

## 稀疏子空间聚类综述

王卫卫<sup>1</sup> 李小平<sup>1</sup> 冯象初<sup>1</sup> 王斯琪<sup>1</sup>

**摘要** 稀疏子空间聚类 (Sparse subspace clustering, SSC) 是一种基于谱聚类的数据聚类框架。高维数据通常分布于若干个低维子空间的并上, 因此高维数据在适当字典下的表示具有稀疏性。稀疏子空间聚类利用高维数据的稀疏表示系数构造相似度矩阵, 然后利用谱聚类方法得到数据的子空间聚类结果。其核心是设计能够揭示高维数据真实子空间结构的表示模型, 使得到的表示系数及由此构造的相似度矩阵有助于精确的子空间聚类。稀疏子空间聚类在机器学习、计算机视觉、图像处理和模式识别等领域已经得到了广泛的研究和应用, 但仍有很大的发展空间。本文对已有稀疏子空间聚类方法的模型、算法和应用等方面进行详细阐述, 并分析存在的不足, 指出进一步研究的方向。

**关键词** 高维数据, 子空间聚类, 稀疏表示, 低秩表示

**引用格式** 王卫卫, 李小平, 冯象初, 王斯琪. 稀疏子空间聚类综述. 自动化学报, 2015, 41(8): 1373–1384

**DOI** 10.16383/j.aas.2015.c140891

## A Survey on Sparse Subspace Clustering

WANG Wei-Wei<sup>1</sup> LI Xiao-Ping<sup>1</sup> FENG Xiang-Chu<sup>1</sup> WANG Si-Qi<sup>1</sup>

**Abstract** Sparse subspace clustering (SSC) is a newly developed spectral clustering-based framework for data clustering. High-dimensional data usually lie in a union of several low-dimensional subspaces, which allows sparse representation of high-dimensional data with an appropriate dictionary. Sparse subspace clustering methods pursue a sparse representation of high-dimensional data and use it to build the affinity matrix. The subspace clustering result of the data is finally obtained by means of spectral clustering. The key to sparse subspace clustering is to design a good representation model which can reveal the real subspace structure of high-dimensional data. More importantly, the obtained representation coefficient and the affinity matrix are more beneficial to accurate subspace clustering. Sparse subspace clustering has been successfully applied to different research fields, including machine learning, computer vision, image processing, system identification and others, but there is still a vast space to develop. In this paper, the fundamental models, algorithms and applications of sparse subspace clustering are reviewed in detail. Limitations existing in available methods are analyzed. Problems for further research on sparse subspace clustering are discussed.

**Key words** High-dimensional data, subspace clustering (SC), sparse representation, low rank representation

**Citation** Wang Wei-Wei, Li Xiao-Ping, Feng Xiang-Chu, Wang Si-Qi. A survey on sparse subspace clustering. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(8): 1373–1384

当今社会, 各种各样的数据充斥着人们生活的各个方面, 对大规模数据的分析与处理在科学研究领域占据着越来越重要的地位。数据的维数之高结构之复杂给数据的分析与处理带来了一定的困难<sup>[1]</sup>。为此, 人们通常用含参数的模型来表示一组数据, 子空间表示作为一种简单的参数模型被广泛地应用。然而, 很难用单一的子空间表示一组复杂的高维数据, 一种更加合理的假设是认为高维数据分布于多

个低维子空间的并, 从而产生了子空间分割问题<sup>[2]</sup>。如图 1<sup>[3]</sup> 所示, 给定的三维数据分别来自一个平面和两条直线, 即数据本质上分别是二维和一维的, 在其所属的低维子空间 (平面或直线) 中, 能够更好地体现出数据本身所具有的性质, 对数据聚类、数据分析、数据挖掘以及模式识别等有重要的意义。子空间分割的目的是将来自不同子空间的高维数据分割到本质上所属的低维子空间。子空间分割也称为子空间聚类, 是高维数据聚类的一种新方法, 在机器学习<sup>[4]</sup>、计算机视觉<sup>[5]</sup>、图像处理<sup>[6–7]</sup> 和系统辨识<sup>[8]</sup> 等领域有广泛的应用。

**定义 1 (子空间聚类 (Subspace clustering, SC))**. 给定一组数据  $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N] \in \mathbf{R}^{D \times N}$ , 设这组数据属于  $k$  ( $k$  已知或未知) 个线性子空间  $\{S_i\}_{i=1}^k$  的并, 子空间聚类是指将这组数据分割为不同的类, 在理想情况下, 每一类对应一个子空间。

收稿日期 2014-12-22 录用日期 2015-04-23  
Manuscript received December 22, 2014; accepted April 23, 2015

