

# 双率采样系统的基于观测器的网络化 $H_\infty$ 控制

马伟伟<sup>1</sup> 贾新春<sup>1</sup> 张大伟<sup>1</sup>

**摘要** 研究一类带有网络传输时滞和丢包的双率采样系统的网络化  $H_\infty$  控制问题. 假设对象状态变量被分成两个分向量, 同一分向量的状态变量由同一类传感器以相同周期采样, 且两类传感器的采样频率不同. 采样后的分向量分别通过非理想网络传输到控制器端. 考虑到双率采样、网络传输时滞和丢包现象, 引入同步观测器来估计对象状态并设计基于估计状态的控制来镇定双率采样系统. 基于这个思路, 将双率采样的网络化控制系统建模为带有两个时变时滞的连续系统. 利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法, 以矩阵不等式形式给出该系统的稳定性判据和控制器设计方法. 最后, 通过数值例子验证所提方法的有效性.

**关键词** 双率采样系统, 基于观测器  $H_\infty$  控制, 时变时滞系统, 网络化控制系统

**引用格式** 马伟伟, 贾新春, 张大伟. 双率采样系统的基于观测器的网络化  $H_\infty$  控制. 自动化学报, 2015, 41(10): 1788–1797

**DOI** 10.16383/j.aas.2015.c150046

## Observer-based Networked $H_\infty$ Control for Dualrate Sampling Systems

MA Wei-Wei<sup>1</sup> JIA Xin-Chun<sup>1</sup> ZHANG Da-Wei<sup>1</sup>

**Abstract** The networked  $H_\infty$  control for a class of dualrate sampling systems with network transmission delays and packet losses is investigated. State variables of the plant are assumed to be split into two sub-vectors. All state variables of the two sub-vectors are periodically sampled by two types of sensors, respectively, which each type of sensors has a different sampling rate. The two sampled sub-vectors are separately transmitted to the controller node over an imperfect network. Considering the dualrate sampling, network transmission delays and packet losses, a synchronized observer is introduced to estimate the state variables of the plant, and a controller based on the estimation is designed to stabilize the dualrate sampling system. Based on the above idea, a networked control system with dualrate sampling is modeled as a continuous-time system with two time-varying delays. By Lyapunov-Krasovskii functional method, some results of stability criterion and controller design for the system are obtained in terms of matrix inequalities (MIs). At last, some numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words** Dualrate sampling systems, observer-based  $H_\infty$  control, time-varying delay systems, networked control systems

**Citation** Ma Wei-Wei, Jia Xin-Chun, Zhang Da-Wei. Observer-based networked  $H_\infty$  control for dualrate sampling systems. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(10): 1788–1797

不同于传统控制系统, 网络化控制系统是一些系统节点之间 (例如, 传感器与控制器之间或控制器与执行器之间) 通过网络传递信息的一类控制系统. 它既节省了导线、降低了成本又便于安装和维护, 已经被广泛地应用于航天、导弹制导、智能车辆和远

程医疗等工程领域. 然而, 网络的引入也为系统带来了新的挑战, 如网络诱导时滞、数据包丢失等<sup>[1–3]</sup>.

数字采样系统在理论研究和实际应用中都受到广泛关注<sup>[4–10]</sup>, 由于它有着一些明显的优势, 例如, 较高的控制精度、较好的稳定性、良好的干扰抑制以及通用性强等, 尤其单率采样系统已经受到了广泛研究<sup>[4–7]</sup>. 然而, 在一些实际工业应用中, 所有量测分量使用相同的采样周期同步进行采样却行不通. 一方面, 在非集中采样系统中, 所有的量测并非在同一个物理位置 (节点), 各个节点的采样数据需要被独立打包传输, 此时, 要求所有节点采样、打包和传输在时间上同步是困难的. 另一方面, 每一个量测分量采样周期的选择受到多种因素约束. 在很多情形下, 为所有量测分量选择相同的采样周期是困难且没有必要的. 首先, 量测分量采样周期的选择受到自身时间特性的

收稿日期 2015-01-26 录用日期 2015-05-28  
Manuscript received January 26, 2015; accepted May 28, 2015  
国家自然科学基金 (61374059, 61403240), 山西省回国留学人员科研资助项目 (2012-001), 山西省国际科技合作项目 (2013081040), 山西省优秀创新项目 (20113007) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (61374059, 61403240), Research Project Supported by Shanxi Scholarship Council of China (2012-001), International Science and Technology Cooperation Program of Shanxi Province (2013081040), and Graduate Excellent Innovative Project of Shanxi Province (20113007)  
本文责任编辑 高会军  
Recommended by Associate Editor GAO Hui-Jun  
1. 山西大学数学科学学院 太原 030006  
1. School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan 030006

约束. 例如, 在陶瓷和冶炼应用中, 化学分析仪和一些离线测量设备在信号采样之前需要准备工作; 在机器人和制造业系统中, 测量是通过图像处理来进行视觉反馈, 它们都需要较长的时间才能实现采样, 这就导致了大的采样周期. 其次, 采样周期的选择受到有限系统资源的约束. 在这类系统中, 尽管系统的量测分量不难测量, 然而过多的测量却是不可能的, 因为系统需要更多的资源用于其他目的, 例如, 计算机硬盘驱动伺服系统的读写头定位应用<sup>[9]</sup>. 最后, 采样周期选择还受到其所用传感器约束. 在一个物理系统中, 不同量测分量可能使用不同类型的传感器采样, 由于这些传感器的工作原理不尽相同, 它们的理想采样频率区间可能相差较大, 甚至没有交集, 这就导致所有量测分量选择相同的采样周期不易实现甚至不可能实现. 例如, 在车辆横向控制中, 位移和速度往往使用超音速传感器, 而角速度和横摆角则使用陀螺仪传感器, 这两组传感器位于车辆的不同位置, 若这两类传感器选择相同的采样周期同步采样, 不但不易实现, 而且还会增加系统资源消耗, 减少设备寿命. 因此, 对于此类系统, 不能选择单率采样方法, 需要根据系统特征为不同的分量选择合适的采样周期.

尽管直观上选择较小的采样周期有利于提高系统的实时控制性能, 然而, 在实际的控制系统中, 减小采样周期意味着更多的采样、更多的数据传输和数据处理以及更高的设计成本, 这会导致网络传输数据包因拥堵而丢包, 进而影响量测数据的利用率和控制的实时性. 因此, 采样周期的选择并非越小越好, 过小的采样周期既不一定能保证较高的系统性能和良好的实时性又可能带来过高的设计成本. 而增大采样周期尽管会降低成本, 提高数据的利用率, 却难以保证所获取的量测分量信息的实时性, 从而恶化控制系统性能甚至导致系统不稳定. 因此, 对于一个采样系统, 每一个量测分量采样周期的选择需要折中地考虑控制性能、控制实时性、成本及物理可行性等因素. 综合考虑以上因素, 为不同类型的量测分量选择不同的采样周期是一种自然的选择, 这种采样策略被称为多率采样, 这类采样系统被称为多率采样系统. 显然, 多率采样系统的研究是一个具有重要理论意义和明显应用价值的研究课题.

从 20 世纪 50 年代以来, 已经提出了很多关于多率系统的建模和控制方法<sup>[8-16]</sup>. 文献 [10] 最早使用扩展的  $z$  变换方法研究了多率系统的输入输出问题. Kalman 等<sup>[11]</sup> 首次使用状态空间方法来研究多率系统的建模问题. 另外, 针对采样周期带有理数比例约束的线性多率系统, 提升技术<sup>[12-13]</sup> 可方便地将其等价为一个带固定采样周期  $T_0$  的单率时不变系统来研究, 其中  $T_0$  是系统所有周期的最小公倍

数. 文献 [14] 基于切换补偿的思想研究了带多率输出单率输入的双率线性系统的指数镇定问题. 文献 [15] 研究了输出多率采样下连续线性对象的全维状态观测器设计问题. 文献 [16] 基于模型方法研究了带有定常网络时滞和单率采样多率执行器更新的线性离散系统的镇定问题.

