

基于新息估计和正交投影的闭环子空间模型辨识

侯杰¹ 刘涛¹

摘要 针对闭环控制系统提出一种基于新息估计和正交投影的闭环子空间模型辨识方法. 首先采用最小二乘法对 VARX 模型 (Vector autoregressive with exogenous inputs model) 进行计算得到新息估计值, 然后通过将由观测输入输出数据构造的 Hankel 矩阵正交投影到新息数据的正交补空间以消除噪声影响, 从而在无噪声的输入输出数据奇偶空间中提取得到扩展可观矩阵和下三角形 Toeplitz 矩阵. 最后采用平移变换法得到系统矩阵. 对该算法严格分析和证明了实现一致估计的条件. 通过仿真实例验证了本文方法的有效性和优越性.

关键词 子空间辨识, 闭环辨识, 奇偶空间, 新息估计, 正交投影, 一致估计

引用格式 侯杰, 刘涛. 基于新息估计和正交投影的闭环子空间模型辨识. 自动化学报, 2016, 42(11): 1657–1663

DOI 10.16383/j.aas.2016.c160050

Closed-loop Subspace Model Identification Using Innovation Estimation and Orthogonal Projection

HOU Jie¹ LIU Tao¹

Abstract In this paper, a closed-loop subspace model identification method using innovation estimation and orthogonal projection is proposed for closed-loop control systems. Firstly, a least-squares algorithm is adopted to estimate the innovation matrix via the vector autoregressive with exogenous inputs (VARX) model. Then, by performing an orthogonal projection of the observed input-output Hankel matrix onto the orthogonal complement space of innovation Hankel matrix to eliminate the influence from noise, the extended observability matrix and lower triangular block Toeplitz matrix are derived from the parity space of noise-free input-output data. Finally, the system matrices are retrieved by using a shift-invariant approach. The consistent estimation conditions are analyzed with a strict proof. A simulation example is shown to demonstrate the effectiveness and merit of the proposed method.

Key words Subspace identification, closed-loop identification, parity space, innovation estimation, orthogonal projection, consistent estimation

Citation Hou Jie, Liu Tao. Closed-loop subspace model identification using innovation estimation and orthogonal projection. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(11): 1657–1663

子空间辨识算法由于能对多输入多输出系统采用统一框架建立状态空间模型, 在系统辨识和控制工程领域受到广泛关注^[1]. 有一些子空间算法被提出用于开环辨识工业过程, 得到一致估计结果^[2]. 但是, 由于过程操作安全性和稳定性的需要, 许多工业过程限制在闭环条件下进行辨识实验, 由于反馈控制作用的影响, 使得过程噪声和输入存在相关性, 使得传统开环子空间方法产生辨识偏差^[3]. 闭环系统辨识因此在近年来受到很多关注和探讨^[4], 一

些闭环子空间辨识算法被相继提出^[5]. 这些算法可被归纳为三类, 第一类方法^[6–7]采用辅助变量策略消除噪声影响, 保证估计结果的一致性; 第二类方法^[8]采用最小二乘法对高阶 VARX 模型 (Vector autoregressive with exogenous inputs model) 进行计算得到马尔科夫估计参数, 由于 VARX 模型只包括当前时刻的不可测噪声, 该噪声和 VARX 模型的过去时刻输入无关, 从而可保证所得参数的一致性; 第三类算法^[9]用噪声预估值代替真实值进行计算保证得到一致估计结果.

基于奇偶空间的闭环子空间辨识算法 SIMP-CAwc^[6]采用过去时刻输入输出数据作为辅助变量来消除噪声, 以得到无噪声的输入输出数据, 然后从无噪声影响的输入输出数据奇偶空间中提取得到扩展可观矩阵和下三角形 Toeplitz 矩阵, 从而求得系统矩阵, 该方法取得较好辨识精度. 然而, 文献 [7]指出当闭环系统设定点输入激励为不相关白噪声序列时, 虽然引入辅助变量与噪声不相关, 可以有效地

收稿日期 2016-01-19 录用日期 2016-03-10
Manuscript received January 19, 2016; accepted March 10, 2016
国家自然科学基金 (61473054), 第三批国家青年千人计划, 中央高校基本科研业务费重点培育基金 (DUT15ZD108) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61473054), National Thousand Talents Program of China, and Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (DUT15ZD108)
本文责任编辑 方海涛
Recommended by Associate Editor FANG Hai-Tao
1. 大连理工大学控制科学与工程学院 大连 116024
1. School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024

消除噪声,但由于该辅助变量和系统设定输入激励也不相关,导致从无噪声输入输出数据奇偶空间中提取参数可能同时含有过程模型参数信息和控制器参数信息,因而无法对它们进行区分,从而致使过程模型估计出现偏差.针对 SIMPCA_{awc}^[6] 辨识方法存在的问题,本文通过将输入输出数据正交投影到新息数据的正交补空间来消除噪声,以得到新的无噪声数据矩阵,进而从其对应的奇偶空间中提取得到扩展可观测矩阵和下三角形 Toeplitz 矩阵.由于新息数据的正交补空间数据和噪声无关,且同时与系统设定输入激励相关,确保本文方法从新的无噪声奇偶空间中提取的参数只包含过程模型参数,有效地保证估计结果的一致无偏性.由于新息数据为不可测量数据,本文通过模型推导,得到和待辨识状态空间模型等价的 VARX 模型.在此基础上,采用最小二乘法对 VARX 模型进行计算以得到新息的一致估计值.采用新息一致估计值代替真实值,以完成模型参数估计.为了论证说明本文方法的有效性,严格分析和给出了本文算法保证一致估计的条件.