国家自然科学基金 (61472303, 61271294, 61379030, 61362029, 61301229) 和中央高校基本科研业务费 (NSIY21) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61472303, 61271294, 61379030, 61362029, 61301229) and Fundamental Research Fund for the Central Universities (NSIY21)

本文责任编辑 封举富

Recommended by Associate Editor FENG Ju-Fu

1. 西安电子科技大学数学与统计学院 西安 710126

1. School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126

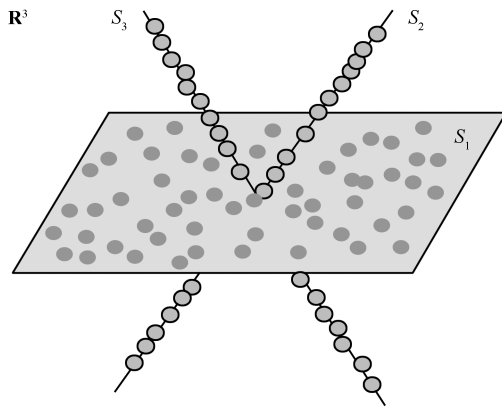


图 1  $\mathbf{R}^3$  中取自一个平面和两条直线的并的一组数据点  
Fig.1 A set of sample points in  $\mathbf{R}^3$  drawn from a union of three subspaces: a plane and two lines

子空间聚类算法可以粗略地分为 5 类, 即基于矩阵分解的方法<sup>[9-10]</sup>、代数方法<sup>[11-13]</sup>、迭代

方法<sup>[14-15]</sup>、统计方法<sup>[16-18]</sup> 和基于谱聚类的方法<sup>[19-21]</sup>, 详见文献 [3] 及其参考文献。

稀疏子空间聚类是近年来子空间聚类的研究热点, 它是一种基于谱聚类的子空间聚类方法, 其基本思想是, 假设高维空间中的数据本质上属于某个低维子空间, 能够在低维子空间中进行线性表示, 反过来, 高维数据的低维表示能够揭示数据所在的本质子空间, 有利于数据聚类. 稀疏子空间聚类的基本方法是, 对给定的一组数据建立子空间表示模型, 寻找数据在低维子空间中的表示系数, 然后根据表示系数矩阵构造相似度矩阵, 最后利用谱聚类方法如规范化割 (Normalized cut, Ncut)<sup>[22]</sup> 获得数据的聚类结果. 稀疏子空间聚类的基本框架如图 2 所示.

本文旨在对稀疏子空间聚类方法的研究现状进行综述. 为了方便描述, 表 1 对文中出现的一些符号进行说明.