现有处理多率采样系统的主要方法有: 基于  $z$  变换的传递函数方法<sup>[10, 17]</sup> 和基于离散状态空间模型的提升技术方法<sup>[12-13, 18]</sup>. 对于单输入单输出的线性系统, 基于  $z$  变换的传递函数方法便于对系统进行时域和频域分析. 然而, 对于多输入多输出、时变系统、时滞系统、非线性系统及随机系统, 基于  $z$  变换的传递函数方法却难以对此类多率系统进行建模和稳定性分析. 对于提升技术, 它能够把线性多率系统等价地转化为一个线性单率系统, 并能实现较好的系统性能和控制器设计. 然而, 对于一些实际的物理对象, 提升技术却很难实现系统的建模、分析和设计. 一方面是由于一些连续的物理元件难以获得较精确的离散化模型甚至不能离散化, 例如, 系统有时变时滞、外部干扰、非线性及不确定性等. 另一方面, 提升技术需要假设多个采样率之间成有理数比例关系, 对于那些传感器的可调采样频率范围较窄的情形, 选择采样周期使得各采样周期成合理的有理数比例关系是不易实现的. 因为不合适的采样周期会导致它们的最小公倍数很大, 进而得到较高维的离散模型和结果, 这为数值上对多率系统建模、分析和设计增加了困难.

本文研究一类双率采样系统的网络化  $H_\infty$  控制问题. 考虑到被控对象状态因不同采样频率而不能同时完全获取的现象, 将状态变量的双率采样过程看成一类切换形式的输出. 例如, 一个双率采样系统有两个状态分量:  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$ , 其采样周期分别为: 0.1s 和 0.2s, 记  $T = 0.2s$ , 对状态进行双率采样并保持最新采样数据, 其输出信号可以被刻画为如下切换输出形式

$$\mathbf{y}(t) = \begin{cases} [x_1(iT), x_2(iT)]^T, & t \in \mathcal{F}_{1i} \\ \left[ x_1 \left( \left( i + \frac{1}{2} \right) T \right), x_2(iT) \right]^T, & t \in \mathcal{F}_{2i} \end{cases}$$

其中,  $\mathcal{F}_{1i} = [iT, (i+\frac{1}{2})T)$ ,  $\mathcal{F}_{2i} = [(i+\frac{1}{2})T, (i+1)T)$ ,  $i$  属于非负整数集合. 注意到, 尽管状态分量  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  都可测, 但它们的采样信息却不能及时同步地获取.

本文主要贡献有: 1) 传统的提升技术和基于  $z$  变换的传递函数方法要求两类采样周期成有理数比例关系, 然而本文所提方法不要求两类采样周期具有这样的关系, 并考虑了网络传输时滞和丢包现象;

2) 对于双率采样所引起的各分量采样不同步性, 设计一个观测器来同步估计对象状态, 并引入基于观测器状态的反馈控制, 实现了双率采样系统的网络化  $H_\infty$  控制.

记号 1.  $\text{diag}\{A, B\}$  表示由矩阵  $A$  和  $B$  组成的对角块矩阵  $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ .  $\begin{bmatrix} A & * \\ C & B \end{bmatrix}$  中的  $*$  表示一个对称矩阵的对应块矩阵.  $\lfloor \cdot \rfloor$  为向下取整函数.  $I$  表示适当维数的单位矩阵.  $I_n$  表示  $n$  维的单位矩阵.  $0$  表示适当维数的零矩阵.  $0_{n \times m}$  表示  $n$  行  $m$  列的零矩阵.  $\mathbf{N}_0$  表示非负整数集合.  $\triangleq$  表示变量或矩阵变量的定义符号.  $\text{sgn}(\cdot)$  表示符号函数.  $L_2[0, \infty)$  表示定义在  $[0, \infty)$  上的 Lebesgue 平方可积函数空间.

### 1 模型与问题描述

考虑如下线性时不变系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + B_\omega\boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{z}(t) = C\mathbf{x}(t) + D_\omega\boldsymbol{\omega}(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^p$  和  $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbf{R}^l$  分别是系统状态、被控输出、控制输入和外部干扰信号, 且  $\boldsymbol{\omega}(t) \in L_2[0, \infty)$ .  $A, B, B_\omega, C$  和  $D_\omega$  分别为适当维数的常矩阵.

图 1 描述了一类带单侧网络的双率采样系统的网络化  $H_\infty$  控制结构图. 被控对象被不同采样频率的两组传感器  $S_1$  和  $S_2$  采样, 采样的状态信息分别通过网络传输到控制器节点. 在控制器节点, 零阶保持器 (Zero-order holders, ZOHs) 用来保持状态的估计误差, 然后, 基于观测器的控制器 (Observer-based controller, OBC) 利用保持的先前误差来估计被控对象当前状态, 并输出控制信号, 其中在控制器端的观测器状态被  $S'_1$  和  $S'_2$  双率采样后存储在缓冲器中, 用于计算观测器的采样状态与被控对象的采样状态之间的误差.

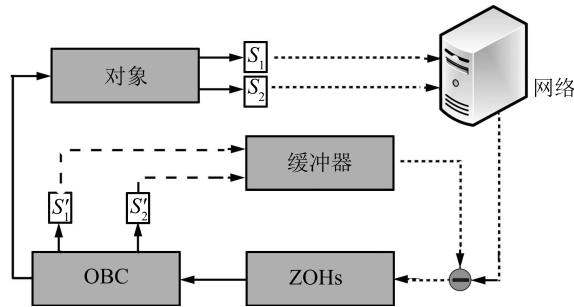


图 1 一类双率采样系统的网络化控制结构图  
Fig. 1 Diagram of networked control for a class of dualrate sampling systems

对象的状态  $\mathbf{x}(t)$  是可测的, 被两组采样频率不同的传感器采样. 不妨假设传感器组  $S_1$  对状态分向

量  $\mathbf{x}_1(t)$  以周期  $T_1$  采样, 传感器组  $S_2$  对状态分向量  $\mathbf{x}_2(t)$  以周期  $T_2$  采样, 且记:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= [\mathbf{x}_{1,1}^T(t), \mathbf{x}_{1,2}^T(t), \dots, \mathbf{x}_{1,n_1}^T(t)]^T \in \mathbf{R}^{n_1} \\ \mathbf{x}_2(t) &= [\mathbf{x}_{2,1}^T(t), \mathbf{x}_{2,2}^T(t), \dots, \mathbf{x}_{2,n_2}^T(t)]^T \in \mathbf{R}^{n_2} \\ \mathbf{x}(t) &= [\mathbf{x}_1^T(t), \mathbf{x}_2^T(t)]^T \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{x}_{i,j}(t)$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, n_i$ ) 是状态分量,  $n = n_1 + n_2$ ,  $T_1 \neq T_2$ . 经过双率采样后, 状态分向量  $\mathbf{x}_1(t)$  的采样序列为  $\{\mathbf{x}_1(kT_1)\}_{k \in \mathbf{N}_0}$ , 状态分向量  $\mathbf{x}_2(t)$  的采样序列为  $\{\mathbf{x}_2(kT_2)\}_{k \in \mathbf{N}_0}$ . 注意到, 若  $\mathbf{x}(t) \neq [\mathbf{x}_1^T(t), \mathbf{x}_2^T(t)]^T$ , 状态变换可以使状态变量重新排列, 保证第一组状态变量和第二组状态变量分别在状态向量的第一部分和第二部分.

