

基于混合特征的非刚性点阵配准算法

汤昊林¹ 杨扬^{1,2} 杨昆^{1,2} 罗毅^{1,2} 张雅莹¹ 张芳瑜¹

摘要 提出一种基于混合特征的非刚性点阵配准算法. 该算法包含了对应关系评估与空间变换更新两个相互交替的步骤. 首先定义了两个特征描述法用于描述两个点阵之间的全局和局部几何结构特征差异, 随后合并这两个特征描述法建立一个基于混合特征的能量优化方程. 该能量优化方程可以利用线性分配技术进行求解, 同时可以灵活地选择使用最小化全局结构特征差异或最小化局部结构特征差异来评估两个点阵之间的对应关系. 为了增强前述两个步骤之间的协调性, 我们利用能量权重调节在整个配准过程中控制能量优化从最小化局部结构特征差异逐步转变为最小化全局结构特征差异, 同时控制用于空间变换的薄板样条函数 (Thin plate spline) 的更新从刚性变换逐步转变为非刚性变换. 我们在二维轮廓配准、三维轮廓配准、序列图像配准和图像特征点配准下对本文算法进行了各项性能测试, 同时也与当前 8 种流行算法进行了性能比较. 本文算法展现了卓越的非刚性配准性能, 并在大部分实验中超越了当前的相关算法.

关键词 非刚性, 点阵配准, 混合特征, 对应关系评估, 空间变换更新

引用格式 汤昊林, 杨扬, 杨昆, 罗毅, 张雅莹, 张芳瑜. 基于混合特征的非刚性点阵配准算法. 自动化学报, 2016, 42(11): 1732–1743

DOI 10.16383/j.aas.2016.c150618

Non-rigid Point Set Registration with Mixed Features

TANG Hao-Lin¹ YANG Yang^{1,2} YANG Kun^{1,2} LUO Yi^{1,2} ZHANG Ya-Ying¹ ZHANG Fang-Yu¹

Abstract We present a novel non-rigid point set registration method with mixed features. The proposed method is designed by an alternating two-step process: correspondence estimation and transformation updating. We first design a global and a local feature descriptors for assessing the global and local structural differences between two point sets, respectively. The two feature descriptors are then combined for forming a mixed feature based energy function, so as to provide a flexible way to estimate correspondences by minimizing global or local structural differences using a linear assignment solution. To improve the interactions between the two steps, a tradeoff of energy adjustment is used to gradually adjust the energy minimization from local to global structural differences and the thin plate spline transformation from rigid to non-rigid during registration. We evaluate the performances of our method in contour registration, sequence images and real images; through comparison with other eight state-of-the-art methods, our method shows the best alignments in most deformation and rotation scenarios.

Key words Non-rigid, point set registration, mixed features, correspondence estimation, transformation updating

Citation Tang Hao-Lin, Yang Yang, Yang Kun, Luo Yi, Zhang Ya-Ying, Zhang Fang-Yu. Non-rigid point set registration with mixed features. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(11): 1732–1743

收稿日期 2015-10-10 录用日期 2016-05-16
Manuscript received October 10, 2015; accepted May 16, 2016
国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2012AA121402), 云南省教育厅科学研究项目 (2015Z069), 云南师范大学博士科研启动基金 (01000205020503065), 云南师范大学大学生科研训练基金 (0100060502006) 资助

Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2012AA121402), Key Scientific Research Project of Education Department of Yunnan Province (2015Z069), Doctoral Scientific Research Foundation of Yunnan Normal University (01000205020503065), College Students' Scientific Research Training Project of Yunnan Normal University (0100060502006)

本文责任编辑 朱军
Recommended by Associate Editor ZHU Jun

1. 云南师范大学信息学院 昆明 650092 2. 西部资源环境地理信息技术教育部工程研究中心 昆明 650092
1. School of Information Science and Technology, Yunnan Normal University, Kunming 650092 2. The Engineering Research Center of GIS Technology in Western China, Kunming 650092

非刚性点阵配准 (Non-rigid point set registration) 是将某一点阵 (称为源点阵) 与其发生形变后的点阵 (称为目标点阵) 进行匹配的过程. 该技术在计算机视觉、机器学习、医学图像处理、模式识别以及地理信息系统中扮演着极其重要的角色. 基于当前算法的特点, 非刚性点阵配准算法大体可以分为两大类: 基于迭代或非迭代的算法和基于学习或非学习的算法. 由于本文算法主要涉及基于迭代的问题, 所以我们主要从基于迭代或非迭代的角度来介绍当前的非刚性点阵配准算法.

在基于非迭代的非刚性点阵配准算法中, 两组点阵之间的对应关系是通过使用某种高级结构特征 (High level structural features) 仅进行一次相似性

评估后直接找回两组点阵之间的对应关系. 在基于非迭代的配准模型中, 直线^[1]、曲线^[2]、表面结构^[3]、Shape context^[4-5] 和图论 (Graphs)^[6-7] 等特征被用于两个点阵之间相似度的评估. 在非迭代算法中, Shape context 和 Graphs 是最受欢迎的两种特征描述法, 其核心是通过最小化两个点阵之间的分布差异 (使用 Shape context 时) 或者拓扑结构差异 (使用 Graphs 时) 来找回点阵之间的对应关系^[4-9]. 最近, 一部分研究人员^[10-14] 在传统的基于 Graphs 特征算法的基础上加入了学习要素, 通过在配准前使用适当的学习样本进行学习来优化算法中的参数设置, 从而提高了算法的配准精度. 但是这类算法由于使用了 Shape context 或 Graphs 特征, 当相邻点较为接近时该类特征则变得非常相似以至于这类算法并不能达到较好的配准效果^[8, 15-16].

基于迭代的算法通常包括两个相互交替的过程: 对应关系评估 (Correspondence estimation) 和空间变换更新 (Transformation updating). 相对于基于非迭代的算法, 基于迭代的算法的优势在于它们在迭代过程中逐步地调整源点阵的初始几何形状和空间位置使得源点阵在几何形状和空间位置上变得越来越接近目标点阵, 从而使得通过几何结构特征寻找它们之间的对应关系变得更加容易. TPS-RPM^[17] 是第一个利用迭代技术来进行非刚性点阵配准的算法. 它通过使用点阵到点阵的距离、Softassign^[18-19] 和退火算法^[20-21] 来评估点阵之间的对应概率和控制薄板样条函数 (Thin plate spline, TPS)^[22] 的更新. Myronenko 等^[23] 在 TPS-RPM 算法框架基础上提出了在空间变换更新中增加运动一致性约束条件 (Motion coherence constraint)^[24] 来提高配准过程中空间变换的稳定性, 并利用最大似然法 (Maximum likelihood) 来评估点阵之间的对应关系. 之后, Myronenko 等^[25] 在文献 [23] 的基础上发表了著名的 CPD 算法 (Coherent points drift algorithm), 他们改良了空间变换模型使之既可以适用于刚性和非刚性的点阵配准问题, 并可以在配准精度要求相对不高的情况下通过使用快速高斯变换 (Fast Gauss transform)^[26] 和矩阵低秩逼近 (Low-rank matrix approximation)^[27] 技术减少计算量来提升算法的配准速度. 近期, Jian 等^[16] 提出了一种基于高斯混合模型 (Gaussian mixture model) 的非刚性点阵配准算法 (称为 GMMREG). 该算法不直接在几何空间中配准两个点阵, 而是把两个点阵先转变成为两个高斯混合模型, 然后在此基础上进行对应关系评估, 空间变换更新基于最小化两个高斯混合模型的 L2 距离^[28]. 最近, 国内的 Ma 等^[29] 提出了一种基于 Shape con-

text 特征和 L2E 评估^[30] 的算法, Wang 等^[31] 通过使用不对称的高斯模型捕捉空间点阵的不对称分布, 并用其作为特征描述进行点阵的非刚性配准.

本文中, 我们提出了一种基于混合特征的非刚性点阵配准算法. 本算法的主要贡献体现在以下 3 个方面:

1) 全局结构特征描述算法: 我们提出了一种利用和向量来描述点阵中各点的全局结构特征的描述算法.