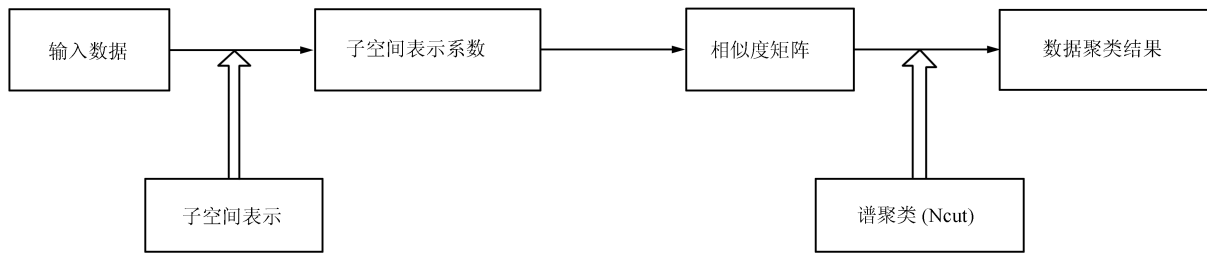


图 2 稀疏子空间聚类的基本框架  
Fig.2 Basic framework of sparse subspace clustering

表 1 符号说明

Table 1 Definition of notations

符号	含义
$\ \mathbf{x}\ _0$	向量 $\mathbf{x}$ 的 $l_0$ - (伪) 范数, $\mathbf{x}$ 中非零元素个数
$\ \mathbf{x}\ _1$	向量 $\mathbf{x}$ 的 $l_1$ -范数, $\ \mathbf{x}\ _1 = \sum_i  \mathbf{x}_i $
$\ X\ _1$	矩阵 $X$ 的 $l_1$ -范数, $\ X\ _1 = \sum_i \sum_j  X_{ij} $
$\ X\ _F$	矩阵 $X$ 的 Frobenius 范数, $\ X\ _F = \sqrt{\sum_i \sum_j  X_{ij} ^2}$
$\ X\ _*$	矩阵 $X$ 的核范数, $\ X\ _* = \sum_i \sigma_i$ , $\sigma_i$ 是 $X$ 的奇异值
$\ X\ _{p,q}$	矩阵 $X$ 的混合范数, $\ X\ _{p,q} = (\sum_j (\sum_i  X_{ij} ^p)^{1/p})^{1/q}$ , 其中 $p, q$ 为实数, 且 $p, q \geq 0$
$ Z $	对矩阵 $Z$ 的元素取绝对值得到的矩阵
$S_\alpha$	第 $\alpha$ 个子空间
$C$	表示系数矩阵 $Z$ 的约束集合
$\Omega$	全体 $N$ 阶矩阵的集合
$Z \succeq 0$	$Z$ 为半正定矩阵
$X \odot Y$	矩阵 $X$ 与 $Y$ 的 Hadamard 积运算, $X$ 与 $Y$ 对应位置元素相乘
$\text{tr}(X)$	矩阵 $X$ 的迹
$I$	$N$ 阶单位矩阵
$L$	图拉普拉斯矩阵, $L = I - D^{-1/2}WD^{-1/2}$ , 其中 $D = \text{diag}\{\sum_j W_{1j}, \dots, \sum_j W_{Nj}\}$
$\text{diag}\{\mathbf{z}\}$	以 $Z$ 的列向量 $\mathbf{z}$ 为对角元素的对角矩阵
$\ X\text{diag}\{\mathbf{z}\}\ _*$	Trace Lasso (Trace least absolute shrinkage and selection operator)
$k_\sigma(x)$	以 $\sigma$ 为参数的高斯核函数, $k_\sigma(x) = \exp(-x^2/2\sigma^2)$

首先, 在第 1 节中分析稀疏子空间聚类的基本原理; 其次, 在第 2 节中详细介绍稀疏子空间聚类的发展现状; 最后, 在第 3 节剖析存在的问题并展望值得进一步研究的方向; 第 4 节总结了全文。

## 1 稀疏子空间聚类的基本原理

稀疏表示 (Sparse representation, SR) 是近年来图像处理与应用数学领域的研究热点, 其目的在于利用数据在特定空间的稀疏性更有效地表示数据或揭示数据的本质特征。所谓稀疏性是指用尽可能少的基或字典原子的线性组合表示数据, 也就是数据的线性表示中非零系数尽可能少。对给定数据, 非零系数的位置表明该数据属于由相应基或原子张成的子空间, 而非零系数的个数表明数据的本质维数, 因此稀疏表示 (SR) 能够刻画数据的子空间特性。向量的稀疏性通常用向量中非零元素的个数, 即  $l_0$ - (伪) 范数来刻画。在实际应用中, 由于  $l_0$ - (伪) 范数的离散性质, 其优化问题是 NP- 难的, 通常用向量的  $l_1$ - 范数来代替  $l_0$ - (伪) 范数<sup>[23]</sup>。稀疏表示 (SR) 在压缩感知 (Compressive sensing, CS)<sup>[24–27]</sup>、图像去噪<sup>[28–29]</sup>、图像超分辨率重建<sup>[30]</sup>、图像结构纹理分解<sup>[31]</sup>、高维数据的子空间聚类<sup>[32–34]</sup>、图像分类<sup>[35–36]</sup>、人脸识别<sup>[37–38]</sup>、模式识别<sup>[39]</sup> 等诸多领域得到了广泛、成功的应用。

秩是一种矩阵稀疏度量<sup>[40]</sup>, 也称为二维稀疏 (相应地, 称向量稀疏为一维稀疏)。由于矩阵的秩是离散的, 通常的秩最小化问题难以求解, 虽然 Zhang 等<sup>[40]</sup> 给出了一类特殊的秩最小化问题的解析解, 但作者同时指出一般的秩最小化问题仍然是 NP- 难问题。为了克服计算困难, 通常将矩阵的秩凸松弛为核范数<sup>[41]</sup>。Zhang 等<sup>[40]</sup> 也对一类核范数最小化问题给出了解析解。低秩矩阵恢复是与研究稀疏向量恢复问题的压缩感知理论平行发展的一种理论<sup>[42–43]</sup>。典型的秩最小化问题包括矩阵补全 (Matrix completion, MC)<sup>[44–45]</sup>、鲁棒主成分分析 (Robust principal component analysis, RPCA)<sup>[46]</sup>、低秩表示 (Low rank representation, LRR)<sup>[47–48]</sup> 等, 在图像修补<sup>[44–45]</sup>、图像背景提取<sup>[46]</sup>、图像分类<sup>[49–50]</sup>、人脸识别<sup>[51]</sup>、高维数据的子空间聚类<sup>[47–48, 52–54]</sup> 等方面取得了成功的应用。