1 问题描述

本文研究如下线性离散状态空间过程模型:

$$S: \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t) \in \mathbf{R}^{n_x}$, $u(t) \in \mathbf{R}^{n_u}$, $y(t) \in \mathbf{R}^{n_y}$ 分别为系统状态和过程输入和输出. $v(t) \in \mathbf{R}^{n_y}$ 和 $w(t) \in \mathbf{R}^{n_x}$ 分别为过程测量噪声. A, B, C, D 分别为相应维数的系统矩阵. 本文研究系统在闭环工作条件下,利用系统输入和输出观测数据,辨识对象状态空间(亦称子空间)模型.

由于闭环反馈控制作用的影响,使得过程测量噪声和输入存在相关性,若直接通过模型(1)来辨识系统矩阵,很难消除噪声对辨识结果的不利影响.因此,采用卡尔曼滤波原理^[10],将系统模型(1)等价表示为新息形式

$$S_I: \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Ke(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + e(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中, K 为卡尔曼滤波增益,新息 $e(t)$ 为零均值白噪声,当 $i < j$ 时,新息 $e(j)$ 和输入输出 $\{u(i), y(i)\}$ 不相关.

进一步定义 $\bar{A} = A - KC$ 和 $\bar{B} = B - KD$,模型(2)可被等价描述为如下预测形式:

$$S_P: \begin{cases} x(t+1) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + Ky(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + e(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中,假设 \bar{A} 的特征值严格位于单位圆内.

定义过去和将来水平数分别为 p 和 f ,过去和将来输入向量分别为 $u_p(t) = [u(t-p)^T \cdots u(t-2)^T u(t-1)^T]^T$ 和 $u_f(t) = [u(t)^T \cdots u(t+f-2)^T u(t+f-1)^T]^T$,定义过去和将来输入 Hankel 矩阵 $U_p = [u_p(t)^T \cdots u_p(N)^T]^T$ 和 $U_f = [u_f(t)^T \cdots u_f(N)^T]^T$,输出和新息数据做类似定义.

对式(3)进行迭代可得:

$$x(t) = \bar{A}^p x(t-p) + \bar{L}_1 u_p(t) + \bar{L}_2 y_p(t) \quad (4)$$

其中,扩展可观性矩阵分别表示为 $\bar{L}_1 = [\bar{A}^{p-1} \bar{B} \cdots \bar{A} \bar{B} \bar{B}]$, $\bar{L}_2 = [\bar{A}^{p-1} K \cdots \bar{A} K K]$.初始状态为 $x(t-p)$.当 p 充分大时, $x(t-p)$ 可被忽略,将式(4)带入式(3)得到等价 VARX 模型

$$S_V: y(t) = C\bar{L}_1 u_p(t) + C\bar{L}_2 y_p(t) + e(t) \quad (5)$$

本文将采用模型(2)和(5)对系统矩阵进行辨识.定义 $X_p = [x(t-p) \cdots x(t-p+N-1)]$ 和 $X_f = [x(t) \cdots x(t+N-1)]$.通过对式(2)进行迭代可得:

$$Y(t) = \Gamma_f X_f + H_f U_f + G_f E_f \quad (6)$$

其中,扩展可观测矩阵为 $\Gamma_f = [C^T \cdots (CA^{f-1})^T]^T$.下三角形 Toeplitz 矩阵分别为

$$H_f = \begin{bmatrix} D & \cdots & \cdots & 0 \\ CB & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{f-2} & \cdots & CB & D \end{bmatrix}$$

$$G_f = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{f-2} & \cdots & C & 0 \end{bmatrix}$$

2 闭环子空间辨识算法和一致性分析

2.1 闭环子空间辨识算法

在式(6)的基础上,通过同时计算扩展可观测矩阵 Γ_f 和下三角形 Toeplitz 矩阵 H_f 实现对系统矩阵的辨识.首先将输入数据移至式(6)的左侧,得到:

$$[I - H_f]W_f = \Gamma_f X_f + G_f E_f \quad (7)$$

其中, $W_f = [Y_f^T U_f^T]^T$,对 W_p 做同样定义.