2) 局部结构特征描述算法: 我们提出了一种利用点阵之间的局部区域相邻点的距离和描述点阵中各点的局部结构特征的描述算法.

3) 基于混合特征的非刚性点阵对应评估算法: 我们通过混合全局和局部结构特征描述算法提出了一种基于混合特征的能量方程, 该方程允许使用混合特征进行点阵对应评估, 使得在配准过程中所使用的特征不再单一化, 使配准精度得到了提高并在大部分实验中超越了当前相关算法.

1 方法

我们首先定义了全局和局部特征描述法以及混合特征能量优化方程, 然后对本文算法的两个核心步骤进行介绍. 在本章的后面部分, 我们将对本文算法的参数设定以及本文算法与当前相关方法的差异进行说明. 假设 $\{a_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 和 $\{b_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ 是两组需要进行配准的点阵, \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 分别为源点阵和目标点阵.

1.1 全局和局部结构特征差异

我们首先定义了两种特征描述法, 分别被用来评估源点阵 \mathbf{a} 与目标点阵 \mathbf{b} 之间的全局与局部几何结构特征差异.

1.1.1 全局结构特征差异

全局几何结构特征差异被定义为

$$G_{a_i b_j} = |\mathbf{v}_{a_i} - \mathbf{v}_{b_j}| \quad (1)$$

其中 G_{ab} 为全局结构差异矩阵, 矩阵中的每个元素值为两个向量 \mathbf{v}_{a_i} 与 \mathbf{v}_{b_j} 相减后的模. G_{ab} 被用于评估点阵 \mathbf{a} 与点阵 \mathbf{b} 之间的全局结构特征差异. \mathbf{v}_{a_i} 与 \mathbf{v}_{b_j} 则是我们提出的全局结构特征描述法, 定义为

$$\mathbf{v}_{a_i} = \sum_{k=1, k \neq i}^n \overrightarrow{a_i a_k} \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_{b_j} = \sum_{k=1, k \neq j}^m \overrightarrow{b_j b_k} \quad (3)$$

其中 $\overrightarrow{a_i a_k}$ 与 $\overrightarrow{b_j b_k}$ 分别是点 a_i 到点 a_k 与点 b_j 到 b_k

的几何向量. \mathbf{v}_{a_i} 与 \mathbf{v}_{b_j} 则是分别用来描述点 \mathbf{a}_i 与点 \mathbf{b}_j 的全局结构特征的和向量.

1.1.2 局部结构特征差异

局部结构特征差异被定义为

$$L_{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j} = \sum_{k=1}^K \|T(N(\mathbf{a}_i)_k, \mathbf{b}_j) - N(\mathbf{b}_j)_k\|^2 \quad (4)$$

其中 $L_{\mathbf{ab}}$ 是点阵 \mathbf{a} 与点阵 \mathbf{b} 之间的局部结构差异矩阵, K 为相邻点的个数. $N(\mathbf{a}_i)_k$ 和 $N(\mathbf{b}_j)_k$ 分别为点 \mathbf{a}_i 和点 \mathbf{b}_j 的第 k 个最近点. T 则是平移方程, 被定义为

$$T(N(\mathbf{a}_i)_k, \mathbf{b}_j) = N(\mathbf{a}_i)_k + (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_i) \quad (5)$$

其主要思想为考虑在点阵 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 中的每一个点与其相邻点 ($N(\mathbf{a}_i)_{k=1, \dots, K}$ 或 $N(\mathbf{b}_j)_{k=1, \dots, K}$) 构成了一个局部小段, 评估点阵 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 之间的对应关系就可以转化为评估局部小段的相似度. 例如, 首先将 \mathbf{a}_i 以及它的 K 个相邻点 $N(\mathbf{a}_i)_{k=1, \dots, K}$ 根据平移向量 $\overrightarrow{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j}$ 移动到点 \mathbf{b}_j . 然后把点 \mathbf{a}_i 的相邻点 $N(\mathbf{a}_i)_{k=1, \dots, K}$ 与点 \mathbf{b}_j 的相邻点 $N(\mathbf{b}_j)_{k=1, 2, \dots, m}$ 之间的几何距离进行累加. 最后, 点 \mathbf{a}_i 在点阵 \mathbf{b} 中的对应点被确定为拥有最小距离和的点 $N(\mathbf{b}_j)$. 其中, 局部结构特征差异主要决定于相邻点个数 K , 同时 K 也决定了两个点阵之间局部结构相似度的评估.

在这里, 我们使用 Linear assignment 技术来最小化全局结构特征差异矩阵 $G_{\mathbf{ab}}$ 与局部结构特征差异矩阵 $L_{\mathbf{ab}}$, 我们将会获得两种对应关系, 它们分别是基于最小化的全局结构特征差异和局部结构特征差异计算而来的.

1.2 基于混合特征的能量优化方程

本文中提出的基于混合特征的能量优化方程被定义为

$$E(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m G_{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j} M_{ij} + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m L_{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j} M_{ij} \quad (6)$$

其中 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m G_{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j} M_{ij}$ 和 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m L_{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j} M_{ij}$ 分别描述了基于最小化全局和局部结构特征差异计算的能量, 可以被考虑为 Linear assignment 问题. $G_{\mathbf{ab}}$ 和 $L_{\mathbf{ab}}$ 分别正规化至 $[0, 1]$ 区间. n 和 m 分别代表了点阵 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 中的序列长度. M_{ij} 是对应矩阵, 表示了点阵 \mathbf{a} 与点阵 \mathbf{b} 之间的对应关系, 当点 \mathbf{a}_i 与点 \mathbf{b}_j 相对应时赋值为 1, 反之则赋值为 0. M_{ij} 始终满足 $\sum_{j=1}^m M_{ij} = 1$ 和 $\sum_{i=1}^n M_{ij} = 1$. α 为权重参数用于调节能量优化时 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m G_{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j} M_{ij}$ 与 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m L_{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j} M_{ij}$ 的比重. 在配准过程中, 能量

调节参数 α 通过退火算法在每次迭代中逐渐减小, 最后趋近为 0.

1.3 配准过程

首先我们创建一个可变形的代理点阵 \mathbf{a}^w , 并使其在配准开始时满足 $\mathbf{a}^w = \mathbf{a}$. 本文算法的主要过程是: 1) 首先利用前述基于混合特征的能量优化方程在每次迭代中评估 \mathbf{a}^w 和 \mathbf{b} 的对应关系 (前述式 (1) ~ (6) 中的 \mathbf{a}_i 应使用 \mathbf{a}^w); 2) 随后使用 TPS 空间变换更新 \mathbf{a}^w 的空间位置及几何形状, 该 TPS 空间变换由步骤 1) 中获取的对应关系建立而来. 这两个步骤 1) 和 2) 相互交替迭代以至于代理点阵 \mathbf{a}^w 能逐渐在空间位置和几何形状上越来越接近其目标点阵 \mathbf{b} , 最终准确地匹配上它在点阵 \mathbf{b} 中的真实对应点. 使用代理点阵 \mathbf{a}^w 评估获得的对应点即为点阵 \mathbf{a} 的对应关系.

1.3.1 步骤 1: 对应关系评估

在每一次迭代中, 点阵 \mathbf{a}^w 与 \mathbf{b} 的对应关系通过最小化基于混合特征的能量优化方程 (6) 获得. 基于混合特征的能量优化在本文中被看作一个线性分配问题, 所以式 (6) 可以使用 Jonker-Volgenant 算法^[32] 求解. Jonker-Volgenant 算法已被广泛用于解决线性分配问题, 它可以提供最短广增路 (Shortest augmenting path) 并拥有 $O(N^3)$ 的计算复杂度.

