

# 有限频域分析与设计的广义 KYP 引理方法综述

李贤伟<sup>1</sup> 高会军<sup>2</sup>

**摘要** 频域方法是控制理论与工程领域的一种基本研究手段,许多控制问题都可归结为有限频域性能指标的分析与综合问题. 广义 Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) 引理建立了频域方法(传递函数)与时域方法(状态空间)之间的一座桥梁,成为近年来系统与控制理论领域的研究热点之一. 本文首先从信号和系统两个角度阐明有限频域分析与设计的背景和意义,并依次讨论三种主要研究方法(经典控制理论方法、频率加权法和广义性能指标法)各自的优缺点. 然后简单介绍广义 KYP 引理的主体内容,并详细总结当前基于广义 KYP 引理的有限频域分析与设计的主要方向及研究进展. 最后给出在使用广义 KYP 引理时很重要但容易忽视的几点注记,同时指明该领域目前存在并值得未来进一步研究的关键问题.

**关键词** 有限频域, 广义 Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) 引理, 控制器设计, 滤波, 模型降阶

**引用格式** 李贤伟, 高会军. 有限频域分析与设计的广义 KYP 引理方法综述. 自动化学报, 2016, 42(11): 1605–1619

**DOI** 10.16383/j.aas.2016.c160303

## An Overview of Generalized KYP Lemma Based Methods for Finite Frequency Analysis and Design

LI Xian-Wei<sup>1</sup> GAO Hui-Jun<sup>2</sup>

**Abstract** Frequency-domain methods are a fundamental research approach in control theory and engineering. Many control problems can be viewed as analysis and design issues of finite frequency specifications. The generalized Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) lemma, which bridges frequency-domain methods (transfer functions) and time-domain methods (state-space models), has been one of the hotspots in systems and control theory in recent years. In this paper, the background and significance of finite frequency analysis and design are first introduced from signal and system perspectives, respectively. Three main research methods (classical control theory, frequency-weighting strategy and generalized system specification based methodology) are discussed with respect to their individual advantages and disadvantages. The body of the generalized KYP lemma is then introduced briefly, which is followed by a detailed summary of main directions and recent progresses in finite frequency analysis and design based on the generalized KYP lemma. Finally, a few notes are presented, which are important but commonly overlooked in applying the generalized KYP lemma, and a few critical problems in the field are also pointed out, which are worth future investigation.

**Key words** Finite frequency, generalized Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) lemma, controller design, filtering, model reduction

**Citation** Li Xian-Wei, Gao Hui-Jun. An overview of generalized KYP lemma based methods for finite frequency analysis and design. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(11): 1605–1619

控制系统设计的目的是寻找合适的控制器,使闭环系统满足某些给定的性能指标(稳定性、鲁棒性、噪声抑制度等). 从频域角度讲,满足这些性能指标实际上就是要求整个闭环系统具有适当的频域

响应特性(极点分布、幅频特性等). 对于实际控制问题,考虑到被控对象自身的特点和输入信号的频谱特性,通常要求控制系统在不同频率范围满足不同的性能指标. 因此,控制工程中的许多问题都可以归结为有限频域性能指标的综合问题.

**信号角度.** 白噪声的功率谱在所有频率处均具有相同大小的幅值. 然而许多实际信号,无论是外界扰动<sup>[1–3]</sup>还是参考跟踪信号<sup>[4–5]</sup>,其能量往往只集中在某一或者某些有限的频率范围,因此不能被简单地建模成白噪声. 比如文献[2]通过分析一些典型地震灾难中的地震波记录信号,发现地震波的绝大部分能量均集中在 0.3~8 Hz 的频率范围. 此外,由于被控对象动力学(如机械转动<sup>[1,3,6]</sup>)和控制律(如重复学习类控制律<sup>[4,7–8]</sup>)存在往复运动的因素,周

收稿日期 2016-04-01 录用日期 2016-08-15  
Manuscript received April 1, 2016; accepted August 15, 2016  
国家自然科学基金(61333012, 61329301), 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (61333012, 61329301), Key Laboratory of Integrated Automation for the Process Industry, Northeast University  
本文责任编辑 张卫东  
Recommended by Associate Editor ZHANG Wei-Dong  
1. 南洋理工大学电气与电子工程学院 新加坡 639798 新加坡 2. 哈尔滨工业大学智能控制与系统研究所 哈尔滨 150080 中国  
1. School of Electrical and Electronic Engineering, Nanyang Technological University, Singapore 639798, Singapore 2. Research Institute of Intelligent Control and Systems, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China

期信号也是工程中经常要处理的一类特殊信号。除基波外,周期信号的频谱还包含许多具有较大能量的高次谐波,容易引起系统谐振。例如,在机械硬盘驱动器中,由于硬盘的高速转动产生了周期振动信号并引起空气震荡,其高次谐波直接导致磁头定位误差信号在 8 kHz 和 10 kHz 处分别出现了异常的孤立高频谐振分量<sup>[1]</sup>。因此,在进行控制器优化时,如果忽略了信号本身的有限频域特性,得到的设计结果尽管能适应更宽工作频率范围的信号输入,却未能充分利用信号的频域信息实现更好的控制性能。相反,如果错误地估计了信号各频率成分对系统的影响,将很难发现限制控制系统性能提升的原因。

**系统角度。**任何实际控制系统都有无法突破的性能极限:系统不确定性、执行器的有限输出能力、被控对象的有限响应带宽等。由于这些约束的存在,控制系统的设计实际上是寻求不同设计目标之间的合理折衷,频域内就是要求控制系统在不同的频率范围满足不同的性能指标。经典控制理论中的“回路成形”<sup>[9]</sup>技术就是基于这种折衷考虑:由于被控对象往往具有低通特性,低频范围的高回路增益使系统有较强的抵抗常值和低频干扰的能力,而高频范围需要较低的回路增益以降低建模误差带来的影响。有时,如果能够了解到被控对象本身某些特有的频域表征并加以利用,就有可能在不明显牺牲其他性能的情况下显著地改进控制效果。例如,考虑到人体对外力最敏感的频率范围是 4~8 Hz,在对有人参与的隔离台、汽车悬架之类的对象进行控制时,有必要针对人的频率响应特性设计减震控制器,以降低振动对人的伤害<sup>[10-11]</sup>。又如,利用某些被控对象的有限频域正实性,可以放宽闭环系统在某些频率范围的响应要求,而将这部分预留的设计自由度用于改进系统的某些关键性能<sup>[12-16]</sup>。

总之,实际工程中的被控对象(系统)及其工作环境(信号)往往具有明显的有限频域特性,而控制问题常常又归结为与这些有限频域特性相对应的若干有限频域性能指标的折衷优化问题。因此,根据这些有限频域特性进行系统分析和设计是必要的,研究控制系统的有限频域分析和综合方法具有极其重要的工程意义。随着现代社会对控制系统的性能要求越来越高,如何充分利用各种有限频域性质以提高控制系统性能的研究课题就显得尤为重要。

本文首先回顾系统和控制理论中有限频域分析与设计的三种主要研究方法(第 1 节);接着简要介绍广义 KYP (Kalman-Yakubovich-Popov) 引理(第 2 节)并详细总结基于广义 KYP 引理的有限频域分析与设计的研究现状(第 3 节);最后给出关于广义 KYP 引理的一些注记(第 4 节);并指出值得进一步研究的关键问题(第 5 节)。

## 1 有限频域分析与设计的主要研究方法

对控制理论、系统理论和信号处理等工程科学领域的研究人员而言,有限频域分析和综合问题研究并不是新的主题。从控制理论诞生以来,人们便认识到控制系统的有限频域特性在工程实践中的重要性。从以传递函数为基础的经典控制论到以状态空间为基础的现代控制理论和以  $H_\infty$  控制为代表的“后现代控制理论”,从频域角度对系统进行分析和设计一直是一种基本的手段。在控制理论领域,有限频域分析与设计问题的典型研究方法包括:

- 1) 经典控制理论方法;
- 2) 频率加权法(间接法);
- 3) 广义性能指标法(直接法)。

下面我们将对上述方法的一般特点进行讨论。需要指出的是,上述分类方法并不严格,各类方法之间并不完全独立。同时,限于作者的知识水平,上述分类方法并不能涵盖针对类似问题的所有研究成果。比如在目标频率响应已知情况下基于曲线拟合的频率采样方法<sup>[17-18]</sup>、基于非光滑优化技术的控制系统有限频域性能指标的直接综合方法<sup>[19-20]</sup>等。

### 1.1 经典控制理论方法

经典控制理论以传递函数为基础,具有明显的频域意义。经典控制理论中的控制器设计方法主要包括 PID (Proportion integration differentiation) 控制方法、根轨迹法、基于开环频率特性的校正法等<sup>[21]</sup>。基于经典控制理论的控制器设计方法的核心目标是通过引入附加的零极点(即控制器),使反馈控制系统达到期望的频率响应特性。比如, PID 控制器的微分环节能够增加系统的阻尼系数,从而消除状态振荡或加快状态收敛速度,而积分环节能记忆过去的状态从而有助于消除系统的稳态误差。尽管经典控制理论中的设计方法都有各自的设计步骤,但是“回路成形”技术依然具有指导作用。

经典控制理论应用于解决有限频域分析和综合问题时具有以下三个方面的局限性: 1) 经典控制理论以单输入单输出的线性定常系统为主要研究对象,很多结果难以直接推广到多输入多输出、时变等复杂情形; 2) 经典控制理论的设计过程过多地依赖以工程经验为基础的图解法和试凑法,难以处理高阶被控对象和/或高阶控制器; 3) 经典控制理论考虑的性能指标以时域的瞬态性能和稳态性能为主,控制器的设计过程未能优化有限频域性能指标。

### 1.2 频率加权法(间接法)

20 世纪 60 年代发展起来的现代控制理论以状态空间法<sup>[22]</sup>为主要研究方法,克服了经典控制理论在处理多输入多输出对象时的不足。现代控制理论

的分支之一, 即最优控制理论<sup>[23]</sup>, 便是以研究如何使系统在各种指标约束下达到最优为主题. 最优控制理论所针对的原始频域性能指标都定义在全频域内. 为了能够利用最优控制理论对有限频域性能指标进行优化, 常见的手段是引入频率加权函数, 基本方法是选择合适的加权函数, 将最优控制理论应用于加权后的复合系统并优化相应的全频域性能指标. 该方法本质上是将针对原系统有限频域性能指标的优化问题转变为针对复合系统全频域性能指标的优化问题, 从而间接地达到改进有限频域性能指标的目的.  $H_2$  混合灵敏度问题和  $H_\infty$  混合灵敏度问题便是典型的基于频率加权函数的最优控制问题<sup>[9]</sup>. 其他大量运用频率加权函数辅助有限频域性能指标优化的课题包括模型降阶<sup>[24-32]</sup> 与控制器降阶<sup>[33-34]</sup>. 频率加权函数法的优势在于可以直接应用现成的现代控制理论解决有限频域控制问题; 同时, 加权函数的选择还能反映出多维信号各分量的重要性以及实现不同类型信号的量级尺度可比性<sup>[9]</sup>.