稀疏子空间聚类<sup>[32]</sup> 的基本思想是: 将数据  $\mathbf{x}_i \in S_\alpha$  表示为所有其他数据的线性组合,

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j \neq i} Z_{ij} \mathbf{x}_j \quad (1)$$

并对表示系数施加一定的约束使得在一定条件下对所有的  $\mathbf{x}_j \notin S_\alpha$ , 对应的  $Z_{ij} = 0$ 。将所有数据及其

表示系数按一定方式排成矩阵, 则式 (1) 等价于

$$X = XZ \quad (2)$$

且系数矩阵  $Z \in \mathbf{R}^{N \times N}$  满足: 当  $\mathbf{x}_i$  和  $\mathbf{x}_j$  属于不同的子空间时, 有  $Z_{ij} = 0$ 。不同于用一组基或字典表示数据, 式 (2) 用数据集本身表示数据, 称为数据的自表示。若已知数据的子空间结构, 并将数据按类别逐列排放, 则在一定条件下可使系数矩阵  $Z$  具有块对角结构, 即

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Z_k \end{bmatrix} \quad (3)$$

这里  $Z_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, k$ ) 表示子空间  $S_\alpha$  中数据的表示系数矩阵; 反之, 若  $Z$  具有块对角结构, 这种结构揭示了数据的子空间结构。稀疏子空间聚类就是通过对系数矩阵  $Z$  采用不同的稀疏约束, 使其尽可能具有理想结构, 从而实现子空间聚类。

通常, 稀疏子空间聚类基于系数向量的一维稀疏性或系数矩阵的二维稀疏性来建立高维数据在低维子空间的表示, 利用表示系数矩阵  $Z$  构造数据的相似度矩阵  $W = (|Z| + |Z^T|)/2$ , 最后利用谱聚类算法如 Ncut<sup>[22]</sup> 得到最终的聚类结果。

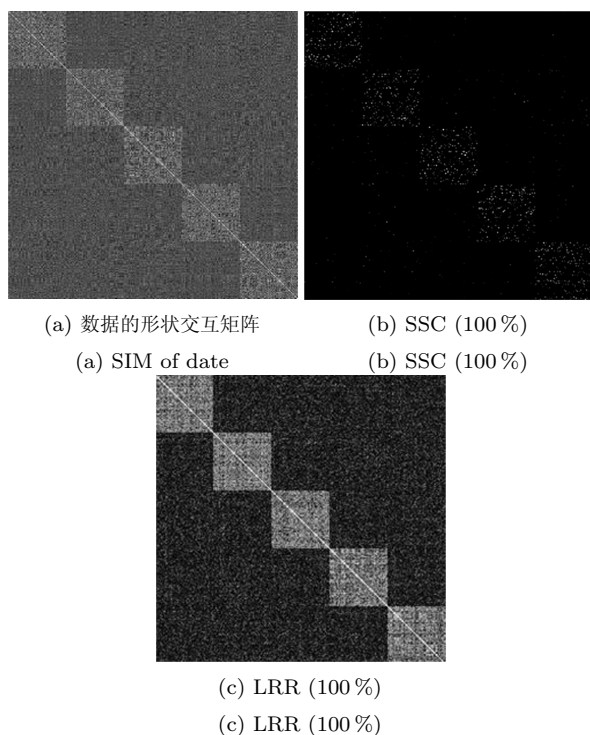
2009 年, Elhamifar 等<sup>[32]</sup> 基于一维稀疏性提出了稀疏子空间聚类 (Sparse subspace clustering, SSC) 方法, 其子空间表示模型为

$$\begin{aligned} \min_Z \|Z\|_1 \\ \text{s. t. } X = XZ, Z_{ii} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

该模型利用稀疏表示 (SR) 迫使每个数据仅用同一子空间中其他数据的线性组合来表示。在数据所属的子空间相互独立的情况下, 模型 (4) 的解  $Z$  具有块对角结构, 这种结构揭示了数据的子空间属性: 块的个数代表子空间个数, 每个块的大小代表对应子空间的维数, 同一个块的数据属于同一子空间。注意, 模型中的约束  $Z_{ii} = 0$  是为了避免平凡解, 即每个数据仅用它自己表示, 从而  $Z$  为单位矩阵的情形。然而, 该方法单独考虑每个数据的稀疏表示, 缺乏对数据集全局结构的描述。为捕获数据集的全局结构, 2010 年, Liu 等<sup>[47]</sup> 进一步利用二维稀疏性提出了基于低秩表示 (LRR) 的子空间聚类方法, 其子空间表示模型为

$$\begin{aligned} \min_Z \|Z\|_* \\ \text{s. t. } X = XZ \end{aligned} \quad (5)$$