对于线性分配中的 Integer cost 问题, 在配准前我们首先将需要配准的点阵坐标缩放至 $[0, 1]$ 之间, 然后在每一次迭代中把计算出的全局与局部结构特征差异矩阵通过使用 $[G_{\mathbf{a}^w, \mathbf{b}} \times R]$ 和 $[L_{\mathbf{a}^w, \mathbf{b}} \times R]$ 进行数值处理, 其中 R 被设为 10^6 . 对于非方形矩阵问题 (点阵 \mathbf{b} 包含冗余点), 非方形矩阵 $G_{\mathbf{a}^w, \mathbf{b}}$ 和 $L_{\mathbf{a}^w, \mathbf{b}}$ 可以通过分配虚拟项 (Dummy entries)^[33] 来转换为方形矩阵, 而且不会影响整体能量优化. 转换后 $E(M)$ 则可以使用通常手段求解, 并且仍然给出最优解. 虽然我们提供了一种针对目标点阵包含冗余点的配准解决方案, 但是本文算法并不能很好地处理包含冗余点的配准问题. 原因是用于描述各点全局结构特征的和向量 \mathbf{v}_{a_i} 和 \mathbf{v}_{b_j} 容易受冗余点的影响.

通过使用 Jonker-Volgenant 算法求解的对应关系矩阵 M 确保了从点阵 \mathbf{a}^w 到点阵 \mathbf{b} 的一一对应关系. 当前迭代的对应点集 \mathbf{b}^c 由式 (7) 进行更新

$$\mathbf{b}^c = M \cdot \mathbf{b} \quad (7)$$

本文提出的基于混合特征的能量优化方程为使用混合特征来评估对应关系提供了一个灵活方法. 例如, 当 α 非常大时, 最小化 E 等于最小化局部结构特征差异 $L_{\mathbf{a}^w, \mathbf{b}}$, 求出的点对点的对应关系是基于

最小化两个点阵之间的局部结构特征差异. 当 α 逐渐变小时, 对应关系评估开始转向使用最小化全局结构特征差异, 求出的点对点的对应关系是基于最小化两个点阵之间的全局结构特征差异.

1.3.2 步骤 2: 空间变换更新

当更新完当前对应点集 \mathbf{b}^c 后, 空间变换通过使用 \mathbf{b}^c 和源点阵 \mathbf{a} 的对应关系进行更新 (由于 \mathbf{a} 和 \mathbf{a}^w 拥有相同的点阵序列, 所以 \mathbf{b}^c 也是源点阵 \mathbf{a} 的对应点集). 本文中, 我们使用 TPS 空间变换来建立从 \mathbf{a} 到 \mathbf{b}^c 的映射关系

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{d}, w) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \Phi(\mathbf{a}) \cdot w \quad (8)$$

其中 \mathbf{d} 为一个仿射系数矩阵, w 为一个非刚性形变系数矩阵. $\phi(\mathbf{a})$ 称为 TPS 内核方程 (TPS kernel function), 分别在二维和三维映射中被定义为 $\phi(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_c\|^2 \log \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_c\|$ 和 $\phi(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_c\|$. \mathbf{a}_c 是从点阵 \mathbf{a} 中选取的一组控制点.

为了使用适当的仿射系数 \mathbf{d} 和非刚性形变系数 w 来建立从 \mathbf{a} 到它的对应点集 \mathbf{b}^c 的映射关系, TPS 能量方程被定义为

$$E_{\text{TPS}}(\mathbf{d}, w) = \|\mathbf{b}^c - \mathbf{a}\mathbf{d} - \Phi w\|^2 + \lambda \text{tr}(w^T \Phi w) \quad (9)$$

其中正规化参数 λ 用于调节非刚性形变系数 w , 同时它也被前述使用在式 (6) 中用来控制权重参数 α 的能量权重调节所控制. Φ 是 TPS 内核矩阵, 由前述 TPS 内核方程 $\phi(\mathbf{a})$ 计算而来.

为了计算 \mathbf{d} 和 w 的最小二乘解, 矩阵的 QR 分解技术^[34] 被用于分离点阵的仿射和非刚性形变空间

$$\mathbf{a} = QR = [Q_1 | Q_2] \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

其中, $Q_1 \in \mathbf{R}^{N \times D}$, $Q_2 \in \mathbf{R}^{N \times (N-D)}$, $R_1 \in \mathbf{R}^{D \times D}$. 此外, Q_1 与 Q_2 拥有相同的正交列. 所以式 (9) 可以转换为

$$E_{\text{TPS}}(\gamma, \mathbf{d}) = \|Q_2^T \mathbf{b}^c - Q_2^T \Phi Q_2 \gamma\|^2 + \|Q_1^T \mathbf{b}^c - R_1 \mathbf{d} - Q_1^T \Phi Q_2 \gamma\|^2 + \lambda \gamma^T Q_2^T \Phi Q_2 \gamma \quad (11)$$

其中 $w = Q_2 \gamma$, $\gamma \in \mathbf{R}^{(N-D-1) \times (D+1)}$. 式 (11) 的最小二乘解可以通过先最小化 γ , 然后最小化 \mathbf{d} 来求解. w 和 \mathbf{d} 的解为

$$\hat{w} = Q_2 \gamma = Q_2 (Q_2^T \Phi Q_2 + \lambda I_{N-D-1})^{-1} Q_2^T \mathbf{b}^c \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{d}} = R^{-1} (Q_1^T \mathbf{b}^c - \Phi w) \quad (13)$$

代理点阵 \mathbf{a}^w 的空间位置与几何形状被更新为

$$\mathbf{a}^w = \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \Phi \cdot w \quad (14)$$

代理点阵 \mathbf{a}^w 的空间位置与几何形状更新后, 本文算法重新回到步骤 1 (第 1.3.1 节) 进行对应关系评估, 两个步骤交替进行直到能量权重调节中的 T 达到终止设置 (T_{final}).

1.4 算法伪代码及参数设置

算法 1 给出了本文算法的伪代码.

算法 1. 基于混合特征的非刚性配准算法

输入. 点阵 \mathbf{a} , \mathbf{a}^w 和 \mathbf{b} .

预处理. 初始化参数 T_{init} , T_{final} , r , λ_{init} 和 α_{init} . 设定 K 并且确定点阵 \mathbf{a}^w 和 \mathbf{b} 的相邻点集 $N(\mathbf{a}_i)$ 和 $N(\mathbf{b}_j)$.

开始. 能量权重调节计划.

步骤 1. 使用式 (6) 和 (7) 评估当前对应关系 \mathbf{b}^c .

步骤 2. 使用式 (12) 和 (13) 更新 TPS 空间变换.

使用式 (14) 更新 \mathbf{a}^w .

通过调节减小 T , 然后更新参数 α 和 λ .

结束. 直至满足 $T \leq T_{\text{final}}$.

输出. 代理点阵 \mathbf{a}^w .

本文提出的基于混合特征的非刚性点阵配准算法包含四组重要参数: 调节参数 T_{init} , T_{final} 和 r , 权重参数 α , 正规化参数 λ 以及相邻点个数参数 K . 每组参数的详细设定如下

1) 调节参数: 能量权重调节中所使用的 T ^[20-21] 在配准开始前被设定为一个较高的值 T_{init} , 随后在每次迭代中利用一个线性调节计划 $T = T \times r$ 使得 T 值在配准过程中被逐步降低, 其中 r 为调节率. 当到达一个较低的设定值 T_{init} 时, 调节计划停止. 本文中设计该线性调节计划的目的主要有 2 方面: 首先利用 T 来逐步减小式 (6) 中的权重参数 α , 使得式 (6) 的能量优化问题可以从首先最小化局部结构特征差异逐步过度到最小化全局结构特征差异; 其次利用 T 来逐步减小式 (9) 和 (12) 中的正规化参数 λ , 使得 TPS 空间变换可以从更加刚性的形变更新逐渐转化为更加非刚性的形变更新. 由于调节参数从根本上决定了算法迭代的次数, 所以 T_{init} , T_{final} 和 r 的参数设定原则为满足配准所需的足够迭代次数. 基于前期使用 Fish 1 点阵^[17] 进行的试错实验 (Trial-and-error experiment), 起始 T_{init} 值被设为点阵 \mathbf{a} 到 \mathbf{b} 最大距离平方的 1/10, 终止 T_{final} 值被设为点阵 \mathbf{a} 中各点到其最近点平均距离平方的 1/8, 调节率 r 通常被设为 0.7.

2) 权重参数: 权重参数 α 在每次迭代中, 通过使用 $\alpha = \alpha_{\text{init}} \times T$ 被逐渐减小, α 的初始值设定原则为能够保证在配准前期整个算法可以集中在利用最小化局部结构特征差异来评估点阵的对应关系.