频率加权函数法也有较大的局限性: 1) 频率加权函数法归根结底是一种间接处理有限频域性能指标的方法, 尽管能够在一定程度上改进控制系统的有限频域性能, 但未能提供关于系统有限频域性能的定量信息; 2) 有限阶的频率加权函数不可能具有理想的有限频域特性, 即通带内的单位增益和阻带内的零增益, 因此不能保证有限频域性能指标的最优性; 3) 加权函数的引入增加了实际被控对象 (即复合系统) 阶次, 不利于系统分析和综合, 特别是降阶控制器/滤波器的设计; 4) 加权函数的选取主要依靠研究人员的工程经验, 缺乏系统严格的指导理论, 选取过程中往往需要经过多次尝试, 非常耗时.

### 1.3 广义性能指标法 (直接法)

鉴于频率加权函数法是一种间接的设计方法, 解决有限频域控制问题的根本之道在于找到处理有限频域性能指标的直接方法. 具体而言, 如果现有成熟的控制理论比如现代控制理论是针对全频域性能指标的理论体系, 那么能否直接建立与有限频域性能指标相对应的控制系统研究理论呢? 基于这种考虑, 目前的研究成果主要有以下两种方法:

**有限频 Gramian 矩阵法.** Gramian 矩阵在线性系统理论中具有十分重要的地位<sup>[22]</sup>. 对于稳定的线性系统  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , 可控性 Gramian 矩阵和可观性 Gramian 矩阵在频域内的标准定义为<sup>[9]</sup>

$$P := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega I - A)^{-1} B B^T [(j\omega I - A)^{-1}]^* d\omega$$

$$Q := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(j\omega I - A)^{-1}]^* C^T C (j\omega I - A)^{-1} d\omega$$

利用 Gramian 矩阵, 可以分析系统的可控性、可观性、 $H_2$  性能等. 为了使 Gramian 矩阵适合于处理有限频域性能指标, 文献 [35] 将上述定义扩展为

$$P := \frac{1}{2\pi} \int_{-\varpi}^{\varpi} (j\omega I - A)^{-1} B B^T [(j\omega I - A)^{-1}]^* d\omega$$

$$Q := \frac{1}{2\pi} \int_{-\varpi}^{\varpi} [(j\omega I - A)^{-1}]^* C^T C (j\omega I - A)^{-1} d\omega$$

其中,  $[-\varpi, \varpi]$  为指定的有限频率区间, “\*” 表示共轭转置. 借助上述扩展定义, 许多研究人员尝试将控制理论里基于标准 Gramian 矩阵的结果推广至有限频域.

就目前已有的研究成果而言, 有限频 Gramian 矩阵法仍然缺少系统的理论支撑. 相关的基本问题包括: 1) 与标准 Gramian 矩阵关联的系统性能是  $H_2$  性能<sup>[9]</sup> 和能量-峰值增益<sup>[36-37]</sup> (通常称为广义  $H_2$  性能, 注意此“广义”并不是指有限频域情形). 这两种性能指标在有限频域内的物理意义尚不明确, 有限频 Gramian 矩阵与它们的关系也不清楚. 特别地, 如果积分区间非常窄, 有限频 Gramian 矩阵将非常小甚至为零 (积分区间只含有单个频率), 此时的  $H_2$  性能该如何定义、计算和解释? 2) 现有的大多数相关研究成果只停留在与 Gramian 矩阵联系紧密的平衡截断模型降阶<sup>[35, 38-40]</sup>, 而且基本没有考虑有限频域性能指标的优化. 综上所述, 有限频 Gramian 矩阵法的理论基础还有待深入研究. 由于本文焦点和兴趣并不在此, 所以将不会就此展开进一步讨论. 感兴趣的读者可参考文献 [41] 等.

**广义 KYP 引理法.** 另一种处理有限频域分析与设计问题的直接方法是广义 KYP 引理法. 广义 KYP 引理即广义 Kalman-Yakubovich-Popov 引理是 Iwasaki 等在经典的 KYP 引理基础上建立的分析线性系统有限频域性能指标的新理论. 广义 KYP 引理的初步理论成果发表于 2000 年左右<sup>[42]</sup>, 经过 Iwasaki 等的发展, 完善的基础理论成果于 2005 年在 *IEEE Transactions on Automatic Control* 以 Regular paper 发表<sup>[43]</sup>. 20 世纪 60 年代建立的 KYP 引理是控制理论和系统理论里一个非常重要的结果<sup>[44]</sup>, 它成功从系统的角度建立起频域条件 (频域性能指标) 和时域条件 (线性矩阵不等式) 的等价关系. 但是标准的 KYP 引理考察的是系统在全频域内的整体性能, 无法处理系统在某个频率处或某个频段内的性能. 广义 KYP 引理则从根本上克服了标准 KYP 引理的这个缺点, 使人们能够直接利用等价的线性矩阵不等式条件分析系统的一大类有限频域性能.

广义 KYP 引理是近年来在线性系统理论和鲁棒控制理论领域所取得的突破性研究成果之一. 与

前面的有限频 Gramian 矩阵方法相比, 广义 KYP 引理的优势体现在: 1) 基本的广义 KYP 引理在有限频域性能分析方面的结果非常完善, 是标准 KYP 引理在有限频域内的完美推广; 2) 广义 KYP 引理得到的线性矩阵不等式条件中直接包含了有限频域性能指标的参数, 使得人们在研究相关的系统分析和综合问题时, 对有限频域性能指标进行优化成为可能; 3) 广义 KYP 引理针对的性能指标具有非常明确的频域意义, 使得无论是控制理论的研究人员还是工程实践人员容易理解并接受相关理论. 下面将简要介绍该引理, 并详细回顾其研究现状.

### 2 广义 KYP 引理

本节对广义 KYP 引理的核心内容作适当介绍, 包括有限频域的描述方法、广义 KYP 引理及其意义. 详细内容请参考文献 [42-43, 45].

用符号  $\Omega$  表示所考察的有限频域, 定义为

$$\Omega := \begin{cases} \{\omega \in \mathbf{R} \mid |\omega| \leq \omega_l\} & (\text{低频}) \\ \{\omega \in \mathbf{R} \mid \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2\} & (\text{中频}) \\ \{\omega \in \mathbf{R} \mid |\omega| \geq \omega_h\} & (\text{高频}) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\omega_l, \omega_h, \omega_1, \omega_2$  为给定的常数, 且  $\omega_l, \omega_h \geq 0, \omega_2 \geq \omega_1$  (离散情形还需满足  $\omega_l, \omega_h \leq \pi, \omega_2 - \omega_1 \leq 2\pi$ ). 控制理论中的主要数学工具如 Fourier 变换、 $s$  变换和  $z$  变换等都是在复数域内进行运算. 为方便, 给出上述定义在复数域内的描述<sup>[45]</sup>:

$$\Lambda(\Phi, \Psi) := \{\lambda \in \mathbf{C} \mid v(\lambda, \Phi) = 0, v(\lambda, \Psi) \geq 0\} \quad (2)$$

其中  $v(\lambda, \Phi) = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \Phi \in H_2$  和  $\Psi \in H_2$  为给定矩阵<sup>1</sup>,  $\Psi$  满足  $\det(\Psi) < 0$ . 矩阵  $\Phi$  决定了复数集合  $\Lambda$  刻画的是连续系统还是离散系统的频域变量. 合适地选择矩阵  $\Phi$  和  $\Psi$ , 集合  $\Lambda$  给出了有限频域  $\Omega$  的一种复频域描述. 根据文献 [43, 45], 集合  $\Lambda$  和  $\Omega$  的对应关系以及矩阵  $\Phi$  和  $\Psi$  的取值见表 1, 表中  $\omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2, \omega_r = (\omega_2 - \omega_1)/2$ .

**广义 KYP 引理.** 给定矩阵  $\Theta \in H_{n_1+n_2}, F \in \mathbf{C}^{2n_1 \times (n_1+n_2)}$  以及  $\Phi, \Psi \in H_2$  使得由式 (2) 定义的集合  $\Lambda$  表示复平面上的曲线. 定义

$$\Gamma_\lambda := \begin{cases} [ I_{n_1} & -\lambda I_{n_1} ], & \lambda \in \mathbf{C} \\ [ 0 & -I_{n_1} ], & \lambda = \infty \end{cases} \quad (3)$$

则下面两种陈述等价:

- 1)  $(\Gamma_\lambda F)^\perp \Theta (\Gamma_\lambda F)^\perp < 0, \forall \lambda \in \Lambda(\Phi, \Psi);$
- 2) 存在矩阵  $P, Q \in H_{n_1},$  使得  $Q > 0$  以及

$$F^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) F + \Theta < 0 \quad (4)$$

进一步, 如果满足秩条件  $\text{rank}\{\Gamma_\lambda F\} = n_1,$  那么下面两种陈述等价:

- 1)  $(\Gamma_\lambda F)^\perp \Theta (\Gamma_\lambda F)^\perp \leq 0, \forall \lambda \in \Lambda(\Phi, \Psi);$
- 2) 存在矩阵  $P, Q \in H_{n_1},$  使得  $Q \geq 0$  以及

$$F^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) F + \Theta \leq 0$$

表 1 集合  $\Omega$  与  $\Lambda$  以及矩阵  $\Phi$  和  $\Psi$  的取值  
Table 1 The values of sets  $\Omega$  and  $\Lambda$  and matrices  $\Phi$  and  $\Psi$

$\Lambda$	$\Phi$	$\Omega$	$\Psi$
连续系统	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	低频	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \omega_l^2 \end{bmatrix}$
		中频	$\begin{bmatrix} -1 & j\omega_c \\ -j\omega_c & -\omega_1\omega_2 \end{bmatrix}$
		高频	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega_h^2 \end{bmatrix}$
离散系统	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	低频	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\cos\omega_l \end{bmatrix}$
		中频	$\begin{bmatrix} 0 & e^{j\omega_c} \\ e^{-j\omega_c} & -2\cos\omega_r \end{bmatrix}$
		高频	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2\cos\omega_h \end{bmatrix}$

上述引理是一般形式下的广义 KYP 引理, 陈述的仅仅是两个数学条件的等价关系, 常值矩阵  $F$  和  $\Theta$  还没有赋予系统理论上的意义. 为了直观地与控制系统的有限频域性能联系起来, 考虑线性定常系统  $G(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}B.$  由于

$$\Gamma_\lambda \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} G(\lambda) \\ I \end{bmatrix} = 0$$

利用广义 KYP 引理, 假设系统  $G(\lambda)$  稳定, 可以得到如下的等价关系:

- 1) 下面的指标成立:

$$\begin{bmatrix} G(\lambda) \\ I \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} G(\lambda) \\ I \end{bmatrix} \leq 0, \forall \lambda \in \Lambda(\Phi, \Psi) \quad (5)$$

- 2) 存在矩阵  $P, Q \in H_{n_1},$  使得  $Q \geq 0$  以及

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta \leq 0 \quad (6)$$

结合式 (2) 给出的有限频域定义, 条件 (5) 是一个频域不等式, 条件 (6) 是一个线性矩阵不等式. 频域不等式 (5) 能描述线性系统的一大类有限频域性

<sup>1</sup>符号  $H_n$  表示所有维数为  $n \times n$  的 Hermite 矩阵的集合.