为求解式(7)得到 Γ_f 和 H_f 的估计值,需要消除未知状态和新息的影响.通过在式(7)的左右侧

同时引入 Γ_f 的正交补向量 Γ_f^\perp , 由于 $(\Gamma_f^\perp)^T \Gamma_f = 0$

$$[(\Gamma_f^\perp)^T - (\Gamma_f^\perp)^T H_f] W_f = (\Gamma_f^\perp)^T G_f E_f \quad (8)$$

通过将式 (8) 正交投影到 E_f 的正交补空间来消除新息噪声,

$$[(\Gamma_f^\perp)^T - (\Gamma_f^\perp)^T H_f] W_f \Pi_{E_f}^\perp = 0 \quad (9)$$

其中, $\Pi_{E_f}^\perp = I_N - E_f^T (E_f E_f^T)^{-1} E_f$ 是 E_f 的正交补. 由于 $\lim_{N \rightarrow \infty} E_f \Pi_{E_f}^\perp = 0$ 和 $\lim_{N \rightarrow \infty} R_f \Pi_{E_f}^\perp = R_f \neq 0$. 根据文献 [7] 结论可知, 无噪声数据块 $W_f \Pi_{E_f}^\perp$ 的奇偶空间只包含过程模型参数信息, 不会包括控制器模型参数信息. 因此, 通过 $W_f \Pi_{E_f}^\perp$ 的奇偶空间可得到过程模型参数的一致估计值.

由于新息 E_f 未知, 不能进行模型参数估计. 这里利用等价辅助模型 (5) 计算 E_f 的估计值 \hat{E}_f , 再采用估计值代替真实值进行后续计算. 定义新的过去输入输出 Hankel 矩阵 $U_p(t, N+f) = [u_p(t) \cdots u_p(N+f)]$, $Y_p(t, N+f) = [y_p(t) \cdots y_p(N+f)]$, 新息数据做同样定义. 定义 $W_p(t, N+f) = [U_p^T(t, N+f) Y_p^T(t, N+f)]^T$ 和 $Y(t, N+f) = [y(t) \cdots y(N+f)]$. 同时定义 $\theta = [C\bar{L}_1 \ C\bar{L}_2]$. 采用最小二乘法对式 (5) 进行计算, 可得:

$$\hat{\theta} = Y(t, N+f) W_p^\dagger(t, N+f) \quad (10)$$

其中,

$$W_p^\dagger(t, N+f) = W_p^T(t, N+f) [W_p(t, N+f) W_p^T(t, N+f)]^{-1}$$

由于估计值 $\hat{\theta}$ 和真实值的误差为

$$\Delta\theta = \hat{\theta} - \theta = E(t, N+f) W_p^\dagger(t, N+f) \quad (11)$$

其中,

$$E(t, N+f) = [e(t) \cdots e(N+f)]$$

由于 $\lim_{N \rightarrow \infty} E(t, N+f) W_p^T(t, N+f) = 0$, 若 $\lim_{N \rightarrow \infty} W_p(t, N+f) W_p^T(t, N+f) > 0$ (可作为默认成立条件), 则 $\hat{\theta}$ 是一致估计值.

将一致估计值 $\hat{\theta}$ 带入估计值 $\hat{Y}(t, N+f)$, 可以得到一致估计值 $\hat{E}(t, N+f)$ (证明见第 2.2 节).

$$\begin{aligned} \hat{E}(t, N+f) &= Y(t, N+f) - \hat{Y}(t, N+f) = \\ &= Y(t, N+f) - \hat{\theta} W_p(t, N+f) = \\ &= Y(t, N+f) [I_{N+f} - W_p^\dagger(t, N+f) W_p(t, N+f)] = \\ &= Y(t, N+f) \Pi_{W_p(t, N+f)}^\perp \end{aligned} \quad (12)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Pi_{W_p(t, N+f)}^\perp &= I_{N+f} - W_p^T(t, N+f) \times \\ &= [W_p(t, N+f) W_p^T(t, N+f)]^{-1} W_p(t, N+f) \end{aligned}$$

定义

$$\Pi_{W_p(t, N+f)}^\perp = [\beta_1 \cdots \beta_{N+f}] \quad (13)$$

则未来噪声 Hankel 矩阵的一致估计值可通过以下方式重构得到:

$$\hat{E}_f = Y(t, N+f) \begin{bmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_N \\ \beta_2 & \cdots & \beta_{N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_f & \cdots & \beta_{f+N} \end{bmatrix} \quad (14)$$

进一步将 E_f 用其一致估计值代替, 可得一致估计值 $W_f \Pi_{\hat{E}_f}^\perp$. 通过 SVD 分解得到:

$$W_f \Pi_{\hat{E}_f}^\perp = \begin{bmatrix} \hat{U}_1 & \hat{U}_1^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_1 & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_1^T \\ (\hat{V}_1^\perp)^T \end{bmatrix} = \hat{U}_1 \hat{\Sigma}_1 \hat{V}_1^T \quad (15)$$