初始值 α_{init} 被设为相邻点个数的平方 K^2 .

3) 正规化参数: 正规化参数 λ 在每次迭代中, 通过使用 $\lambda = \lambda_{init} \times T$ 被逐渐减小, 由于 λ 主要用来控制 TPS 变换中的刚性和非刚性形变 (λ 较大时, TPS 呈现出刚性变换; λ 较小时, TPS 转为呈现非刚性形变), 所以 λ 的初始值设定原则为能够确保在配准前期 TPS 处于刚性变换. 初始值 λ_{init} 被设为点阵 \mathbf{a} 中点的数量.

4) 相邻点数量参数: 参数 K 的默认值设定是基于用于区别局部结构差异所需的最少相邻点数. 例如, 当我们需要区别角 (Corner, 其中包含 2 个相邻点) 和十字 (Cross, 其中包含 4 个相邻点) 时, 我们至少需要借助 4 个相邻点来判断. 基于上述考虑, 我们将参数 K 在二维和三维配准情况下的默认值设为 5.

2 相关研究

当前主要有 TPS-RPM^[17], CPD^[25], GMM-REG (L2 + TPS)^[16], Ma 等^[29] 和 Wang 等^[31] 5 种算法与本文算法相似, 表 1 详细列举了本文算法与上述 5 种算法之间存在的差异.

1) 对应关系评估: 与上述基于单一特征配准的 5 种算法不同, 本文算法是一种基于混合特征的能量优化问题, 且允许使用混合特征进行点阵之间的对应关系评估. 因为本文算法与 Ma 等使用了线性分配技术求解对应关系, 所以我们都提供了一个二值对应关系, 即在对应关系矩阵 M_{ij} 中仅使用 0 和 1 来描述对应关系. 在 TPS-RPM, CPD, GMMREG 和 Wang 等^[31] 算法中, 空间变换方程是建立在模糊对应 (Fuzzy correspondences, 即对应概率) 关系基础上的, 所以在指导代理点阵 \mathbf{a}^w 改变其空间位置和几何形状时会发生模糊更新, 同时也会需要更多的迭代次数才能完成配准. 在本文算法中, 建立在最小化全局或局部结构特征差异的二值对应关系可以为

代理点阵 \mathbf{a}^w 提供一个正确且清晰的空间位置与几何形状的更新指导.

2) 空间变换更新: 本文算法使用的是标准 TPS 能量方程. TPS-RPM 在式 (6) 中增加了 $\lambda_2 \text{tr}[d - I]^T [d - I]$ 项用于控制仿射参数. 由于本文算法在每次迭代中提供了一个较为精确的二值对应关系给 TPS 空间变换, 所以我们仅需要使用 λ 来控制 w 系数在刚性和非刚性变换上的作用. 同时一个自由的仿射变换 (也就是不受控制的仿射系数 d) 可以帮助代理点阵 \mathbf{a}^w 快速 (使用更少的迭代次数) 地找到更加接近目标点阵 \mathbf{b} 的空间位置和几何形状来完成接下来的非刚性配准. 此外, 与 CPD 中强制相邻点集保持运动一致性不同, 本文算法通过在整个配准过程中固定相邻点集 $N(\mathbf{a}_i^w)$ 和 $N(\mathbf{b}_j)$, 来保护代理点阵 \mathbf{a}^w 的拓扑结构特征.

3 实验

我们使用 Matlab 实现了本文算法的主要过程, 其中 Jonker-Volgenant 算法使用 C++ 编写并利用 Matlab mex function 调用 Jonker-Volgenant 算法的 C++ 函数. 我们首先基于以下四种配准模式测试了本文算法的各项性能,

- 1) 轮廓配准 (2D synthetic point set);
- 2) 3D 轮廓配准 (3D face point set);
- 3) 序列图像 (CMU house and CMU hotel sequence);
- 4) 真实图像特征点配准 (Pascal 2007 challenge datasets).

而且, 本文算法还与下列当前典型的 8 种算法进行了性能比较实验,

- 1) 基于迭代的算法: TPS-RPM^[17], CPD^[25], GMMREG (L2 + TPS)^[16], Wang 等^[31];
- 2) 基于 Graph 的学习算法: Caetano 等^[10], Leordeanu 等^[13], Torresani 等^[14];

表 1 本文算法与相关算法的不同

Table 1 Methodological differences between our method and the current methods

算法	对应关系评估		空间变换更新	
	使用的特征	对应关系	约束条件	空间变换方程
本文算法	混合特征	B	TPS 能量方程 1	TPS
TPS-RPM	高斯概率密度	F	TPS 能量方程 2	TPS
CPD	高斯概率密度	F	MCC-NLL	GRBF
GMMREG	高斯概率密度	F	最小化 L2 距离	TPS
Ma 等 ^[29]	Shape context	B	L2E 评估子 ^[30]	RKHS
Wang 等 ^[31]	MoAG	F	最小化 L2 距离	RKHS

注: B: 二值对应; F: 模糊对应; GRBF (Gaussian radial basis function): 高斯径向基函数; TPS: 薄板样条函数; MCC-NLL (Motion coherence constraint based negative log-likelihood): 基于运动一致性的负对数似然; RKHS (Reproducing kernel Hilbert space): 再生核 Hilbert 空间; MoAG (Mixture of asymmetric Gaussian model): 混合非对称高斯模型; 在 TPS 能量方程 2 中, $\lambda_2 \text{tr}(d - I)^T (d - I)$ 被加到了式 (7) (TPS 能量方程 1) 来控制仿射变换.

3) 基于 Graph 的非学习算法: Zhou 等^[9].

最后, 我们评估了本文算法的计算复杂度并且讨论了如何降低本文算法的计算复杂度.

3.1 实验设计

Line^[17]、Fish 1^[17]、Fish 2^[25]、Chinese character^[17] 和 3D face^[25] 是非刚性点阵算法在轮廓点阵配准测试中普遍使用的几个流行点阵, 它们分别来自 TPS-RPM^[17] 和 CPD^[25]. 本文首先使用这 5 个点阵作为源点阵, 并使用下面人工合成的方法创建了一系列丰富的目标点阵与 TPS-RPM, CPD 和 GMMREG 进行了性能对比实验. 为了达到公平的实验对比, 在目标点阵的生成、误差测量和性能评估上我们遵循了 TPS-RPM^[17] 和 CPD^[25] 中所用的方法. 由于本文中提出的全局特征描述法 (见第 1.1.1 节) 是由和向量设计而来, 当配准目标点阵中包含冗余点时, 本文算法并不能很好地处理包含冗余点的配准问题, 所以在本实验中我们不进行包含冗余点的配准模式性能测试.

目标点阵:

1) 形变级别: 我们设置 8 个控制点 (三维配准情况是为 6 个控制点) 在每组轮廓点阵边缘. 为了创建一系列不同形变级别且适合的目标点阵, 每个控制点拥有上、下、左、右 4 个方向的自由移动以及 0.2 的移动步长. 8 个 (或 6 个) 控制点的移动循序以及方向被随机设定. 在本实验中, TPS 空间变换被用于使用这 8 个 (或 6 个) 控制点使前述源点阵发生形变创建新目标点阵. 因为被移动的控制点数量反映了点阵的形变大小, 所以本实验中形变级别被定义为移动控制点的数量 (二维和三维情况下的最大形变级别分别为 8 和 6).

2) 噪音比: 我们通过利用均值为 0 且标准偏差从 0.01 至 0.05 的高斯白噪声 (Gaussian white noise) 创建了 5 个噪音级别的目标点阵.

3) 旋转角度: 我们认为在适当旋转下的配准性能测试是必要的, 因为通常形变发生时都会伴随着旋转. 但是过大旋转会导致相关算法产生不稳定或无价值的配准结果, 所以我们主要专注于在以 15° 为间隔, 旋转 -30° 到 30° 的情况下的配准性能测试. 在三维配准实验中, 源点阵被沿 Z 轴旋转来创建新目标点阵.

误差测量: 在误差测量中, 通常可以选择的测量方法很多. 例如, 正确匹配百分比、配准后点阵之间的平均距离等. 为了保证直接和公平的比较, 我们遵循了 TPS-RPM 与 CPD 中的误差测量法, 即代理点阵 \mathbf{a}^w 与目标点阵 \mathbf{b} 之间平均距离的平方.

