

二维旋转不变 U 变换及其应用

陈伟¹

摘要 U-系统是一类 $L^2[0, 1]$ 上的正交分段多项式函数系, 为了将其推广到二维情形, 传统的 $L^2[0, 1]^2$ 上张量积形式的 U 变换并不具有旋转不变性. 本文提出了一类二维旋转不变 U 变换 (Rotation-invariant U transform, RIUT). RIUT 将 U-系统函数与调和函数相结合, 使得图像的旋转变化为相位的平移而模保持不变. 与经典的正交旋转不变矩 (如 Zernike 矩) 相比, RIUT 具有诸多特别的性质, 从而在图像特征提取中具有良好的潜力. 本文将 RIUT 应用到二值图像检索中的实验结果表明, RIUT 具有更高的检索精度.

关键词 旋转不变, U-系统, Zernike 矩, 二值图像检索

引用格式 陈伟. 二维旋转不变 U 变换及其应用. 自动化学报, 2016, 42(9): 1380–1388

DOI 10.16383/j.aas.2016.c150630

2D Rotation-invariant U Transform and Its Application

CHEN Wei¹

Abstract U-system is a class of orthogonal piecewise-polynomial function system in $L^2[0, 1]$, and its generalized U-system in $L^2[0, 1]^2$ with tensor-product form is not rotation-invariant. In this paper, we present a novel 2D transform named rotation-invariant U transform (RIUT). The construction of RIUT combines U-system functions with harmonic functions so that the object's rotation is transformed into its phase's translation and the modulus keeps unchanged. Compared with the classical rotation-invariant moments, such as Zernike moment, RIUT has many special properties, suggesting an applying potential in image feature extraction. The experiment results for binary image retrieval show that RIUT method has a higher retrieval precision.

Key words Rotation-invariant, U-system, Zernike moment, binary image retrieval

Citation Chen Wei. 2D rotation-invariant U transform and its application. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(9): 1380–1388

旋转不变性在图像目标的表达与识别中具有基本的重要性. 因此, 如何从图像特征中得到旋转不变量便是一个关键问题. 人们已经提出了多种旋转不变特征, 其中, Zernike 矩^[1]、伪 Zernike 矩^[2] 等旋转不变矩是一类成熟且应用十分广泛的方法. 自提出以来, 它们已成功应用于模式识别^[3]、边缘检测^[4–5]、纹理分类^[6]、目标方向估计^[7] 等多种实际问题.

矩方法是将目标投影到一个多项式函数支撑的空间中^[8]. 设 $f(x, y)$ 是一个分片光滑二元实值函数,

其定义域为 $\Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. 那么, $f(x, y)$ 的 $n + m$ 阶矩定义为:

$$M_{nm} = \iint_{\Omega} f(x, y) p_{nm}(x, y) dx dy \quad (1)$$

$p_{nm}(x, y)$ 为定义域 Ω 上的 $n + m$ 阶多项式基函数.

一般说来, 式 (1) 中计算得到的矩值 M_{nm} 并不具有不变性. 为了得到具有旋转不变性的矩函数, 一种常见的方法是构造极坐标系下的复数矩. 此时目标图像的旋转只会导致矩相位的变化, 而矩的模值是不变的, 它就是一种旋转不变量. 这类矩函数的一般定义形式如下:

$$M_{nm} = c_{nm} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) R_{nm}(r) e^{-im\theta} r dr d\theta \quad (2)$$

其中, c_{nm} 为归一化因子, (r, θ) 是极坐标, $R_{n,m}(r)$ 为径向多项式函数, e^{-im} 为角向调和函数.

不同的径向多项式集则定义不同形式的矩. 其中的 Zernike 多项式^[1] 为:

收稿日期 2015-10-12 录用日期 2016-03-10

Manuscript received October 12, 2015; accepted March 10, 2016

国家自然科学基金 (61602213, 61170320, 61402201), 浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室开放课题 (A1609), 中央高校基本科研业务费专项资金 (JUSRP11416), 国家科技支撑计划 (2015BAH54F00) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61602213, 61170320, 61402201), the Open Project Program of the State Key Laboratory of CAD&CG of Zhejiang University (A1609), Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (JUSRP11416), and National Science and Technology Support Program (2015BAH54F00)

本文责任编辑 黄庆明

Recommended by Associate Editor HUANG Qing-Ming

1. 江南大学数字媒体学院 无锡 214122

1. School of Digital Media, Jiangnan University, Wuxi 214122

$$R_{nm}(r) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-|m|}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i (n-i)! \cdot r^{n-2i}}{i! (\frac{n+|m|}{2} - i)! (\frac{n-|m|}{2} - i)!} \quad (3)$$

伪 Zernike 矩中的伪 Zernike 多项式^[2]为:

$$R_{nm}(r) = \sum_{i=0}^{n-|m|} \frac{(-1)^i (2n+1-i)! \cdot r^{n-i}}{i! (n+|m|-i)! (n-|m|+1-i)!} \quad (4)$$

正交 Fourier-Mellin 矩中的径向多项式^[9]为:

$$R_n(r) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n+i} (n+i+1)! \cdot r^i}{(n-i)! i! (i+1)!} \quad (5)$$

可以看出, 这些多项式的表达式十分复杂, 而且包含阶乘项. 在实际应用中, 特别是涉及高阶矩的计算时容易导致计算复杂、数值不稳定等问题^[10-11].

在本文中, 我们提出一种新的二维图像变换, 称为旋转不变 U 变换 (Rotation-invariant U transform, RIUT). RIUT 具有与传统旋转不变矩相同的表达形式 (式 (2)), 同样具有旋转不变性. 但由于我们采用了一类正交分段多项式函数 (U-系统) 代替传统矩中的径向多项式, 因此这里并没有称之为“旋转不变 U 矩”.