能指标. 例如, 令  $\Theta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix}$ , 式 (5) 可化为

$$G^*(\lambda)G(\lambda) \leq \gamma^2 I, \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (7)$$

该条件表示系统  $G(\lambda)$  在有限频域  $\Lambda$  内的最大奇异值不超过  $\gamma$  (本文称之为广义  $H_\infty$  指标, 参见第 3.3 节). 即使当集合  $\Lambda(\Phi, \Psi)$  表示非常窄的频带, 条件 (5) 依然能被很好地定义. 特别地, 如果  $\Psi = 0$ , 集合  $\Lambda(\Phi, \Psi) = \Lambda(\Phi, 0)$  描述的就是全频域. 此时, 上述等价关系自然地简化为标准 KYP 引理<sup>[44]</sup>.

判断频域不等式条件 (5) 成立与否需要对有限频域集合  $\Lambda(\Phi, \Psi)$  内的所有元素进行验证, 这在实际应用中是不可能实现的. 不过, 由于等价关系中的第二个条件是一个线性矩阵不等式, 所以借助广义 KYP 引理, 验证第一个条件所面临的无限维问题就简化为寻找满足线性矩阵不等式的矩阵  $P, Q$  的有限维问题, 而且这种问题的转化是无损的. 因此, 广义 KYP 引理不仅保持了标准 KYP 引理形式上的优美, 同时保持了有限频域性能分析问题与线性矩阵不等式可行解存在性问题之间的等价性. 相比于标准 KYP 引理, 广义 KYP 引理可以直接处理有限频域性能指标, 为控制理论的精细化和实用化提供了坚实的理论基础.

另一方面, 广义 KYP 引理的提出也进一步肯定了线性矩阵不等式技术在推动系统和控制理论发展过程中所起的作用. 过去 20 年, 在有效地求解凸优化问题的内点算法提出之后<sup>[46]</sup>, 线性矩阵不等式技术在控制和系统领域得到了广泛的应用并取得了前所未有的成功<sup>[47-49]</sup>. 借助线性矩阵不等式技术, 系统和控制中很多之前难以求解的复杂问题 (特别是鲁棒控制问题和多目标控制问题) 都可以转化为一个线性矩阵不等式 (组) 约束下的凸优化问题, 从而利用成熟的数值算法进行求解. 在实现控制问题向凸优化问题转化的过程中, KYP 引理和广义 KYP 引理发挥了非常重要的作用. 近年来, 各种有效求解半定规划问题 (线性矩阵不等式只是一种特殊的半定规划问题) 的计算机程序和软件包更是层出不穷<sup>[50-51]</sup>, 直接促进了线性矩阵不等式技术在控制工程中的应用, 使这项技术也被越来越多的工程技术人员所接纳. 值得指出的是, 作为广义 KYP 引理的主要提出者, Iwasaki 教授也是推动线性矩阵不等式技术在系统和控制理论中应用的主要学者之一, 在应用线性矩阵不等式技术解决鲁棒性能分析、控制器设计等问题上做出了许多重要的基础研究工作<sup>[52]</sup>. 广义 KYP 引理的提出赋予了线性矩阵不等式在控制和系统中新的生命力, 使这项数学工具在今后依然是控制理论和系统理论研究的主流方法之一.

### 3 广义 KYP 引理的研究进展

鉴于经典控制理论和有限频 Gramian 矩阵法的局限性, 广义 KYP 引理在解决系统有限频域性能分析和综合问题方面的优势和易用性很快便突现出来. 由于成功统一了标准 KYP 引理, 广义 KYP 引理在控制和系统理论中的基础地位很快就得到了认可, 越来越多的学者开始加入到广义 KYP 引理及相关控制理论的研究中, 并积极尝试将获得的新结果应用于解决工程实际问题, 取得了一系列有价值的研究成果, 逐渐形成了控制理论中有限频域分析与设计问题一个新的研究方向. 在完整的广义 KYP 引理<sup>[42-43, 45, 53]</sup> 建立起之后, Iwasaki 等继续在广义 KYP 引理基础上进行相关控制理论的研究<sup>[54-56]</sup>, 推动广义 KYP 引理在系统和控制中的应用<sup>[15, 57-58]</sup>. 目前, 在基于广义 KYP 引理的有限频域分析与设计的新方向上, 主要的研究成果包括以下几个方面.

#### 3.1 保证有限频域输入输出性能的反馈控制

基本问题描述为: 设计反馈控制器使闭环系统的某个或某些输入输出性能指标在有限频域内满足指定的要求. 针对 KYP 引理, 具体的控制问题包括有限频域  $H_\infty$  控制、有限频域正实控制等. 这类问题是一些标准的保证输入输出性能的反馈控制问题向有限频域的拓展. 与一般的镇定问题或保性能控制问题相比, 具有有限频域指标要求的反馈控制问题难度更大, 因为在导出的矩阵不等式条件中, 控制器增益矩阵与其他未知变量之间存在更强的耦合关系, 导致一些常见的算法如锥补线性化<sup>[59]</sup> 失效.

Iwasaki 等在提出了广义 KYP 引理之后进一步研究了一般有限频域指标下的静态输出反馈控制问题<sup>[54]</sup> 和动态输出反馈控制问题<sup>[55]</sup>, 借助 Finsler 引理和变量替换, 获得了一些特殊情形下保证控制器存在的线性矩阵不等式条件. 在应用广义 KYP 引理解决系统综合问题方面, 他们的方法也成为寻找系统综合结果的统一思路, 后来亦被其他大部分研究人员所遵循. 遗憾的是, 尽管他们给出了满足给定有限频域指标的控制器的存在条件, 但是针对一般输出反馈控制器特别是静态输出反馈控制器的设计问题, 这些条件并不是线性矩阵不等式, 而他们并未提供有效的求解方法. 鉴于此, Li 等通过矩阵分离技术引入松弛矩阵, 获得了新的控制器存在充要条件, 并在此基础上根据“两步法”的思想提出了新颖的启发式迭代求解算法<sup>[60]</sup>. 他们还在理论上揭示了一些已有的同类静态输出反馈器设计结果<sup>[61-63]</sup> 之间的联系. 此外, 他们还研究了具有多面体不确定性的鲁棒有限频域控制问题<sup>[64-65]</sup> 和二维 FM (Fornasini-Marchesini) 状态空间模型的有限频域正实控制问

题<sup>[66-67]</sup>. 受文献 [60] 启发, Hao 等分别研究了具有控制器结构约束的有限频域控制问题和时滞系统的有限频域输出反馈控制问题<sup>[68-69]</sup>. 在 Iwasaki 等取得的控制器设计结果基础上, Zhang 等考察了混合频域小增益要求下线性连续系统的动态输出反馈控制问题<sup>[70]</sup>; 梅平等基于广义 KYP 引理研究了奇异摄动系统的分频控制设计问题<sup>[71]</sup>; 董全超研究了时滞系统的基于观测器的有限频域状态反馈容错控制问题<sup>[72]</sup>. 关于广义 KYP 引理框架下有限频域控制方法的应用, 请参考第 3.7 节的文献回顾.

### 3.2 回路成形理论的精确量化

如前所述, 回路成形理论是控制器设计的一种准则. 按回路成形的思想进行控制器设计的问题是典型的有限频域问题<sup>[43]</sup>. 在经典控制理论中, 当使用 PID 控制等控制方法对系统回路进行“整形”时, 由于缺乏精确易用的理论工具, 往往采用作图或者试凑法, 但是其设计结果很难保证有限频域指标的最优化. 借助广义 KYP 引理, Iwasaki 等将“整形”所需要的有限频域指标转化为线性矩阵不等式形式的凸约束, 使性能指标和 PID 控制器的参数成为凸优化问题的决策变量, 实现了控制系统设计的最优化<sup>[43, 57]</sup>. 而且他们指出, 如果得到的线性矩阵不等式条件无解, 那么将不存在满足相应性能要求的 PID 控制器. 该结论对检验系统指标要求的合理性是有益的. 在取得的回路成形理论结果基础上, 他们还开发了相应的基于 Matlab 的计算机辅助控制设计软件<sup>[58]</sup>. 受 Iwasaki 等提出的 PID 控制器设计方法启发, Li 等研究了多面体不确定系统的“回路成形”问题, 并获得了参数依赖鲁棒 PID 控制器设计方法<sup>[73]</sup>; Lim 等则研究了单输入单输出系统的“闭环敏感函数成形”问题<sup>[3, 74]</sup>, 并将提出的设计方法应用于光盘驱动器的磁道跟踪控制器设计, 取得了良好的控制效果<sup>[3]</sup>; Ishizaki 等采用回路成形技术研究了电磁铸模机的控制问题, 结合广义 KYP 引理给出了 PI 控制器的凸优化设计方法<sup>[75]</sup>.

### 3.3 广义 $H_\infty$ 滤波

估计问题是系统和控制理论中一类非常重要的问题. 状态估计的目的是利用可以测量的系统输出信号对不可测量但是有用的信号进行估计. 考虑连续系统, 假设从噪声到估计误差的系统模型为  $G(s)$ , 其标准  $H_\infty$  性能和广义  $H_\infty$  性能分别定义为

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbf{RU}\{\infty\}} \sigma_{\max}[G(j\omega)]$$

$$\|G\|_\infty^\Omega := \sup_{\omega \in \Omega} \sigma_{\max}[G(j\omega)]$$

其中,  $\sigma[\cdot]$  表示矩阵奇异值,  $\Omega$  为如式 (1) 所示的频

率集合. 传统  $H_\infty$  滤波理论以标准  $H_\infty$  性能作为滤波器性能的评价标准, 未能利用噪声可能具有的有限频域特性. 广义  $H_\infty$  滤波 (或有限频域  $H_\infty$  滤波) 对滤波误差系统的广义  $H_\infty$  性能进行优化, 针对特定频率范围的噪声, 实现更好的滤波性能. 作为标准  $H_\infty$  滤波向有限频域的扩展, 广义  $H_\infty$  滤波问题也成为有限频域分析和设计研究中的一个热点课题.