性能评估: 平均误差 (即 100 次测试中的平均

距离平方与标准偏差) 在本实验中被用来比较不同算法之间的配准性能. 对于每组点阵, 在每种形变级别、噪音比、旋转角度下执行了 100 次的随机实验.

3.2 二维轮廓点阵的配准结果

在第一系列的实验中, 我们在不同的二维人造轮廓点阵上评估了本文算法的性能. 与后面的序列图像 (CMU sequences and Pascal 2007 challenge) 以及真实图像特征点 (Pascal 2007 challenge) 配准相比, 这些二维轮廓点阵拥有更多的点数以及较密的点阵分布. 在这类点阵配准中, 由于相邻点彼此靠近且拥有相似的局部结构特征, 所以在评价各点的局部特征结构相似度时变得更加困难. 本文算法与相关算法的比较结果如下.

3.2.1 Line

在点阵 Line 的配准测试中, 本文算法仅与 TPS-RPM 进行对比测试. 因为其他算法并没有在该点阵上进行测试并公布相关的参数设定. 性能测试统计数据 (平均误差与标准偏差) 展示在图 1 的第 1 行. 本文算法在所有的实验中展现了准确的配准结果, 并且在所有形变级别、噪音比、旋转角度的测试中, 给出了最优的配准结果. 图 2 给出了本文算法的一个配准实例.

3.2.2 Fish 1

在点阵 Fish 1 的配准测试中, 我们测试了本文算法与 CPD, TPS-RPM 和 GMMREG 的性能, 图 1 的第 2 行展示了测试结果. 这 4 种算法均给出了准确的配准结果, 本文算法在所有的形变级别和所有旋转角度的测试中展现了最优的性能结果. 在目标点阵含有噪音的配准测试中, 这四种算法均展现了准确的配准结果, GMMREG 表现得更好. 图 3 给出了本文算法的一个配准实例.

3.2.3 Chinese character

在点阵 Chinese character 的配准测试中, 本文算法仅与 TPS-RPM 进行对比实验. 因为 CPD 与 GMMREG 并未在非刚性配准中测试过该点阵 (GMMREG 仅在刚性配准中测试过该点阵). 本文算法在所有形变级别、噪音比从 0.01 至 0.03、所有旋转角度的测试中给出了最优的配准结果. 图 4 给出了一个本文算法的配准实例.

3.2.4 Fish 2

本文算法与 CPD 的性能测试结果展示在图 1 的第 4 行. 本文算法在所有的实验中展现了准确的配准结果, 并且在所有形变级别、噪音比以及旋转角度的测试中给出了最优的配准性能. 图 5 给出了本文算法的一个配准实例.

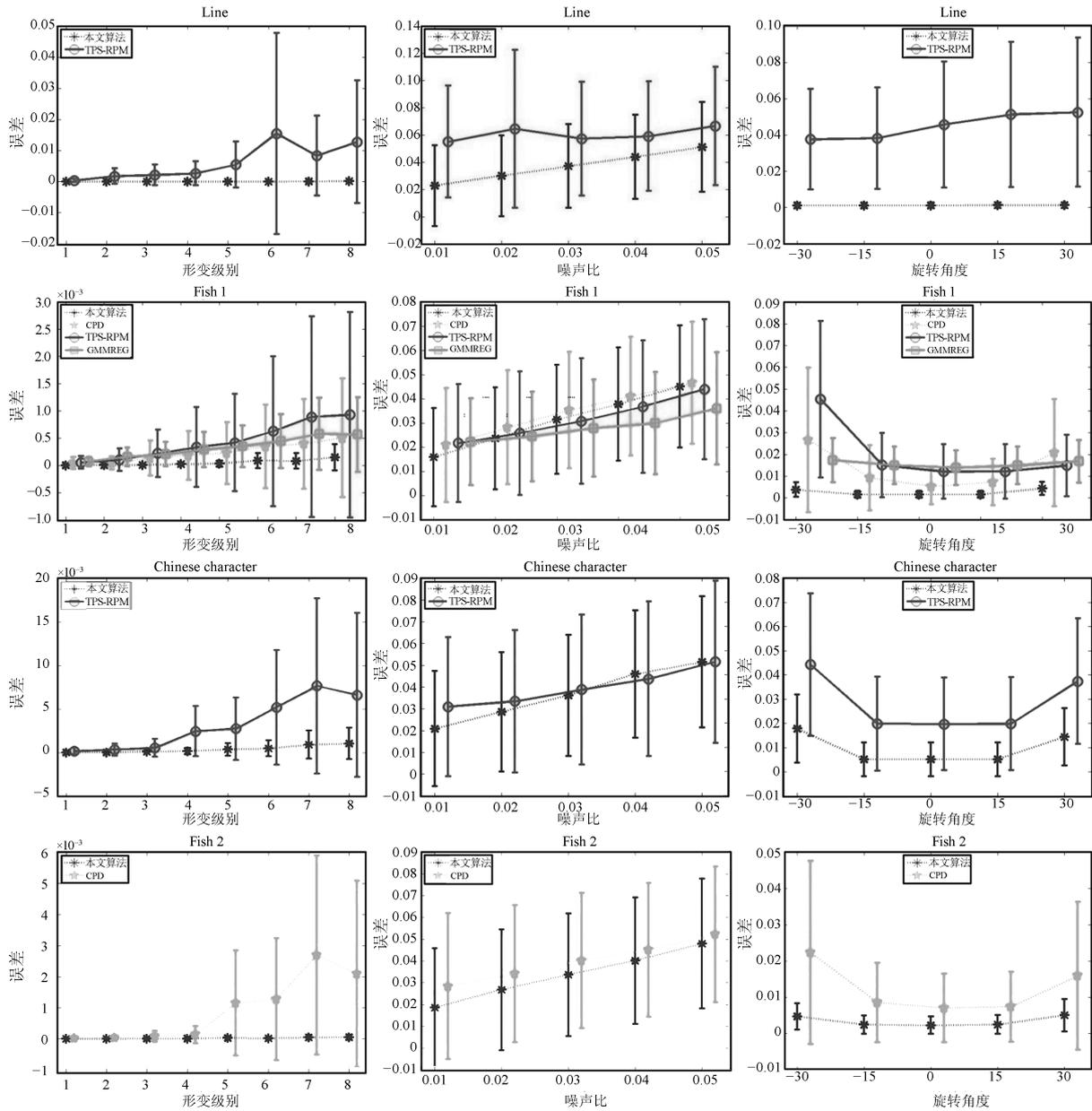


图1 二维轮廓点阵配准下的性能对比(误差线表示了100次随机测试中平均误差的标准偏差值.从第1行至第4行分别为点阵 Line, Fish 1, Chinese character 以及 Fish 2 的实验结果.)

Fig. 1 Comparison of our results against CPD, TPS-RPM and GMMREG on 2D contour point set registration (The error bars indicate the standard deviations of the mean errors in 100 random experiments. From the top row to bottom row are: Line, Fish 1, Chinese character and Fish 2, respectively.)

在二维轮廓点阵配准测试中,所有的算法均给出了准确的配准结果,但是本文算法在形变与旋转测试中明显地超越了相关算法.

3.3 三维人脸点阵的配准结果

在第二系列的实验中,我们评估了本文算法在三维配准中的性能.本实验中使用的3D face 点阵已被CPD和GMMREG等算法用于测试其在三维配准中的性能.图6给出了本文算法与

CPD、GMMREG 算法的性能测试结果.本文算法在所有实验中给出了准确的配准结果,同时所有形变级别、噪音比从0.01至0.04以及所有旋转角度的实验中给出了最优的性能结果.图7给出了一个本文算法的配准实例.