由于 U-系统是一类正交分段多项式函数系, 具有次数低 (本文中的多项式次数仅 1 次)、函数结构简单的优点. U-系统有效避免了高次多项式的计算, 降低了计算复杂度^[12-13]. 更重要的, U-系统具有诸多良好的特性, 比如序率性、函数均匀支撑、连续/间断并存等, 使得 RIUT 能够很好地捕获图像目标的特征, 从而具有更好的图像特征表达能力. 在本文中, 我们将 RIUT 应用到二值图像检索中, 并与经典的正交旋转不变矩, 包括 Zernike 矩 (Zernike moment, ZM)、伪 Zernike 矩 (Pseudo-Zernike moment, PZM) 及正交 Fourier-Mellin 矩 (Orthogonal Fourier-Mellin moment, OFMM) 进行比较. 实验结果表明, RIUT 具有更高的检索精度.

需要指出的是, 虽然 U-系统是一类正交函数系, 但是 RIUT 不再是正交的, 而传统的 ZM、PZM 及 OFMM 是正交的. 一般说来, 同时具备正交性、旋转不变性与分段低次多项式是很困难的. 文献 [14] 尝试构造了一类同时满足这三个条件的二维变换方法, 但是它的代价是径向基函数变成 $1/\sqrt{r}$ 的形式, 使得在 $r=0$ 附近的计算不稳定, 误差很大. 本文的目的不是图像的正交重构, 而是构造具有旋转不变性的二维变换, 从而可以将其应用到目标识别、分类等图像不变描述中. 因此, 保持正交性并不是必须遵守的原则. 更重要的是, U-系统具有传统正交多项式所没有的诸多特性, 使得它在图像特征提取中具有

一定的优势, 而且二值图像检索的实验结果表明, 非正交的 RIUT 的检索结果比传统的正交矩的结果更好.

本文的结构安排如下: 第 1 节简要介绍 U-系统的构造过程及性质; 第 2 节介绍旋转不变 U 变换 RIUT; 第 3 节介绍及分析 RIUT 的若干性质; 第 4 节介绍 RIUT 在二值图像检索中的应用, 并给出实验结果; 最后总结全文.

1 U-系统

1.1 U-系统简介

k 次 ($k=0, 1, 2, 3, \dots$) U-系统是 $L^2[0, 1]$ 中的完备正交函数系^[15-16], 它由一系列分段 k 次多项式组成, 其中既有连续可微的多项式和 k 次多项式样条函数, 也有函数本身及其导数各种层次间断的基函数.

1.2 U-系统的构造

k 次 U-系统的构造过程分为 3 个步骤:

步骤 1. 取区间 $[0, 1]$ 上的前 $k+1$ 个 Legendre 多项式, 作为 k 次 U-系统的前 $k+1$ 个基函数, 记为 $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)\}$;

步骤 2. 构造区间 $[0, 1]$ 上的 $k+1$ 个生成元函数, 记为 $\Phi^{(0)} = \{\phi_i^0(x), i=0, 1, 2, \dots, k\}$, 满足:

- 1) $\phi_i(x)$ 是以 $x=1/2$ 为结点的分段 k 次多项式;
- 2) $\langle \phi_i(x), \phi_j(x) \rangle = \delta_{i,j}, i, j \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$;
- 3) $\langle \phi_i(x), x^j \rangle = 0, i, j \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

步骤 3. 由生成元函数迭代生成 U-系统的后续函数.

记 $\Phi^{(j)} := \{\phi_0^{(j)}, \phi_1^{(j)}, \dots, \phi_{(k+1)2^j-1}^{(j)}\}$, 其中 $\Phi^{(j)}$ 中函数成员由下列迭代生成:

$$\phi_{2n}^{(j)}(x) = \begin{cases} \phi_n^{(j-1)}(2x), & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \phi_n^{(j-1)}(2-2x), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\phi_{2n+1}^{(j)}(x) = \begin{cases} \phi_n^{(j-1)}(2x), & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -\phi_n^{(j-1)}(2-2x), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \quad (7)$$

其中, $n=0, 1, \dots, (k+1)2^{j-1}-1$. 在间断点处, 函数值定义为两侧极限平均值. 那么, 函数集合

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)\} \cup_{j=0}^{+\infty} \Phi^{(j)} \quad (8)$$

即为 k 次 U-系统. 图 1 显示了 1 次 U-系统前 16 个基函数及其生成过程.