Wang 和 Yang 基于广义 KYP 引理研究了离散线性定常系统的  $H_\infty$  滤波问题, 获得了线性矩阵不等式形式的滤波器设计方法<sup>[76]</sup>. Zhang 等研究了具有状态时滞的离散系统的广义  $H_\infty$  滤波问题, 获得了时滞相关的滤波器设计方法<sup>[77]</sup>. Gao 等结合广义 KYP 引理和时滞分割思想, 不仅分别针对连续时滞系统和离散时滞系统提出了具有更低保守性的广义  $H_\infty$  滤波器设计方法<sup>[77-79]</sup>, 还分别从时域角度和频域角度给出了时滞相关条件的推导方法<sup>[79-81]</sup>, 为在广义 KYP 引理框架下处理复杂系统的有限频域性能提供了一种有效的研究思路. 应用二维广义 KYP 引理, 他们还分别得到了 Roesser 模型和 FM 模型下二维系统的鲁棒广义  $H_\infty$  滤波器的参数依赖设计方法<sup>[82-84]</sup>. 特别地, 即便针对标准  $H_\infty$  滤波问题, 文献 [82] 的设计方法依然具有较低保守性. 上述结果仅仅考虑了全阶滤波器的设计问题. 最近, 受到有限频域控制器设计的“两步法”启发, Li 等研究了离散线性定常系统的降阶广义  $H_\infty$  滤波问题, 提出了一种新颖的降阶滤波器迭代设计方法, 并将结果应用于信道均衡问题<sup>[85]</sup>. 此外, 基于广义 KYP 引理, 人们还研究了离散切换系统<sup>[86]</sup>、T-S (Takagi-Sugeno) 模糊非线性系统<sup>[87]</sup>、LPV (Linear parameter-varying) 系统<sup>[88]</sup> 等多种系统模型下的广义  $H_\infty$  滤波问题.

### 3.4 广义 $H_\infty$ 模型近似

基于频率加权函数和有限频 Gramian 矩阵的模型降阶问题是一类典型的有限频域综合问题. 广义 KYP 引理的提出为解决这类问题提供了新的工具. 考虑连续系统, 令  $G(s)$  和  $G_r(s)$  分别表示原系统模型及其近似系统模型, 广义  $H_\infty$  模型近似的目标是使误差系统的广义  $H_\infty$  指标上界  $\gamma$  尽可能小:

$$\|G - G_r\|_\infty^\Omega \leq \gamma \quad (8)$$

特别地, 当频率集合  $\Omega$  包含所有频率时, 广义  $H_\infty$  模型近似问题即退化为标准  $H_\infty$  模型近似问题<sup>[89]</sup>. 需要注意的是, 这里的模型近似问题并不特指模型降阶问题 — 后者只是前者在近似模型阶次小于原始模型阶次时的特殊情况. 这一点请具体参考第 4 节关于广义 KYP 引理的一些注记.

借助广义 KYP 引理, Du 等研究了线性系统的

有限频域模型降阶问题<sup>[90-91]</sup>和线性状态时滞系统的有限频域模型降阶问题<sup>[92-93]</sup>. 针对原系统是由离散传递函数给出的单输入单输出模型, 文献 [94-95] 借助广义 KYP 引理导出了矩阵不等式形式的近似模型系数参数化条件, 并应用上界约束技术进行线性化处理, 进而提出一种计算近似模型的迭代算法. 相比直接使用状态空间模型所得到的结果, 针对传递函数得到的条件能极大地减少变量数量, 有利于构建更高效的求解算法. 此模型近似方法在文献 [95] 中被进一步用于求解无限脉冲响应 (Infinite impulse response, IIR) 数字滤波器的设计问题, 所得结果较一些最新的数字滤波器设计方法也具有一定优势. 利用广义 KYP 引理, 文献 [96-97] 分别研究了降阶模型具有无源性和降阶模型为正系统的广义  $H_\infty$  模型降阶问题, 给出了一种能够减小感兴趣频率范围内逼近误差的迭代优化算法, 计算结果明显优于文献 [90] 的方法. 此外, 借助二维广义 KYP 引理<sup>[67, 98]</sup>, Li 等构建了二维系统广义  $H_\infty$  模型近似问题的线性矩阵不等式求解方法<sup>[99]</sup>. 该方法与基于有限频 Gramian 矩阵的平衡截断方法<sup>[39]</sup> 相比, 能更有效地增强给定有限频率范围内的逼近效果. 其他相关研究结果见文献 [100-101] 等.

### 3.5 基于广义 KYP 引理的故障检测

故障信号和噪声扰动往往具有不同的频率特性, 比如常值故障可以看作低频信号, 而噪声则可能是周期扰动信号. 因此, 就需要故障检测机制能够适应并利用故障信号和噪声扰动各自的频谱特点, 以正确、快速地识别故障发生的情况并提高对噪声扰动的鲁棒性. 利用广义 KYP 引理, Wang 等研究了线性系统的故障观测器和故障估计器设计问题, 提高了残差信号对有限频域扰动的鲁棒性以及故障信号的敏感度<sup>[102-104]</sup>, 而且他们还应用广义 KYP 引理研究了故障检测器与控制器的集成设计问题<sup>[105-106]</sup>; Yang 等分别研究了 T-S 模糊系统的故障观测器设计问题<sup>[107]</sup>和线性系统的有限频域故障观测器在  $\delta$  域的设计问题<sup>[108]</sup>; Zhang 等借助广义 KYP 引理给出了单一频率故障信号检测问题的最优状态空间解<sup>[109]</sup>; Long 等则研究了网络环境下有限频域故障的检测和隔离问题<sup>[110-111]</sup>; Zhang 等考虑了残差系统满足给定极点分布和广义  $H_\infty$  扰动抑制水平的故障估计问题<sup>[112-114]</sup>.

### 3.6 广义 KYP 引理的推广

在广义 KYP 引理提出之后, 许多学者亦分别从引理的适用模型、引理的变形和引理的时域解释三方面对其进行推广. 在模型范围方面, 文献 [98] 和 [67] 分别导出了 Roesser 模型和 FM 模型下的二维广义 KYP 引理, 将原始的一维广义 KYP 引理推广

到了二维系统. 虽然得到的二维广义 KYP 引理的线性矩阵不等式条件仅仅是充分的, 但是很好地保持了一维版本简洁的形式及其易用性, 对研究二维系统的有限频域性能分析和综合问题具有重要的价值. 借助二维广义 KYP 引理, Li 等进一步研究了二维系统的广义正实控制<sup>[67]</sup>、广义  $H_\infty$  滤波<sup>[82, 84]</sup>和广义  $H_\infty$  模型降阶<sup>[99]</sup>等有限频域分析与设计问题. 文献 [115] 推导了线性时间-空间模型的二维广义 KYP 引理, 能够处理空间维度的非因果性. 文献 [79-80] 得到了具有状态常时滞的线性时滞系统的广义有界实引理 (有界实引理即 Bounded real lemma 是 KYP 引理针对  $H_\infty$  性能的特定形式). 该引理能够处理时滞系统的广义  $H_\infty$  性能, 并结合了时滞分割思想以降低保守性, 被进一步用于求解时滞系统的广义  $H_\infty$  滤波问题<sup>[79-80]</sup>和主动悬架系统具有时滞输入的控制设计问题<sup>[116]</sup>.

在引理的变形方面, Xiong 等讨论了有限频域负虚性质与有限频域正实性质之间的关系, 并给出了分析有限频域负虚性质的充要条件<sup>[117]</sup>. 针对单输入单输出线性定常系统, Hoang 等得到了一种特殊形式的广义 KYP 引理<sup>[118-119]</sup>. 由于新结果不包含 Lyapunov 矩阵, 所以特别适合于高阶系统的分析和综合. 针对具有实状态空间矩阵的系统, Pipeleers 等研究了广义 KYP 引理的简化问题, 得到了限定 Lyapunov 为实对称矩阵不会带来保守性的结论<sup>[120]</sup>. Pipeleers 等进一步将广义 KYP 引理推广到多频率区间的情形<sup>[121]</sup>. 注意式 (5) 中的矩阵  $\Theta$  不含任何频率信息, Graham 等修订了连续系统的广义 KYP 引理<sup>[122-123]</sup>. 新形式下的广义 KYP 引理允许  $\Theta$  仿射依赖于频率变量, 对于某些特殊的问题很有益. Tanaka 等从 KYP 引理的对称性角度重新考察了 S-procedure 的无损性, 给出了一种基于 Mutual losslessness 概念的系统适定性分析方法, 为认识和理解多类系统的 KYP 引理结果提供了一种新的统一工具<sup>[124]</sup>.

广义 KYP 引理的时域意义也受到了人们的关注. 针对广义 KYP 引理中的频域不等式, Iwasaki 等从信号角度出发推导出了等价的时域不等式条件, 为从时域角度研究系统的有限频域性能提供了一种可能<sup>[125]</sup>. 特别地, 他们得到式 (5) 在低频情形的等价时域关系为下述不等式

$$\int_0^\infty \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} dt \leq 0 \quad (9)$$

$$\int_0^\infty [\dot{\mathbf{x}}(t)\dot{\mathbf{x}}^*(t) - \omega_l^2 \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^*(t)] dt \leq 0 \quad (10)$$

对系统  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$  的所有解均成立, 其中  $\mathbf{u}(t) \in L_2[0, \infty)$ . 注意不是所有输入信号均能驱

使系统状态满足时域不等式 (10). 他们将满足该不等式的输入信号直观物理地解释为那些不会驱使系统状态变化“太快”的输入信号. 根据 Iwasaki 等的时域解释, 人们开始应用广义 KYP 引理研究非线性系统和时变系统的有限频域性能分析和综合问题<sup>[87, 107]</sup>. 此外, 受广义 KYP 引理的时域解释启发, Kaizuka 等另辟蹊径, 在行为框架 (Behavioral framework) 内对一般系统的有限频域性能的描述、分析和处理方法进行了研究<sup>[126–128]</sup>.

### 3.7 广义 KYP 引理的应用

保证有限频域输入输出性能的反馈控制方法最重要和最直接的应用领域就是振动抑制. 这种控制器设计方法对于具有有限带宽的扰动和振动的抑制效果尤为突出. 根据地震产生的破坏力主要集中在 0.3~8 Hz 频带内的事实, Chen 等将广义 KYP 引理应用于建筑物的振动控制, 直接优化状态反馈控制器使闭环系统在 0.3~8 Hz 频率范围的广义  $H_\infty$  扰动抑制水平尽可能小, 从而获得了能够更好抑制建筑物震动的控制器<sup>[2]</sup>. 在为悬架系统和座椅系统设计主动控制器时, 针对人体敏感频率为 4~8 Hz 的事实, Sun 等将减小扰动对平台加速度输出影响的目标转化为广义  $H_\infty$  性能约束, 利用广义 KYP 引理有效地提升了控制器对该段频率扰动的隔离能力, 获得不错的控制效果<sup>[10, 116, 129]</sup>. Du 等观察到机械磁盘磁头定位误差信号在 8 kHz 和 10 kHz 周围具有非常强烈的窄带频率成分. 根据这一事实, 他们利用广义 KYP 引理对这两个频率带的系统敏感函数进行优化, 实验结果验证了所提设计方法比传统的频率加权方法更加简单有效<sup>[1]</sup>. 应用文献 [60] 提出的基于广义 KYP 引理的控制器设计方法, Li 等研究了海上浮式风机的主动结构控制问题, 通过分析风机的振动模态信息并引入额外的有限频域约束, 获得了控制器增益与风机抗扰性能 (抵抗海浪扰动) 的一种折衷设计, 减小了风机在常规工作模式下的结构振动及其承受的载荷<sup>[130]</sup>.