3.4 序列图像的配准结果

在第三系列的实验中,我们测试了本文算法在序列图像特征点配准问题上的性能.与二维和三维

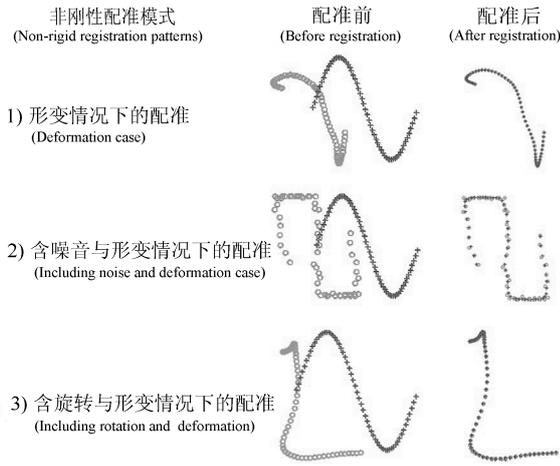


图 2 本文算法的配准实例: Line

Fig. 2 Registration examples on Line point set

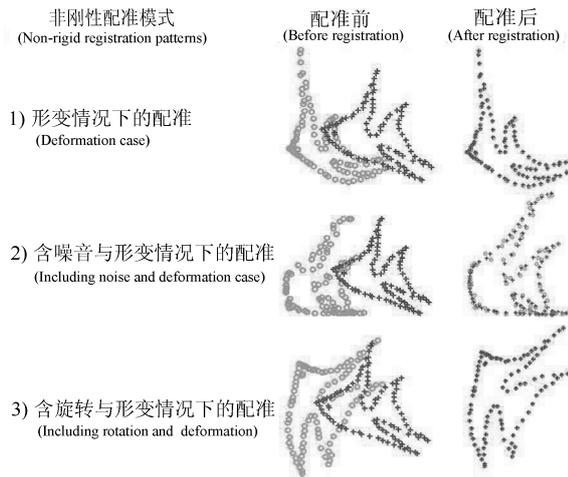


图 3 本文算法的配准实例: Fish 1

Fig. 3 Registration examples on Fish 1 point set

人造点阵相比, 序列图像拥有更少的特征点, 这些点稀疏地分布在图像中. CMU house 和 CMU hotel 序列图像是目前用于测试基于 Graph 的学习算法最流行的实验数据. 两个序列图像分别由 111 和 101

幅图组成, 每幅图拥有 30 个标记的特征点. 在本实验中, 我们使用正确配准点数的百分比 (称为配准率) 为误差测量法.

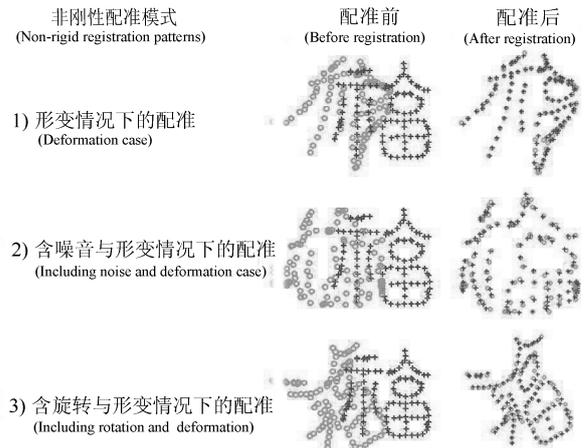


图 4 本文算法的配准实例: Chinese character

Fig. 4 Registration examples on Chinese character point set

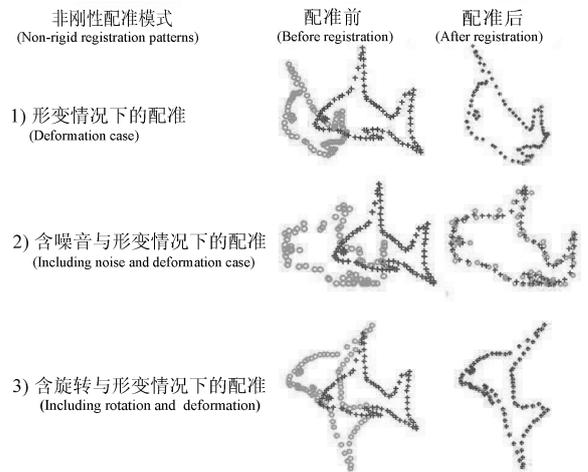


图 5 本文算法的配准实例: Fish 2

Fig. 5 Registration examples on Fish 2 point set

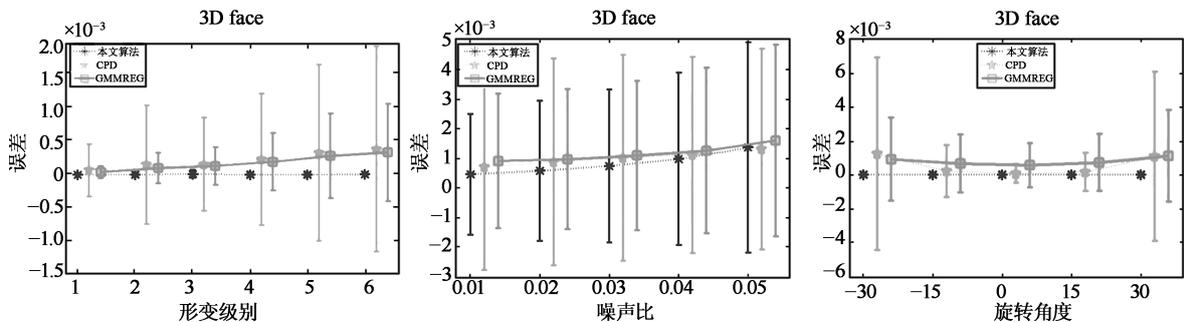


图 6 三维 Face 轮廓点阵配准下的性能对比 (误差线表示了 100 次随机测试中平均误差的标准偏差值.)

Fig. 6 Comparison of our results against CPD and GMMREG on 3D face contour point set registration

(The error bars indicate the standard deviations of the mean errors in 100 random experiments.)

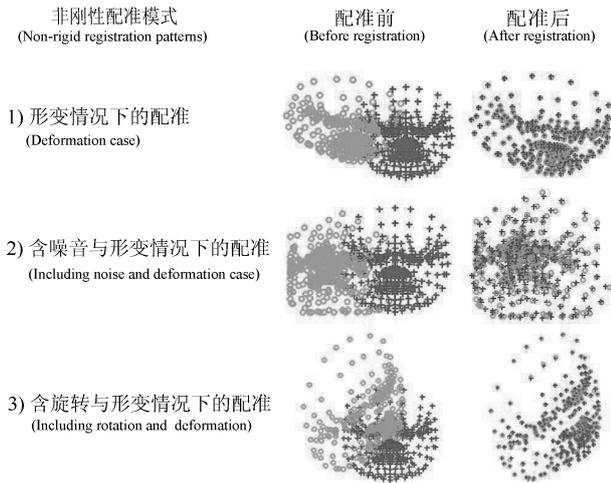


图 7 3D face 点阵配准实例

Fig. 7 Registration examples on 3D face point set

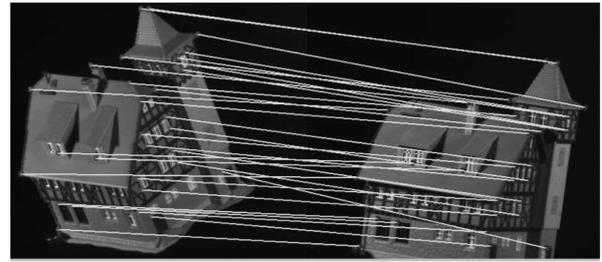
本文算法与三种基于 Graph 的学习算法^[10, 13–14], 一种基于 Graph 的非学习算法^[9], 和三种基于迭代的算法^[16, 25, 31] 分别在这两组序列图像的所有配准可能中进行了性能对比实验.

表 2 展示了实验结果. 在 House 序列图像的配准中, 对于 Caetano 等^[10] 与 Zhou 等^[9], 我们报告了他们公布的配准率的上限值, 对于 Leordeanu 等^[13]、Torresani 等^[14] 和 Wang 等^[31], 我们给出了他们公布的配准率. 本文算法, Wang 等^[31] 和 Torresani 等^[14] 给出了完美的配准结果, 也超越了其他算法. 但是从算法运行时间角度来看, 本文算法的运行时间 (平均 0.049 秒) 比 Torresani 等公布的平均运行时间 4.8 秒^[14] 快了很多 (该对比也考虑了使用电脑的性能问题). 在 CMU hotel 序列图像的配准中, Wang 等^[14, 31] 与 Zhou 等^[9] 没有提供他们的实验结果. 与 CPD, GMMREG, Leordeanu 等^[13] 和 Caetano 等^[10] 相比较, 本文算法展现了更好的配准精度. 图 8 给出了本文算法的两个配准实例.