为了对双率采样系统进行性能分析和控制器设计, 本文做如下假设:

假设 1. 状态分量  $\mathbf{x}_1(t)$  和  $\mathbf{x}_2(t)$  被独立地采样并通过网络传输到控制器端. 数据的采样、处理及计算时间忽略不计, 只考虑网络的传输时滞和丢包现象. 网络服务质量是已知的, 通过网络传输的两类数据包的丢包分别受最大可允许连续丢包数  $d_1$  和  $d_2$  约束,  $d_1, d_2 \in \mathbf{N}_0$ ; 网络传输时滞上、下界分别为  $\bar{\tau}$  和  $\underline{\tau}$ ,  $\bar{\tau} > \underline{\tau} > 0$ , 它们都是已知的网络参数.

假设 2. 在图 1 中, 缓冲器可以独立地写入和读取多组数据. 观测器由连续系统实现. 观测器、控制器和执行器是在同一个物理区域.

传感器  $S_1$  和  $S_2$  端到控制器端需要通过非理想网络来传输采样信号, 而非理想网络的引入会导致采样数据的到达延时和丢包. 因而, 设  $r_k^1 T_1$  是分向量  $\{\mathbf{x}_1(kT_1)\}_{k \in \mathbf{N}_0}$  第  $k$  个成功到达控制器端的时间戳,  $r_k^2 T_2$  是分向量  $\{\mathbf{x}_2(kT_2)\}_{k \in \mathbf{N}_0}$  第  $k$  个成功到达控制器端的时间戳,  $\mathbf{x}_1(r_k^1 T_1)$  成功到达控制器端的时刻为  $r_k^1 T_1 + \tau_{1k}$ ,  $\mathbf{x}_2(r_k^2 T_2)$  成功到达控制器端的时刻为  $r_k^2 T_2 + \tau_{2k}$ , 则依据假设 1 对网络服务质量的假设, 对  $s = 1, 2$  有

$$\underline{\tau} \leq \tau_{sk} \leq \bar{\tau}, \quad 1 \leq r_{k+1}^s - r_k^s \leq (d_s + 1) \quad (2)$$

在控制器的输入端, 引入一个全维状态观测器来估计对象状态, 基于观测器状态来设计控制器. 设观测器估计状态为  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ , 其中,  $\hat{\mathbf{x}}(t) = [\hat{\mathbf{x}}_1^T(t), \hat{\mathbf{x}}_2^T(t)]^T$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_1(t)$  是对象状态分向量  $\mathbf{x}_1(t)$  的估计,  $\hat{\mathbf{x}}_2(t)$  是对象状态分向量  $\mathbf{x}_2(t)$  的估计, 它们的估计误差分别记为:  $\mathbf{e}_1(t) = \mathbf{x}_1(t) - \hat{\mathbf{x}}_1(t)$ ,  $\mathbf{e}_2(t) = \mathbf{x}_2(t) - \hat{\mathbf{x}}_2(t)$ . 缓冲器的状态由  $\mathbf{b}_k^1$  和  $\mathbf{b}_k^2$  两个状态分向量组成. 观测器的状态分向量  $\hat{\mathbf{x}}_1(t)$  在  $\{kT_1 | k \in \mathbf{N}_0\}$  时刻被传感器  $S'_1$  以周期  $T_1$  采样并更新缓冲器的状态  $\mathbf{b}_k^1$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_2(t)$  在  $\{kT_2 | k \in \mathbf{N}_0\}$  时刻被传感器  $S'_2$  以周期  $T_2$  采样并更新缓冲器的状态  $\mathbf{b}_k^2$ . 对  $s = 1, 2$ ,

取  $h_s = \lfloor \bar{\tau}/T_s \rfloor$ , 记

$$\mathbf{b}_k^s = [\hat{\mathbf{x}}_s^T(kT_s), \dots, \hat{\mathbf{x}}_s^T((k - h_s)T_s)]^T$$

它以  $T_s$  为周期更新, 更新规则如下

$$\mathbf{b}_{k+1}^s = [\hat{\mathbf{x}}_s^T((k+1)T_s), F\mathbf{b}_k^s]^T$$

其中,  $F = [I_{\bar{n}_s}, 0_{\bar{n}_s \times n_s}]$ ,  $\bar{n}_s = n_s h_s$ . 例如, 当  $0 < \bar{\tau} < T_s$  时,  $h_s = 0$ ,  $\mathbf{b}_k^s = \hat{\mathbf{x}}_s^T(kT_s)$ . 当  $iT_s \leq \bar{\tau} < (i+1)T_s$  时,  $h_s = i$ . 在实际设计中, 缓冲器的存储长度可以由传输时滞上界  $\bar{\tau}$  和采样周期  $T_s$  确定.

图 1 中零阶保持器 (ZOHs) 具有一定的逻辑判断和计算功能, 当分向量采样信号  $\mathbf{x}_s(r_k^s T_s)$  ( $s = 1, 2$ ) 在时刻  $r_k^s T_s + \tau_{sk}$  成功到达控制器端时, 计算设备从缓冲器中读取  $\hat{\mathbf{x}}_s(r_k^s T_s)$ , 并计算和保持误差  $\mathbf{e}_s(r_k^s T_s)$ , 作为观测器和控制器输入, 直到下一个更新时刻.

当  $r_k^s T_s + \tau_{sk} \leq t < r_{k+1}^s T_s + \tau_{s(k+1)}$  时, 记  $l_s(t) = r_k^s T_s$  ( $s = 1, 2$ ),  $l_s(t)$  代表分向量  $\{\mathbf{x}_s(kT_s)\}_{k \in \mathbf{N}_0}$  在时刻  $t$  之前成功到达控制器端的最新采样时刻. 此时,  $\underline{\tau} \leq \tau_{sk} \leq t - l_s(t) = t - r_k^s T_s < (r_{k+1}^s - r_k^s)T_s + \tau_{s(k+1)} \leq (d_s + 1)T_s + \bar{\tau}$ .

引入如下一个基于全维状态观测器的控制器

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}} - L_1 \mathbf{e}_1(l_1(t)) - L_2 \mathbf{e}_2(l_2(t)) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{u}(t) = K\hat{\mathbf{x}}(t) + K_1 \mathbf{e}_1(l_1(t)) + K_2 \mathbf{e}_2(l_2(t)) \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $L_1$  和  $L_2$  为待定的观测器增益矩阵,  $K$ ,  $K_1$  和  $K_2$  为待定的控制器增益矩阵,  $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^p$  分别是观测器状态和控制信号.

定义  $\tau_1(t) = t - l_1(t)$  和  $\tau_2(t) = t - l_2(t)$ , 则有  $\underline{\tau} < \tau_1(t) \leq \bar{\tau} + (d_1 + 1)T_1 := \bar{\tau}_1$  和  $\underline{\tau} < \tau_2(t) \leq \bar{\tau} + (d_2 + 1)T_2 := \bar{\tau}_2$ .

结合式 (1) 和式 (3), 把双率采样的网络化控制系统建模为一个带有两个时变时滞的连续系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \bar{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=1}^2 \bar{A}_i \tilde{\mathbf{x}}(t - \tau_i(t)) + \bar{B}\boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \bar{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) + D_\omega \boldsymbol{\omega}(t) \end{cases} \quad (4)$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t) &= [\hat{\mathbf{x}}^T(t), \mathbf{e}^T(t)]^T, \quad \mathbf{e}(t) = [\mathbf{e}_1^T(t), \mathbf{e}_2^T(t)]^T \\ \bar{A} &= \begin{bmatrix} A + BK & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & (BM - L)E_1 \\ 0 & LE_1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & (BM - L)E_2 \\ 0 & LE_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_\omega \end{bmatrix} \\ M &= \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= \begin{bmatrix} C & C \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此, 双率采样系统的网络化  $H_\infty$  控制问题被转化为研究时变时滞系统 (4) 在给定  $H_\infty$  性能  $\gamma$  下的渐近稳定性问题. 本文的研究目标是设计基于观测器的控制器 (3), 使得系统 (4) 在给定的  $H_\infty$  性能  $\gamma$  下渐近稳定, 即

1) 当  $\boldsymbol{\omega}(t) \equiv 0$  时, 系统 (4) 是渐近稳定的;

