17 所示.

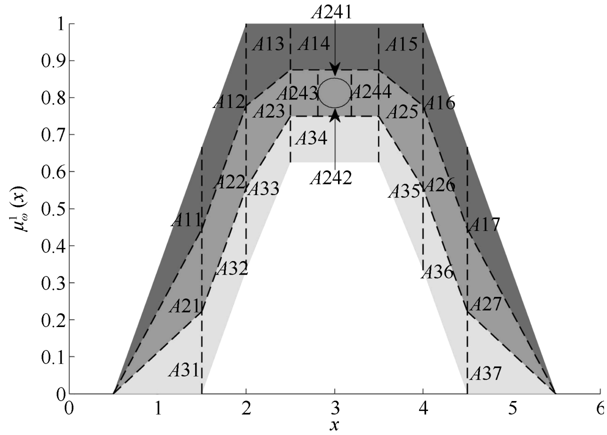


图 17 多连通二型模糊集合 CoS 的第三次划分

Fig. 17 The third partition for multi-connected T2 FS

对应的多连通二型模糊集合如图 18 所示.

由此可知, 对于一个复连通二型模糊集合, 可以先由 CoS 二次划分法给出对应的单连通二型模糊集合的表述式, 在此基础上, 过 CoS 上所挖洞的最左、右端点作平行于 u 轴的直线, 对 CoS 进行第三次划分, 得到的关于 CoS 的三级子区域的上下边界不仅有相同的解析表达式, 且这个复连通二型模糊集合的次离散函数在同一个三级子区域上的限制也具有相同的解析表达式, 等于对应的单连通二型模糊集合的次隶属函数.

复连通二型模糊集合的一类特殊情形就是线连通二型模糊集合, 其定义如下:

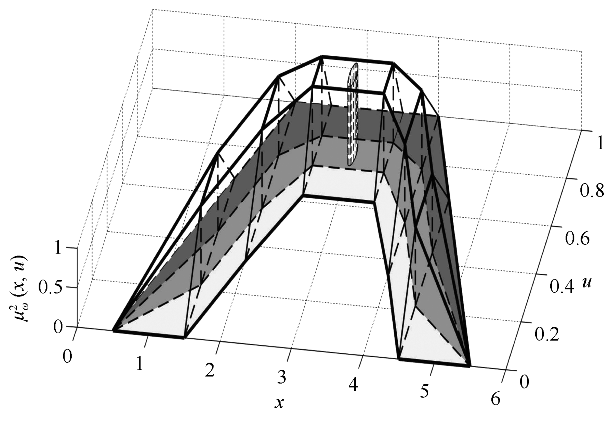


图 18 多连通二型模糊集合

Fig. 18 Multi-connected T2 FS

若 X 连通, $L_x=\{a_x^1,a_x^2,\cdots,a_x^M\}$ 离散, $A_m^*=\{(x,u)|x\in X,u=a_x^m\in[0,1]\}$ 为连通模糊集合, 且对 $x\in X$, $\mu_\omega^2(x,u)$ 关于变量 x 连续, 则 ω 为一

个线连通二型模糊集合, 表示为

$$\omega=\int_{x\in X}\sum_{m=1}^{M}\frac{\mu_\omega^2(x,a_x^m)}{(x,a_x^m)} \tag{87}$$

这里, A_m^* 为论域 X 上的一个模糊集合, $m=1,2,\cdots,M$, 且 $CoS(\omega)$ 中任意两点可以由含于 $CoS(\omega)$ 的线连接. 所以

$$CoS(\omega)=\bigcup_{x\in X}x\times L_x=\bigcup_{m=1}^{M}A_i^* \tag{88}$$

即该连通二型模糊集合的 $CoS(\omega)$ 包含 M 个一型连通模糊集合.

$$\omega=\sum_{m=1}^{M}\int_{x\in X}\frac{\mu_\omega^2(x,a_x^m)}{(x,a_x^m)} \tag{89}$$

或

$$\omega=\sum_{m=1}^{M}\int_{x\in X}\int_{u=a_x^i}\frac{\mu_\omega^2(x,u)}{(x,u)} \tag{90}$$

例 7. 设论域 $X=[2,6]$ 上的一个半二型模糊集合 ω_5 的主隶属度定义为

$$L_x=\begin{cases}\{0.5x-1,0.4x-0.8,x-2\}, & 若\ x\in[2,3]\\ \{0.5x-1,0.4x-0.8,1\}, & 若\ x\in(3,4]\\ \{3-0.5x,2.4-0.4x,1\}, & 若\ x\in(4,5]\\ \{3-0.5x,2.4-0.4x,6-x\}, & 若\ x\in(5,6]\end{cases}$$

令

$$\mu_{A_1^*}(x)=\begin{cases}0.5x-1, & 若\ x\in[2,4]\\ 3-0.5x, & 若\ x\in(4,6]\end{cases}$$

$$\mu_{A_2^*}(x)=\begin{cases}x-2, & 若\ x\in[2,3]\\ 1, & 若\ x\in(3,5]\\ 6-x, & 若\ x\in(5,6]\end{cases}$$

$$\mu_{A_3^*}(x)=\begin{cases}0.4x-0.8, & 若\ x\in[2,4]\\ 2.4-0.4x, & 若\ x\in(4,6]\end{cases}$$

明显, $CoS(\omega_5)$ 表示为

$$CoS(\omega_5)=A_1^*\bigcup A_2^*\bigcup A_3^* \tag{91}$$

如图 19 所示.

由图 19 可见, $CoS(\omega_5)\subseteq X\times I$, 且 $CoS(\omega_5)$ 包含三个连通的一型模糊集合, 其中两个模糊集合的隶属函数为三角形隶属函数, 另外一个为梯形隶属函数. 对于任意 $x\in X$, 这三个模糊集合对应地有一个隶属度, 分别记为 $A_1^*(x),A_2^*(x),A_3^*(x)$, 因此, 二型模糊集合 ω_5 在点 x 的主隶属度为

$$L_x=\{A_1^*(x),A_2^*(x),A_3^*(x)\} \tag{92}$$

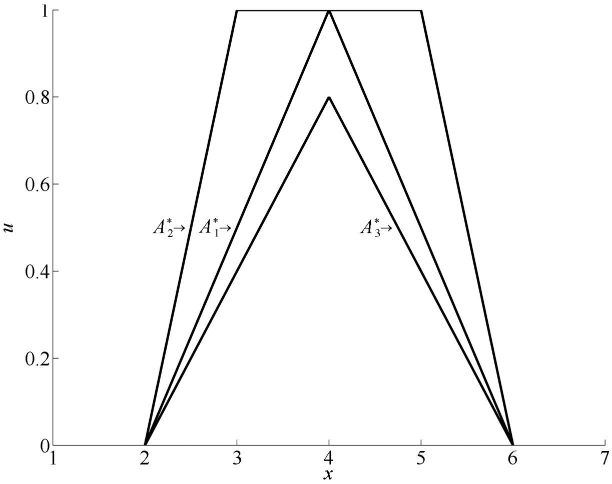


图 19　线连通二型模糊集合的 CoS

Fig. 19　CoS of linear connected T2 fuzzy set

所以, L_x 是离散的, 因此, 对应的主隶属函数是定义在连通论域 [2, 6] 上的函数值离散的多值函数.