与模型 (4) 类似, 在数据所属的子空间相互独立的情况下, 模型 (5) 的解矩阵  $Z$  也是块对角矩阵. SSC 和 LRR 是稀疏子空间聚类的先驱工作, 在数据聚类应用中取得了良好的效果. 我们按文献 [47] 中所述方法构造一组数据, 该组数据由 5 个相互独立的 50 维线性子空间的并构成, 并从每个子空间中抽取 50 个样本数据, 从而得到数据矩阵  $X \in \mathbf{R}^{50 \times 250}$ . 分别用 SSC 和 LRR 对这组数据进行聚类, 观测表示系数矩阵的结构及聚类精度. 图 3 给出了实验结果, 图 3(a) 表示原始数据的形状交互矩阵 (Shape interaction matrix, SIM)<sup>[55]</sup>, 图 3(b) 和 (c) 分别为 SSC 和 LRR 的表示系数矩阵. 可以看出, SSC 和 LRR 方法得到的表示系数矩阵都具有很好的块对角结构. 并且对于这组干净数据, SSC 和 LRR 方法的聚类精度都是 100%.



(a) 数据的形状交互矩阵 (b) SSC (100%)  
(a) SIM of data (b) SSC (100%)

(c) LRR (100%)  
(c) LRR (100%)

图 3 SSC 和 LRR 的系数矩阵与聚类精度 (%)

Fig. 3 Coefficient matrix and clustering accuracy (%) of SSC and LRR

在实际应用中, 数据往往受到各种噪声或者奇异样本的影响, 这时, 数据  $X$  表示为  $X = DZ + E$ , 其中  $E$  为噪声或者奇异样本, 通常  $D$  取为数据  $X$  本身或者干净字典  $D$ . 一般地, 稀疏子空间聚类模型可以统一描述为如下优化问题<sup>[56]</sup>:

$$\begin{aligned} \min_Z J(Z) &= F(E) + \lambda R(Z) \\ \text{s. t. } Z &\in C \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $C$  为表示系数矩阵  $Z$  的约束集合,  $\lambda > 0$  为正则化参数;  $F(E)$  称为数据项或保真项, 刻画了数据的表示  $DZ$  与数据  $X$  之间的逼近程度, 针对数据中噪声的不同分布,  $F(E)$  采用不同的矩阵范数来度量误差;  $R(Z)$  称为正则项或惩罚项. 稀疏子空间聚类通过对表示系数矩阵  $Z$  采用不同的稀疏度量作为正则项, 迫使  $Z$  具有理想结构. 表 2 列出了近几年提出的几种典型的稀疏子空间聚类模型, 其中  $W$  为权矩阵, 可以是 0-1 权、热核权、点乘权等<sup>[57]</sup>;  $\sum_{i,j} (1 - k_\sigma(E_{ij}))$  表示由相关熵 (Correntropy)<sup>[58]</sup> 导出的一种  $L2$  误差度量<sup>[59-60]</sup>;  $K = \{Z | \text{rank}(L) = n - r, W = \frac{1}{2}(|Z| + |Z^T|)\}$  表示  $r$ -块对角矩阵集合<sup>[61]</sup>.

## 2 稀疏子空间聚类的发展现状

稀疏子空间聚类方法自 2009 年提出以来得到了广泛关注, 已出现了大量的模型和算法, 其中大部分模型都可以用式 (6) 的一般形式来描述. 其研究主要围绕以下几个方面: 1) 正则项  $R(Z)$  的设计, 目的是使得子空间表示系数矩阵具有良好的有利于子空间聚类的结构; 2) 数据项  $F(E)$  的设计, 使其对各种噪声鲁棒; 3) 快速算法的设计; 4) 应用方面的探索.

### 2.1 正则项的设计

在一定条件下, SSC 和 LRR 模型分别采用稀疏和低秩正则项保证了表示系数矩阵的块对角结构, 但 SSC 模型得到的子空间表示系数矩阵可能过于稀疏, LRR 模型得到的子空间表示系数矩阵可能不稀疏, 针对这些问题, 人们提出了一系列改进模型和方法.

2010 年, Elhamifar 等将 SSC 模型的子空间互相独立这一假设推广为子空间不相交, 并在 SSC 基础上给出了稀疏子空间分割模型<sup>[62]</sup>.