2) 当初始状态  $\tilde{\mathbf{x}}_0(t) = 0$ , 对于任意的外部干扰  $\boldsymbol{\omega}(t) \in L_2[0, \infty)$ , 被控输出  $\mathbf{z}(t)$  满足

$$\int_0^\infty \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \boldsymbol{\omega}^T(t)\boldsymbol{\omega}(t)dt$$

注 1. 在式 (4) 中, 诱导时滞  $\tau_s(t)$  ( $s = 1, 2$ ) 是由分向量  $\mathbf{x}_s(t)$  的采样、时变传输时滞和丢包来定义的. 它的下界  $\underline{\tau}_s$  由网络传输下界  $\underline{\tau}$  确定, 即  $\underline{\tau}_s = \underline{\tau}$ ; 它的上界  $\bar{\tau}_s$  由  $\mathbf{x}_s(t)$  的采样周期  $T_s$ 、网络传输时滞上界  $\bar{\tau}$  和最大可允许连续丢包数  $d_s$  确定, 即  $\bar{\tau}_s = \bar{\tau} + (d_s + 1)T_s$ . 对于单率采样的网络控制系统,  $\tau_1(t) = \tau_2(t)$ , 但对于本文研究的双率采样的网络化系统,  $\tau_1(t) \neq \tau_2(t)$ .

注 2. 由于被控对象的不同量测分量的物理特征不同, 其采样的传感器不同, 因而导致不同量测分量的实际采样率不一致性. 对此, 如果使用单率采样, 通常采用最大采样周期达到同步采样来处理全部量测分量<sup>[18]</sup>. 这就导致了某些量测分量信息不能被及时采样和利用. 而本文的双率采样相比于单率采样, 既能够及时采样各量测分量, 又能够及时利用测量信息通过基于观测器的控制器 (3) 生成控制信号.

## 2 主要结论

本节旨在基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法, 给出系统 (4) 在给定的  $H_\infty$  性能下的稳定性判据和控制器设计方法.

### 2.1 $H_\infty$ 性能分析

定理 1. 对于给定的控制器增益  $K$  和  $M$ , 观测器增益  $L$ ,  $H_\infty$  性能  $\gamma > 0$ , 以及  $0 < \underline{\tau} < \bar{\tau}_1$ ,  $0 < \underline{\tau} < \bar{\tau}_2$ , 如果存在正定矩阵  $P > 0$ ,  $R_{11} > 0$ ,  $R_{12} > 0$ ,  $R_{21} > 0$ ,  $R_{22} > 0$ ,  $Q_1 > 0$  和  $Q_2 > 0$ , 使得以下线性矩阵不等式成立:

$$\Pi + \Phi_1^T R \Phi_1 + \Phi_2^T \Phi_2 < 0 \quad (5)$$

其中,

$$R = \bar{\tau}_1^2 R_{11} + (\bar{\tau}_1 - \underline{\tau})^2 R_{12} + \bar{\tau}_2^2 R_{21} + (\bar{\tau}_2 - \underline{\tau})^2 R_{22}$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{A}_1 & 0 & \bar{A}_2 & 0 & \bar{B} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} \bar{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_\omega \end{bmatrix}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & * & * & * & * & * \\ \bar{A}_1^T P & \Pi_{22} & * & * & * & * \\ R_{11} & R_{12} & \Pi_{33} & * & * & * \\ \bar{A}_2^T P & 0 & 0 & \Pi_{44} & * & * \\ R_{21} & 0 & 0 & R_{22} & \Pi_{55} & * \\ \bar{B}^T P & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{11} = \bar{A}^T P + P \bar{A} - R_{11} - R_{21} + Q_1 + Q_2$$

$$\Pi_{22} = -R_{12}, \quad \Pi_{33} = -Q_1 - R_{11} - R_{12}$$

$$\Pi_{44} = -R_{22}, \quad \Pi_{55} = -Q_2 - R_{21} - R_{22}$$

则系统 (4) 在给定的  $H_\infty$  性能  $\gamma$  下全局渐近稳定.

证明. 选择如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \tag{6}$$

其中,

$$V_1(t) = \tilde{\mathbf{x}}^T(t) P \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

$$V_2(t) = \int_{t-\bar{\tau}_1}^t \tilde{\mathbf{x}}^T(s) Q_1 \tilde{\mathbf{x}}(s) ds + \bar{\tau}_1 \int_{-\bar{\tau}_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(s) R_{11} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) ds d\theta + (\bar{\tau}_1 - \underline{\tau}) \int_{-\bar{\tau}_1}^{-\underline{\tau}} \int_{t+\theta}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(s) R_{12} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) ds d\theta$$

$$V_3(t) = \int_{t-\bar{\tau}_2}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(s) Q_2 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) ds + \bar{\tau}_2 \int_{-\bar{\tau}_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(s) R_{21} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) ds d\theta + (\bar{\tau}_2 - \underline{\tau}) \int_{-\bar{\tau}_2}^{-\underline{\tau}} \int_{t+\theta}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(s) R_{22} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) ds d\theta$$

$V(t)$  沿着系统 (4) 的轨迹对  $t$  求导, 有

$$\dot{V}(t) = 2\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T P \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T(t) Q_i \tilde{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^2 \left( \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(t) (\bar{\tau}_i^2 R_{i1} + (\bar{\tau}_i - \underline{\tau})^2 R_{i2}) \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) - (\bar{\tau}_i - \underline{\tau}) \int_{t-\bar{\tau}_i}^{t-\underline{\tau}} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(s) R_{i2} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) ds - \bar{\tau}_i \int_{t-\bar{\tau}_i}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(s) R_{i1} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) ds - \right.$$

$$\left. \tilde{\mathbf{x}}^T(t - \bar{\tau}_i) Q_i \tilde{\mathbf{x}}(t - \bar{\tau}_i) \right)$$

对  $i = 1, 2$ , 分别利用 Jensen 不等式, 可得:

$$- (\bar{\tau}_i - \underline{\tau}) \int_{t-\bar{\tau}_i}^{t-\underline{\tau}} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(s) R_{i2} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) ds \leq - (\bar{\tau}_i - \underline{\tau}) \int_{t-\bar{\tau}_i}^{t-\tau_i(t)} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(s) R_{i2} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) ds \leq \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t - \tau_i(t)) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t - \bar{\tau}_i) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R_{i2} & R_{i2} \\ R_{i2} & -R_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t - \tau_i(t)) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t - \bar{\tau}_i) \end{bmatrix}$$

$$- \bar{\tau}_i \int_{t-\bar{\tau}_i}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(s) R_{i1} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) ds \leq - (\tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t - \bar{\tau}_i))^T R_{i1} (\tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t - \bar{\tau}_i))$$

整理, 有

$$\dot{V}(t) + \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) - \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) \leq \zeta^T(t) (\Pi + \Phi_1^T R \Phi_1 + \Phi_2^T \Phi_2) \zeta(t) < 0 \tag{7}$$

其中,  $\zeta^T(t) = [\tilde{\mathbf{x}}^T(t), \tilde{\mathbf{x}}^T(t - \tau_1(t)), \tilde{\mathbf{x}}^T(t - \bar{\tau}_1), \tilde{\mathbf{x}}^T(t - \tau_2(t)), \tilde{\mathbf{x}}^T(t - \bar{\tau}_2), \omega^T(t)]$ .

显然, 当  $\omega(t) \equiv 0$  时, 由不等式 (5) 可得  $\dot{V}(t) < 0$ . 即系统 (4) 在无干扰条件下渐近稳定.