ω_5 的次隶属函数定义为

$$\mu_{\omega_5}^2(x,u)=\begin{cases}\dfrac{2x-4}{5}, & 若\ u=\dfrac{x}{2}-1,x\in[2,4]\\ \dfrac{12-2x}{5}, & 若\ u=3-\dfrac{x}{2},x\in(4,6]\\ \dfrac{3x-1}{5}, & 若\ u=x-2,x\in[2,3]\\ 1, & 若\ u=1,x\in(3,5]\\ \dfrac{18-3x}{5}, & 若\ u=6-x,x\in(5,6]\\ \dfrac{x-2}{4}, & 若\ u=\dfrac{2x-4}{5},x\in[2,4]\\ \dfrac{6-x}{4}, & 若\ u=\dfrac{12-2x}{5},x\in(4,6]\end{cases}$$

因此, 二型模糊集合 ω_5 可以表述为

$$\begin{aligned}\omega_5=&\int_{2\le x\le 4}\int_{u=\frac{x-2}{2}}\frac{\frac{2x-4}{5}}{(x,u)}+\\ &\int_{4<x\le 6}\int_{u=\frac{6-x}{2}}\frac{\frac{12-2x}{5}}{(x,u)}+\\ &\int_{2\le x\le 3}\int_{u=x-2}\frac{\frac{3x-1}{5}}{(x,u)}+\end{aligned}$$

$$\int_{3<x\leq 5}\int_{u=1}\frac{1}{(x,u)}+$$

$$\int_{5<x\leq 6}\int_{u=6-x}\frac{\dfrac{18-3x}{5}}{(x,u)}+$$

$$\int_{2\leq x\leq 4}\int_{u=\frac{2x-4}{5}}\frac{\frac{x-2}{5}}{(x,u)}+$$

$$\int_{4<x\leq 6}\int_{u=\dfrac{12-2x}{5}}\frac{\dfrac{6-x}{5}}{(x,u)}$$

如图 20 所示.

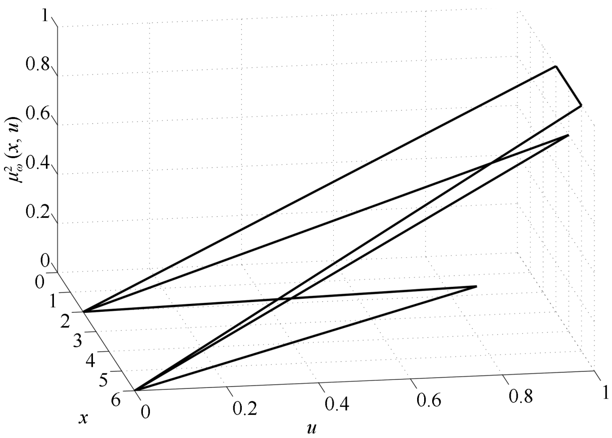


图 20 线连通二型模糊集合

Fig. 20 Linear connected T2 fuzzy set

由图 20 可知, ω_5 是 $[2,6]\times I\times I$ 中三个连通的嵌入模糊集合构成, 也可以看成是定义在论域 $[2,6]\times I$ 的三个一型模糊集合, 其中两个具有三角隶属函数, 另一个具有梯形隶属函数.

3.4 复合二型模糊集合

不属于以上三种类型的二型模糊集合称为复合二型模糊集合, 这些二型模糊集合可以分解为第 3.1 ~ 3.3 节中两种或两种以上的关于二型模糊集合表述式的形式, 可以根据实际情形进行讨论. 如 $X=[1,3]\bigcup[4,7]$ 既非连通也非离散, 先将二型模糊集合限制在 $[1,3]$ 与 $[4,7]$ 两个区间上分别进行表述, 再综合.

例 8. 设 ω_9 是定义在论域 $\{1,3,5\}$ 上的一个二型模糊集合, 其主隶属度定义为

$$L_x=\begin{cases}\{0.1,0.3\}, & \text{若 } x=1\\ [0.4,0.7], & \text{若 } x=3\\ \{0.7,0.9\}, & \text{若 } x=5\end{cases}$$

由此可见, 当 $x=1,5$ 时, L_x 离散, 当 $x=3$ 时, L_x 连通, 由此可知, ω_9 为一个复合二型模糊集合. $CoS(\omega_9)$ 可以表示为

$$CoS(\omega_9)=\{(1,0.1),(1,0.3),(5,0.7),(5,0.9)\}\bigcup 3\times[0.4,0.7]$$

其次隶属函数定义为

$$\mu^2_{\omega_9}(x,u)=\begin{cases}0.2, & \text{若 } u=0.1, x=1\\ 0.4, & \text{若 } u=0.3, x=1\\ 10u-4, & \text{若 } u\in[0.4,0.5], x=3\\ 6-10u, & \text{若 } u\in(0.5,0.6], x=3\\ 0.8, & \text{若 } u=0.7, x=5\\ 0.9, & \text{若 } u=0.9, x=5\end{cases}$$

则该二型模糊集合可以表示为

$$\omega_9=\frac{0.2}{(1,0.1)}+\frac{0.4}{(1,0.3)}+\int_{u\in[0.4,0.5]}\frac{10u-4}{(3,u)}+\int_{u\in(0.5,0.6]}\frac{6-10u}{(3,u)}+\frac{0.8}{(5,0.7)}+\frac{0.9}{(5,0.9)}$$

如图 21 所示.

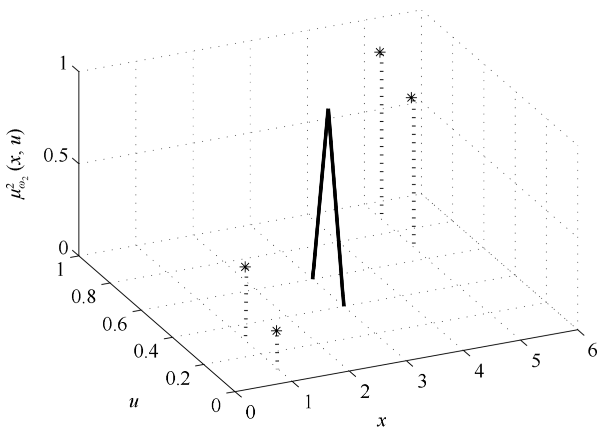


图 21 复合二型模糊集合

Fig. 21 Compounded T2 FS

由图 21 可见, ω_9 属于复合二型模糊集合, 其表达式可以由离散二型模糊集合及三角型半连通二型模糊集合的表述式综合而成.