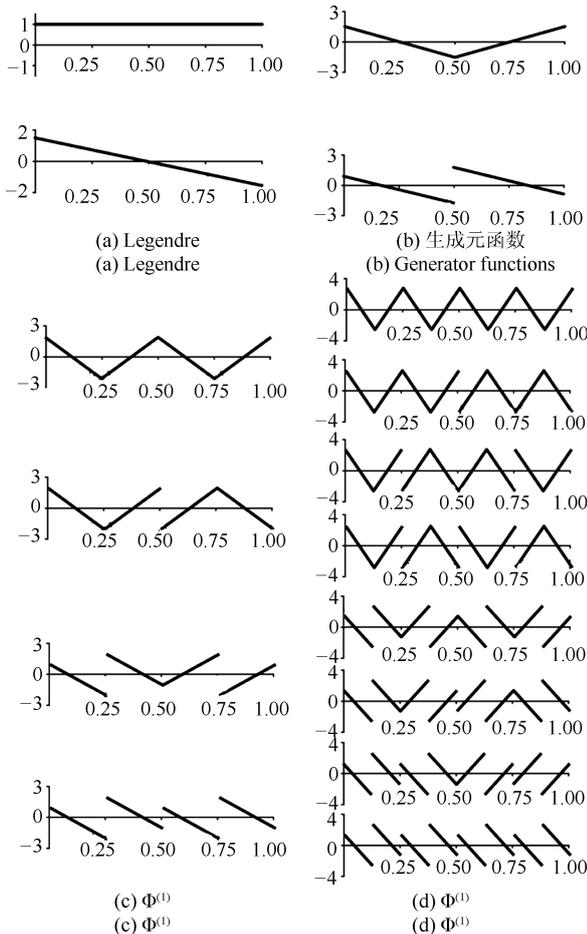


图 1 1 次 U-系统的前 16 个基函数生成过程

Fig. 1 The first sixteen basis functions in U-system of degree one

1.3 U-系统的性质

在 k 次 U-系统中, 基函数按式 (8) 中的 j 值从小到大排列. 记 $u_n(x)$ 是 k 次 U-系统的第 n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 个基函数, 那么具有如下性质:

1) 正交性

k 次 U-系统是 $L^2[0, 1]$ 上的规范正交函数系, 即 $\langle u_n(x), u_m(x) \rangle = \delta_{nm}$.

2) 收敛性

给定函数 f , 相应的 Fourier-U 级数为

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$$

其中 $a_n = \langle f, u_n \rangle = \int_0^1 f(x) u_n(x) dx$. 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_f(n)\|_2 = 0$$

其中, $S_f(n)$ 表示 Fourier-U 级数的前 n 项部分和.

3) 序率性

按式 (8) 给出的 U-系统基函数排列次序, 记为

$$u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots$$

那么, 当 x 从 0 到 1 增大, U-系统基函数的函数值符号的改变次数呈递增规律, 即 $u_n(x)$ 比 $u_{n-1}(x)$ 变号恰恰多一个.

2 二维旋转不变 U 变换

轮廓 U 描述子只能提取形状的轮廓信息^[17-18], 对于具有复杂结构的目标, 为了提取整个区域的形状特征, 则需要将 U-系统推广到二维情形, 得到二维区域上的 U 变换.

2.1 $L^2[0, 1]^2$ 上的 U-系统

为了将 U-系统推广到二维情形, 一种直接的方法是定义 $L^2[0, 1]^d$ ($d \geq 2$) 上张量积格式的 U-系统^[13, 18]. 定义

$$\Phi_{nm}(x, y) = u_n(x)u_m(y), (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (9)$$

图 2 为当 $u_n(x), u_m(y)$ 为 1 次 U-系统基函数时 $\Phi_{nm}(x, y)$ ($n, m = 0, 1, 2, \dots, 7$) 的图像. 由此可建立图像 $f(x, y)$ 的二维 U 变换, 如下:

$$\lambda_{nm} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \Phi_{nm}(x, y) dx dy \quad (10)$$

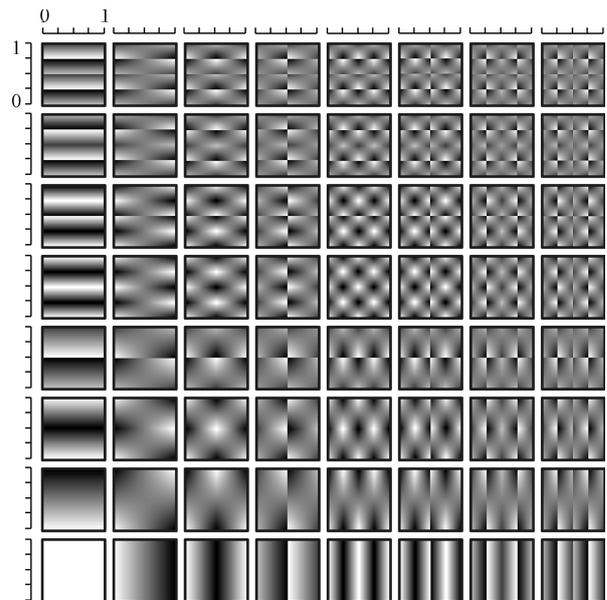


图 2 $L^2[0, 1]^2$ 上张量积形式的二维 U-系统 ($k = 1$)

Fig. 2 2D tensor product U-system on $L^2[0, 1]^2$ ($k = 1$)

这种二维 U 变换可以应用于数字图像水印^[19]、图像编码^[20]等领域. 但是, 由于它不具备旋转不变性, 因而很难应用于图像形状的检索与识别.

2.2 单位圆盘上的 U-调和基函数

本文中, 我们将 U-系统函数与调和函数结合, 构造了一类定义在单位圆盘上的基函数, 称之为 U-调和基函数. 基于这种新型的二元基函数, 可以方便地得到关于图像的旋转不变量.

因本文利用的是 1 次 U-系统, 记 $u_n(x)$ 是 1 次 U-系统的第 n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 个基函数. 定义单位圆盘上的 U-调和基函数为:

$$U_{nm}(r, \theta) = u_n(r) \cdot e^{im\theta}, \quad r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi] \quad (11)$$

可以看出, U-调和基函数定义在整个单位圆盘上. 根据式 (11), 这种基函数由角向函数与径向函数的乘积组成. 角向为三角调和函数, 径向为传统 1 次 U-系统函数. 图 3 显示了若干 U-调和基函数的图像 (均为实部). 其中, 图 3(a)~3(d) 对应的径向基函数为 $u_2(r)$, 如图 4(a) 所示; 图 3(e)~3(h) 对应的径向基函数为 $u_5(r)$, 如图 4(b) 所示; 图 3(i)~3(l) 对应的径向基函数为 $u_8(r)$, 如图 4(c) 所示; 图 3(m)~3(p) 对应的径向基函数为 $u_{10}(r)$, 如图 4(d) 所示. 而这四组 U-调和基函数的角向函数分别为 $e^{im\theta}$, $m = 0, 1, 2, 3$.