表 2 CMU house 和 CMU hotel 序列图像中所有可能的图像配准结果 (%)

Table 2 Matching rates on the CMU house and CMU hotel for all possible image pairs (%)

算法	CMU house	CMU hotel
本文算法	100.0	99.3
CPD	99.6	98.9
GMMREG	99.5	97.1
Wang 等 ^[31]	100.0	无
Torresani 等 ^[14]	100.0	无
Zhou 等 ^[9]	≈ 100.0	无
Leordeanu 等 ^[13]	99.8	94.8
Caetano 等 ^[10]	< 96.0	< 90.0



(a) CMU house



(b) CMU hotel

图 8 CMU house 与 CMU hotel 配准实例

Fig. 8 Registration examples on CMU house and CMU hotel

3.5 图像特征点的配准结果

在第四系列的实验中, 我们使用 Leordeanu 等^[13] 的测试数据测试了本文算法的性能. 这套测试数据集从 Pascal 2007 challenge 数据库中挑选出来的, 包含 30 对汽车图像与 20 对摩托车图像. 每对图像中包含 30 ~ 60 个特征点. 本文算法与 CPD, GMMREG, Zhou 等^[9] 和 Leordeanu 等^[13] 进行了性能对比, 其结果在表 3 中列出, 对于 Zhou 等^[9] (A) 和 Leordeanu 等^[13] (B), 我们报告了他们公布的实验结果. 本文算法给出了最优的配准率. 图 9 给出了本文算法的两个配准实例.

表 3 汽车与摩托车图像库的配准结果 (%)

Table 3 Matching rates on cars and motorbikes (%)

本文算法	CPD	GMMREG	A	B
93	80	82	80	80

3.6 计算复杂度

本文算法的计算复杂度主要与两个方面相关: 1) 决定收敛性的能量权重调节参数 T_{init} , T_{final} 与 r ; 2) 用于求解基于混合特征的能量优化方程的线性分配算法.

3.6.1 收敛范围

收敛范围主要与形变级别和能量权重调节参数设定相关. 在其他相关算法中, TPS-RPM 的收敛范围由退火算法决定, CPD 和 GMMREG 则分别由

容差停止准则 (Tolerance stopping criterion) 以及最大迭代次数所决定. 我们调查了上述这四种算法在点阵 Chinese character 形变实验中的收敛范围. 本文算法、TPS-RPM、CPD 与 GMMREG 的参数设定值遵循前述 Fish 1 实验中的设定值. CPD 和 TPS-RPM 分别平均需要 43 次与 85 次迭代来完成整个配准过程, 而 GMMREG 则需要最大迭代次数 (100 次) 才能完成配准. 原因是由于容差停止准则被设定为 10^{-10} , GMMREG 在配准中最小化后的 L2 距离很难达到该标准. 本文算法仅需要 17 次迭代就可以完成配准.



(a) Pascal 2007 challenge 汽车数据
(a) Pascal 2007 challenge car datasets



(b) Pascal 2007 challenge 摩托车数据
(b) Pascal 2007 challenge motorbike datasets

图 9 Pascal 2007 challenge 配准实例

Fig. 9 Registration examples on Pascal 2007 challenge

此外, 我们也调查了本文算法在不同能量权重调节参数设定下的收敛范围. 图 10 给出了在 Chinese character 点阵形变实验中的例子. 对于每一个能量权重调节参数设定值, 我们在每一个形变级别下运行了 100 次随机实验. 基于图 10 展示的实验结果, 随着调节初始值 T_{init} 降低为默认值的 1/10 时, 本文算法的性能发生了轻微的退化, 配准所需迭代次数减少了 41% (平均迭代次数从 17 次减少至 10 次); 随着最终值 T_{final} 增加为默认值的 10 倍时, 本文算法的性能发生了退化, 配准所需迭代次数减少了 41% (平均迭代次数从 17 次减少到 10 次); 随着调节速率 r 减少为默认值的 1/2, 本文算法的性能轻微退化, 配准所需迭代次数减少了 65% (从 17 次减少至仅需 6 次). 即便能量权重调节参数被显著地改变了, 所有的实验依旧展现了非常高的配准精度 (也就是误差低于 0.0013 且标准偏差在 ± 0.0015 之内). 基于这些结果, 本文算法的计算复杂度可以通过调整能量权重调节参数设定大幅降低, 同时算法依旧维持了很高的配准精度.

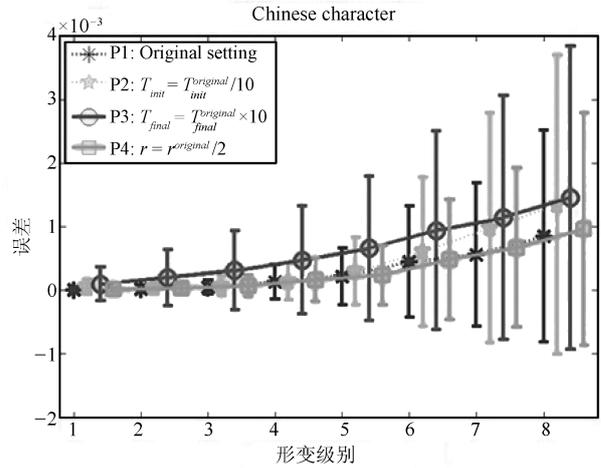


图 10 不同能量权重调节参数设定下的配准性能

Fig. 10 Relationships between performances and different energy tradeoff adjustment parameter settings

3.6.2 Jonker-Volgenant 算法性能

为了使用线性分配技术求解二值对应矩阵 M , 本文算法使用了 Jonker-Volgenant 算法^[32], 该算法提供了 $O(N^3)$ 的计算复杂度. 我们在一台 4 GB 内存和 2.67 GHz Intel(R)Xeon(R) CPU 的电脑上使用 Matlab mex function 功能测试了 C++ 代码的 Jonker-Volgenant 算法性能. 表 4 给出了使用 Jonker-Volgenant 算法求解不同大小的二值对应矩阵所需时间. Jonker-Volgenant 算法展现了快速的求解能力, 同时也为本文算法实现快速非刚性点阵配准提供了支撑.

表 4 Jonker-Volgenant 算法性能 (测试矩阵由 Matlab 的 rand 函数自动生成.)

Table 4 Performance of Jonker-Volgenant algorithm (The cost matrices were generated by Matlab rand function.)

矩阵大小	200	500	1000	2000	3000
所需时间 (秒)	0.002	0.016	0.100	0.316	0.588

4 结论

我们已经介绍了一种基于混合特征的非刚性点阵配准算法: 1) 设计出了一种基于和向量特征的全局结构特征描述算法; 2) 提出了一种利用点阵之间的局部区域相邻点的距离和描述点阵中各点的局部结构特征的描述算法; 3) 提出一种基于混合特征的能量方程并设计了该方程的能量权重调节, 该方程允许使用混合特征进行点阵对应评估. 最后将本文算法与 8 种当前典型算法进行了性能对比测试, 本文算法在绝大多数的形变和旋转配准情况中展现了最好的配准结果.

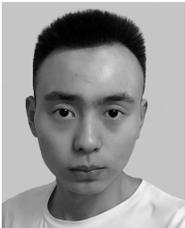
致谢

感谢 Chui Hai-Li, Rangarajan Anand, Myronenko Andriy, Song Xu-Bo, Jian Bing, Vemuri Baba, Zhou Feng, De la Torre Fernando, Leordeanu Marius, Torresani Lorenzo 和 Caetano Tiberio 提供了他们的算法源代码和测试数据. 这极大地促进了对比实验. 我们无偿提供本文算法的 Matlab 源代码供学术研究.