4 二型模糊集合的相关结论

结论 1. $CoS(\omega)$ 为含于其中的所有一型模糊集合之并, 二型模糊集合 ω 的主隶属度 L_x 为含于 $CoS(\omega)$ 中的所有模糊集合在点 x 的隶属度全体构成的集合, 即

$$CoS(\omega)=\{A^*|A^*:X\rightarrow I, A^*(x)\in L_x\} \quad (93)$$

$$L_x=\{u|u=\mu_{A^*}(x),A^*\in CoS(\omega)\} \tag{94}$$

证明. 令 ω, A^* 分别为论域 X 上的一个二型、一型模糊集合, 则

$$A^*=\{(x,u)|x\in X,u=\mu_{A^*}(x)\} \tag{95}$$

由二型模糊集合的支集闭包的定义, 有

$$CoS(\omega)=\{(x,u)|x\in X,u\in L_x\} \tag{96}$$

因为

$$u=\mu_{A^*}(x) \tag{97}$$

从而 $CoS(\omega)$ 可以表示为

$$CoS(\omega)=\{A^*|x\in X,\mu_{A^*}(x)\in L_x\} \tag{98}$$

即

$$CoS(\omega)=\{A^*|A^*:X\rightarrow I,A^*(x)\in L_x\} \tag{99}$$

由 ω 的主隶属函数的定义, 对任意 $x\in X$, 都存在 $L_x\subseteq I$, 使得

$$\mu_\omega^1(x)=L_x \tag{100}$$

对 $\forall u\in L_x$, 存在论域 X 上的一个含于 $CoS(\omega)$ 中的模糊集合 A^*, 使得 $u=\mu_{A^*}(x)$, 故

$$s\in\{u|(x,u)\in CoS(\omega)\} \tag{101}$$

从而有

$$L_x\subseteq\{u|(x,u)\in CoS(\omega)\subseteq X\times[0,1]\} \tag{102}$$

反过来, 对 $\forall s\in\{u|(x,u)\in CoS(\omega)\}$, 明显, $(x,u)\in\mu_\omega^1$, 也就是说, $s\in L_x$.

从而, 有

$$\{u|(x,u)\in CoS(\omega)\subseteq X\times[0,1]\}\subseteq L_x \tag{103}$$

所以,

$$L_x=\{u|(x,u)\in CoS(\omega)\subseteq X\times[0,1]\} \tag{104}$$

结论 2. 主隶属度为主隶属函数在该点的限制到 u 轴的投影.

证明. 由主隶属函数的定义, 有

$$\mu_\omega^1:X\rightarrow\{L_x|L_x\subseteq I\} \tag{105}$$

主隶属函数在点 x 的限制为

$$\mu_\omega^1|_x:x\rightarrow L_x \tag{106}$$

即

$$\mu_\omega^1=x\times L_x \tag{107}$$

而 $x\times L_x$ 到 u 轴的投影为 L_x, 故命题成立.

由文献 [21] 可得结论 3:

结论 3. 二型模糊集合的主隶属函数即为该二型模糊集合支集的闭包 $CoS(\omega)$. 即

$$\mu_\omega^1=CoS(\omega) \tag{108}$$

结论 4. 二型模糊集合 ω 在点 e 的限制的支集即为次隶属函数与平面 $x=e$ 的交线的支集.

对于一个给定的二型模糊集合 ω, 由次隶属函数及隶属函数的定义知, 当主隶属度 $L_x\neq I$ 时, 次变量的取值范围均为嵌入单位模糊集合 f_x 的支集的闭包, 故有以下结论:

结论 5. 若 $\exists x\in X$, 使得主隶属度 $L_x\neq I$, 则 L_x 为嵌入单位模糊集合 f_x 支集的闭包, 当对 $\forall x\in X$, 都有 $L_x\neq I$, 则 L_x 为嵌入单位模糊集合 f_x 的论域.

由文献 [21] 可得:

结论 6. $CoS(\omega)$ 是论域中的一点与该点的主隶属度的笛卡尔积之并. 即

$$CoS(\omega)=\bigcup_{x\in X}x\times L_x \tag{109}$$

因为 $x\in X,L_x\subseteq I$, 所以 $x\times L_x\subseteq X\times I$, 明显, $CoS(\omega)\subseteq X\times I$.

结论 7. 一个半连通 (或连通) 二型模糊集合的次隶属函数在上下边界处的函数值为 0, 则其支集为 $X\times I$ 中的开子集.

证明. 若 ω 为一个半连通的二型模糊集合, 则 X 离散, 其主隶属度 L_x 为单位区间的连通闭子集合, 且对 $\forall x\in X$, 其次隶属函数在 $x\times L_x$ 连续, 又因为 $(0,1]$ 是单位区间的开集, 由连续函数的性质, 开集的原像是开集, 即

$$supp(\omega|_x)=\{(x,u)|\mu_{\omega|_x}^2(x,u)>0\} \tag{110}$$

为 $X\times I$ 中的开集. 从而

$$supp(\omega)=\bigcup_{x\in X}supp(\omega|_x)=\{(x,u)|\mu_\omega^2(x,u)>0\} \tag{111}$$

为 $X\times I$ 中的开集.

若 ω 为一个连通的二型模糊集合, 则 $X\times I$ 连通且 μ_ω^2 连续, 又 $(0,1]$ 为 $[0,1]$ 的开集, 由连续函数的性质, 开集的原像是开集, 得

$$supp(\omega)=\{(x,u)|\mu_\omega^2(x,u)>0\} \tag{112}$$

为 $X\times I$ 中的开集.

由以上讨论可知, 半连通、连通二型模糊集合的支集可能不包含其上、下边界. 因此, 若 $supp(\omega)$ 单连通, 则

$$supp(\omega)=\bigcup_{x\in X}x\times(LMF(x),UMF(x)) \tag{113}$$

这里, $(LMF(x), UMF(x)) \subseteq [0,1]$, $LMF(x)$, $UMF(x)$ 分别表示 $supp(\omega)$ 的上、下边界在点 x 的隶属度.

因而

$$CoS(\omega) = \bigcup_{x\in X} x \times [LMF(x), UMF(x)] \tag{114}$$

为 $X \times I$ 中的闭集.

注. 对于一个区间二型模糊集合, 只有当其主隶属度连通时, 该区间二型模糊集合及其次隶属函数支集的闭包才能由其上下边界唯一确定. 并且 $\overline{supp(\omega)}$ 连通, $supp(\omega)$ 不一定连通.

若论域 $X \subseteq R$, 则一个离散二型模糊集合为空间 $X \times I \times I$ 中离散的点列, 自由变量的个数为 0. 半连通的二型模糊集合为空间 $X \times I \times I$ 中一系列曲线, 其自由变量的个数为 1, 连通的二型模糊集合是 $X \times I \times I$ 中的曲面, 其自由变量的个数是 2.

因此, 有结论 8:

结论 8. 若论域 $X \subseteq R$, 则离散二型模糊集合的维数为 0, 半连通二型模糊集合的维数是 1, 线连通二型模糊集合的维数是 1, 单连通及复连通二型模糊集合的维数是 2.

5 结论

本文提出采用文献 [22] 关于二型模糊集合的定义, 将二型模糊集合分成四类: 离散型、半连通型、连通型及复合型四类. 通过先定义主隶属函数再定义次隶属函数进而给出每一类二型模糊集合的表述方法, 本文还引入了其他二型模糊集合相关的定义, 并分析二型模糊集合主隶属函数与次隶属函数支集闭包、单位模糊机会、嵌入单位模糊集合以帮助读者进一步了解二型模糊集合.

易见, 采用次隶属函数支集的闭包 CoS 二、三次划分法可以方便表述一般连通二型模糊集合. 因此, 作为一般二型模糊集合特殊情形的区间二型模糊集合, 其表述方法宜对应地采用 CoS 划分法, 而非 Mendel 提及的论域划分法[25].