其中, \hat{U}_1 是 $W_f \Pi_{\hat{E}_f}^\perp$ 的前 $n_x + fn_u$ 个特征向量, 则 $[(\Gamma_f^\perp)^T - (\Gamma_f^\perp)^T H_f]$ 的一致估计值如下 (证明见第 2.2 节):

$$[(\hat{\Gamma}_f^\perp)^T - (\hat{\Gamma}_f^\perp)^T \hat{H}_f] = (\hat{U}_1^\perp)^T \quad (16)$$

定义 $\hat{U}_1^\perp = [P_1^T \ P_2^T]^T$, 其中, $P_1 = \hat{U}_1^\perp(1 : fn_y, :)$, $P_2 = \hat{U}_1^\perp(1 + fn_y : end, :)$ (Matlab 表示). 可得:

$$\hat{\Gamma}_f^\perp = P_1 \quad (17)$$

$$-(\hat{\Gamma}_f^\perp)^T \hat{H}_f = P_2^T \quad (18)$$

由于 $(\Gamma_f^\perp)^\perp = \Gamma_f$, 根据式 (17), 可得:

$$\hat{\Gamma}_f = (\hat{\Gamma}_f^\perp)^\perp = I_{fn_y} - P_1 (P_1^T P_1)^{-1} P_1^T \quad (19)$$

为了得到 H_f 的估计值, 做如下定义:

$$-P_1^T = [\phi_1 \cdots \phi_f] \quad (20)$$

$$P_2^T = [\varphi_1 \cdots \varphi_f] \quad (21)$$

其中, $\phi_i \in \mathbf{R}^{(in_y - n_x) \times n_y}$, $\varphi_i \in \mathbf{R}^{(in_y - n_x) \times n_u}$.

将式 (20) 和式 (21) 带入式 (18), 可得:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_{f-1} & \phi_f \\ \phi_2 & \cdots & \phi_f & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_f & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} H_{f1} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_f \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中, $H_{f1} = [D^T (CB)^T \cdots (CA^{f-2}B)^T]$.

采用最小二乘法可得 H_{f1} 的一致估计如下:

$$\hat{H}_{f1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_{f-1} & \phi_f \\ \phi_2 & \cdots & \phi_f & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_f & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_f \end{bmatrix} \quad (23)$$

系统矩阵估计值 \hat{A} 和 \hat{C} 可直接从 $\hat{\Gamma}$ 中提取, 即

$$\hat{C} = \hat{\Gamma}(1 : n_y, 1 : n_x) \quad (24)$$

$$\hat{A} = \hat{\Gamma}^\dagger(1 + n_y : fn_y, 1 : n_x) \hat{\Gamma}(1 : (f-1)n_y, 1 : n_x) \quad (25)$$

由于

$$H_{f1} = \begin{bmatrix} I_{n_y} & 0 \\ 0 & \Gamma(1 : (f-1)n_y, 1 : n_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} \quad (26)$$

系统矩阵估计值 \hat{B} 和 \hat{D} 可采用最小二乘法从 \hat{H}_{f1} 中计算得到:

$$\begin{bmatrix} \hat{D} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_y} & 0 \\ 0 & \hat{\Gamma}(1 : (f-1)n_y, 1 : n_x) \end{bmatrix}^\dagger \hat{H}_{f1} \quad (27)$$

本文基于新息估计和正交投影的闭环子空间辨识方法 (Closed-loop subspace identification method using innovation estimation and orthogonal projection, CSIMIEOP) 可总结如下:

步骤 1. 由式 (10) 求解 $\hat{\theta}$, 再由式 (12) 计算 $\hat{E}(t, N+f)$, 采用式 (14) 构造 \hat{E}_f .

步骤 2. 通过 SVD 分解对式 (15) 进行计算.

步骤 3. 通过式 (19) 和式 (23) 计算估计值 $\hat{\Gamma}$ 和 \hat{H}_{f1} .

步骤 4. 通过式 (24), 式 (25) 和式 (27) 求解系统矩阵 \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} 和 \hat{D} .

2.2 闭环一致条件分析

由第 2.1 节闭环子空间辨识算法可知, 本文采用新息估计和正交投影消除噪声, 得到一致估计结果. 辨识结果是否一致取决于 $\hat{E}(t, N+f)$ 和 $[(\hat{\Gamma}_f^\perp)^\top - (\hat{\Gamma}_f^\perp)^\top \hat{H}_f]$ 是否一致, 本文对它们的一致估计条件进行分析和说明, 给出如下定理.

定理 1. 若

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_p(t, N+f) W_p^\top(t, N+f) > 0$$

则 $\hat{E}(t, N+f)$ 为一致估计值.