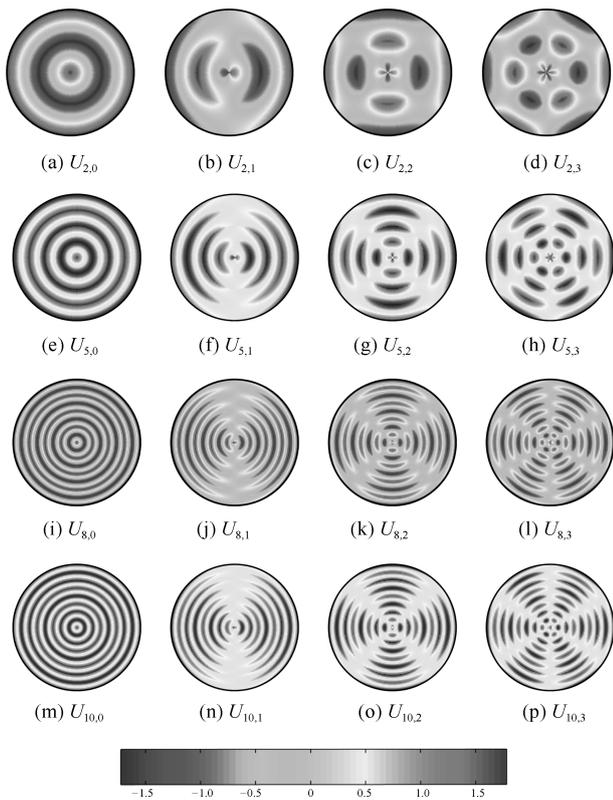


图 3 U-调和基函数图像
Fig. 3 U-harmonic basis functions

2.3 二维旋转不变 U 变换

设定义在单位圆盘上的图像 $f(r, \theta)$, 则它的二维旋转不变 U 变换为:

$$M_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) U_{nm}^H(r, \theta) r dr d\theta \quad (12)$$

其中, $[\cdot]^H$ 表示复共轭, M_{nm} 为图像 $f(r, \theta)$ 的旋转不变 U 变换系数, $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

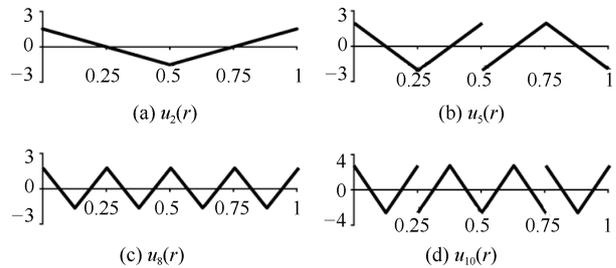


图 4 U-调和基函数的径向基

Fig. 4 The radial kernels of U-harmonic basis functions

这里需要指出的是, 式 (10) 与式 (12) 分别是平面上的两种二元 U-系统变换, 且都是张量积形式. 但两者有本质的区别, 前者定义在笛卡尔坐标系下, 没有旋转不变性; 而后者定义在极坐标系下, 很容易得到图像的旋转不变量, 从而可以应用到目标识别、分类等图像不变描述的应用中.

3 旋转不变 U 变换的性质

本文提出的旋转不变 U 变换与传统的正交旋转不变矩 (如 Zernike 矩) 具有相同的表达形式, 但我们采用了一类正交分段多项式函数 (1 次 U-系统) 代替传统的径向多项式, 因而具有诸多特别的性质.

3.1 旋转不变性

定理 1 (旋转不变性). 图像旋转前后, 它的二维旋转不变 U 变换系数的模 $\|M_{nm}\|$ 不变.

证明. 设图像 $f(r, \theta)$ 旋转了角度 φ , 那么旋转后的图像 $f'(r, \theta) = f(r, \theta + \varphi)$, 则旋转后图像的 U 变换系数为

$$\begin{aligned} M'_{nm} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} u_n(r) e^{-im(\theta+\varphi)} f(r, \theta + \varphi) r dr d\theta = \\ &= e^{-im\varphi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} u_n(r) e^{-im\theta} f(r, \theta + \varphi) r dr d\theta = \\ &= e^{-im\varphi} M_{nm} \end{aligned}$$

因此, $\|M'_{nm}\| = \|M_{nm}\|$.

3.2 多分辨率性

从 U-系统的构造过程可知, 每个 U-系统基函数经“2 倍压缩”与“正、反复制”, 成为下一组对应

U-系统基函数在 $[0, 1/2]$ 与 $(1/2, 1]$ 上的部分. 因此下一组基函数的分辨率比上一组增加一倍, 如此迭代下去. 因此, U-调和基函数 $U_{nm}(r, \theta)$ 在径向上具有多分辨率特性. 另外, 随着 m 的增大, $U_{nm}(r, \theta)$ 角向的分辨率也逐渐增加. 因此, 利用 U-调和基函数 $U_{nm}(r, \theta)$, 可以同时获得图像在径向和角向上的多分辨率特征.

3.3 函数支撑

同样通过 U-系统构造过程可知, 每个 U-系统基函数均匀地支撑在整个 $[0, 1]$ 区间上, 幅度平稳, 如图 1 所示. 因此, 当利用 U-系统进行图像特征提取时, 能够“均匀地”捕获图像各处的特征.