语言动力系统以粒度计算代替常规的数值符号计算, 从语言的层次上解决复杂系统的建模、分析、评估与控制问题[32−36], 二型模糊集合由于能够较好地处理语言歧义与数据噪声问题, 给人们定义隶属函数较一型模糊集合以更大的自由度, 因此, 在未来的研究中, 运用基于二型模糊集合的聚类算法[37], 模糊神经网络[38] 来处理诸如交通、经济、管理等复杂系统中的相关问题将具有重要意义.

附录

例 9. 设 ω_6 是定义在论域 $X = [2,6]$ 上的一个单连通三角二型模糊集合, 对任意 $x \in X$, 对应的单位模糊集合 f_x 的隶属函数定义如下:

$$f_x(u) = \begin{cases} 2u, \text{ 若 } 2 \le x \le 3, 0 \le u \le 0.25x - 0.5 \\ x - 2 - 2u, \text{ 若 } 2 \le x \le 3, 0.25x- \\ \qquad 0.5 \le u \le 0.5x - 1 \\ \dfrac{2(x-2)(5u-3x+9)}{8-x}, \text{ 若 } 3 \le x \le 4, \\ \qquad 0.6x - 1.8 \le u \le 0.55x - 1.4 \\ \dfrac{5(x-2)(2u-x-2)}{x-8}, \text{ 若 } 3 \le x \le 4, \\ \qquad 0.55x - 1.4 \le u \le 0.5x - 1 \\ \dfrac{2(6-x)(5u+3x-15)}{x}, \text{ 若 } 4 \le x \le 5, \\ \qquad 3 - 0.6x \le u \le 3 - 0.55x \\ \dfrac{5(x-6)(2u+x-6)}{x}, \text{ 若 } 4 \le x \le 5, \\ \qquad 3 - 0.55x \le u \le 3 - 0.5x \\ 2u, \text{ 若 } 5 \le x \le 6, 0 \le u \le 1.5 - 0.25x \\ 6 - 2u - x, \text{ 若 } 5 \le x \le 6, 1.5- \\ \qquad 0.25x \le u \le 3 - 0.5x \end{cases}$$

$\tilde{b}(x), \tilde{a}(x)$ 即为 $CoS(\omega_6)$ 的上下边界, 即

$$\tilde{b}(x) = \begin{cases} 0.5x - 1, & \text{若 } 2 < x \le 4 \\ 3 - 0.5x, & \text{若 } 4 < x \le 6 \end{cases}$$

$$\tilde{a}(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 2 \le x \le 3 \\ 0.6x - 1.4, & \text{若 } 3 < x \le 4 \\ 3 - 0.6x, & \text{若 } 4 < x \le 5 \\ 0, & \text{若 } 5 < x \le 6 \end{cases}$$

$$\tilde{c}(x) = \begin{cases} 0.25x - 0.5, & \text{若 } 2 < x \le 3 \\ 0.55x - 1.4, & \text{若 } 3 < x \le 4 \\ 3 - 0.55x, & \text{若 } 4 < x \le 5 \\ 1.5 - 0.25x, & \text{若 } 5 < x \le 6 \end{cases}$$

且

$$0 \le a(x) \le c(x) \le b(x) \le 1 \tag{115}$$

因此, 相应地, 二型模糊集合 ω_6 主隶属度的定义可以表示为

$$L_x = \begin{cases} [0, 0.5x - 1], & \text{若 } 2 < x \le 3 \\ [0.6x - 1.8, 0.5x - 1], & \text{若 } 3 < x \le 4 \\ [3 - 1.8x, 3 - 0.5x], & \text{若 } 4 < x \le 5 \\ [0, 3 - 0.5x], & \text{若 } 5 < x \le 6 \end{cases}$$

ω_6 的单位模糊集合的顶点 $C(x, c(x), h(x, u))$ 所在曲线在底面的投影为 $\tilde{c}(x)$, 且 $\tilde{c}(x)$ 将 $CoS(\omega_6)$ 分成 $A1$ 与 $A2$ 两个一级子区域. 则

$$A1 = x \times [c(x), b(x)]$$
$$A2 = x \times [a(x), c(x)]$$
$$CoS(\omega_6) = x \times [a(x), c(x)] \bigcup x \times [c(x), b(x)]$$

运用 CoS 划分法[21], 对 $Ai, i = 1, 2$ 进行划分, 得到八个二级子区域 Aij, 其中 $i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4$, 且 $Ai = \bigcup_{j=1}^{4} Aij, i = 1, 2$.

由 $A2$ 划分后得到的四个子区域的表达式如下:

$$A21 = \bigcup_{x\in[2,3]} x \times [0, 0.25x - 0.5]$$
$$A22 = \bigcup_{x\in[3,4]} x \times [0.6x - 1.8, 0.55x - 1.4]$$
$$A23 = \bigcup_{x\in[4,5]} x \times [3 - 0.6x, 3 - 0.55x]$$
$$A24 = \bigcup_{x\in[5,6]} x \times [0, 1.5 - 0.25x]$$

由 $A1$ 划分后得到的四个子区域的表达式为:

$$A11 = \bigcup_{x\in[2,3]} x \times [0.25x - 0.5, 0.5x - 1]$$
$$A12 = \bigcup_{x\in[3,4]} x \times [0.55x - 1.4, 0.5x - 1]$$
$$A13 = \bigcup_{x\in[4,5]} x \times [3 - 0.55x, 3 - 0.5x]$$
$$A14 = \bigcup_{x\in[5,6]} x \times [1.5 - 0.25x, 3 - 0.5x]$$

由扎德给出的二型模糊集合定义, 一个二型模糊集合在一点的隶属函数为一个单位模糊集合, 故

$$\mu_{\omega_6}(x) = f_x \tag{116}$$

这里, $f_x : L_x \to I$ 是一个三角单位模糊集合, L_x 为二型模糊集合的主隶属度, 也是 f_x 支集的闭包. 从而, 二型模糊集合的次隶属函数可以表示为

$$\mu^2_{\omega_6}(x, u) = f_x(u) \tag{117}$$

故 $CoS(\omega_6)$ 及 ω_6 可分别表示为如下形式:

$$\begin{aligned}
CoS(\omega_6) = &\bigcup_{i=1}^{2}\bigcup_{j=1}^{4} Aij = \bigcup_{x=2}^{6} x \times L_x = \bigcup_{x\in[2,3]} x \times [0, 0.5x - 1] \bigcup_{x\in[3,4]} x \times [0.6x - 1.8, 0.5x - 1] \\
&\bigcup_{x\in[4,5]} x \times [3 - 0.6x, 3 - 0.5x] \bigcup_{x\in[5,6]} x \times [0, 3 - 0.5x]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_6 = &\int_{x\in[2,3]} \left(\int_{u\in[0,0.25x-0.5]} \frac{2u}{(x, u)} + \int_{u\in[0.25x-0.5,0.5x-1]} \frac{x - 2u - 2}{(x, u)} \right) + \\
&\int_{x\in[3,4]} \left(\int_{u\in[0.6x-1.4,0.55x-1.4]} \frac{\frac{2(x-2)(5u-3x+9)}{8-x}}{(x, u)} + \int_{u\in[0.55x-1.4,0.5x-1]} \frac{\frac{5(x-2)(2u-x+2)}{x-8}}{(x, u)} \right) + \\
&\int_{x\in[4,5]} \int_{u\in[3-0.6x,3-0.55x]} \frac{\frac{2(6-x)(5u+3x-15)}{x}}{(x, u)} + \int_{x\in[4,5]} \int_{u\in[3-0.55x,3-0.5x]} \frac{\frac{5(x-6)(x+2u-6)}{x}}{(x, u)} + \\
&\int_{x\in[5,6]} \int_{u\in[0,1.5-0.25x]} \frac{2u}{(x, u)} + \int_{x\in[5,6]} \int_{u\in[1.5-0.25x,3-0.5x]} \frac{6 - x - 2u}{(x, u)}
\end{aligned}$$