证明. 由式 (12) 可知, 估计值 $\hat{E}(t, N+f)$ 和真实值的误差为

$$\begin{aligned} \Delta E(t, N+f) &= \hat{E}(t, N+f) - E(t, N+f) = \\ &= Y(t, N+f) \Pi_{W_p(t, N+f)}^\perp - E(t, N+f) = \\ &= [Y(t, N+f) - \hat{Y}(t, N+f)] - E(t, N+f) = \\ &= [\theta - \hat{\theta}] W_p(t, N+f) = \\ &= \Delta \theta W_p(t, N+f) = \\ &= E(t, N+f) W_p(t, N+f)^\dagger W_p(t, N+f) \quad (28) \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(t, N+f) W_p^\top(t, N+f) = 0$$

若

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_p(t, N+f) W_p^\top(t, N+f) > 0$$

则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta E(t, N+f) = 0$$

从而可知 $\hat{E}(t, N+f)$ 为一致估计值. □

定理 2. 若系统可控可观, 且 $E_f E_f^\top > 0$ 和

$$\bar{E} \left\{ \begin{bmatrix} u_p(t) \\ u_f(t) \\ e_p(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p(t) \\ u_f(t) \\ e_p(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix}^\top \right\} > 0$$

则 $[(\hat{\Gamma}_f^\perp)^\top - (\hat{\Gamma}_f^\perp)^\top \hat{H}_f]$ 为一致估计值.

证明. 令 $\Omega = \begin{bmatrix} \Gamma_f & H_f \\ 0 & I \end{bmatrix}$, 由式 (9) 可知:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow 0} W_f \Pi_{E_f}^\perp &= \\ \Omega \begin{bmatrix} U_f \\ X_f \end{bmatrix} [I_N - E_f^\top (E_f E_f^\top)^{-1} E_f] &\quad (29) \end{aligned}$$

由式 (29) 可得:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow 0} W_f \Pi_{E_f}^\perp W_f^\top &= \\ \Omega \begin{bmatrix} U_f \\ X_f \end{bmatrix} [I_N - E_f^\top (E_f E_f^\top)^{-1} E_f] \begin{bmatrix} U_f \\ X_f \end{bmatrix}^\top \Omega^\top &= \\ \Omega \{R_1 - R_2 (E_f E_f^\top)^{-1} R_2^\top\} \Omega^\top &\quad (30) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{bmatrix} U_f \\ X_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_f \\ X_f \end{bmatrix}^\top = \\ \bar{E} \left\{ \begin{bmatrix} u_f(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_f(t) \\ x(t) \end{bmatrix}^\top \right\} &\end{aligned}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} U_f \\ X_f \end{bmatrix} E_f^T = \bar{E} \left\{ \begin{bmatrix} u_f(t) \\ x(t) \end{bmatrix} e_f^T(t) \right\}$$

若系统为可控可观系统, 则 Ω 为满秩矩阵

$$\text{rank}(\Omega) = n_x + fn_u \quad (31)$$

由于新息为平稳零均值白噪声系列, 可知 $E_f E_f^T > 0$, 据文献 [11] 定理 2 可知, 式 (31) 中第 2 项的秩可通过如下计算得到:

$$\begin{aligned} \text{rank}([R_1 - R_2(E_f E_f^T)^{-1} R_2^T]) = \\ \text{rank} \left\{ \bar{E} \left\{ \begin{bmatrix} u_f(t) \\ x(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_f(t) \\ x(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix}^T \right\} \right\} - fn_y \end{aligned} \quad (32)$$

进一步将式 (4) 带入式 (32), 可得:

$$\begin{aligned} \bar{E} \left\{ \begin{bmatrix} u_f(t) \\ x(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_f(t) \\ x(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix}^T \right\} = \\ \Upsilon \bar{E} \left\{ \begin{bmatrix} u_p(t) \\ u_f(t) \\ e_p(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p(t) \\ u_f(t) \\ e_p(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix}^T \right\} \Upsilon^T \end{aligned} \quad (33)$$

其中, $\Upsilon = \begin{bmatrix} 0 & I_{pn_u} & 0 & 0 \\ L_1 & 0 & L_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{pn_y} \end{bmatrix}$.

由于系统为可控可观系统, 采用文献 [11] 定理 2 可知 Υ 为满秩矩阵. 同时如果式 (33) 第 2 项为正定满秩矩阵, 根据文献 [12] 给定的秩条件可得:

$$\begin{aligned} \text{rank} \left\{ \bar{E} \left\{ \begin{bmatrix} u_f(t) \\ x(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_f(t) \\ x(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix}^T \right\} \right\} = \\ f(n_u + n_y) + n_x \end{aligned} \quad (34)$$

因此, 矩阵 (32) 为满秩矩阵.

$$\text{rank}([R_1 - R_2(E_f E_f^T)^{-1} R_2^T]) = fn_u + n_x \quad (35)$$

由式 (30)、式 (32) 和式 (35) 可知

$$\text{rank} \left(\lim_{N \rightarrow 0} W_f \Pi_{\hat{E}_f}^\perp W_f^T \right) = fn_u + n_x \quad (36)$$

则

$$\begin{aligned} \text{rank} \left(\lim_{N \rightarrow 0} W_f \Pi_{\hat{E}_f}^\perp \right) = \\ \text{rank} \left(\lim_{N \rightarrow 0} W_f \Pi_{\hat{E}_f}^\perp W_f^T \right) = fn_u + n_x \end{aligned} \quad (37)$$