相反地, 传统矩函数的径向多项式不具有这样的特性. 图 5 (a) 所示为 Zernike 多项式 $R_{n,10}(r)$ 系列中的前 4 个多项式 ($n = 10, 12, 14, 16$) 的图像. 图 5 (b) 为局部放大图. 可以看出, 它们在定义域 $[0, 1]$ 上的分布非常不均匀, 函数能量集中在区间的后半部分. 需要强调的是, 这不是特例, 而是 Zernike 多

项式的普遍现象. 文献 [21] 将这种零点非均匀分布现象称为函数支撑问题. 因此, 在利用 Zernike 多项式进行图像特征提取时, 容易导致非必要地刻意强调图像特定部分而抑制其他部分.

3.4 函数零点

传统矩函数的径向多项式 (比如 Zernike 多项式、伪 Zernike 多项式) 的零点数目反映了函数的震荡程度. 函数零点越多, 震荡程度越高, 越能够捕获图像的高频成份. 对于 n 阶 Zernike 多项式 $R_{nm}(r), r \in [0, 1]$, 其零点的数目为 $(n - |m|)/2$. 而对于第 n 个 U-系统基函数 $u_n(r), r \in [0, 1]$, 根据 U-系统的序率性可知, $u_n(r)$ 含有 $n + 1$ 个零点, 远多于 Zernike 多项式的零点. 因此, 当利用相同数量的变换基函数条件下, RIUT 更能捕获更多的图像高频信息.

3.5 间断性

如上所述, 传统旋转不变矩的径向基均为多项式, 具有高度光滑的特点. 而本文的 RIUT 的径向基为 U-系统, 它是一类非连续的正交分段多项式函数系, 其中既包含连续型的基函数, 又含有大量具有各种间断性的基函数. 在实际应用中, 处理对象 (如图像) 通常是连续与间断特性并存的复杂信号, 因而 RIUT 可以更好地表达图像的特征.

3.6 离散实现

定义在单位圆盘上的旋转不变 U 变换针对的是连续函数. 对于实际应用中的数字图像, 式 (12) 并不能直接使用, 这里给出 RIUT 的离散格式.

假设给定尺寸为 $N \times N$ 的数字图像 $F(i, j), 1 \leq i, j \leq N$. 为了计算它的 U 变换, 需要将 $F(i, j)$ 映射到函数 $f(x_i, y_j)$. 其中, $f(x_i, y_j) = F(i, j), x_i = (2i - N - 1)/N, y_j = (2j - N - 1)/N$, 则定义在离散像素集 $\{(x_i, y_j), x_i^2 + y_j^2 \leq 1\}$ 上图像 $f(x_i, y_j)$ 的 U 变换系数 M_{nm} 的计算公式为:

$$M_{nm} = \frac{2}{\pi N^2} \sum_{x_i^2 + y_j^2 \leq 1} f(x_i, y_j) U_{nm}(x_i, y_j) \quad (13)$$

3.7 RIUT 描述子

在实际应用中, 只有旋转不变性往往是不够的. 一般来说, 至少还应具有平移不变性与缩放不变性. 后两种不变特征可以通过适当的图像预处理得到, 从而可得到一类具有旋转 (Rotation)、缩放 (Scale) 及平移 (Translation) 不变性的 RIUT 描述子. 具体步骤如下:

假设 $f(x, y)$ 为笛卡尔坐标系下的二值图像, 为了得到平移不变性, 将图像中形状目标的质心平移

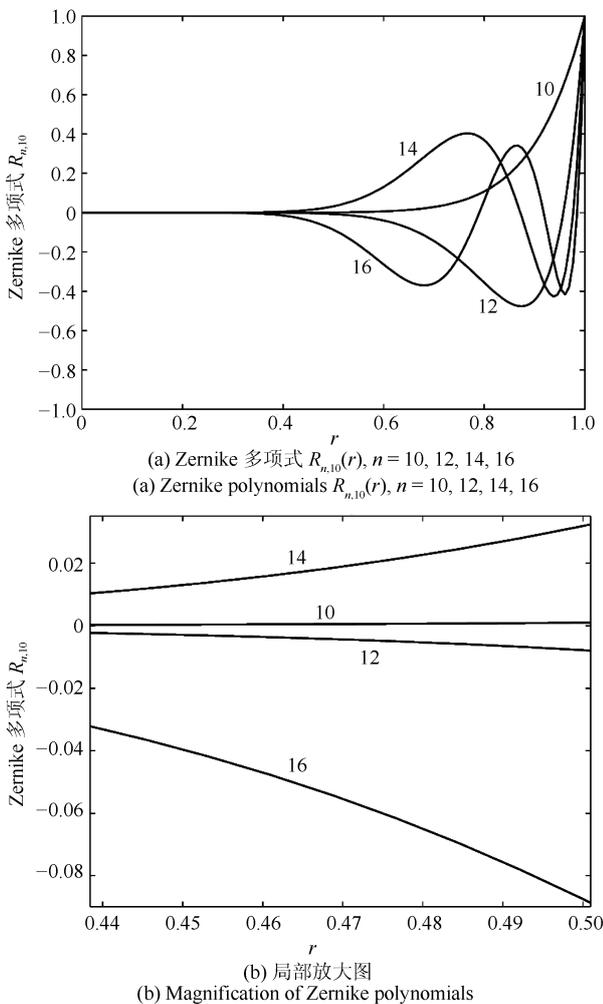


图 5 Zernike 多项式函数支撑
Fig. 5 The suppression of Zernike polynomials

到坐标原点, 作位置归一化处理即可, 如下:

$$\{g(x_T, y_T) : x_T = x - \bar{x}, y_T = y - \bar{y}\} \quad (14)$$

其中, $g(x_T, y_T)$ 为位置归一化后的图像, (\bar{x}, \bar{y}) 为原图像 $f(x, y)$ 的质心, 计算公式为:

$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}}, \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}} \quad (15)$$

其中, m_{00}, m_{10} 及 m_{01} 为 $f(x, y)$ 的几何矩.