例 10. 论域 $[2, 9]$ 上的一个二型模糊集合 ω_7 的单位模糊集合 f_x 定义为

$$
f_x(u)=\begin{cases}
2u, & \text{若 } x\in[2,3],u\in[0,0.1x-0.2]\\
0.6x-1.2, & \text{若 } x\in[2,3],u\in[0.1x-0.2,0.4x-0.8]\\
3(x-2u-2), & \text{若 } x\in[2,3],u\in[0.4x-0.8,0.5x-1]\\
\dfrac{x(10u+9-3x)}{30-5x}, & \text{若 } x\in[3,4],u\in[0.3x-0.9,0.4x-1.1]\\
0.2x, & \text{若 } x\in[3,4],u\in[0.4x-1.1,0.4x-0.8]\\
\dfrac{x(2u-x+2)}{2-x}, & \text{若 } x\in[3,4],u\in[0.4x-0.8,0.5x-1]\\
\dfrac{x(10u+9-3x)}{30-5x}, & \text{若 } x\in[4,5],u\in[0.3x-0.9,0.2x-0.3]\\
0.2x, & \text{若 } x\in[4,5],u\in[0.2x-0.3,0.1x+0.4]\\
\dfrac{2x(u-1)}{x-6}, & \text{若 } x\in[4,5],u\in[0.1x+0.4,1]\\
10u-6, & \text{若 } x\in[5,6],u\in[0.6,0.7]\\
1, & \text{若 } x\in[5,6],u\in[0.7,0.9]\\
10(1-u), & \text{若 } x\in[5,6],u\in[0.9,1]\\
\dfrac{(11-x)(10u+3x-24)}{5x-25}, & \text{若 } x\in[6,7],u\in[2.4-0.3x,1.9-0.2x]\\
2.2-0.2x, & \text{若 } x\in[6,7],u\in[1.9-0.2x,1.5-0.1x]\\
\dfrac{2(x-11)(u-1)}{x-5}, & \text{若 } x\in[6,7],u\in[1.5-0.1x,1]\\
\dfrac{(11-x)(10u+3x-24)}{45-5x}, & \text{若 } x\in[7,8],u\in[2.4-0.3x,3.3-0.4x]\\
2.2-0.2x, & \text{若 } x\in[7,8],u\in[3.3-0.4x,3.6-0.4x]\\
\dfrac{(11-x)(2u+x-9)}{x-9}, & \text{若 } x\in[7,8],u\in[3.6-0.4x,4.5-0.5x]\\
6u, & \text{若 } x\in[8,9],u\in[0,0.9-0.1x]\\
5.4-0.6x, & \text{若 } x\in[8,9],u\in[0.9-0.1x,3.6-0.4x]\\
3(9-x-2u), & \text{若 } x\in[8,9],u\in[3.6-0.4x,4.5-0.5x]
\end{cases}
$$

$f_x(u)$ 的四个顶点所在曲线在底面的投影为

$$
\tilde{a}(x)=\begin{cases}
0, & \text{若 } 2\le x\le 3\\
0.3x-0.9, & \text{若 } 3<x\le 5\\
0.6, & \text{若 } 5<x\le 6\\
2.4-0.3x, & \text{若 } 6<x\le 8\\
0, & \text{若 } 8<x\le 9
\end{cases}
$$

$$
\tilde{c}(x)=\begin{cases}
0.1x-0.2, & \text{若 } 2<x\le 3\\
0.4x-1.1, & \text{若 } 3<x\le 4\\
0.2x-0.3, & \text{若 } 4<x\le 5\\
0.7, & \text{若 } 5<x\le 6\\
1.9-0.2x, & \text{若 } 6<x\le 7\\
3.3-0.4x, & \text{若 } 7<x\le 8\\
0.9-0.1x, & \text{若 } 8<x\le 9
\end{cases}
$$

$$
\tilde{d}(x)=\begin{cases}
0.4x-0.8, & \text{若 } 2\le x\le 4\\
0.1x+0.4, & \text{若 } 4<x\le 5\\
0.9, & \text{若 } 5<x\le 6\\
1.5-0.1x, & \text{若 } 6<x\le 7\\
3.6-0.4x, & \text{若 } 7<x\le 9
\end{cases}
$$

$$
\tilde{b}(x)=\begin{cases}
0.5x-1, & \text{若 } 2<x\le 4\\
1, & \text{若 } 4<x\le 7\\
4.5-0.5x, & \text{若 } 7<x\le 9
\end{cases}
$$

这里, $0\le a(x)\le c(x)\le d(x)\le b(x)\le 1$, 且

ω_7 主隶属度定义为

$$L_x=\begin{cases}[0,0.5x-1], & 若\ 2<x\le 3\\ [0.3x-0.9,0.5x-1], & 若\ 3<x\le 4\\ [0.3x-0.9,1], & 若\ 4<x\le 5\\ [0.6,1], & 若\ 5<x\le 6\\ [2.4-0.3x,1], & 若\ 6<x\le 7\\ [2.4-0.3x,4.5-0.5x], & 若\ 7<x\le 8\\ [0,4.5-0.5x], & 若\ 8<x\le 9\end{cases}$$

又因为 $\tilde{c}(x),\tilde{d}(x)$ 将 $CoS(\omega_7)$ 划分为三个一级子区域: $A1$, $A2$, $A3$. CoS 划分法将每个子区域 $Ai,i=1,2,3$ 划分为七个二级子区域 $Aij,j=1,\cdots,7$. 则 $A1$, $A2$, $A3$ 和 $CoS(\omega_7)$ 可分别表示为如下形式:

$$\begin{aligned}A1=&\bigcup_{j=1}^{7}A1j=\bigcup_{x\in[2,4]}x\times[0.4x-0.8,0.5x-1]\bigcup\left(\bigcup_{x\in[4,5]}x\times[0.1x+0.4,1]\right)\bigcup[5,6]\times[0.9,1]\bigcup\\&\left(\bigcup_{x\in[6,7]}x\times[1.5-0.1x,1]\right)\bigcup\left(\bigcup_{x\in[7,9]}x\times[3.6-0.4x,4.5-0.5x]\right)\\A2=&\bigcup_{j=1}^{7}A2j=\bigcup_{x\in[2,3]}x\times[0.1x-0.2,0.4x-0.8]\bigcup\left(\bigcup_{x\in[3,4]}x\times[0.4x-1.1,0.4x-0.8]\right)\bigcup\\&\left(\bigcup_{x\in[4,5]}x\times[0.2x-0.3,0.1x+0.4]\right)\bigcup[5,6]\times[0.7,0.9]\bigcup\\&\left(\bigcup_{x\in[6,7]}x\times[1.9-0.2x,1.5-0.1x]\right)\bigcup\left(\bigcup_{x\in[7,8]}x\times[3.3-0.4x,3.6-0.4x]\right)\bigcup\\&\left(\bigcup_{x\in[8,9]}x\times[0.9-0.1x,3.6-0.2x]\right)\\A3=&\bigcup_{j=1}^{7}A3j=\bigcup_{x\in[2,3]}x\times[0,0.1x-0.2]\bigcup\left(\bigcup_{x\in[3,4]}x\times[0.3x-0.9,0.4x-1.1]\right)\bigcup\\&\left(\bigcup_{x\in[4,5]}x\times[0.3x-0.9,0.2x-0.3]\right)\bigcup[5,6]\times[0.6,0.7]\bigcup\\&\left(\bigcup_{x\in[6,7]}x\times[2.4-0.3x,1.9-0.2x]\right)\bigcup\left(\bigcup_{x\in[7,8]}x\times[2.4-0.3x,3.3-0.4x]\right)\bigcup\\&\left(\bigcup_{x\in[8,9]}x\times[0,0.9-0.1x]\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}CoS(\omega_7)=&\bigcup_{x\in[2,9]}x\times L_x=\bigcup_{x\in[2,3]}x\times[0,0.5x-1]\bigcup\left(\bigcup_{x\in[3,4]}x\times[0.3x-0.9,0.5x-1]\right)\bigcup\\&\left(\bigcup_{x\in[4,5]}x\times[0.3x-0.9,1]\right)\bigcup\left(\bigcup_{x\in[5,6]}x\times[0.6,1]\right)\bigcup\left(\bigcup_{x\in[6,7]}x\times[2.4-0.3x,1]\right)\bigcup\\&\left(\bigcup_{x\in[7,8]}x\times[2.4-0.3x,4.5-0.5x]\right)\bigcup\left(\bigcup_{x\in[8,9]}x\times[0,4.5-0.5x]\right)\end{aligned}$$

则 ω_7 表述为:

$$\omega_7=\int_{x\in[2,3]}\left(\int_{u\in[0,0.1x-0.2]}\frac{2u}{(x,u)}+\int_{u\in[0.1x-0.2,0.4x-0.8]}\frac{0.6x-1.2}{(x,u)}+\int_{u\in[0.4x-0.8,0.5x-1]}\frac{3(x-2u-2)}{(x,u)}\right)+$$

$$\int_{x\in[3,4]}\left(\int_{u\in[0.3x-0.9,0.4x-1.1]}\frac{\frac{x(10u+9-3x)}{30-5x}}{(x,u)}+\int_{u\in[0.4x-1.1,0.4x-0.8]}\frac{0.2x}{(x,u)}+\int_{u\in[0.4x-0.8,0.5x-1]}\frac{\frac{x(2+2u-x)}{2-x}}{(x,u)}\right)+$$

$$\int_{x\in[4,5]}\left(\int_{u\in[0.3x-0.9,0.2x-0.3]}\frac{\frac{x(10u+9-3x)}{30-5x}}{(x,u)}+\int_{u\in[0.2x-0.3,0.1x+0.4]}\frac{0.2x}{(x,u)}+\int_{u\in[0.1x+0.4,1]}\frac{\frac{2x(1-u)}{6-x}}{(x,u)}\right)+$$

$$\int_{x\in[5,6]}\left(\int_{u\in[0.6,0.7]}\frac{10u-6}{(x,u)}+\int_{u\in[0.7,0.9]}\frac{1}{(x,u)}+\int_{u\in[0.9,1]}\frac{10(1-u)}{(x,u)}\right)+$$

$$\int_{x\in[6,7]}\left(\int_{u\in[2.4-0.3x,1.9-0.2x]}\frac{\frac{(11-x)(10u+3x-24)}{45-5x}}{(x,u)}+\int_{u\in[1.9-0.2x,1.5-0.1x]}\frac{2.2-0.2x}{(x,u)}+\right.$$

$$\left.\int_{u\in[1.5-0.1x,1]}\frac{\frac{2(x-11)(u-1)}{x-5}}{(x,u)}\right)+\int_{x\in[7,8]}\left(\int_{u\in[2.4-0.3x,3.3-0.4x]}\frac{\frac{(11-x)(10u+3x-24)}{45-5x}}{(x,u)}+\right.$$

$$\left.\int_{u\in[3.3-0.4x,3.6-0.4x]}\frac{2.2-0.4x}{(x,u)}+\int_{u\in[3.6-0.4x,4.5-0.5x]}\frac{\frac{(11-x)(2u+x-9)}{x-9}}{(x,u)}\right)+$$

$$\int_{x\in[8,9]}\left(\int_{u\in[0,0.9-0.1x]}\frac{6u}{(x,u)}+\int_{u\in[0.9-0.1x,3.6-0.4x]}\frac{5.4-0.6x}{(x,u)}+\int_{u\in[3.6-0.4x,4.5-0.5x]}\frac{3(9-x-2u)}{(x,u)}\right)$$

例 11. ω_{10} 是由例 8 中的 ω_7 挖出一个洞得到的一个二型模糊集合, 该洞在底面的投影为

$$c:(x-5.5)^2+(u-0.8)^2=(0.08)^2 \qquad \text{(A1)}$$

明显, 该投影含于 $A24$ 子区域, 用平行于 u-轴的直线 $x=5.42$ 与 $x=5.58$ 将 $A24$ 划分为 $A241$, $A242$, $A243$, $A244$ 四个三级子区域. 且

$$A244=[5.58,6]\times[0.7,0.9]$$

$$A243=[5,5.42]\times[0.7,0.9]$$

$$A242=\bigcup_{x\in[5.42,5.58]}x\times[0.7,0.8-\sqrt{(0.08)^2-(x-5.5)^2}]$$

$$A241=\bigcup_{x\in[5.42,5.58]}x\times[0.8+\sqrt{(0.08)^2-(x-5.5)^2},0.9]$$

$$A24=\bigcup_{i=1}^{4}A24i=\bigcup\left([5,5.42]\times[0.7,0.9]\right)\bigcup\left(\bigcup_{x\in[5.42,5.58]}x\times[0.8+\sqrt{(0.08)^2-(x-5.5)^2},0.9]\right)\bigcup\left([5.58,6]\times[0.7,0.9]\right)\bigcup\left(\bigcup_{x\in[5.42,5.58]}x\times[0.7,0.8-\sqrt{(0.08)^2-(x-5.5)^2}]\right)$$

将例 10 中的 $A2$ 修改为

$$A2=\bigcup_{j=1}^{7}A2j=\bigcup_{x\in[2,3]}x\times[0.1x-0.2,0.4x-0.8]\bigcup\left(\bigcup_{x\in[3,4]}x\times[0.4x-1.1,0.4x-0.8]\right)\bigcup\left(\bigcup_{x\in[4,5]}x\times[0.2x-0.3,0.1x+0.4]\right)\bigcup$$

$$\left(\bigcup_{x\in[5.42,5.58]} x\times[0.8+\sqrt{0.08^2-(x-5.5)^2},0.9]\right)\bigcup([5,5.42]\times[0.7,0.9])\bigcup([5.58,6]\times[0.7,0.9])\bigcup\left(\bigcup_{x\in[5.42,5.58]} x\times[0.7,0.8-\sqrt{(0.08)^2-(x-5.5)^2}]\right)\bigcup(\bigcup_{x\in[6,7]} x\times[1.9-0.2x,1.5-0.1x]\Big)\bigcup\left(\bigcup_{x\in[7,8]} x\times[3.3-0.4x,3.6-0.4x]\right)\bigcup\left(\bigcup_{x\in[8,9]} x\times[0.9-0.1x,3.6-0.4x]\right)$$

将例 10 中的 ω_7 的单位模糊集合 $f_x(u)$ 中的

$$\text{若 } x\in[5,6], u\in[0.7,0.9] \tag{A2}$$

修改成如下形式

$$\text{若 } (x,u)\in\bigcup_{i=1}^{4} A24i \tag{A3}$$

则得到 ω_{10} 的单位模糊集合.