由以上秩条件可知, $\lim_{N \rightarrow \infty} W_f \Pi_{\hat{E}_f}^\perp$ 的非零特征向量个数为 $f(n_u + n_y) - n_x - fn_u = fn_y - n_x$. 因此 $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{U}_1^\perp$ 是 $\lim_{N \rightarrow \infty} W_f \Pi_{\hat{E}_f}^\perp$ 的零特征向量. 则

$$\lim_{N \rightarrow 0} \hat{U}_1^\perp W_f \Pi_{\hat{E}_f}^\perp = 0 \quad (38)$$

由于 $\text{rank}(\Gamma_f^\perp) = fn_y - n_x$ ^[13], 因此

$$\text{rank}([\Gamma_f^\perp]^T - (\Gamma_f^\perp)^T H_f) = fn_y - n_x \quad (39)$$

同时, 由于

$$\lim_{N \rightarrow 0} [(\Gamma_f^\perp)^T - (\Gamma_f^\perp)^T H_f] W_f \Pi_{\hat{E}_f}^\perp = 0 \quad (40)$$

所以 $[(\Gamma_f^\perp)^T - (\Gamma_f^\perp)^T H_f]$ 和 $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{U}_1^\perp$ 满足

$$\begin{aligned} \text{rowspace}([\Gamma_f^\perp]^T - (\Gamma_f^\perp)^T H_f) = \\ \text{rowspace} \left(\lim_{N \rightarrow 0} \hat{U}_1^\perp \right) \end{aligned} \quad (41)$$

因此, $[(\hat{\Gamma}_f^\perp)^T - (\hat{\Gamma}_f^\perp)^T \hat{H}_f] = (\hat{U}_1^\perp)^T$, 由于 \hat{E}_f 是一致估计值, 可知 $(\hat{U}_1^\perp)^T$ 为一一致估计值, 则 $[(\hat{\Gamma}_f^\perp)^T - (\hat{\Gamma}_f^\perp)^T \hat{H}_f]$ 为一一致估计值. \square

由于 $[(\hat{\Gamma}_f^\perp)^T - (\hat{\Gamma}_f^\perp)^T \hat{H}_f]$ 为一一致估计值, 根据平移变换法求取系统矩阵的一致不变性, 可知系统矩阵估计值也为一致估计值.

2.3 闭环一致条件合理性分析

第 2.2 节定理 2 的两个假设条件涉及未知新息信息, 以上假设是否合理, 将直接决定本文方法能否取得一致估计结果.

由于模型 (1) 可表示为模型 (2), 则新息的协方差可表示为 $\bar{E}[e(t)e^T(t)] = CP^T C + R_3$ (具体表述可参考文献 [10] 第 5 章), 其中 P 为半正定矩阵, 对于系统噪声有 $R_3 = \bar{E}[v(t)v^T(t)] > 0$, 则 $\bar{E}[e(t)e^T(t)] > 0$, 可知 $E_f E_f^T > 0$.

对于假设 2, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow 0} W_p(t, N+f) W_p^T(t, N+f) = \\ \bar{E} \left\{ \begin{bmatrix} u_p(t) \\ y_p(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p(t) \\ y_p(t) \end{bmatrix}^T \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

进一步, 由式 (2) 可知

$$\begin{aligned} y_p(t) = \Gamma_p [L_1 u_p^T(t-p) + L_2 e_p^T(t-p)] + \\ H_p u_p(t) + \bar{G}_p e_p(t) \end{aligned} \quad (43)$$

其中, 扩展可观性矩阵分别表示为 $L_1 = [A^{p-1}B \cdots AB B]$, $L_2 = [A^{p-1}K \cdots AK K]$, 下三角形 Toeplitz 矩阵为

$$H_f = \begin{bmatrix} I & \cdots & \cdots & 0 \\ C & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{f-2} & \cdots & C & I \end{bmatrix}$$

将式 (43) 带入式 (42), 可得:

$$\bar{E} \left\{ \begin{bmatrix} u_p(t) \\ y_p(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p(t) \\ y_p(t) \end{bmatrix}^T \right\} = \Xi \bar{E} \left\{ \begin{bmatrix} u_p(t-p) \\ u_p(t) \\ e_p(t-p) \\ e_f(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p(t-p) \\ u_p(t) \\ e_p(t-p) \\ e_f(t) \end{bmatrix}^T \right\} \Xi^T \quad (44)$$

其中, $\Xi = \begin{bmatrix} 0 & I_{pn_u} & 0 & 0 \\ \Gamma_P L_1 & H_p & \Gamma_P L_2 & \bar{G}_p \end{bmatrix}$.