为了得到缩放不变性, 需要将图像中的形状目标尺寸进行归一化处理, 如下:

$$\left\{ h(x_S, y_S) : x_S = x \cdot \sqrt{\frac{\beta}{m_{00}}}, y_S = y \cdot \sqrt{\frac{\beta}{m_{00}}} \right\} \quad (16)$$

而 β 为预定义的形状目标的面积.

因此, 图像的平移与缩放不变性可通过如下的预处理得到:

$$o(x, y) = f\left(\frac{x}{a} + \bar{x}, \frac{y}{a} + \bar{y}\right) \quad (17)$$

其中, $a = \sqrt{\frac{\beta}{m_{00}}}$.

最后, 对预处理后的图像 $o(x, y)$ 作旋转不变 U 变换, 得到相应的 RIUT 系数. 将这些系数取模后得到的向量即为图像 $f(x, y)$ 的 RIUT 描述子. 图 6 为计算图像 RIUT 描述子的流程.

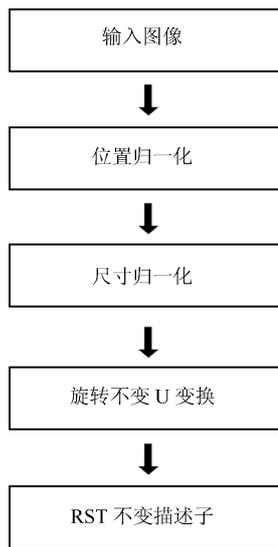


图 6 图像的 RIUT 描述子
Fig. 6 RIUT descriptor

4 实验

4.1 旋转不变性

定理 1 证明了 RIUT 具有旋转不变性, 这里将通过实验进行测试及验证.

实验 1. 选择一张灰度 Lena 图像, 尺寸为 128 像素 \times 128 像素. 因 RIUT 定义在单位圆盘上, 因此只选择 Lena 图像的相应部分 (即 $x_i^2 + y_i^2 \leq 1$), 如图 7(a) 所示. 假设旋转了 α 角度 (如图 7(b) 和 7(c)), 图像旋转前后的 RIUT 系数模分别为 $\|M_{nm}\|, \|M_{nm}^\alpha\|$. 计算它们之间的平方误差 (Mean square error, MSE), 定义如下:

$$\text{MSE} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\|M_{n_i m_i}^\alpha\| - \|M_{n_i m_i}\|)^2 \quad (18)$$

其中, L 为 RIUT 系数的数目. 本实验中, 我们计算了径向函数与角向函数均为前 128 项的 RIUT 系数, 共 16 384 个.



图 7 Lena 图像旋转示例

Fig. 7 Rotation examples of Lena image

我们对图 7(a) 从 0° 到 90° , 每间隔 2.25° 旋转一次, 一共得到 41 张图像, 分别计算旋转后图像与原始图像的 MSE, 结果如图 8 所示. 实验结果表明, 忽略因图像旋转而进行重采样引入的误差, RIUT 系数模值是不变的, 确实是一种旋转不变量.

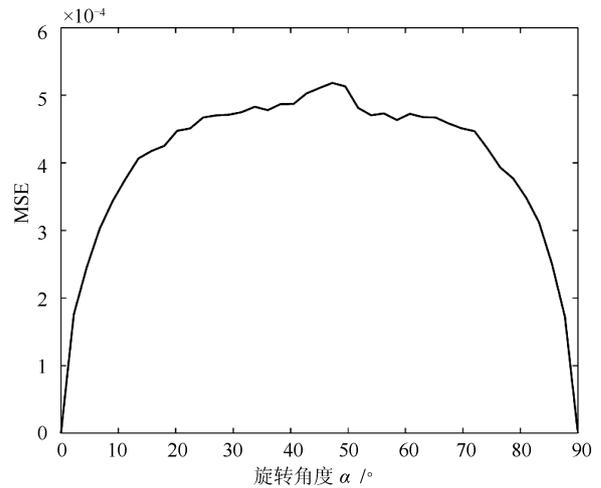


图 8 旋转图像的 MSE

Fig. 8 The MSE of rotated images

4.2 二值图像检索

构造具有旋转不变性的特征在不变模式识别中具有重要的应用价值, 理论与实验结果表明, 本文提出的 RIUT 具有良好的旋转不变性. 本节我们

基于 RIUT 描述子, 将 RIUT 应用于二值图像检索中, 并与经典的旋转不变矩方法, 包括 Zernike 矩 (ZM)、伪 Zernike 矩 (PZM) 及正交 Fourier-Mellin 矩 (OFMM) 进行比较.

在下面的实验中, 我们选取标准图像检索测试集 MPEG-7. 该测试集包含若干图像数据库以针对不同的测试目的. RIUT 与传统的旋转不变矩都是图像区域变换, 因此我们选择 MPEG-7 测试集中的区域检索数据库 CE2-A2, CE2-A4 和 CE2-B 作为测试数据库, 分别在下面的实验 2 至实验 4 中描述.

实验 2. CE2-A2 图像库是专门针对旋转鲁棒性检验的测试数据库. 该库共包含 2921 张二值图像, 分为 21 组. 其中前 20 组是已分类图像, 每组包含 7 张图像, 由一张标准图像经不同的旋转变换得到, 如图 9 所示. 剩余未经分类的 2781 张图像在第 21 组中.