对应地, 将例 10 中的 $CoS(\omega_7)$ 修改为

$$\begin{aligned}CoS(\omega_{10}) =& \bigcup_{x\in[2,9]} x\times L_x=\bigcup_{x\in[2,3]} x\times[0,0.5x-1]\bigcup\left(\bigcup_{x\in[3,4]} x\times[0.3x-0.9,0.5x-1]\right)\bigcup\\ &\left(\bigcup_{x\in[4,5]} x\times[0.3x-0.9,1]\right)\bigcup\left(\bigcup_{x\in[8,9]} x\times[0,4.5-0.5x]\right)\bigcup([5,5.42]\times[0.7,0.9])\bigcup\\ &([5.58,6]\times[0.7,0.9])\bigcup\left(\bigcup_{x\in[5.42,5.58]} x\times[0.8+\sqrt{(0.08)^2-(x-5.5)^2},0.9]\right)\bigcup\\ &\left(\bigcup_{x\in[5.42,5.58]} x\times[0.7,0.8-\sqrt{(0.08)^2-(x-5.5)^2}]\right)\bigcup\\ &\left(\bigcup_{x\in[6,7]} x\times[2.4-0.3x,4.5-0.5x]\right)\bigcup\left(\bigcup_{x\in[7,8]} x\times[2.4-0.3x,4.5-0.5x]\right)\end{aligned}$$

则二型模糊集合 ω_{10} 的表达式为

$$\begin{aligned}\omega_{10} =& \int_{x\in[2,3]}\left(\int_{u\in[0,0.1x-0.2]}\frac{2u}{(x,u)}+\int_{u\in[0.1x-0.2,0.4x-0.8]}\frac{0.6x-1.2}{(x,u)}+\right.\\ &\left.\int_{u\in[0.4x-0.8,0.5x-1]}\frac{3(x-2u-2)}{(x,u)}\right)+\int_{x\in[3,4]}\left(\int_{u\in[0.3x-0.9,0.4x-1.1]}\frac{\frac{x(10u+9-3x)}{30-5x}}{(x,u)}+\right.\\ &\left.\int_{u\in[0.4x-1.1,0.4x-0.8]}\frac{0.2x}{(x,u)}+\int_{u\in[0.4x-0.8,0.5x-1]}\frac{\frac{x(x+2-2u)}{2-x}}{(x,u)}\right)+\\ &\int_{x\in[4,5]}\left(\int_{u\in[0.3x-0.9,0.2x-0.3]}\frac{\frac{x(10u+9-3x)}{30-5x}}{(x,u)}+\int_{u\in[0.2x-0.3,0.1x+0.4]}\frac{0.2x}{(x,u)}+\int_{u\in[0.1x+0.4,1]}\frac{\frac{2x(u-1)}{6-x}}{(x,u)}\right)+\\ &\int_{x\in[5,6]}\left(\int_{u\in[0.6,0.7]}\frac{10u-6}{(x,u)}+\int_{u\in[0.9,1]}\frac{10(1-u)}{(x,u)}\right)+\left(\int_{x\in[5,5.42]}+\int_{x\in[5.58,6]}\right)\int_{u\in[0.7,0.9]}\frac{1}{(x,u)}+\end{aligned}$$

$$\int_{x\in[5.42,5.58]}\left(\int_{u\in[0.8+\sqrt{(0.8)^2-(x-5.5)^2},0.9]}+\int_{u\in[0.7,0.8-\sqrt{(0.8)^2-(x-5.5)^2}]}\right)\frac{1}{(x,u)}+$$
$$\int_{x\in[6,7]}\left(\int_{u\in[2.4-0.3x,1.9-0.2x]}\frac{\frac{(11-x)(10u+3x-24)}{45-5x}}{(x,u)}+\int_{u\in[1.9-0.2x,1.5-0.1x]}\frac{2.2-0.2x}{(x,u)}+\right.$$
$$\left.\int_{u\in[1.5-0.1x,1]}\frac{\frac{2(x-11)(u-1)}{x-5}}{(x,u)}\right)+\int_{x\in[7,8]}\left(\int_{u\in[2.4-0.3x,3.3-0.4x]}\frac{\frac{(11-x)(10u+3x-24)}{45-5x}}{(x,u)}+\right.$$
$$\left.\int_{u\in[3.3-0.4x,3.6-0.4x]}\frac{2.2-0.4x}{(x,u)}+\int_{u\in[3.6-0.4x,4.5-0.5x]}\frac{\frac{(11-x)(2u+x-9)}{x-9}}{(x,u)}\right)+$$
$$\int_{x\in[8,9]}\left(\int_{u\in[0,0.9-0.1x]}\frac{6u}{(x,u)}+\int_{u\in[0.9-0.1x,3.6-0.4x]}\frac{5.4-0.6x}{(x,u)}+\int_{u\in[3.6-0.4x,4.5-0.5x]}\frac{3(9-x-2u)}{(x,u)}\right)$$

References

1 Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning — I. *Information Sciences*, 1975, **8**(3): 199−249

2 Aliev R A, Pedrycz W, Guirimov B G, Aliev R R, Ilhan U, Babagil M, Mammadli S. Type-2 fuzzy neural networks with fuzzy clustering and differential evolution optimization. *Information Sciences*, 2011, **181**(9): 1591−1608

3 Pedrycz W. *Granular computing: Analysis and Design of Intelligent Systems*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2013.