若系统可控可观, 由文献 [11] 定理 2 可知, $\text{rank}(\Xi) = p(n_u + n_y)$, Ξ 是满秩矩阵, 则式 (42) 正定的充分必要条件为式 (44) 中第 2 项正定, 由于变量 p 和 f 可取任何值, 则假设 2 成立的充分必要条件为 $\lim_{N \rightarrow \infty} W_{p+f} W_{p+f}^T > 0$. 可通过验证 $\lim_{N \rightarrow \infty} W_{p+f} W_{p+f}^T > 0$ 来确定假设 2 是否成立. 即若 $\lim_{N \rightarrow \infty} W_{p+f} W_{p+f}^T > 0$, 则假设 2 成立.

3 仿真研究

考虑文献 [6] 中研究的闭环系统

$$y(t) - 0.9y(t-1) = u(t-1) + e(t) + 0.9e(t-1) \quad (45)$$

其中, 反馈控制结构为 $u(t) = -0.6y(t) + r(t)$. 过程噪声设置为方差为 0.2 的白噪声序列.

对系统设定输入激励 $r(k)$ 为单位方差白噪声序列和相关序列两种情况进行研究. 其中相关序列设为 $r(t) = (1 + 0.8q^{-1} + 0.6q^{-2})r_0(t)$, $r_0(t)$ 为单位方差白噪声序列. 过去和未来水平数均设置为 10. 在不同数据长度 $N \in [200, 8000]$ 的情况下进行 1000 次 Monte Carlo 仿真. 本文方法的辨识结果与 SIMPCA_{awc} 算法^[6] 进行比较, 当 $r(t)$ 为单位方差白噪声序列时, 系统极点 (真实值为 0.9) 的估计平均值如图 1 所示, 系统极点的估计标准方差如图 2 所示. 当系统设定输入 $r(t)$ 为相关序列时, 系统极

点的平均值如图 3 所示, 系统极点的估计标准方差如图 4 所示.

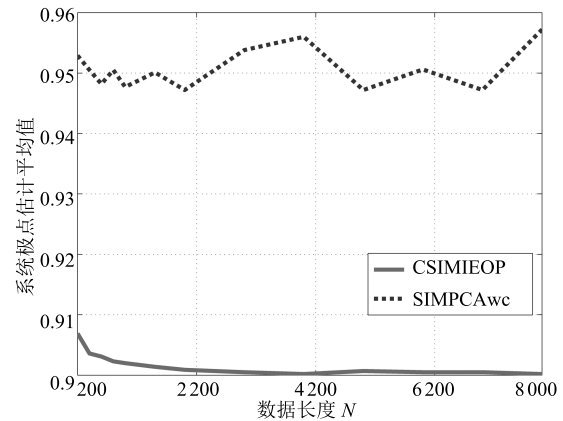


图 1 系统设定输入激励为白噪声的系统极点估计平均值
Fig. 1 Mean value of estimated poles for white noise setpoint excitation

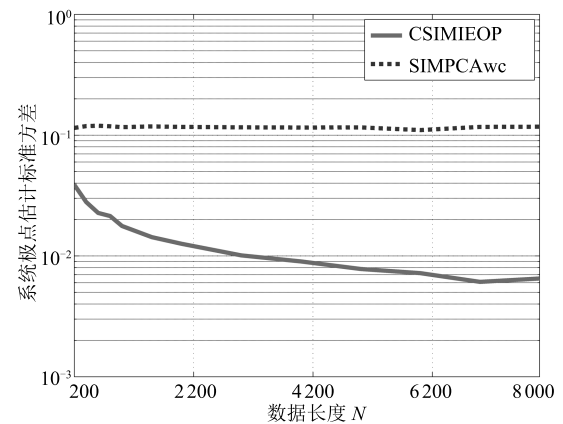


图 2 系统设定输入激励为白噪声的系统极点估计标准方差
Fig. 2 Standard deviation of estimated poles for white noise setpoint excitation

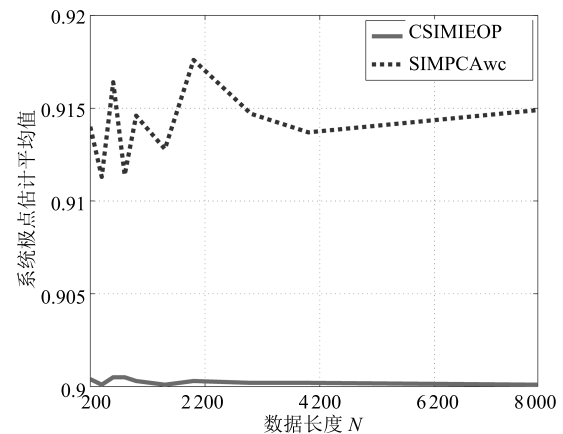


图 3 系统设定输入激励为相关序列的系统极点估计平均值
Fig. 3 Mean value of estimated poles for correlated quasi-stationary setpoint excitation