广义 KYP 引理也适合于处理具有某种周期特性的控制问题. 文献 [3, 74] 和 [75] 结合回路成形技术和广义 KYP 引理分别研究了光盘驱动器的磁道伺服跟踪控制问题和电磁铸模机的控制问题, 给出了相应控制器的凸优化设计方法. Pipeleers 等研究了具有周期输入信号的最优前馈控制问题和重复控制中的最优控制问题, 应用广义 KYP 引理将设计条件转化为凸优化问题<sup>[5, 8]</sup>. 利用自行车踏板周期运动特性, 文献 [6] 应用广义 KYP 引理为助力装置设计重复控制器以提高能量利用效率.

除了系统和控制领域, 广义 KYP 引理也是处理如通信、信号处理等其他领域中相关有限频域分

析和综合问题的一种重要工具. 在经典文献 [43] 中, Iwasaki 等将数字滤波器设计列为广义 KYP 引理的一个典型的应用领域, 并给出了相应的有限脉冲响应 (Finite impulse response, FIR) 数字滤波器设计例子. Nagahara 等考察了 Delta-sigma (D-S) 调制器中噪声传递函数的整形问题, 获得了 FIR 回路滤波器存在的充要条件<sup>[131]</sup>. 需要指出的是, 对于 FIR 滤波器, 现成的广义 KYP 引理不需要任何变换就直接给出了滤波器参数的线性矩阵不等式条件. 对于更一般的 IIR 滤波器, 直接应用广义 KYP 引理只能获得非线性的矩阵不等式. 鉴于此, 基于广义 KYP 引理, Li 等结合矩阵分离技术和上界约束技术提出了一种迭代算法来设计 IIR 数字滤波器, 每一步只需求解一个凸优化问题<sup>[95]</sup>. 该迭代方法被进一步用于求解 D-S 调制器中具有 IIR 回路滤波器的噪声传递函数整形问题<sup>[132–133]</sup>.

广义 KYP 引理的另外一个应用方向是复杂系统的分析与设计. 针对线性时滞系统和二维系统, 文献 [134–135] 提出了基于频率分割技术的稳定性分析方法, 采用依赖于频率的分段常值 Lyapunov 函数获得了这些复杂系统稳定性的充要条件, 并进一步应用广义 KYP 引理将分析条件转化为等价的线性矩阵不等式条件. 频率分割方法不仅能降低已有充分条件的保守性, 同时与已有的充要条件相比, 易于进一步扩展到其他系统综合问题.

## 4 广义 KYP 引理的一些注记

### 4.1 “水床效应”

实际控制系统的性能不可能无限制地提高. 控制系统的性能极限既取决于系统各环节的物理约束 (如执行器的输出能力、控制器的计算速度等), 同时也取决于被控对象自身的特点. 特别地, 由 Bode 灵敏度积分不等式可知<sup>[9]</sup>, 控制系统的设计极限直接依赖于被控对象的开环不稳定零点和极点. 因此, 如我们在本文开始提到的, 一种控制方法在提高某些频率范围内控制系统性能的同时, 有可能也伴随着感兴趣频率范围之外系统性能的退化. 这就是控制系统设计中著名的“水床效应” (Waterbed effect)<sup>[136]</sup>. 在用广义 KYP 引理对系统的有限频域性能进行优化时, 很容易出现这种现象. 比如文献 [65] 的图 3 给出了一个汽车悬架主动控制例子的闭环频率响应曲线, 可以看出广义  $H_\infty$  控制器能明显地压低 4~8 Hz 频率范围的闭环系统幅值, 同时相应闭环系统在全频域的幅频响应峰值却高于一般  $H_\infty$  控制器下的情形. “水床效应”的存在意味着在应用广义 KYP 引理时需要注意以下两点:

1) 实际问题中很少只优化单一的有限频域性能



指标, 通常需要加入其他约束条件, 以保证系统的其他性能满足指定要求或至少不会太差. 比如, 为了获得文献 [65] 的图 3 汽车悬架例子的广义  $H_\infty$  控制器, 除了一个 4~8 Hz 范围的广义  $H_\infty$  性能指标, 其设计条件还包括一个全频域的标准  $H_\infty$  性能约束. 另外一个考虑多重有限频域指标条件的典型例子是数字滤波器, 需要分别针对通带、阻带和过渡带的滤波器性能引入相应的有限频域性能约束条件<sup>[95]</sup>.

2) 如何选取有限频域性能指标并构建相应的优化问题需要具体问题具体分析. 广义 KYP 引理只是提供了一种处理有限频域性能指标的理论 and 工具, 该结果本身并不能保证其求解的问题一定有解, 即不能保证问题中所选取的性能指标的合理性. 在具体应用时, 很可能需要反复修改指标条件并重新求解才能找到有限频域分析和设计问题的合理描述, 从而利用广义 KYP 引理找到满意的答案.

上述两点表明, 控制系统设计的过程实质上是在寻找各种指标约束下令人满意的折衷方法. 除了广义 KYP 引理, 上述两点事实上也是应用其他有限频域分析与设计方法需要注意的地方.

## 4.2 从光滑到分段光滑

尽管广义 KYP 引理在形式和内容上只是标准 KYP 引理向有限频域性能指标的扩展, 但是其应用外延要超过标准 KYP 引理. 与某些传统的解决方案相比, 基于广义 KYP 引理的方法甚至有深层观念上不同. 针对模型降阶问题, 为了增强降阶模型在某个频率范围的逼近性能, 传统的方法如平衡截断<sup>[25, 27]</sup>、 $H_\infty$  模型降阶<sup>[26, 137]</sup> 等均采用频率加权函数的方案. 不管频率加权函数如何选择, 其原始模型和降阶模型主要是以频率为变量的全局连续光滑的有限阶有理函数模型. 另一方面, 对于第 3.4 节讨论的广义  $H_\infty$  模型降阶问题, 其被逼近的原始模型并不要求满足全局光滑特性. 具体地说, 假设频率集合  $\Omega$  由若干频率子区间组成, 即  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ , 则由式 (8) 定义的广义  $H_\infty$  误差指标可写为

$$\|G_i - G_r\|_\infty^{\Omega_i} \leq \gamma_i, \quad \forall \omega \in \Omega_i, i = 1, 2, \dots, n$$

这里只要求  $G_i$  在每个频率子区间内是一个关于频率的有理函数或多项式函数. 值得注意的是, 式中的  $G_i$  和  $\gamma_i$  在不同频率区间可以不同. 换句话说, 被逼近的原始模型  $G(s) = G_i(s), i = 1, 2, \dots, n$  可以是一个以频率为变量的分段光滑函数. 这也是第 3.4 节的标题使用了更一般的“模型逼近”而非“模型降阶”的原因: 近似模型  $G_r(s)$  的阶次并不一定比原始模型  $G(s)$  的阶次小. 传统的平衡截断、 $H_\infty$  模型降阶等模型降阶方法并不适用于这类逼近问题.

频率加权函数本身就是一种滤波器, 任何有限

阶次的滤波器都不可能提供理想的高通/低通/带通/带阻特性 (通带单位幅值、阻带零幅值). 以广义  $H_\infty$  性能为例, 其效果就像是经过具有理想带通特性的无限阶频率函数加权的标准  $H_\infty$  性能. 广义 KYP 引理可以将这种具有无限阶频率加权函数的系统性能转化为等价的线性矩阵不等式. 特别地, 广义 KYP 引理甚至可以用于滤波器 (频率加权函数) 的设计<sup>[95]</sup>, 而标准 KYP 引理对此却无能为力. 这种关于广义 KYP 引理与频率加权函数之间区别的思考也可以延伸至其他有限频域分析与综合问题.

在模型逼近问题中, 待求目标是有限阶的连续光滑数学模型. 就一些问题而言, 尽管人们知道存在且期望找到某些连续光滑的参数依赖函数, 但是直接求解这类问题可能很困难. 常用方法是将待求函数限定为某类特别简单的函数 (比如常值函数), 从而将问题化简. 但这种方法往往仅能得到充分条件. 为了减小甚至克服这种方法的保守性, 可以采用分段光滑的特殊函数将原问题化简为若干子问题. 如果分段内的子问题容易求解, 原问题就相应地得以解决. 广义 KYP 引理提供了寻找分段光滑函数特别是分段频率依赖函数非常有用的工具. 正是基于该思路, 文献 [134–135] 提出了使用分段常值矩阵逼近未知的连续光滑 Lyapunov 矩阵的想法, 进而利用广义 KYP 引理将复杂的原问题简化为一系列简单的小问题. 广义 KYP 引理处理非光滑分析问题的能力对于求解其他复杂的系统和控制问题非常有用.

## 4.3 有限频域 vs 全频域

前文提到, 目前在获取基于广义 KYP 引理的系统综合结果时所采用的思路大多来自于 Iwasaki 等较早提出的反馈控制器实现方法<sup>[54–55]</sup>. 基本步骤是利用 Finsler 引理或投影定理引入额外的松弛矩阵, 从而解除系统矩阵与 Lyapunov 矩阵的乘积, 进而通过选取具有合适结构的松弛矩阵实现控制器或滤波器存在条件的线性化. 尽管他们已经采用一些分析手段使选取的松弛矩阵尽量“合理”, 但是一般情况下, 松弛矩阵的结构特殊化必然会减小所求问题的解空间, 从而导致系统综合结果具有较大的保守性, 很难使系统性能达到最优. 虽然没有统一的标准去衡量不同取值的优劣, 但是取值合理与否需要考虑一个最基本的原则: 当标准 KYP 引理适用于条件相同或条件更强的问题时, 以优化的有限频域性能指标为准, 基于广义 KYP 引理的设计结果不能差于基于标准 KYP 引理的情形. 如果该基本要求得不到满足, 即广义 KYP 引理产生的结果甚至比标准 KYP 引理更差, 那么人们自然会怀疑在该问题中使用广义 KYP 引理的合理性. 需要指出的

是, 这一点似乎并未引起研究人员的足够重视. 使用或研究广义 KYP 引理的不少文献在对不同方法进行数值比较时未设置全频域方法的对照组, 导致数值结果缺乏说服力和可靠性.