4 Pan Yong-Ping, Huang Dao-Ping, Sun Zong-Hai. Overview of type-2 fuzzy logic control. *Control Theory & Applications*, 2011, **28**(1): 13−23
(潘永平, 黄道平, 孙宗海. II型模糊控制综述. 控制理论与应用, 2011, **28**(1): 13−23)

5 Aisbett J, Rickard J T, Morgenthaler D. Multivariate modeling and type-2 fuzzy sets. *Fuzzy sets and Systems*, 2011, **163**(1): 78−95

6 Uncu O, Turksen I B. Discrete interval type 2 fuzzy system models using uncertainty in learning parameters. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, **15**(1): 90−106

7 Mendel J M, Liu X W. Simplified interval type-2 fuzzy logic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2013, **21**(6): 1056−1069

8 Mendel J M, Rajati M R. On computing normalized interval type-2 fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2014, **22**(5): 1335−1340

9 Wu D R, Mendel J M. Aggregation using the linguistic weighted average and interval type-2 fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, **15**(6): 1145−1161

10 Hagras H. Type-2 FLCs: a new generation of fuzzy controllers. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2007, **2**(1): 30−43

11 Mendel J M, Wu H W. New results about the centroid of an interval type-2 fuzzy set, including the centroid of a fuzzy granule. *Information Sciences*, 2007, **177**(2): 360−377

12 Mendel J M, John R I, Liu F L. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, **14**(6): 808−821

13 Mendel J M. On a 50% savings in the computation of the centroid of a *symmetrical* interval type-2 fuzzy set. *Information Sciences*, 2005, **172**(3−4): 417−430

14 Hao M S, Mendel J M. Similarity measures for general type-2 fuzzy sets based on the α-plane representation. *Information Sciences*, 2014, **277**: 197−215

15 Juang C F, Huang R B, Lin Y Y. A recurrent self-evolving interval type-2 fuzzy neural network for dynamic system processing. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, **17**(5): 1092−1105

16 Mo Hong, Wang Fei-Yue, Zhao Liang. LDS trajectories under one-to-one mappings in interval type-2 fuzzy sets. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2010, **23**(2): 144−147
(莫红, 王飞跃, 赵亮. 一一映射下区间二型模糊集合的语言动力学轨迹. 模式识别与人工智能, 2010, **23**(2): 144−147)

17 Mo Hong, Wang Fei-Yue, Xiao Zhi-Quan, Chen Qian. Stabilities of linguistic dynamic systems based on interval type-2 fuzzy sets. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(8): 1018−1024
(莫红, 王飞跃, 肖志权, 陈茜. 基于区间二型模糊集合的语言动力系统稳定性. 自动化学报, 2011, **37**(8): 1018−1024)

18 Zhang Wei-Bin, Hu Huai-Zhong, Liu Wen-Jiang. Traffic flow forecast based on type-2 fuzzy logic approach. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2007, **41**(10): 1160−1164
(张伟斌, 胡怀中, 刘文江. 基于二型模糊逻辑的交通流量预测. 西安交通大学学报, 2007, **41**(10): 1160−1164)

19 Li Cheng-Dong, Yi Jian-Qiang, Yu Yi, Zhao Dong-Bin. Inverse control of cable-driven parallel mechanism using type-2 fuzzy neural network. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(3): 459−464
(李成栋, 易建强, 余意, 赵冬斌. 柔索驱动并联机构的二型模糊神经逆控制. *自动化学报*, 2010, **36**(3): 459−464)

20 Zadeh L A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, **8**(3): 338−353

21 Mo H, Wang F Y, Zhou M, Li R M, Xiao Z Q. Footprint of uncertainty for type-2 fuzzy sets. *Information Sciences*, 2014, **272**: 96−110

22 Mo H, Wang J, Li X, Wu Z L. Linguistic Dynamic Modeling and Analysis of Psychological Health State Using Interval Type-2 Fuzzy Sets. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2015, **2**(4): 366−373

23 Mendel J M. Advances in type-2 fuzzy sets and systems. *Information Sciences*, 2007, **177**(1): 84−110

24 Mendel J M. General type-2 fuzzy logic systems made simple: a tutorial. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2014, **22**(5): 1162−1182

25 Mendel J M. Type-2 fuzzy sets and systems: a retrospective. *Informatik-Spektrum*, 2015, **38**(6): 523−532

26 Mendel J M, Rajati M R, Sussner P. On clarifying some definitions and notations used for type-2 fuzzy sets as well as some recommended changes. *Information Sciences*, 2016, **340−341**: 337−345

27 Wang Xiao-Bo. Decomposition theorem of type-2 fuzzy sets, *Fuzzy Mathematics*, 1983, **1**: 9−13
(王晓波. 2 型 Fuzzy 集的分解定理. 模糊数学, **1**: 9−13)

28 Rickard J T, Aisbett J, Gibbon G. Fuzzy subsethood for fuzzy sets of type-2 and generalized type-*n*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, **17**(1): 50−60

29 Mendel J M, John R I B. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2002, **10**(2): 117−127

30 Mendel J M. On KM algorithms for solving type-2 fuzzy set problems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2013, **21**(3): 426−446

31 Huang Xuan-Guo. *Spatial Analytic Geometry and Differential Geometry*. Shanghai: Press of Fudan University, 2003.
(黄宣国. 空间解析几何与微分几何 . 上海: 复旦大学出版社, 2003.)

32 Wang F Y. Modeling, analysis and synthesis of linguistic dynamic systems: a computational theory. In: Proceedings of the 1995 IEEE International Workshop on Architecture for Semiotic Modeling and Situation Control in Large Complex Systems. Monterey, CA, USA: IEEE, 1995. 173−178

33 Wang F Y. Outline of a computational theory for linguistic dynamic systems: toward computing with words. *International Journal of Intelligent Control and Systems*, 1998, **2**(2): 211−224

34 Wang Fei-Yue. Fundamental issues in research of computing with words and linguistic dynamic systems. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(6): 844−852
(王飞跃. 词计算和语言动力学系统的基本问题和研究. *自动化学报*, 2005, **31**(6): 844−852)

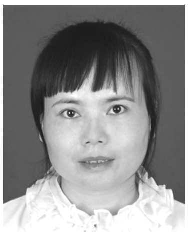
35 Mo H, Wang F Y. Linguistic dynamic systems based on computing with words and their stabilities. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2009, **52**(5): 780−796

36 Mo Hong, Wang Fei-Yue. *Linguistic Dynamic Systems and Type-2 Fuzzy Logic*. Beijing: Chinese Press of Science and Technology, 2013.
(莫红, 王飞跃. 语言动力系统与二型模糊逻辑. 北京: 中国科学技术出版社, 2013.)

37 Zhou J, Chen C L P, Chen L, Li H X. A collaborative fuzzy clustering algorithm in distributed network environments. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2014, **22**(6): 1443−1456

38 Chen C L P, Wang J, Wang C H, Chen L. A new learning algorithm for a fully connected neuro-fuzzy inference system. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, **25**(10): 1741−1757

王飞跃 中国科学院自动化研究所复杂系统管理与控制国家重点实验室研究员. 国防科学技术大学军事计算实验与平行系统技术研究中心主任. 主要研究方向为智能系统和复杂系统的建模、分析与控制. 本文通信作者.
E-mail: feiyue.wang@ia.ac.cn
(**WANG Fei-Yue** Professor at the State Key Laboratory of Management and Control for Complex Systems, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. Director of the Research Center for Computational Experiments and Parallel Systems Technology, National University of Defense Technology. His research interest covers modeling, analysis, and control of intelligent systems and complex systems. Corresponding author of this paper.)



莫 红 长沙理工大学电气与信息工程学院教授. 2004 年获中国科学院研究生院工学博士学位. 主要研究方向为语言动力系统与智能计算.
E-mail: mohong198@163.com
(**MO Hong** Associate professor at the School of Electric and Information Engineering, Changsha University of Science and Technology. She received her Ph. D. degree from Chinese Academy of Sciences in 2004. Her research interest covers linguistic dynamic systems and intelligent computing.)