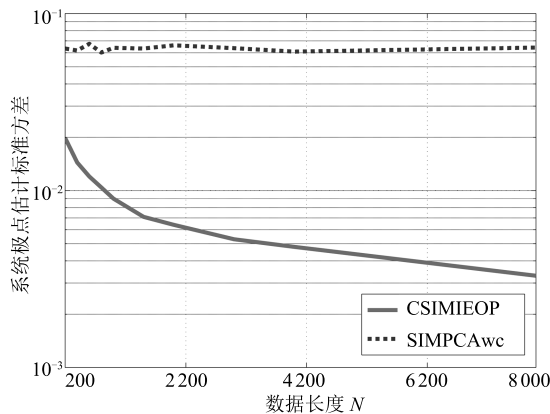


图4 系统设定输入激励为相关序列的系统极点估计标准方差

Fig. 4 Standard deviation of estimated poles for correlated quasi-stationary setpoint excitation

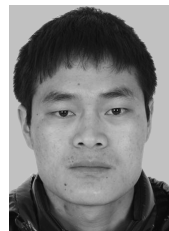
从以上结果可以看出, 当系统设定输入为单位方差白噪声系列时, SIMPCAwc 算法得出有偏估计结果; 只有当系统设定输入激励为相关序列时, SIMPCAwc 算法才能保证无偏估计结果. 本文 CSIMIEOP 算法对系统设定输入激励为无关序列和相关序列时均可得到一致无偏结果, 并且估计精度优于 SIMPCAwc 算法.

4 结论

本文提出一种基于新息估计和正交投影的闭环子空间辨识算法, 对系统设定点输入激励为白噪声无关序列和相关序列的情况均可得到一致无偏估计结果, 并且相对于近期有关文献给出的方法如 SIMPCAwc 算法^[6], 能进一步提高辨识精度. 同时, 严格分析和证明了本文算法保证一致估计的条件. 最后通过仿真实例验证了本文方法的有效性和优越性.

References

- 1 Qin S J. An overview of subspace identification. *Computers Chemical and Engineering*, 2006, **30**(10–12): 1502–1513
- 2 Favoreel W, de Moor B, van Overschee P. Subspace state space system identification for industrial processes. *Journal of Process Control*, 2000, **10**(2–3): 149–155
- 3 Yang Hua, Li Shao-Yuan. Closed-loop subspace identification based on augmented input with consistency analysis. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(7): 703–708
(杨华, 李少远. 基于输入扩张的闭环系统子空间辨识及其强一致性分析. *自动化学报*, 2007, **33**(7): 703–708)
- 4 Wang Le-Yi, Zhao Wen-Xiao. System identification: new paradigms, challenges, and opportunities. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(7): 933–942
(王乐一, 赵文尧. 系统辨识: 新的模式、挑战及机遇. *自动化学报*, 2013, **39**(7): 933–942)
- 5 van der Veen G J, van Wingerden J W, Bergamasco M, Lovera M, Verhaegen M. Closed-loop subspace identification methods: an overview. *IET Control Theory and Applications*, 2013, **7**(10): 1339–1358
- 6 Wang J, Qin S J. Closed-loop subspace identification using the parity space. *Automatica*, 2006, **42**(2): 315–320
- 7 Huang B, Ding S X, Qin S J. Closed-loop subspace identification: an orthogonal projection approach. *Journal of Process Control*, 2005, **15**(1): 53–66
- 8 Chiuso A. The role of vector autoregressive modeling in predictor-based subspace identification. *Automatica*, 2007, **43**(6): 1034–1048
- 9 Qin S J, Ljung L. Closed-loop subspace identification with innovation estimation. In: *Proceedings of the 13th IFAC System Identification*. Rotterdam, Netherlands: IFAC, 2003. 887–892
- 10 Katayama T. *Subspace Methods for System Identification*. London: Springer-Verlag, 2005, 107–137
- 11 Jansson M, Wahlberg B. On consistency of subspace methods for system identification. *Automatica*, 1998, **34**(12): 1507–1519
- 12 Liu T, Huang B, Qin S J. Bias-eliminated subspace model identification under time-varying deterministic type load disturbance. *Journal of Process Control*, 2015, **25**: 41–49
- 13 Wang J, Qin S J. A new subspace identification approach based on principal component analysis. *Journal of Process Control*, 2002, **12**(8): 841–855



侯杰 大连理工大学控制科学与工程学院博士研究生. 主要研究方向为系统辨识. E-mail: jiehou.phd@hotmail.com
(HOU Jie Ph.D. candidate at the School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology. His main research interest is system identification.)



刘涛 大连理工大学控制科学与工程学院教授. 2012 年入选国家青年千人计划, 德国洪堡基金学者. 主要研究方向为工业过程辨识建模, 鲁棒过程控制, 批量生产过程控制优化, 过程质量监测. 本文通信作者. E-mail: liurouter@ieee.org
(LIU Tao Professor at the School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology. He was a recipient of National Thousand Talents Program of China in 2012, and a Humboldt research fellow of Germany. His research interest covers industrial process identification and modeling, robust process control, batch process control and optimization, and process quality monitoring. Corresponding author of this paper.)