## 5 展望与结语

综上所述, 广义 KYP 引理是近年来鲁棒控制领域最为重要和令人激动的发现之一. 由于在理论方面的创新性、重要性和易用性, 就在发表的次年, Iwasaki 等的论文即获得 IEEE 控制系统协会颁发的“最佳论文奖”, 基于广义 KYP 引理的有限频域分析与设计研究也成为近年来的研究热点, 受到许多研究人员的关注. 通过第 3、4 节对现有研究成果的梳理, 可以看出广义 KYP 引理的研究范围不仅包括应用传统控制理论只能得到非常保守结果的老问题 (比如应用鲁棒控制理论分析时滞系统和多维系统稳定性<sup>[134-138]</sup>), 也有传统控制理论无法处理而由广义 KYP 引理衍生出的新方向 (比如数字滤波器的直接设计<sup>[43, 95]</sup>), 同时其学科范畴也不仅限于系统和控制理论. 尽管如此, 现有结果仍有一些不足, 或保守性太大, 或缺乏充分的工程解释. 许多与广义 KYP 引理有关的关键问题亟待解决或值得进一步研究. 这些问题包括但不限于:

**如何选择或优化松弛矩阵?** 在第 4.3 节我们指出松弛矩阵的结构化处理使现有大多数基于广义 KYP 引理的系统综合结果具有一定保守性, 而该问题之所以关键是因为松弛矩阵的取值直接关系到使用广义 KYP 引理的合理性. 如何合理地选取松弛矩阵是应用广义 KYP 引理进行系统综合的一个难题. 注意到松弛矩阵本身是鲁棒控制理论中将经典结果如标准 KYP 引理变形为参数依赖形式的一种手段<sup>[80, 138]</sup>. 受此启发, 满足第 4.3 节所提基本要求的一个选取方案就是直接采用与标准 KYP 引理情形一样的松弛矩阵. 尽管这种取法不是最优的, 但是非常简单易行. 一个更好的途径是另外构造算法对这些松弛矩阵进行优化. 目前沿着该思路的大多数研究结果都是基于线性矩阵不等式的启发式迭代算法<sup>[60, 65, 85, 95, 97]</sup>, 难以进行最优性分析. 如何利用数学上的先进优化理论或技术构造松弛矩阵优化算法并进行最优性分析是值得研究的课题.

**如何得到有限频域性能指标的充要条件?** 文献 [43] 给出的广义 KYP 引理建立了常规一维线性系统的有限频域性能指标与线性矩阵不等式之间的等价关系. 遗憾的是, 文献 [67, 98] 给出的二维广义 KYP 引理仅仅提供了二维系统有限频域性能指标的线性矩阵不等式充分条件. 同样的问题也存在于文献 [115] 中线性时间-空间模型的广义 KYP 引理以及文献 [79, 81] 中线性时滞系统的有限频域有界

实引理. 目前为止, 关于这些比一般线性系统更加复杂的动态系统的有限频域性能指标, 还未见易于处理的广义 KYP 引理充要条件报道. 如何得到复杂动态系统保守性更低或无保守性的广义 KYP 引理是重要且具有挑战性的课题 (即便考察全频域性能指标, 如何获得相应的充要条件也是开放问题). 在该问题上取得的基础理论成果不仅能丰富广义 KYP 引理的内容, 也将促进相关领域的发展.

**如何更好地解释非线性/时变系统的有限频域性能指标?** 注意前面介绍的大多数结果的研究对象都是线性时不变系统 (尽管可能是多维系统或含有定常时滞等). 线性时不变系统可以用传递函数进行描述, 其频域意义显而易见, 进而能够非常直观地理解由式 (5) 定义的有限频域性能指标的系统意义. 由于一般情况下传递函数并不适用于处理非线性/时变系统, 所以就不能在非线性/时变系统中直接套用类似式 (5) 的有限频域描述. 前面指出, Iwasaki 等在文献 [125] 中推导出了频域不等式 (5) 的时域等价关系 (参见式 (9) 和 (10)) 并从信号角度提供了式 (10) 一种直观的物理解释 (系统状态变化“快慢”). 对于线性时不变系统, 状态变化的“快慢”可以简单地认为由输入信号变化的“快慢”决定 — 对于三角函数形式的输入信号, 当系统稳定时, 状态的变化频率与输入的变化频率相同. 对于非线性/时变系统, 状态的变化和输入的变化之间不再有这种简单的决定关系. 因此, 就非线性/时变系统而言, 很难直观地回答究竟怎样的输入信号才能使式 (10) 成立. 鉴于此, 尽管已有不少文献直接使用与式 (10) 类似的时域不等式进行非线性/时变系统的有限频域分析与设计, 但是所得结果的物理意义并不明确. 未来的工作有必要进一步理清有限频域性能指标在非线性/时变系统中的定义、使用和解释等一系列基础问题.

**如何扩展广义 KYP 引理的应用外延?** 开发一项工具的终极目标都是将其用于解决所面临的问题. 拓展广义 KYP 引理的应用外延是一个宽泛和开放的提问, 全面地回答该问题超过了笔者知识所能及的范围. 下面简单地从两个方面进行说明. 1) 正如我们在第 4.2 节指出的, 广义 KYP 引理事实上提供了一种非光滑分析的工具. 基于这种理解, 有可能将广义 KYP 引理用于处理其他更加复杂的理论问题, 此为其在理论方面的作用. 这些复杂的理论问题既有可能来自于系统和控制领域某些复杂系统的分析与设计问题 (比如时滞无关稳定性分析和镇定问题<sup>[134-135]</sup>), 也有可能来自于其他工程学科中的理论问题 (比如信号处理中 D-S 调制器的优化设计问题<sup>[131, 133]</sup>), 还有可能是应用数学中的优化问题 (比如偏应用数学的原子分解的半定规划方法<sup>[139]</sup>) 等.

2) 另一方面, 我们在第 4.1 节指出, 广义 KYP 引理仅仅是提供了一种解决问题的工具. 如果不考虑问题的具体工程背景, 就不清楚也很难保证在工程问题中使用广义 KYP 引理的合理性. 尽管已有研究成果很好地展现了广义 KYP 引理在解决一些实际有限频域问题方面的良好效果, 但是如何将更多复杂的工程实际问题转化为有限频域分析与设计问题并最大限度地发挥广义 KYP 引理的实用性值得深入研究. 这不仅仅是理论研究人员的责任, 也需要工程技术人员参与, 从而最终为工程界提供实用且易于理解接受的控制系统分析和设计方法.

## References

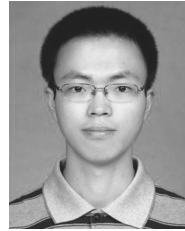
- 1 Du C L, Xie L H, Guo G X, Teoh J N. A generalized KYP lemma based approach for disturbance rejection in data storage systems. *Automatica*, 2007, **43**(12): 2112–2118
- 2 Chen Y, Zhang W L, Gao H J. Finite frequency  $H_\infty$  control for building under earthquake excitation. *Mechatronics*, 2010, **20**(1): 128–142
- 3 Lim J S, Ryoo J R, Lee Y I, Son S Y. Design of a fixed-order controller for the track-following control of optical disc drives. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, **20**(1): 205–213
- 4 Paszke W, Rogers E, Galkowski K. On the design of ILC schemes for finite frequency range tracking specifications. In: Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, GA: IEEE, 2010. 6979–6984
- 5 Pipeleers G, Swevers J. Optimal feedforward controller design for periodic inputs. *International Journal of Control*, 2010, **83**(5): 1044–1053
- 6 Hatada K, Hirata K. Energy-efficient power assist control for periodic motions. In: Proceedings of the SICE Annual Conference 2010. Taipei, China: IEEE, 2010. 2004–2009
- 7 Pipeleers G, Demeulenaere B, De Schutter J, Swevers J. Generalised repetitive control: relaxing the period-delay-based structure. *IET Control Theory and Applications*, 2009, **3**(11): 1528–1536
- 8 Pipeleers G, Demeulenaere B, Al-Bender F, De Schutter J, Swevers J. Optimal performance tradeoffs in repetitive control: experimental validation on an active air bearing setup. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, **17**(4): 970–989
- 9 Zhou K M, Doyle J C, Glover K. *Robust and Optimal Control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- 10 Sun W C, Gao H J, Kaynak O. Finite frequency  $H_\infty$  control for vehicle active suspension systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, **19**(2): 416–422
- 11 Sun Wei-Chao. Active Vibration Control for Vehicle Suspension Systems [Ph. D. dissertation], Harbin Institute of Technology, China, 2013  
(孙维超. 汽车悬架系统的主动振动控制 [博士学位论文], 哈尔滨工业大学, 中国, 2013)
- 12 Costa-Castello R, Wang D W, Grino R. A passive repetitive controller for discrete-time finite-frequency positive-real systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(4): 800–804
- 13 Wongsura S, Liu L, Hara S. Conditions for mixed small gain and positive real property for LTI systems. In: Proceedings of the SICE Annual Conference 2010. Taipei, China: IEEE, 2010. 625–629
- 14 Yang H J, Xia Y Q, Shi P, Fu M Y. Stability analysis for high frequency networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(10): 2694–2700
- 15 Iwasaki T, Hara S, Yamauchi H. Dynamical system design from a control perspective: finite frequency positive-realness approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(8): 1337–1354
- 16 Forbs J R. Extensions of Input-Output Stability Theory and the Control of Aerospace Systems [Ph. D. dissertation], University of Toronto, Canada, 2011
- 17 Wu S P, Boyd S, Vandenberghe L. FIR filter design via spectral factorization and convex optimization. *Applied and Computational Control, Signals, and Circuits*. New York: Springer, 1999. 215–245
- 18 Lei C U, Wong N. IIR approximation of FIR filters via discrete-time hybrid-domain vector fitting. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, **16**(6): 533–537
- 19 Apkarian P, Noll D. Nonsmooth optimization for multi-band frequency domain control design. *Automatica*, 2007, **43**(4): 724–731
- 20 Simões A M, Apkarian P, Noll D. Nonsmooth multi-objective synthesis with applications. *Control Engineering Practice*, 2009, **17**(11): 1338–1348
- 21 Pei Run, Song Shen-Min. *Principles of Automatic Control*. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2006.  
(裴润, 宋申民. 自动控制原理. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2006.)
- 22 Zheng Da-Zhong. *Linear System Theory*. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.  
(郑大钟. 线性系统理论. 北京: 清华大学出版社, 2002.)
- 23 Anderson B D O, Moore J B. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1989.
- 24 Enns D F. Model reduction with balanced realizations: an error bound and a frequency weighted generalization. In: Proceedings of the 23rd Conference on Decision and Control. Las Vegas, NV, USA: IEEE, 1984. 127–132
- 25 Anderson B D O. Weighted Hankel-norm approximation: calculation of bounds. *Systems & Control Letters*, 1986, **7**(4): 247–255
- 26 Chow Y L, Hu Y B, Li X W, Kominek A, Lam J. Mixed additive/multiplicative  $H_\infty$  model reduction. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2013, **135**(5): 051005, DOI: 10.1115/1.4024111
- 27 Zhou K M. Frequency-weighted  $L_\infty$  norm and optimal Hankel norm model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(10): 1687–1699
- 28 Luo H, Lu W S, Antoniou A. A weighted balanced approximation for 2-D discrete systems and its application to model reduction. *IEEE Transactions on Circuits and Systems — I: Fundamental Theory and Applications*, 1995, **42**(8): 419–429
- 29 Wang G, Sreeram V, Liu W Q. A new frequency-weighted balanced truncation method and an error bound. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(9): 1734–1737