2011 年, Wang 等<sup>[63]</sup> 提出了二次规划子空间分割 (Subspace segmentation via quadratic programming, SSQP) 模型 (表 2), 要求矩阵  $Z^T Z$  稀疏同时  $Z$  正定, 取得了与 SSC 和 LRR 相当的聚类精度. Luo 等<sup>[64]</sup> 结合稀疏性与低秩性给出了多子空间表示 (Multi-space representation, MSR) 模型 (表 2). 当数据样本数量不足时 LRR 模型可能会失效, 为克服这一缺陷, Liu 等<sup>[65]</sup> 对 LRR 模型进行了改进, 提出了一种隐低秩表示 (Latent low rank representation, LatLRR) 模型, 对列表示系数矩阵和行表示系数矩阵同时施加低秩约束, 目的是用行数据信息弥补列数据信息的污染或缺损, 极大地提高了聚类性能.

表 2 几种典型的子空间聚类模型  
Table 2 Some classical subspace clustering models

子空间聚类方法 (发表时间, 文献)	目标函数 $J(Z) = F(E) + \lambda R(Z)$	数据项 $F(E)$	正则项 $R(Z)$	约束集 $C$
SSC (2009, [32–33])	$\ E\ _F^2 + \lambda \ Z\ _1$	$\ E\ _F^2$	$\ Z\ _1$	$\{Z   Z_{ii} = 0\}$
LRR (2010, [47–48])	$\ E\ _{2,1} + \lambda \ Z\ _*$	$\ E\ _{2,1}$	$\ Z\ _*$	$\Omega$
SSQP (2011, [63])	$\ E\ _F^2 + \lambda \ Z^T Z\ _1$	$\ E\ _F^2$	$\ Z^T Z\ _1$	$\{Z \geq 0   Z_{ii} = 0\}$
MSR (2011, [64])	$\ E\ _{2,1} + \lambda \ Z\ _1 + \lambda \rho \ Z\ _*$	$\ E\ _{2,1}$	$\ Z\ _1 + \rho \ Z\ _*$	$\{Z   Z_{ii} = 0\}$
NNLRS (2012, [66])	$\ E\ _{2,1} + \lambda \ Z\ _1 + \lambda \rho \ Z\ _*$	$\ E\ _{2,1}$	$\ Z\ _1 + \rho \ Z\ _*$	$\{Z   Z_{ij} \geq 0\}$
LSR (2012, [67])	$\ E\ _F^2 + \lambda \ Z\ _F^2$	$\ E\ _F^2$	$\ Z\ _F^2$	$\{Z   Z_{ii} = 0\}$
W-SSC (2012, [68])	$\ E\ _p + \lambda \ W \odot Z\ _1$	$\ E\ _p = \ E\ _F^2$ or $\ E\ _1$ or $\ E\ _{2,1}$	$\ W \odot Z\ _1$	$\{Z   Z_{ii} = 0\}$
LRR-LC (2013, [52])	$\ E\ _{2,1} + \lambda \ Z\ _* + \lambda \rho \sum_{i,j} \ \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\ ^2  Z_{ij} $	$\ E\ _{2,1}$	$\ Z\ _* + \rho \sum_{i,j} \ \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\ ^2  Z_{ij} $	$\Omega$
GSS (2013, [69])	$\ E\ _F^2 + \lambda \text{tr}(Z^T LZ)$	$\ E\ _F^2$	$\text{tr}(Z^T LZ)$	$\Omega$
GR-SSC (2013, [70])	$\ E\ _F^2 + \lambda \ W \odot Z^T\ _{2,1} + \lambda \mu \text{tr}(Z^T LZ)$	$\ E\ _F^2$	$\ W \odot Z^T\ _{2,1} + \mu \text{tr}(Z^T LZ)$	$\Omega$
CASS (2013, [71])	$\ E\ _p + \lambda \ X \text{diag}\{\mathbf{z}\}\ _*$	$\ E\ _p = \ E\ _F^2$ or $\ E\ _1$	$\ X \text{diag}\{\mathbf{z}\}\ _*$	$\Omega$
CIL2 (2013, [59])	$\sum_{i,j} (1 - k_\sigma(E_{ij})) + \lambda \ Z\ _F^2$	$\sum_{i,j} (1 - k_\sigma(E_{ij}))$	$\ Z\ _F^2$	$\Omega$
CIL1 (2013, [60])	$\sum_{i,j} (1 - k_\sigma(E_{ij})) + \lambda \ Z\ _1$	$\sum_{i,j} (1 - k_\sigma(E_{ij}))$	$\ Z\ _1$	$\{Z   Z_{ii} = 0\}$
LRR-SC (2014, [53])	$\ E\ _{2,1} + \lambda \ Z\ _*$	$\ E\ _{2,1}$	$\ Z\ _*$	$\{Z   Z = Z^T\}$
BD-SSC (2014, [61])	$\ E\ _F^2 + \lambda \ Z\ _1$	$\ E\ _F^2$	$\ Z\ _1$	$\{Z \in K   Z_{ii} = 0\}$
BD-LRR (2014, [61])	$\ E\ _{2,1} + \lambda \ Z\ _*$	$\ E\ _{2,1}$	$\ Z\ _*$	$\{Z   Z \in K\}$