当零初始条件时, 对不等式 (7) 左、右边分别从 0 到  $\infty$  进行积分, 可得:

$$\int_0^\infty \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) dt - \gamma^2 \int_0^\infty \omega^T(t) \omega(t) dt \leq 0$$

因此, 系统 (4) 在给定的  $H_\infty$  性能  $\gamma$  下全局渐近稳定.  $\square$

### 2.2 基于观测器的控制器设计

**定理 2.** 对于给定的正标量  $\gamma > 0, 0 < \underline{\tau} < \bar{\tau}_1, 0 < \underline{\tau} < \bar{\tau}_2$ , 如果存在正定矩阵  $X_{11} > 0, X_{221} > 0, X_{222} > 0, \tilde{R}_{ij}^{kk} > 0 (i, j, k = 1, 2), \tilde{Q}_i^{kk} > 0 (i, k = 1, 2)$ , 和非对称矩阵  $\tilde{K}, \tilde{M}, \tilde{L}, \tilde{R}_{ij}^{kl} (i, j, k, l = 1, 2, \text{且 } k > l), \tilde{Q}_i^{kl} (i, k, l = 1, 2, \text{且 } k > l)$ , 使得以下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & * & * & * & * & * & * & * \\ \Gamma_{71}^T & \Gamma_{22} & * & * & * & * & * & * \\ \tilde{R}_{11} & \tilde{R}_{12} & \Gamma_{33} & * & * & * & * & * \\ \Gamma_{72}^T & 0 & 0 & \Gamma_{44} & * & * & * & * \\ \tilde{R}_{21} & 0 & 0 & \tilde{R}_{22} & \Gamma_{55} & * & * & * \\ \tilde{B}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I & * & * \\ \Gamma_{71} & \Gamma_{72} & 0 & \Gamma_{74} & 0 & \tilde{B} & \Gamma_{77} & * \\ \tilde{C}X & 0 & 0 & 0 & 0 & D_\omega & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

$$\tilde{R}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{ij}^{11} & * \\ \tilde{R}_{ij}^{21} & \tilde{R}_{ij}^{22} \end{bmatrix} > 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (9)$$

$$\tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_i^{11} & * \\ \tilde{Q}_i^{21} & \tilde{Q}_i^{22} \end{bmatrix} > 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \Gamma_{71} + \Gamma_{71}^T - \tilde{R}_{11} - \tilde{R}_{21} + \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 \\ \Gamma_{22} &= -\tilde{R}_{12}, \quad \Gamma_{33} = -\tilde{Q}_1 - \tilde{R}_{11} - \tilde{R}_{12} \\ \Gamma_{44} &= -\tilde{R}_{22}, \quad \Gamma_{55} = -\tilde{Q}_2 - \tilde{R}_{21} - \tilde{R}_{22} \\ \tilde{R} &= \bar{\tau}_1^2 \tilde{R}_{11} + (\bar{\tau}_1 - \underline{\tau})^2 \tilde{R}_{12} + \bar{\tau}_2^2 \tilde{R}_{21} + (\bar{\tau}_2 - \underline{\tau})^2 \tilde{R}_{22} \\ \Gamma_{71} &= \begin{bmatrix} AX_{11} + B\tilde{K} & 0 \\ 0 & AX_{22} \end{bmatrix} \\ \Gamma_{72} &= \begin{bmatrix} 0 & (B\tilde{M} - \tilde{L})E_1 \\ 0 & \tilde{L}E_1 \end{bmatrix} \\ \Gamma_{74} &= \begin{bmatrix} 0 & (B\tilde{M} - \tilde{L})E_2 \\ 0 & \tilde{L}E_2 \end{bmatrix} \\ \Gamma_{77} &= -X\tilde{R}^{-1}X \\ X &= \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix}, \quad X_{22} = \begin{bmatrix} X_{221} & 0 \\ 0 & X_{222} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则系统 (4) 在给定的  $H_\infty$  性能  $\gamma > 0$  下全局渐近稳定, 式 (3) 中的观测器增益和控制器增益分别由  $L = [L_1, L_2] = \tilde{L}X_{22}^{-1}$ ,  $K = \tilde{K}X_{11}^{-1}$  及  $[K_1, K_2] = \tilde{M}X_{22}^{-1}$  给出.

**证明.** 对定理 1 中的不等式 (5), 使用 Schur 补变换, 有

$$\begin{bmatrix} \Pi & * & * \\ \Phi_1 & -R^{-1} & * \\ \Phi_2 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

取  $H = \gamma^{-\frac{1}{2}} \text{diag}\{X, X, X, X, X, I, \gamma I, \gamma I\}$ , 对不等式 (11) 的左、右两边分别乘以对角块矩阵  $H$ , 并取

$$\begin{aligned} X &= \gamma P^{-1} = \text{diag}\{X_{11}, X_{22}\} \\ X_{22} &= \text{diag}\{X_{221}, X_{222}\} \\ \tilde{R}_{ij} &= \gamma^{-1} X R_{ij} X, \quad \tilde{R}_{ij} = \gamma^{-1} X R_{ij} X \\ \tilde{Q}_i &= \gamma^{-1} X Q_i X \\ \tilde{K} &= K X_{11}, \quad \tilde{M} = M X_{22} \\ \tilde{L} &= L X_{22}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

注意到:

$$\begin{aligned} (BM - L)E_1 X_{22} &= \\ [(BK_2 - L_1)X_{221}, 0] &= (B\tilde{M} - \tilde{L})E_1 \\ (BM - L)E_2 X_{22} &= \\ [0, (BK_3 - L_2)X_{221}] &= (B\tilde{M} - \tilde{L})E_2 \\ \gamma R^{-1} &= X(\gamma^{-1} X R X)^{-1} X = X\tilde{R}^{-1} X \end{aligned}$$

成立, 再对式 (9) 进行以上替换, 可获得式 (8). 另外, 对定理 1 的  $R_{ij}$ ,  $Q_i$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2$ ) 进行替换和分解可得式 (9).  $\square$

**注 3.** 最大可允许的时滞上界  $\bar{\tau}_s$  ( $s = 1, 2$ ) 可以由定理 2 求得, 它是由传输时滞上界  $\bar{\tau}$  和最大可允许的连续丢包上界  $d_s$  组成. 在实际应用中, 当定理 2 得到的最大可允许的时滞上界  $\bar{\tau}_s$  较大时, 选择服务质量不高的公共网络进行传输, 此时, 可以通过网络服务质量检测来获得传感器到控制器节点之间的网络传输时滞上界  $\bar{\tau}$ 、下界  $\underline{\tau} > 0$  以及丢包率  $\alpha$ . 为了确定最大可允许连续丢包上界  $d_s$ , 把多次网络传输的丢包和不丢包看成二项分布, 求最小的正整数  $\bar{d}$ , 使得  $\bar{d}$  次连续丢包的概率  $\alpha^{\bar{d}} < \beta$  ( $\beta$  为很小的正数), 然后, 将  $\bar{d}$  作为最大可允许的连续丢包数  $d_s$ . 若可允许时滞上界  $\bar{\tau}_s$  较小时, 则需要设计专用网络和协议来保证定理 2 所要求的网络传输服务质量和可允许最大连续丢包数.

定理 2 给出了双率采样下的基于观测器的控制器 (Observer-based controller for dual-rate systems, DROBC) 设计方法. 为了对双率采样和单率采样的控制方法进行比较, 下面将考虑对象 (1) 在单率采样时的网络化  $H_\infty$  控制问题. 对于单率采样系统, 静态状态反馈控制具有设计简单、较高的控制精度及较好的镇定性等优势<sup>[4]</sup>, 因此, 以下单率采样系统选择静态状态反馈进行控制 (State feedback controller for single-rate systems, SRSFC).

考虑被控对象 (1), 系统状态  $\mathbf{x}(t)$  被传感器以周期  $T$  采样, 采样后的数据通过非理想 (带时变时滞和丢包) 的网络传输到控制器端, 控制器和执行器在同一个物理节点, 控制器和执行器是事件驱动, 即采样信号传输到控制器时, 控制器立即计算控制信号. 另外, 与双率采样情形一样, 该单率采样系统也不考虑控制器计算时间、采样器的采样时间以及编码器的编码时间.