- 30 Ghafoor A, Wang J, Sreeram V. Frequency-weighted model reduction method with error bounds for 2-D separable denominator discrete systems. In: Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on, Mediterrean Conference on Control and Automation, Intelligent Control. Limassol, Cyprus: IEEE, 2005. 525–530
- 31 Ghafoor A, Sreera V, Treasure R. Frequency weighted model reduction technique retaining Hankel singular values. *Asian Journal of Control*, 2007, **9**(1): 50–56
- 32 Ghafoor A, Sreeram V. A survey/review of frequency-weighted balanced model reduction techniques. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2008, **130**(6): 758–767
- 33 Liu Y, Anderson B D O. Frequency weighted controller reduction methods and loop transfer recovery. *Automatica*, 1990, **26**(3): 487–497
- 34 Houllis P, Sreeram V. A parametrized controller reduction technique via a new frequency weighted model reduction formulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(5): 1087–1093
- 35 Gawronski W, Juang J N. Model reduction in limited time and frequency intervals. *International Journal of Systems Science*, 1990, **21**(2): 349–376
- 36 Rotea M A. The generalized  $H_2$  control problem. *Automatica*, 1993, **29**(2): 373–385
- 37 Li X W, Gao H J. A delay-dependent approach to robust generalized  $H_2$  filtering for uncertain continuous-time systems with interval delay. *Signal Processing*, 2011, **91**(10): 2371–2378
- 38 Gugercin S, Antoulas A C. A survey of model reduction by balanced truncation and some new results. *International Journal of Control*, 2004, **77**(8): 748–766
- 39 Ghafoor A, Sreeram V. Model reduction via limited frequency interval gramians. *IEEE Transactions on Circuits and Systems — I: Regular Papers*, 2008, **55**(9): 2806–2812
- 40 Sahlan S, Ghafoor A, Sreeram V. A new method for the model reduction technique via a limited frequency interval impulse response gramian. *Mathematical and Computer Modelling*, 2012, **55**(3–4): 1034–1040
- 41 Petersson D, Löfberg J. Model Reduction Using a Frequency-Limited  $H_2$ -Cost, Technical Report LiTH-ISY-R-3045, Division of Automatic Control, Linköpings University, Sweden, 2012.
- 42 Iwasaki T, Meinsma G, Fu M Y. Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma. *Mathematical Problems in Engineering*, 2000, **6**(2–3): 305–320
- 43 Iwasaki T, Hara S. Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(1): 41–59
- 44 Rantzer A. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Systems & Control Letters*, 1996, **28**(1): 7–10
- 45 Iwasaki T, Hara S. Generalization of Kalman-Yakubovich-Popov lemma for restricted frequency inequalities. In: Proceedings of the 2003 American Control Conference. Denver, Colorado, USA: IEEE, 2003. 3828–3833
- 46 Nesterov Y, Nemirovskii A. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- 47 Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- 48 Gao Hui-Jun. Analysis and Synthesis of Uncertain Dynamic Systems Based on Parameter-Dependent Lyapunov Function [Ph. D. dissertation], Harbin Institute of Technology, China, 2005  
(高会军. 基于参数依赖 Lyapunov 函数的不确定动态系统的分析与综合 [博士学位论文], 哈尔滨工业大学, 中国, 2005)
- 49 Yu Li. *Robust Control-Linear Matrix Inequality Method*. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.  
(俞立. 鲁棒控制 – 线性矩阵不等式处理方法. 北京: 清华大学出版社, 2002.)
- 50 Toh K C, Todd M J, Tütüncü R H. SDPT3 — a matlab software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization Methods and Software*, 1999, **11**(1–4): 545–581
- 51 Sturm J F. Using SeDuMi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 1999, **11**(1–4): 625–653
- 52 Skelton R E, Iwasaki T, Grigoriadis K M. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. London and Bristol, PA: Taylor & Francis, 1998.
- 53 Hara S, Iwasaki T. From generalized KYP lemma to engineering applications. In: Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii, USA: IEEE, 2003. 792–797
- 54 Iwasaki T, Hara S. Robust control synthesis with general frequency domain specifications: static gain feedback case. In: Proceedings of the 2004 American Control Conference. Boston, MA: IEEE, 2004. 4613–4618
- 55 Iwasaki T, Hara S. Feedback control synthesis of multiple frequency domain specifications via generalized KYP lemma. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2007, **17**(5–6): 415–434
- 56 Hara S, Iwasaki T. Sum-of-squares decomposition via generalized KYP lemma. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(5): 1025–1029
- 57 Hara S, Iwasaki T, Shiokata D. Robust PID control using generalized KYP synthesis: direct open-loop shaping in multiple frequency ranges. *IEEE Control Systems Magazine*, 2006, **26**(1): 80–91
- 58 Shiokata D, Hara S, Iwasaki T. From Nyquist/Bode to GKYP design: design algorithms with CACSD tools. In: Proceedings of the SICE 2004 Annual Conference. Sapporo: SICE, 2004. 1780–1785
- 59 El Ghaoui L, Oustry F, AitRami M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(8): 1171–1176
- 60 Li X W, Gao H J. A heuristic approach to static output-feedback controller synthesis with restricted frequency-domain specifications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, **59**(4): 1008–1014
- 61 Shu Z, Lam J. An augmented system approach to static output-feedback stabilization with  $H_\infty$  performance for continuous-time plants. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2009, **19**(7): 768–785
- 62 Peaucelle D, Arzelier D. An efficient numerical solution for  $H_2$  static output feedback synthesis. In: Proceeding of the 2001 European Control Conference. Porto, Portugal: IEEE, 2001. 3800–3805
- 63 Agulhari C M, Oliveira R C L F, Peres P L D. LMI relaxations for reduced-order robust  $H_\infty$  control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(6): 1532–1537

- 64 Li X W, Yin S, Gao H J, Kaynak O. Robust static output-feedback control for uncertain linear discrete-time systems via the generalized KYP lemma. In: Proceedings of the 19th IFAC World Congress. Cape Town, South Africa: IFAC, 2014. 7430–7435
- 65 Li X W, Gao H J. Robust frequency-domain constrained feedback design via a two-stage heuristic approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, **45**(10): 2065–2075
- 66 Li X W, Gao H J. Generalized Kalman-Yakubovich-Popov lemma for 2-D FM LSS model and its application to finite frequency positive real control. In: Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Orlando, FL: IEEE, 2011. 6991–6996
- 67 Li X W, Gao H J, Wang C H. Generalized Kalman-Yakubovich-Popov lemma for 2-D FM LSS model. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(12): 3090–3103
- 68 Hao Y Q, Duan Z S, Huang D. Structured controller synthesis with restricted frequency domain specifications. In: Proceedings of the 34th Chinese Control Conference. Hangzhou, China: IEEE, 2015. 2895–2990
- 69 Hao Y Q, Duan Z S. Static output-feedback controller synthesis with restricted frequency domain specifications for time-delay systems. *IET Control Theory and Applications*, 2015, **9**(10): 1608–1614
- 70 Zhang Xiao-Ni, Yang Guang-Hong. Dynamic output feedback control synthesis with mixed frequency small gain specifications. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(5): 551–557  
(张晓妮, 杨光红. 混合频小增益动态输出反馈控制综合. 自动化学报, 2008, **34**(5): 551–557)
- 71 Mei Ping, Zou Yun. Finite frequency positive realness analysis of singularly perturbed systems based on generalized KYP lemma approach. *Control and Decision*, 2010, **25**(5): 711–720  
(梅平, 邹云. 基于广义 KYP 引理方法的奇异摄动系统有限频段正实性能分析. 控制与决策, 2010, **25**(5): 711–720)
- 72 Dong Quan-Chao. Robust  $H_\infty$  Fault Estimation and Active Fault Tolerant Control for Linear Time-delay Systems [Ph. D. dissertation], Shandong University, China, 2010  
(董全超. 线性时滞系统鲁棒  $H_\infty$  故障估计与主动容错控制 [博士学位论文], 山东大学, 中国, 2010)
- 73 Li H, Peng L Y, Ju H H. A finite frequency domain approach to robust and parameter dependent PID controller design for LPV systems. In: Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. Yantai, China: IEEE, 2011. 3688–3694
- 74 Lim J S, Ryoo J R, Lee Y I. Fixed-order controller design with frequency domain specifications. In: Proceedings of ICROS-SICE International Joint Conference 2009. Fukuoka, Japan: IEEE, 2009. 108–111
- 75 Ishizaki T, Kashima K, Imura J, Katoh A, Morita H, Aihara K. Distributed parameter modeling and finite-frequency loop-shaping of electromagnetic molding machine. *Control Engineering Practice*, 2013, **21**(12): 1735–1743
- 76 Wang H, Yang G H. A finite frequency approach to filter design for uncertain discrete-time systems. *International Journal of Adaptive Control & Signal Processing*, 2008, **22**: 533–550
- 77 Zhang X N, Yang G H. Delay-dependent filtering for discrete-time systems with finite frequency small gain specifications. In: Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 4420–4425
- 78 Gao H J, Li X W, Yu X H. Finite frequency approaches to  $H_\infty$  filtering for continuous-time state-delayed systems. In: Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Orlando, FL: IEEE, 2011. 2583–2588
- 79 Gao H J, Li X W.  $H_\infty$  filtering for discrete-time state-delayed systems with finite frequency specifications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(12): 2935–2941
- 80 Gao H J, Li X W. *Robust Filtering for Uncertain Systems*. Switzerland: Springer International Publishing, 2014.
- 81 Li Xian-Wei. Finite Frequency  $H_\infty$  Filtering Analysis and Synthesis of Time-Delay Systems [Master dissertation], Harbin Institute of Technology, China, 2011  
(李贤伟. 时滞系统的有限频域  $H_\infty$  滤波分析与综合 [硕士学位论文], 哈尔滨工业大学, 中国, 2011)
- 82 Li X W, Gao H J. Robust finite frequency  $H_\infty$  filtering for uncertain 2-D Roesser systems. *Automatica*, 2012, **48**(6): 1163–1170
- 83 Li X W, Gao H J, Karimi H R. Robust  $H_\infty$  filtering for 2-D FM systems: a finite frequency approach. In: Proceedings of the 51st IEEE Annual Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii, USA: IEEE, 2012. 3526–3530
- 84 Li X W, Gao H J. Robust finite frequency  $H_\infty$  filtering for uncertain 2-D systems: the FM model case. *Automatica*, 2013, **49**(8): 2446–2452
- 85 Li X W, Gao H J. Reduced-order generalized  $H_\infty$  filtering for linear discrete-time systems with application to channel equalization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, **62**(13): 3393–3402
- 86 Ding Da-Wei. Study on Some Problems of Switched Linear Systems [Ph. D. dissertation], Northeastern University, China, 2010  
(丁大伟. 线性切换系统的若干问题研究 [博士学位论文], 东北大学, 中国, 2010)
- 87 Ding D W, Yang G H. Fuzzy filter design for nonlinear systems in finite-frequency domain. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, **18**(5): 935–945
- 88 Wang H, Ju H H. Reliable  $H_\infty$  filtering for LPV systems with sensor faults in finite frequency domain. *International Journal of Systems Science*, 2013, **44**(12): 2310–2320
- 89 Grigoriadis K M. Optimal  $H_\infty$  model reduction via linear matrix inequalities: continuous- and discrete-time cases. *Systems & Control Letters*, 1995, **26**(5): 321–333
- 90 Du X, Yang G H.  $H_\infty$  model reduction of linear continuous-time systems over finite-frequency interval. *IET Control Theory and Applications*, 2010, **4**(3): 499–508
- 91 Du Xin. LMI-based Approaches to Model Reduction and Static Output Feedback Controller Design for Linear Systems [Ph. D. dissertation], Northeastern University, China, 2009  
(杜鑫. 基于 LMI 技术的线性系统模型降阶与静态输出反馈控制器设计 [博士学位论文], 东北大学, 中国, 2009)
- 92 Du X, Liu F W, Zhu X L, Chao W. Finite frequency approaches to  $H_\infty$  model reduction for continuous-time state delayed systems. In: Proceedings of the 24th Chinese Control and Decision Conference. Taiyuan, China: IEEE, 2012. 470–475
- 93 Du X, Liu F W, Zhu X L, Zheng M.  $H_\infty$  model reduction of discrete-time linear state delayed systems over finite-frequency ranges. In: Proceedings of the 24th Chinese Control and Decision Conference. Taiyuan, China: IEEE, 2012. 954–959