2012 年, Zhuang 等<sup>[66]</sup> 对 MSR 模型进行了改进, 对表示系数矩阵增加了非负约束, 提出了非负低秩稀疏表示 (Non-negative low rank and sparse, NNLRS) 模型 (表 2). Lu 等<sup>[67]</sup> 在假设数据无噪声干扰、子空间独立且数据充分情况下, 给出了要保证子空间表示系数矩阵  $Z$  具有块对角结构, 目标函数应满足的一组条件, 称为强制块对角 (Enhance block diagonal, EBD) 条件, 并给出了一些满足强制块对角 (EBD) 条件的范数; 同时作者利用真实数据本身所具有的相关性, 采用表示系数矩阵的 Frobenius 范数作为正则项, 提出了鲁棒子空间聚类的最小二乘回归 (Least square regression, LSR) 模型 (表 2), 其最大优点是存在解析解, 求解非常简单, 该模型还满足强制块对角 (EBD) 条件, 即表示系数矩阵  $Z$  有块对角结构. Pham 等<sup>[68]</sup> 给出了加权稀疏表示模型 (表 2), 特点是利用数据之间的空间关系对稀疏表示系数进行加权. Soltanolkotabi 等<sup>[72]</sup> 对子空间聚类方法进行了几何分析.

2013 年, Zheng 等<sup>[52]</sup> 利用数据本身的局部几

何结构在 LRR 模型中引入新的正则项, 提出了局部约束低秩表示模型 (表 2). Wang 等<sup>[69]</sup> 给出了利用拉普拉斯正则项的分组子空间分割 (Grouping subspace segmentation, GSS) 模型 (表 2). Saha 等<sup>[70]</sup> 结合拉普拉斯正则项和加权分组稀疏 (Group sparse) 给出了 GR-SSC 子空间聚类模型 (表 2). Lu 等<sup>[71]</sup> 利用 Trace Lasso 具有数据相关自适应性的优点, 以 Trace Lasso 作为正则项, 提出了相关自适应子空间分割 (Correlation adaptive subspace segmentation, CASS) 模型 (表 2), 该模型可以看作是 SSC 与 LSR 的自适应插值. 作者证明了 CASS 模型的目标函数满足强制块稀疏 (Enforced block sparse, EBS) 条件, 保证了该模型得到的子空间表示矩阵在子空间独立条件下是块稀疏的, 有利于数据的分割.

2014 年, Chen 等<sup>[53]</sup> 在 LRR 模型中增加了对称约束, 提出了带有对称约束的低秩表示模型 (表 2). 对称低秩表示能够保留高维数据的子空间结构, 从而保证了每一对数据点的权一致性, 使得子空

间中高度相关的数据有一致的表示. Feng 等<sup>[61]</sup> 在 SSC 和 LRR 模型中增加了显式的块对角约束, 提出了 BD-SSC 和 BD-LRR 方法 (表 2).

## 2.2 数据项的设计

数据项  $F(E)$  用于刻画数据的表示误差, 针对数据中噪声的不同分布, 数据项  $F(E)$  采用不同的范数度量<sup>[48, 68]</sup>, 如对于高斯噪声, 数据项用  $\|E\|_F^2$ ; 对于稀疏随机噪声, 数据项用  $\|E\|_1$ ; 对于奇异样本或者 Sample-specific 污染, 用  $\|E\|_{2,1}$ . 但这些度量无法很好地刻画非高斯噪声和脉冲噪声. Lu 等<sup>[59]</sup> 利用由相关熵导出的度量 (Correntropy induced metric, CIM) 来衡量逼近误差, 提出由相关熵导出的  $L2$  (Correntropy induced  $L2$ , CIL2) 模型 (表 2). Zhang 等<sup>[60]</sup> 提出了一个类似的模型 (表 2). 这两个模型对非高斯噪声和脉冲噪声具有很强的鲁棒性.