为了得到相应的单率采样系统状态反馈控制器设计条件. 记  $\mathbf{x}(t)$  采样和到达控制器的时间序列分别为  $\{kT | k \in \mathbf{N}_0\}$  和  $\{r_k T + \tau_k | k \in \mathbf{N}_0\}$ , 其中  $r_k T$  为第  $k$  个成功到达控制器端的时间戳,  $d \in \mathbf{N}_0$  为网络所允许的最大连续丢包数,  $\bar{\tau}$  和  $\underline{\tau}$  分别为网络的传输时滞上界、下界, 满足  $1 \leq r_{k+1} - r_k \leq d + 1$ ,  $\underline{\tau} \leq \tau_k \leq \bar{\tau}$ . 当  $t \in [r_k T + \tau_k, r_{k+1} T + \tau_{k+1})$  时, 选

择控制器为  $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(r_k T)$ , 定义  $\tau(t) = t - r_k T$ . 结合对象 (1), 则单率采样的状态反馈控制系统被建模为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + B K \mathbf{x}(t - \tau(t)) + B_\omega \boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{z}(t) = C \mathbf{x}(t) + D_\omega \boldsymbol{\omega}(t) \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $\underline{\tau} \leq \tau(t) \leq \bar{\tau} + (d+1)T := \bar{\eta}$ .

**推论 1.** 对于给定的正标量  $\gamma > 0$ ,  $0 < \underline{\tau} < \bar{\eta}$ , 如果存在正定矩阵  $X > 0$ ,  $Q > 0$ ,  $R_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$ , 和非对称矩阵  $W$ , 使得以下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & * & * & * & * & * \\ W^T B^T & -R_2 & * & * & * & * \\ R_1 & R_2 & \Omega_{33} & * & * & * \\ B_\omega^T & 0 & 0 & -\gamma I & * & * \\ AX & BW & 0 & B_\omega & \Omega_{55} & * \\ CX & 0 & 0 & D_\omega & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= X A^T + A X - R_1 + Q, \quad \Omega_{55} = -X \tilde{R}^{-1} X \\ \tilde{R} &= \bar{\eta}^2 R_1 + (\bar{\eta} - \underline{\tau})^2 R_2, \quad \Omega_{33} = -Q - R_1 - R_2 \end{aligned}$$

则系统 (12) 在给定的  $H_\infty$  性能  $\gamma$  下全局渐近稳定, 控制器增益由  $K = W X^{-1}$  给出.

**证明.** 为了和定理 1 比较, 选择类似的 Lyapunov-Krosovskii 泛函

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t)$$

其中,  $V_1(t) = \tilde{\mathbf{x}}^T(t) P \tilde{\mathbf{x}}(t)$ ,

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \int_{t-\bar{\eta}}^t \tilde{\mathbf{x}}^T(s) Q \tilde{\mathbf{x}}(s) ds + \\ &\quad \bar{\eta} \int_{-\bar{\eta}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(s) R_1 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) ds d\theta + \\ &\quad (\bar{\eta} - \underline{\tau}) \int_{-\bar{\eta}}^{-\underline{\tau}} \int_{t+\theta}^t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(s) R_2 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) ds d\theta \end{aligned}$$

余下证明过程与定理 1 和定理 2 类似, 受篇幅所限, 证明省略.  $\square$

**注 4.** 在 Lyapunov-Krosovskii 泛函 (6) 中, 第二项  $V_2(t)$  考虑了分向量  $\mathbf{x}_1(t)$  的采样周期、传输时滞和丢包信息,  $V_3(t)$  考虑了分向量  $\mathbf{x}_2(t)$  的采样周期、传输时滞和丢包信息. 本文选择的 Lyapunov 泛函是一类典型的 Lyapunov-Krosovskii 泛函的推广, 它包含了两个分向量  $\mathbf{x}_1(t)$  和  $\mathbf{x}_2(t)$  不同采样周期的信息. 这与现有文献 [14–15] 有明显的不同.

**注 5.** 在不等式 (8) 和 (13) 中, 除了非线性项  $-\mathbf{X} \tilde{R}^{-1} \mathbf{X}$  以外, 所有位置的矩阵块都已经是关于未知矩阵的仿射形式, 该非线性项导致定理 2 和推论 1 不能直接使用 LMIs 工具求解. 解决此类问题的一个较有效方法是锥补线性化算法<sup>[19]</sup>. 另外, 由于  $(X - a\tilde{R})\tilde{R}^{-1}(X - a\tilde{R}) \geq 0$  (其中,  $a$  为给定的正常数,  $\tilde{R} > 0$ ), 也可以直接放大  $-\mathbf{X} \tilde{R}^{-1} \mathbf{X}$  为线性项  $a^2 \tilde{R} - 2aI$ , 以实现定理 2 和推论 1 条件的线性化. 相比而言, 锥补线性化算法使用迭代求解线性矩阵不等式的方法进行优化计算, 尽管它在一定程度上能降低保守性, 但也带来了较大计算量.

**注 6.** 即使选择两类传感器采样周期有关系:  $pT_1 = qT_2$  (其中,  $p, q$  为互素的正整数), 但由于网络时变传输时滞和丢包, 导致每个成功到达控制器端的两个分向量的保持时间不成有理数比例关系, 因而, 文献 [16] 和文献 [18] 中的提升技术不能用于本文研究的带时变传输时滞和丢包的双率采样的网络化控制系统. 文献 [14] 基于切换补偿的思想研究了采样周期成二倍关系的双率采样系统的指数镇定问题, 但与提升技术相同, 基于采样周期切换的思想不能用于本文研究的带非理想网络的双率采样系统. 另外, 尽管本文和文献 [15] 都研究的是线性多率采样系统, 并使用全维状态观测器估计对象状态, 但不同的是, 文献 [15] 只考虑了多率采样系统的观测器设计, 并没有考虑网络因素对多率采样系统的影响, 也未考虑控制器设计问题.

### 3 数值例子

本节通过一个倒立摆模型的网络化  $H_\infty$  控制来验证本文所提的 DROBC 方法相比于 SRSFC 方法具有明显优势和有效性. 考虑两种情形: 1) 在给定传输时滞上、下界的情况下, 从两个方面比较了 DROBC 方法和 SRSFC 方法. 一方面, 给定  $H_\infty$  性能  $\gamma$ , 在不同采样周期下比较了 DROBC 方法和 SRSFC 方法的可行性, 验证了本文所提的 DROBC 方法相比于 SRSFC 方法在保证  $H_\infty$  性能  $\gamma$  的前提下能选择更大的采样周期. 另一方面, 比较了 DROBC 方法和 SRSFC 方法随采样周期增大,  $H_\infty$  性能下界  $\gamma_{\min}$  的变化趋势, 得出在相同的采样周期下, DROBC 方法有更小的  $\gamma_{\min}$ , 且随采样周期增大, SRSFC 方法的性能值  $\gamma_{\min}$  增加远大于 DROBC 方法的性能值  $\gamma_{\min}$  增加. 2) 在带网络诱导时滞、有界丢包及有限能量干扰情形下, 验证了 DROBC 方法的有效性.

考虑一个倒立摆小车模型<sup>[20]</sup>

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + B_\omega \boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{z}(t) = C \mathbf{x}(t) + D_\omega \boldsymbol{\omega}(t) \end{cases} \quad (14)$$

其中,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ M \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix}$$

$$B_\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1], \quad D_\omega = 0.01$$

其他变量和参数分别为  $M = 10 \text{ kg}$  是小车质量,  $m = 1 \text{ kg}$  是摆子的质量,  $l = 3 \text{ m}$  是摆臂的长度,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  是重力加速度. 状态  $\mathbf{x}(t) = [y \quad \dot{y} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T$ ,  $y$  是摆子的位置,  $\dot{y}$  为摆子的速度,  $\theta$  为摆子的摆角,  $\dot{\theta}$  为摆子的角速度,  $z(t)$  为受控输出和  $\omega(t)$  为外部干扰信号. 通过简单的计算, 系统矩阵的特征值为  $0, 0, 1.8074$  和  $-1.8074$ , 因此, 当无控制输入时, 系统 (14) 是不稳定的. 基于传感器的类型, 状态被分成两个子向量  $\mathbf{x}_1 = [y, \dot{y}]^T$  和  $\mathbf{x}_2 = [\theta, \dot{\theta}]^T$ . 因为在工业应用中, 常常使用超声波传感器来量测  $\mathbf{x}_1$ , 即摆子的位移和速度; 而使用陀螺仪传感器来量测  $\mathbf{x}_2$ , 即摆子的角速度和横摆角. 基于传感器特性, 设超声波传感器的采样周期为  $T_1$ , 陀螺仪传感器的采样周期为  $T_2$ , 且  $T_1 > T_2$ .