- 94 Li X W, Gao H J. A frequency-specific enhanced approach to transfer function approximation. In: Proceedings of the 23rd IEEE International Symposium on Industrial Electronics. Istanbul, Turkey: IEEE, 2014. 18–22
- 95 Li X W, Gao H J. Min-max approximation of transfer functions with application to filter design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, **63**(1): 31–40
- 96 Li X W, Yin S, Gao H J. Passivity-preserving model reduction with finite frequency  $H_\infty$  approximation performance. *Automatica*, 2014, **50**(9): 2294–2303
- 97 Li X W, Yu C B, Gao H J. Frequency-limited  $H_\infty$  model reduction for positive systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(4): 1093–1098
- 98 Yang R, Xie L H, Zhang C S. Generalized two-dimensional Kalman-Yakubovich-Popov lemma for discrete Roesser model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems — I: Regular Papers*, 2008, **55**(10): 3223–3233
- 99 Li X W, Lam J, Cheung K C. Generalized  $H_\infty$  model reduction for stable two-dimensional discrete systems. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2016, **27**(2): 359–382
- 100 Shen J, Lam J. Improved results on  $H_\infty$  model reduction for continuous-time linear systems over finite frequency ranges. *Automatica*, 2015, **5**: 79–84
- 101 Ding D W, Du X, Li X. Finite-frequency model reduction of two-dimensional digital filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(6): 1624–1629
- 102 Wang H, Yang G H. A finite frequency domain approach to fault detection observer design for linear continuous-time systems. *Asian Journal of Control*, 2008, **10**(5): 559–568
- 103 Wang H, Yang G H. A finite frequency domain approach to fault detection for linear discrete-time systems. *International Journal of Control*, 2008, **81**(7): 1162–1171
- 104 Wang Heng, Ju He-Hua, Yang Guang-Hong. Fault detection filter design for linear polytopic uncertain continuous-time systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(5): 742–750  
(王恒, 居鹤华, 杨光红. 线性多胞型不确定连续系统故障检测滤波器设计. *自动化学报*, 2010, **36**(5): 742–750)
- 105 Wang H, Yang G H. Simultaneous fault detection and control for uncertain linear discrete-time systems. *IET Control Theory and Applications*, 2009, **3**(5): 583–594
- 106 Yang G H, Wang H, Xie L H. Fault detection for output feedback control systems with actuator stuck faults: a steady-state-based approach. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2010, **20**(15): 1739–1757
- 107 Yang H J, Xia Y Q, Liu B. Fault detection for T-S fuzzy discrete systems in finite-frequency domain. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics*, 2011, **41**(4): 911–920
- 108 Yang H J, Xia Y Q, Zhang J H. Generalised finite-frequency KYP lemma in delta domain and applications to fault detection. *International Journal of Control*, 2011, **84**(3): 511–525
- 109 Zhang Z, Jaimoukha I M. Optimal state space solution to the fault detection problem at single frequency. In: Proceedings of the 18th IFAC World Congress. Milano, Italy: IFAC, 2011. 7619–7624
- 110 Long Y, Yang G H. Fault detection and isolation for networked control systems with finite frequency specifications. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2014, **24**(3): 495–514
- 111 Long Y, Yang G H. Fault detection in finite frequency domain for networked control systems with missing measurements. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, **350**(9): 2605–2626
- 112 Zhang K, Jiang B, Shi P, Xu J F. Multi-constrained fault estimation observer design with finite frequency specifications for continuous-time systems. *International Journal of Control*, 2014, **87**(8): 1635–1645
- 113 Zhang K, Jiang B, Shi P, Xu J. Fault estimation observer design for discrete-time systems in finite-frequency domain. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2015, **25**(9): 1379–1398
- 114 Zhang K, Jiang B, Shi P, Xu J F. Analysis and design of robust  $H_\infty$  fault estimation observer with finite-frequency specifications for discrete-time fuzzy systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, **45**(7): 1225–1235
- 115 Zhou T. Generalized positiveness of spatially interconnected systems over quadratically constrained frequency domains. *Systems & Control Letters*, 2012, **61**(12): 1187–1193
- 116 Sun W C, Zhao Y, Li J F, Zhang L X, Gao H J. Active suspension control with frequency band constraints and actuator input delay. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, **59**(1): 530–537
- 117 Xiong J L, Petersen I R, Lanzon A. Finite frequency negative imaginary systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(11): 2917–2922
- 118 Hoang H G, Tuan H D, Apkarian P. A Lyapunov variable-free KYP lemma for SISO continuous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(11): 2669–2673
- 119 Hoang H G, Tuan H D, Nguyen T Q. Frequency-selective KYP lemma, IIR filter, and filter bank design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(3): 956–965
- 120 Pipeleers G, Vandenberghe L. Generalized KYP lemma with real data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(12): 2942–2946
- 121 Pipeleers G, Iwasaki T, Hara S. Generalizing the KYP lemma to multiple frequency intervals. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2014, **52**(6): 3618–3638
- 122 Graham M R, de Oliveira M C, de Callafon R A. An alternative Kalman-Yakubovich-Popov lemma and some extensions. *Automatica*, 2009, **45**(6): 1489–1496
- 123 Graham M R, de Oliveira M C. Linear matrix inequality tests for frequency domain inequalities with affine multipliers. *Automatica*, 2010, **46**(5): 897–901
- 124 Tanaka T, Langbort C. Symmetric formulation of the S-procedure, Kalman-Yakubovich-Popov lemma and their exact losslessness conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(6): 1486–1496
- 125 Iwasaki T, Hara S, Fradkov A L. Time domain interpretations of frequency domain inequalities on (semi) finite ranges. *Systems & Control Letters*, 2005, **54**(7): 681–691
- 126 Kaizuka Y, Kojima C, Hara S. Time domain characterization of finite frequency properties via behavioral approach. In: Proceedings of the SICE Annual Conference 2008. Tokyo, Japan: IEEE, 2008. 2364–2369
- 127 Kojima C, Hara S. An achievability condition for n-dimensional behaviors with a finite frequency specification: dissipation inequalities approach. In: Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, GA: IEEE, 2010. 7730–7735

- 128 Kojima C, Hara S. Controller synthesis for multiple finite frequency specifications: dissipation inequalities approach. In: Proceedings of the SICE Annual Conference 2010. Taipei, China: IEEE, 2010. 173–178
- 129 Sun W C, Li J F, Zhao Y, Gao H J. Vibration control for active seat suspension systems via dynamic output feedback with limited frequency characteristic. *Mechatronics*, 2011, **21**(1): 250–260
- 130 Li X W, Gao H J. Load mitigation for a floating wind turbine via generalized  $H_\infty$  structural control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, **63**(1): 332–342
- 131 Nagahara M, Yamamoto Y. Frequency domain min-max optimization of noise-shaping delta-sigma modulators. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(6): 2828–2839
- 132 Li X W, Gao H J, Yu C B. An iterative LMI approach to IIR noise transfer function optimization for delta-sigma modulators. In: Proceedings of the 3rd Australian Control Conference. Fremantle, WA: IEEE, 2013. 67–72
- 133 Li X W, Yu C B, Gao H J. Design of delta-sigma modulators via generalized Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Automatica*, 2014, **50**(10): 2700–2708
- 134 Li X W, Gao H J, Gu K Q. Delay-independent stability analysis of linear time-delay systems based on frequency discretization. *Automatica*, 2016, **70**: 288–294
- 135 Li X W, Lam J, Gao H J, Gu Y. A frequency-partitioning approach to stability analysis of two-dimensional discrete systems. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2015, **26**(1): 67–93
- 136 Åström K J, Murray R M. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- 137 Wu F, Jaramillo J J. Computationally efficient algorithm for frequency-weighted optimal  $H_\infty$  model reduction. *Asian Journal of Control*, 2003, **5**(3): 341–349
- 138 De Oliveira M C, Skelton R E. Stability tests for constrained linear systems. *Perspectives in Robust Control*. London: Springer-Verlag, 2001. 241–257
- 139 Chao H H, Vandenberghe L. Extensions of semidefinite programming methods for atomic decomposition. In: Proceedings of the 41st IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Shanghai, China: IEEE, 2016. 4757–4761



**李贤伟** 新加坡南洋理工大学博士后. 2015 年获得哈尔滨工业大学工学博士学位. 主要研究方向为多智能体系统, 鲁棒控制, 有限频域方法及其应用.

E-mail: lixianwei1985@gmail.com

(**LI Xian-Wei** Postdoctor at Nanyang Technological University, Singapore. He received his Ph.D.

degree from Harbin Institute of Technology in 2015. His research interest covers multi-agent systems, robust control, finite frequency methods and their applications.)



**高会军** 哈尔滨工业大学教授, IEEE 会士. 2005 年获哈尔滨工业大学工学博士学位. 主要研究方向为网络化控制, 鲁棒控制与滤波, 时滞系统及其工程应用. 本文通信作者.

E-mail: hjgao@hit.edu.cn

(**GAO Hui-Jun** Professor at Harbin Institute of Technology. He is a Fellow

of IEEE. He received his Ph.D. degree from Harbin Institute of Technology in 2005. His research interest covers network-based control, robust control/filter theory, time-delay systems and their engineering applications. Corresponding author of this paper.)