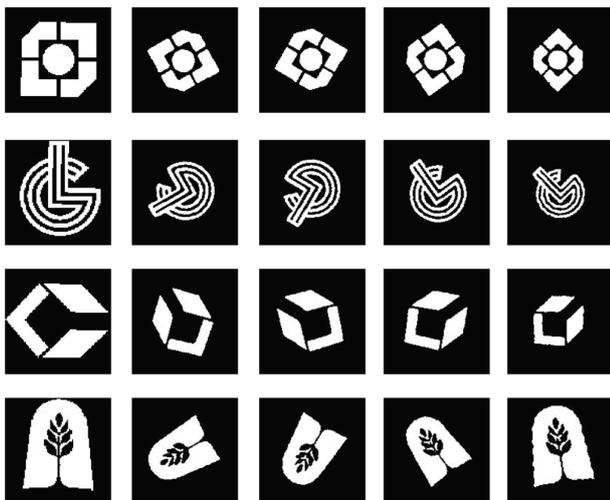


图 9 CE2-A2 库中图像示例
Fig.9 Images in CE2-A2 data set

检索精度的指标为“Bull’s eye”算法 (Bull’s eye performance, BEP) (下同), 即考虑最接近查询对象的 $2m$ 个图像来计算检索正确率, 这里 m 为每类图像中的图像数目 (如本测试库中 $m = 7$). 3 种矩方法采用的阶数均为 8 (即最高为 7 次多项式), RIUT 则采用前 8 项 U-系统基函数.

表 1 给出了本文方法 RIUT 及经典正交矩方法的检索精度结果. 虽然这些方法在理论上都具有旋转不变性, 但从实验结果可以看出, 本文的 RIUT 方法具有更好的旋转不变鲁棒性.

表 1 各方法检索精度 (CE2-A2 图像库) (%)
Table 1 Retrieval precision of different methods (CE2-A2 image data set) (%)

检索精度	ZM	PZM	OFMM	RIUT
BEP	97.96	92.86	97.96	98.57

实验 3. CE2-A4 图像库包含 3101 张二值图像, 分为 31 组. 其中前 30 组是已分类图像, 每组包含 11 张图像, 由一张标准图像经不同的旋转、缩放、平移及透视变换得到, 如图 10 所示. 第 31 组包含 2771 张各不相同的未分类图像.



图 10 CE2-A4 库中图像示例
Fig.10 Images in CE2-A4 data set

表 2 给出了各方法的检索精度结果. 从实验结果明显看出, RIUT 方法优于传统的旋转不变矩方法.

表 2 各方法检索精度 (CE2-A4 图像库) (%)
Table 2 Retrieval precision of different methods (CE2-A4 image data set) (%)

检索精度	ZM	PZM	OFMM	RIUT
BEP	70.39	58.87	70.66	76.97

实验 4. CE2-B 图像库包含 2801 张不同的二值商标图像, 分成 11 组. 其中, 前 10 组是已分类商标图像, 每组中包含的相似商标数目见表 3. 这些商标以形状相似为分组准则, 比如三角形商标、方形商标、圆形商标等, 如图 11 所示.

表 3 CE2-B 库中前 10 组相似商标数目
Table 3 The similar trademarks number for the first ten groups in CE2-B data set

组号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数目	68	244	22	28	17	22	45	145	45	42

表 4 给出了每组商标的检索精度结果, 其中加粗数字为每组的最高检索结果. 可以看出, ZM 方法与 RIUT 分别在 4 组商标中取得最高检索结果, 而 PZM 方法在 2 组中取得最高结果. 表 5 为这 10 组检索结果的平均值, 可以看出, 本文的 RIUT 仍取得最好结果.

表 4 每组商标的检索精度 (%)
Table 4 Retrieval precision for each group (%)

组号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ZM	37.37	54.94	38.43	42.98	27.34	28.72	24.79	42.00	37.83	26.59
PZM	22.45	52.99	33.88	23.60	40.48	26.45	17.23	41.02	44.00	30.22
OFMM	25.65	49.41	30.37	38.90	33.22	22.31	26.27	45.65	29.23	22.90
RIUT	31.55	53.33	38.84	41.74	47.40	20.04	30.72	52.12	33.93	28.29

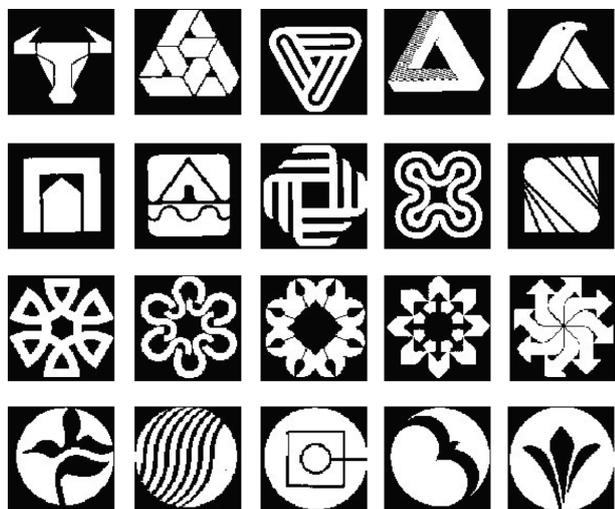


图 11 CE2-B 库中商标图像示例
Fig. 11 Images in CE2-B data set

表 5 平均检索精度 (%)

Table 5 The average retrieval precision (%)

检索精度	ZM	PZM	OFMM	RIUT
BEP	36.10	33.23	32.39	37.79

5 结论

本文基于一类正交分段多项式函数系 U-系统, 提出了一类新的二维旋转不变 U 变换 RIUT. 不同于以往的定义在 $L^2[0, 1]^2$ 上的二维张量积形式的 U-系统, RIUT 通过将 U-系统函数与调和函数相结合而获得旋转不变性. RIUT 有效避免了传统矩中高次多项式的计算, 有效降低了计算复杂度. 更重要的是, 由于 U-系统具有诸多良好的特性, 比如序率性、函数均匀支撑、连续/间断并存等, 使得 RIUT 在图像特征提取方面具有更多的优势. 最后, 在标准图像库上进行二值图像检索测试, 结果表明 RIUT 可以得到更好的检索结果. 在未来的工作中, 我们将进一步分析 RIUT 的性质, 并将其拓展到更多的实际应用中.