**情形 1.** 当不考虑网络丢包时, 即最大丢包数  $d_1 = d_2 = 0$ . 取传输时滞上界  $\bar{\tau} = 0.1 \text{ s}$ , 下界  $\underline{\tau} = 0.01 \text{ s}$ . 另外, 由注 2, 单率采样的周期  $T$  的选取必须满足  $T = \max\{T_1, T_2\}$ . 然后, 在给定的  $H_\infty$  性能水平  $\gamma = 200$  下, 表 1 比较了在不同采样周期下定理 2 (DROBC) 和推论 1 (SRSFC) 的可行性.

当不考虑网络丢包时, 即最大丢包数  $d_1 = d_2 = 0$ . 取传输时滞上界  $\bar{\tau}_1 = 0.1 \text{ s}$ , 传输时滞下界  $\underline{\tau} = 0.01 \text{ s}$ ,  $T_1 = 2T_2$ ,  $T = T_1$ . 图 2 展示了随着采样周期  $T$  的增大可允许的  $H_\infty$  性能水平的下界  $\gamma_{\min}$  的变化趋势.

从表 1 可以看出, DROBC 要比 SRSFC 能够允许更大的采样周期. 另外注意到, 当  $T_1 = 0.2 \text{ s}$ ,  $T_2 =$

$0.1 \text{ s}$  时, DROBC 方法仍然可行; 当  $T > 0.056 \text{ s}$  时, SRSFC 方法不可行. 而小的采样周期意味着采样量和网络的传输量都要相应地增加, 进一步地会导致网络节点的等待时间和丢包数也相应地增加, 因此, 在保证  $H_\infty$  性能和稳定性的前提下, 应该尽可能选择较大的采样周期, 以保证网络能够成功地传输更多的量测信息. 下面为了保守地估算 DROBC 方法和 SRSFC 方法在保证  $H_\infty$  性能前提下最少采样量之间的关系, 不妨取 DROBC 方法的采样周期为  $T_1 = 0.2 \text{ s}$ ,  $T_2 = 0.1 \text{ s}$ , SRSFC 方法的采样周期为  $T = 0.056 \text{ s}$ , 由表 1 知两种控制策略都能在给定的  $H_\infty$  性能  $\gamma = 200$  下保证倒立摆小车模型 (14) 的渐近稳定性. 经过简单的计算可知, 1 秒内 SRSFC 方法需要采样  $(1/0.056) \times 4 \approx 71$  个数据, 1 秒内 DROBC 方法只需要采样  $(1/0.2) \times 2 + (1/0.1) \times 2 = 30$  个数据, 由于较少的采样数据会减轻传感器、编码器负载及减少网络资源的消耗, 因此, 相比于 SRSFC 方法, 本文的 DROBC 方法能在较大程度地减少采样数据的前提下保证了给定的  $H_\infty$  性能  $\gamma$ .

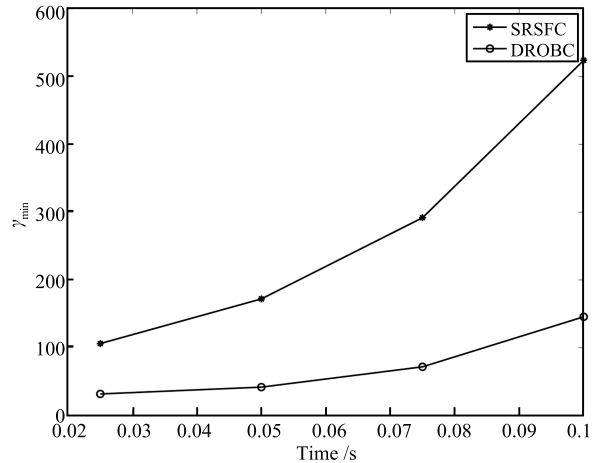


图 2 最小  $H_\infty$  性能水平  $\gamma_{\min}$  随采样周期  $T$  增加的变化趋势

Fig. 2 Changing trend of the minimal  $H_\infty$  performance level as the sampling period  $T$  increases

由图 2 可以看出, 当相同的采样周期  $T$  情形时, 相比于 SRSFC 方法, DROBC 方法有较小的  $H_\infty$  性

表 1 不同采样周期下的可行性比较

Table 1 Comparison of the feasibility under different sampling periods

$(T_1, T_2)$	(0.02, 0.01)	(0.056, 0.028)	(0.06, 0.03)	(0.1, 0.05)	(0.2, 0.1)
DROBC	可行	可行	可行	可行	可行
$T = \max\{T_1, T_2\}$	0.02	0.56	0.06	0.1	0.2
SRSFC	可行	可行	不可行	不可行	不可行



能下界  $\gamma_{\min}$ . 若从变化趋势上看, 采样周期  $T$  较小时, 两者都有较小  $\gamma_{\min}$ ; 但随着采样周期  $T$  的增大, DROBC 方法的  $\gamma_{\min}$  缓慢增大, 而 SRSFC 方法可允许的  $\gamma_{\min}$  却随着  $T$  增大而快速增大.

**情形 2.** 考虑带网络诱导时滞、丢包和有限能量干扰的系统对象, 取传输时滞上界  $\bar{\tau} = 0.1$  s, 传输时滞下界  $\underline{\tau} = 0.01$  s, 网络可允许的最大连续丢包数  $d_1 = d_2 = 1$ , 两个不同的采样周期  $T_1 = 0.04$  s 和  $T_2 = 0.011$  s, 取注 5 中的  $a = 2.5$ ,  $H_\infty$  性能水平  $\gamma = 35$ .

由定理 2, 可求得控制器和观测器增益如下

$$K = \begin{bmatrix} 114.8 & 232.3 & 1766 & 1028 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 41.92 & 88.71 & 717.6 & 423.1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -1.915 & -1.611 & 6.586 & 3.242 \\ 0.2478 & -0.8840 & -2.635 & -1.693 \\ -0.1604 & -0.5017 & -2.200 & -1.414 \\ 0.2204 & 0.7808 & -1.805 & -0.7188 \end{bmatrix}$$

不妨取对象的初始状态  $\mathbf{x}_0 = [-1 \ 0.2 \ 0.5 \ 0]^T$ , 观测器初始状态为  $[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , 外部干扰为

$$\omega(t) = \begin{cases} \text{sgn}(\sin(t)), & \text{若 } t \in [0, 10] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

图 3 展示了带有限能量干扰的双率采样系统在网络化控制下的状态轨迹. 图 4 展示了网络环境下的带有限能量干扰的对象和观测器状态误差. 当  $t > 10$  s 时,  $\omega(t) = 0$ , 从图 3 和图 4 可以看出, 系统状态轨迹和观测器估计误差都能快速收敛到原点. 这说明了本文 DROBC 方法在带时变的网络诱导时滞和有限能量的外部干扰时对于干扰抑制的有效性. 另外, 注意到由于网络传输时滞和丢包的存在, 提升技术和基于  $z$  变换的传递函数方法不能用于该情形的建模和分析, 本文所提出的 DROBC 方法可以处理这种情形.