References

- 1 Park S H, Lee K M, Lee S U. A line feature matching technique based on an eigenvector approach. *Computer Vision and Image Understanding*, 2000, **77**(3): 263–283
- 2 Kong W X, Kimia B B. On solving 2D and 3D puzzles using curve matching. In: Proceedings of the 2001 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Kauai, HI, USA: IEEE, 2001. II-583–II-590
- 3 Cochran S D, Medioni G. 3-D surface description from binocular stereo. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, **14**(10): 981–994
- 4 Belongie S, Malik J, Puzicha J. Shape matching and object recognition using shape contexts. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002, **24**(4): 509–521
- 5 Körtgen M, Park G J, Novotni M, Klein R. 3D shape matching with 3D shape contexts. In: Proceedings of the 7th Central European Seminar on Computer Graphics. Budmerice, Slovakia, 2003. 22–24
- 6 Balakrishnan V. *Graph Theory* (1st Edition). New York: McGraw-Hill, 1997.
- 7 Sundar H, Silver D, Gagvani N, Dickinson S. Skeleton based shape matching and retrieval. In: Proceedings of the 2003 Shape Modeling International (SMI'03). Seoul, South Korea: IEEE, 2003. 130–139
- 8 Zheng Y F, Doermann D. Robust point matching for non-rigid shapes by preserving local neighborhood structures. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2006, **28**(4): 643–649
- 9 Zhou F, De la Torre F. Factorized graph matching. In: Proceedings of the 2012 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Providence, RI: IEEE, 2012. 127–134
- 10 Caetano T S, Cheng L, Le Q V, Smola A J. Learning graph matching. In: Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Computer Vision. Rio de Janeiro, Brazil: IEEE, 2007. 1–8
- 11 Leordeanu M, Hebert M. Smoothing-based optimization. In: Proceedings of the 2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Anchorage, AK: IEEE, 2008. 1–8
- 12 Caetano T S, McAuley J J, Cheng L, Le Q V, Smola A J. Learning graph matching. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, **31**(6): 1048–1058
- 13 Leordeanu M, Sukthankar R, Hebert M. Unsupervised learning for graph matching. *International Journal of Computer Vision*, 2012, **96**: 28–45
- 14 Torresani L, Kolmogorov V, Rother C. A dual decomposition approach to feature correspondence. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, **35**(2): 259–271
- 15 Xiao D, Zahra D, Bourgeat P, Berghofer P, Tamayo O A, Wimberley C, Gregoire M C, Salvado O. An improved 3D shape context based non-rigid registration method and its application to small animal skeletons registration. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 2010, **34**(4): 321–332
- 16 Jian B, Vemuri B C. Robust point set registration using Gaussian mixture models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, **33**(8): 1633–1645
- 17 Chui H L, Rangarajan A. A new point matching algorithm for non-rigid registration. *Computer Vision and Image Understanding*, 2003, **89**(2–3): 114–141
- 18 Rangarajan A, Chui H, Bookstein F L. The softassign procrustes matching algorithm. In: Proceedings of the 15th International Conference on Information Processing in Medical Imaging. Poultney, Vermont, USA: Springer, 1997. 29–42
- 19 Chui H L, Rambo J, Duncan J, Schultz R, Rangarajan A. Registration of cortical anatomical structures via robust 3D point matching. In: Proceedings of the 16th International Conference on Information Processing in Medical Imaging. Visegrád, Hungary: Springer, 1999. 168–181
- 20 Gold S, Rangarajan A, Lu C P, Pappu S, Mjolsness E. New algorithms for 2D and 3D point matching: pose estimation and correspondence. *Pattern Recognition*, 1998, **31**(8): 1019–1031
- 21 Yuille A L. Generalized deformable models, statistical physics, and matching problems. *Neural Computation*, 1990, **2**(1): 1–24
- 22 Bookstein F L. Principal warps: thin-plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, **11**(6): 567–585
- 23 Myronenko A, Song X B, Carreira-Perpiñán M Á. Non-rigid point set registration: coherent point drift. In: Proceedings of the 2006 Advances in Neural Information Processing Systems 19. Cambridge, MA: MIT Press, 2006. 1009–1016
- 24 Yuille A L, Grzywacz N M. A mathematical analysis of the motion coherence theory. *International Journal of Computer Vision*, 1989, **3**(2): 155–175
- 25 Myronenko A, Song X B. Point set registration: coherent point drift. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010, **32**(12): 2262–2275
- 26 Greengard L, Strain J. The fast Gauss transform. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 1991, **12**(1): 79–94
- 27 Markovsky I. Structured low-rank approximation and its applications. *Automatica*, 2008, **44**(4): 891–909
- 28 Rüschemdorf L, Rachev S T. A characterization of random variables with minimum L^2 -distance. *Journal of Multivariate Analysis*, 1990, **32**(1): 48–54

- 29 Ma J Y, Zhao J, Tian J W, Tu Z W, Yuille A L. Robust estimation of nonrigid transformation for point set registration. In: Proceedings of the 2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Portland, OR: IEEE, 2013. 2147–2154
- 30 Scott D W. Parametric statistical modeling by minimum integrated square error. *Technometrics*, 2001, **43**(3): 274–285
- 31 Wang G, Wang Z C, Chen Y F, Zhao W D. A robust non-rigid point set registration method based on asymmetric Gaussian representation. *Computer Vision and Image Understanding*, 2015, **141**: 67–80
- 32 Jonker R, Volgenant A. A shortest augmenting path algorithm for dense and sparse linear assignment problems. *Computing*, 1987, **38**(4): 325–340
- 33 Miller M L, Stone H S, Cox I J. Optimizing Murty's ranked assignment method. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1997, **33**(3): 851–862
- 34 Wahba G. *Spline Models for Observational Data*. Philadelphia: SIAM, 1990.



汤昊林 云南师范大学信息学院本科生. 主要研究方向为图像配准以及医学图像处理.

E-mail: m18487107138@163.com

(TANG Hao-Lin Undergraduate student at the School of Information Science and Technology, Yunnan Normal University. His research interest

covers non-rigid point set registration and medical imaging.)



杨扬 云南师范大学信息学院讲师. 2007 年获得日本早稻田大学计算机硕士学位, 2013 年获得新加坡国立大学 NGS 博士学位. 主要研究方向为医学图像处理, 图像配准, 地理空间信息技术, 人体咀嚼系统. 本文通信作者.

E-mail: yyang_ynu@163.com

(YANG Yang Lecturer at the

School of Information Science and Technology, Yunnan Normal University. He received his master degree from Waseda University, Japan in 2007, and Ph.D. degree from National University of Singapore, Singapore in 2013. His research interest covers medical image processing, image registration, geography information system and human masticatory system. Corresponding author of this paper.)



杨昆 云南师范大学信息学院教授, 1998 年获得澳大利亚新南威尔士大学硕士学位. 主要研究方向为地理信息系统, 遥感图像处理.

E-mail: kmdecynu@163.com

(YANG Kun Professor at the School of Information Science and Technology, Yunnan Normal University.

He received his master degree from University of New South Wales, Australia in 1998. His research interest covers geographic information system (GIS) and remote sensing image processing.)



罗毅 云南师范大学信息学院软件工程系讲师. 2014 年获得哈尔滨理工大学博士学位. 主要研究方向为无线传感器网络, 微弱信号拾取, 视觉检测技术.

E-mail: luoyi861030@163.com

(LUO Yi Lecturer in the Department of Software Engineering, Yunnan Normal University. He received his

Ph. D. degree from Harbin University of Science and Technology in 2014. His research interest covers wireless sensor networks, weak signal detection, and visual detection.)



张雅莹 云南师范大学信息学院本科生. 主要研究方向为非刚性点阵配准和医学图像处理.

E-mail: nw_zhyaying@163.com

(ZHANG Ya-Ying Undergraduate student at the School of Information Science and Technology, Yunnan Normal University. Her research interest

covers non-rigid point set registration and medical imaging.)



张芳瑜 云南师范大学信息学院本科生. 主要研究方向为非刚性点阵配准和医学图像处理.

E-mail: zhfangyu_ynu@163.com

(ZHANG Fang-Yu Undergraduate student at the School of Information Science and Technology, Yunnan Normal University. Her research interest

covers non-rigid point set registration and medical imaging.)