References

1 Teague M R. Image analysis via the general theory of moments. *Journal of the Optical Society of America*, 1980,

70(8): 920–930

2 Teh C H, Chin R T. On image analysis by the methods of moments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1988, 10(4): 496–513

3 Kan C, Srinath M D. Invariant character recognition with Zernike and orthogonal Fourier-Mellin moments. *Pattern Recognition*, 2002, 35(1): 143–154

4 Ghosal S, Mehrotra R. Detection of composite edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1994, 3(1): 14–25

5 Gao Shi-Yi, Zhao Ming-Yang, Zhang Lei, Zou Yuan-Yuan. Improved algorithm about subpixel edge detection of image based on Zernike orthogonal moments. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(9): 1163–1168
(高世一, 赵明扬, 张雷, 邹媛媛. 基于 Zernike 正交矩的图像亚像素边缘检测算法改进. *自动化学报*, 2008, 34(9): 1163–1168)

6 Wang L Z, Healey G. Using Zernike moments for the illumination and geometry invariant classification of multispectral texture. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998, 7(2): 196–203

7 Chen Z, Sun S K. A Zernike moment phase-based descriptor for local image representation and matching. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, 19(1): 205–219

8 Flusser J, Suk T, Zitova B. *Moments and Moment Invariants in Pattern Recognition*. UK: John Wiley & Sons, 2009.

9 Sheng Y L, Shen L X. Orthogonal Fourier-Mellin moments for invariant pattern recognition. *Journal of the Optical Society of America A*, 1994, 11(6): 1748–1757

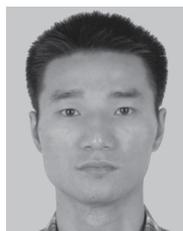
10 Chong C W, Raveendran P, Mukundan R. A comparative analysis of algorithms for fast computation of Zernike moments. *Pattern Recognition*, 2003, 36(3): 731–742

11 Shu H Z, Luo L M, Coatrieux J L. Moment-based approaches in imaging part 3: computational considerations. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 2008, 27(3): 89–91

12 Li Z M, Men X P, Li H. 3D model retrieval based on U system rotation invariant moments. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on Pervasive Computing and Applications*. Birmingham: IEEE, 2007. 183–188

13 Liu Yu-Jie, Li Zong-Min, Li Hua, Qi Dong-Xu. 3D U system moment and 3D model retrieval. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2006, 18(8): 1111–1116
(刘玉杰, 李宗民, 李华, 齐东旭. 三维 U 系统矩与三维模型检索. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2006, 18(8): 1111–1116)

- 14 Chen Wei, Zhang Xiao-Ting. Orthogonal rotation-invariant V moments and application to image reconstruction. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(2): 376–385
(陈伟, 张晓婷. 正交旋转不变 V 矩及其在图像重建中的应用. 自动化学报, 2015, **41**(2): 376–385)
- 15 Feng Y Y, Qi D X. A sequence of piecewise orthogonal polynomials. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 1984, **15**: 834–844
- 16 Qi Dong-Xu, Song Rui-Xia, Li Jian. *Discontinuous Orthogonal Functions*. Beijing: Scientific Press, 2011.
(齐东旭, 宋瑞霞, 李坚. 非连续正交函数. 北京: 科学出版社, 2011.)
- 17 Qi Dong-Xu, Tao Chen-Jun, Song Rui-Xia, Ma Hui, Sun Wei, Cai Zhan-Chuan. Representation for a group of parametric curves based on the orthogonal complete U-system. *Chinese Journal of Computers*, 2006, **29**(5): 778–785
(齐东旭, 陶尘钧, 宋瑞霞, 马辉, 孙伟, 蔡占川. 基于正交完备 U-系统的参数曲线图组表达. 计算机学报, 2006, **29**(5): 778–785)
- 18 Cai Zhan-Chuan, Sun Wei, Qi Dong-Xu. A classification and recognition method for planar figures based on complete orthogonal U-system. *Journal of Software*, 2006, **17**(Suppl.): 21–27
(蔡占川, 孙伟, 齐东旭. 基于正交完备 U-系统的图形分类与识别方法. 软件学报, 2006, **17**(增刊): 21–27)
- 19 Ding Wei, Yan Wei-Qi, Qi Dong-Xu. Digital image watermarking based on U-system. *Journal of Image and Graphics*, 2001, **6**(6): 552–557
(丁玮, 闫伟齐, 齐东旭. 基于 U 系统的数字图象水印技术. 中国图象图形学报, 2001, **6**(6): 552–557)
- 20 Xiong Gang-Qiang, Yu Jian-De, Xiong Chang-Zhen, Qi Dong-Xu. Reversible factorization of U orthogonal transform and image lossless coding. *Journal of Computer Research and Development*, 2012, **49**(4): 856–863
(熊刚强, 余建德, 熊昌镇, 齐东旭. U-正交变换的可逆实现及其图像无损编码. 计算机研究与发展, 2012, **49**(4): 856–863)
- 21 Abu-Mostafa Y S, Psaltis D. Recognitive aspects of moment invariants. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1984, **6**(6): 698–706



陈伟 江南大学数字媒体学院讲师。2013 年获得澳门科技大学理学博士学位。主要研究方向为计算机图形学和图像处理。E-mail: wchen_jdsm@163.com
(CHEN Wei Lecturer at the School of Digital Media, Jiangnan University. He received his Ph. D. degree from Macau University of Science and Technology in 2013. His research interest covers computer graphics and image processing.)