## 4 结论

本文研究了一类双率采样系统的网络化  $H_\infty$  控制问题, 其中考虑了网络传输时滞和丢包现象. 基于观测器对被控对象状态的同步估计, 设计了状态反馈控制器. 把双率采样系统的网络化  $H_\infty$  控制问题建模为带两个时变时滞的连续系统的  $H_\infty$  控制问题. 使用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法, 给出了系统的  $H_\infty$  性能分析和控制器设计方法. 最后, 通过一个倒立摆例子, 对单率的 SRSFC 方法和本文所提的 DROBC 方法进行比较, 举例验证了 DROBC 方法在给定  $H_\infty$  性能下能够允许更大的采样周期, 说

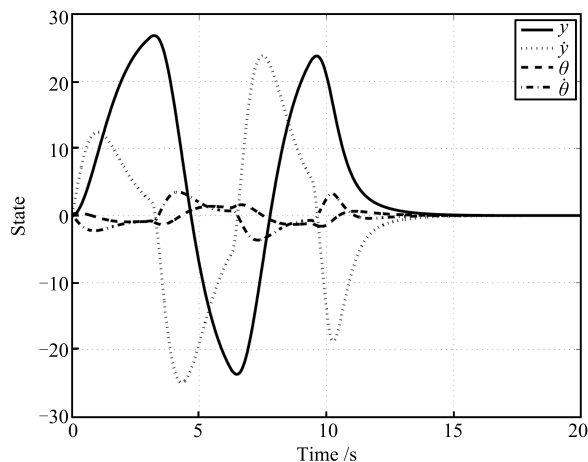


图 3 双率采样系统在网络化控制下的轨迹

Fig. 3 State trajectories of the dualrate sampling system via the networked controller

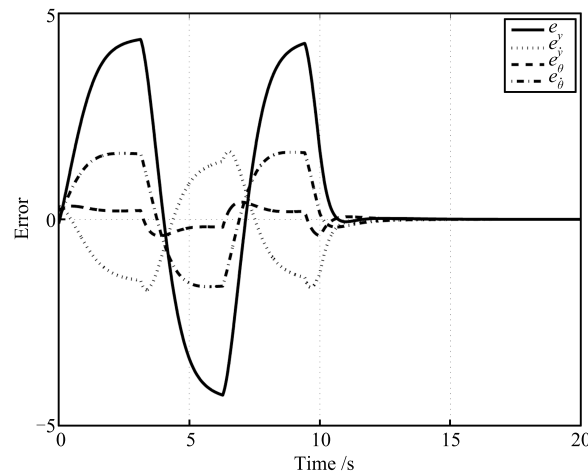


图 4 对象和观测器的状态误差

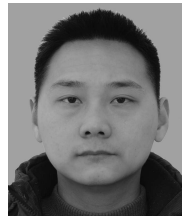
Fig. 4 State errors between the observer and the plant

明在相同的干扰抑制水平下, DROBC 方法能减轻传感器、编码器负载及减少网络资源的消耗. 另外, 还验证了 DROBC 方法在相同的采样周期下可允许更低  $H_\infty$  性能水平, 说明了 DROBC 方法在能量有限干扰抑制方面的优势.

## References

- Zhang L X, Gao H J, Kaynak O. Network-induced constraints in networked control systems—a survey. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2013, **9**(1): 403–416
- You Ke-You, Xie Li-Hua. Survey of recent progress in networked control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(2): 101–118  
(游科友, 谢立华. 网络控制系统的最新研究综述. 自动化学报, 2013, **39**(2): 101–118)
- Yang Yuan-Hua, Fu Min-Yue, Zhang Huan-Shui. State estimation subject to random communication delays. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(3): 237–243  
(杨园华, 付敏跃, 张焕水. 带有随机通信时滞的状态估计. 自动化学报, 2013, **39**(3): 237–243)

- 4 Bamieh B, Pearson J B, Francis B A, Tannenbaum A. A lifting technique for linear periodic systems with applications to sampled-data control. *Systems and Control Letters*, 1991, **17**(2): 79–88
- 5 Fridman E, Seuret A, Richard J P. Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach. *Automatica*, 2004, **40**(8): 1441–1446
- 6 Fridman E. A refined input delay approach to sampled-data control. *Automatica*, 2010, **46**(2): 421–427
- 7 Fridman E, Shaked U, Suplin V. Input/output delay approach to robust sampled-data control. *Systems and Control Letters*, 2005, **54**(3): 271–282
- 8 Wu Yao, Luo Xiong-Lin. Robustness analysis of Kalman filtering algorithm for multirate systems. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(2): 156–174  
(吴瑶, 罗雄麟. 多率系统 Kalman 滤波算法的鲁棒性分析. 自动化学报, 2012, **38**(2): 156–174)
- 9 Nemani M, Tsao T C, Hutchinson S. Multi-rate analysis and design of visual feedback digital servo-control system. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1994, **116**(1): 45–55
- 10 Kranc G. Input-output analysis of multirate feedback systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, 1957, **3**(1): 21–28
- 11 Kalman R E, Bertram J E. A unified approach to the theory of sampling systems. *Journal of the Franklin Institute*, 1959, **267**(5): 405–436
- 12 Zamani M, Bottegal G, Anderson B D O. On the properties of linear multirate systems with coprime output rates. In: Proceedings of the 52nd Annual Conference on Decision and Control (CDC). Firenze, Italy, USA: IEEE, 2013. 2734–2739
- 13 Yu B, Shi Y, Huang H M.  $l_2-l_\infty$  filtering for multirate systems based on lifted models. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 2008, **27**(5): 699–711
- 14 Jia X C, Li L, Zhang D W, Chi X B, Fan X. Exponential stabilization of dual-rate control system: a switched system approach. In: Proceedings of the 2013 American Control Conference (ACC). Washington, DC, USA: IEEE, 2013. 48–53
- 15 Moarref M, Rodrigues L. Observer design for linear multi-rate sampled-data systems. In: Proceedings of the 2014 American Control Conference (ACC). Portland, Oregon, USA: IEEE, 2014. 5319–5324
- 16 Jin J, Wang Z W, Luo D S. Model-based control scheme for networked multi-rate sampling systems. In: Proceedings of the 2009 6th International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation. Zhangjiajie, China: IEEE, 2009. 812–815
- 17 Glasson D. Development and applications of multirate digital control. *IEEE Control Systems Magazine*, 1983, **3**(4): 2–8
- 18 Mizuochi M, Tsuji T, Ohnishi K. Multirate sampling method for acceleration control system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2007, **54**(3): 1462–1471
- 19 El Ghaoui L, Oustry F, AitRami M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(8): 1171–1176
- 20 Hu S L, Yue D.  $L_2$ -gain analysis of event-triggered networked control systems: a discontinuous Lyapunov functional approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, **23**(11): 1277–1300



马伟伟 山西大学数学科学学院博士研究生。主要研究方向为网络化控制系统和多率采样系统。

E-mail: xiucailing@live.cn

(MA Wei-Wei Ph.D. candidate at the School of Mathematical Sciences, Shanxi University. His research interest

covers networked control systems and multirate sampling systems.)

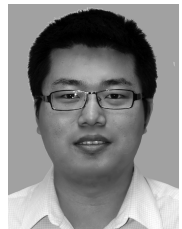


贾新春 山西大学数学科学学院教授。主要研究方向为网络化控制系统, 模糊控制和智能系统。本文通信作者。

E-mail: xchjia@sxu.edu.cn

(JIA Xin-Chun Professor at the School of Mathematical Sciences, Shanxi University. His research interest

covers networked control systems, fuzzy control, and intelligent control. Corresponding author of this paper.)



张大伟 澳大利亚中央昆士兰大学计算机科学博士。主要研究方向为网络化控制系统, 模糊系统和复杂系统。

E-mail: zhangdaweisx@sxu.edu.cn

(ZHANG Da-Wei Ph.D. in computer science from Central Queensland University, Australia. His research interest covers networked control systems,

fuzzy systems, and complex systems.)