在观测数据包含噪声的情况下, 寻找数据在干净字典下的子空间表示能有效地降低表示误差. Wei 等<sup>[73]</sup> 提出的鲁棒形状交互 (Robust shape interaction, RSI) 方法, 采用干净的字典对 LRR 模型进行了改进. 2014 年, Vidal 等<sup>[54]</sup> 将含噪数据分解为干净数据、高斯噪声和稀疏误差矩阵, 基于低秩表示, 给出低秩子空间聚类 (Low rank subspace clustering, LRSC) 模型. 结果表明用干净字典表示数据能提高模型的鲁棒性.

## 2.3 快速算法的设计

以上所述的稀疏子空间聚类模型通常采用交替方向法 (Alternating direction method, ADM)<sup>[74]</sup> 来求解, 需要大量的迭代, 同时复杂度较高. 实际应用中数据的维数相对较高且样本数量巨大, 造成了很大的计算负担. 这些都限制了稀疏子空间聚类方法的应用. 因此设计快速高效的子空间表示算法是亟待解决的问题. Wang 等<sup>[63]</sup> 提出的二次规划子空间分割 (SSQP) 模型及 Lu 等<sup>[59]</sup> 提出的 CIL2 模型都采用二次规划技术进行求解, Zhang 等<sup>[60]</sup> 采用半二次规划技术<sup>[75]</sup> 求解子空间聚类模型, 求解相对简单. 线性化交替方向法 (Linearized alternating direction method, LADM)<sup>[76-77]</sup> 是一种常见的加速方法, 在稀疏子空间聚类中得到了广泛的应用. 2013 年, Patel 等<sup>[78]</sup> 在 SSC 框架下提出一种能同时进行降维和子空间聚类的方法, 称为隐空间稀疏子空间聚类 (Latent space SSC, LS3C), 与 SSC 不同的是, 该方法将原信号投影到低维空间中, 并在该低维空间中求得数据的稀疏编码. Zhang 等<sup>[79]</sup> 提出了快速低秩子空间聚类方法. 基于矩阵分解理论, Liu 等<sup>[80-82]</sup> 将低秩优化问题转化为较小规模的核范数

优化问题. 寻找模型的解析解也是提高计算效率的一种好方式, 如 Vidal 等<sup>[54]</sup> 和 Favaro 等<sup>[83]</sup> 都在一定条件下给出了相应稀疏子空间聚类模型的解析解. 这些方法都有效地提高了计算效率.

对于大规模数据集, 稀疏子空间聚类方法无法处理可扩展性 (Scalable) 问题, Peng 等<sup>[84]</sup> 提出了可扩展稀疏子空间聚类 (Scalable sparse subspace clustering, SSSC) 方法, 采用“采样、聚类、编码和分类”的策略. 同样, 对于低秩子空间聚类也提出了可扩展方法<sup>[85]</sup>. 这些方法为解决大规模数据集的聚类问题提供了新的思路.

## 2.4 应用

稀疏子空间聚类是一种全新的数据聚类方法, 是目前机器学习、计算机视觉、图像处理、模式识别等领域的研究热点, 在人脸识别<sup>[86-88]</sup>、运动分割<sup>[89-91]</sup>、图像分割<sup>[92-94]</sup>、图像显著性检测<sup>[95]</sup> 等方面取得了成功的应用.

**人脸识别.** 人脸识别是基于人的脸部特征信息进行身份识别的一种生物识别技术, 是计算机视觉与模式识别领域的一个重要研究问题. 已经证明了在不同的光照或表情变换条件下的人脸图像可以用一个低维子空间来近似, 取自多个人的一组人脸图像可以看作是 9 维线性子空间的并<sup>[96]</sup>, 从而人脸识别问题等价于子空间聚类问题. 考虑 Extended Yale B 人脸数据集<sup>[97]</sup> 中的前 10 类, 其中每类包含 64 张图像, 总共 640 张. 首先将这些图像的分辨率重新调整为  $48 \times 42$ , 然后将像素值规范化到区间  $[0, 1]$ . 把每张图像转换为 2016 维列向量, 形成数据矩阵  $X \in \mathbf{R}^{2016 \times 640}$ . 分别对不做任何预处理的原始高维数据及采用主成分分析 (Principle component analysis, PCA)<sup>[98]</sup> 方法对原始高维数据降维至 500 和 100 维后的数据进行子空间聚类. 表 3 给出了不同算法在不同维数下的聚类误差率.

**运动分割.** 运动分割是指在一个场景下根据不同刚性物体的运动, 将视频序列分成多个时空区域, 即把视频里做刚性运动的物体上的特征点进行聚类, 使得每一类对应于一个独立运动的物体, 从而得到物体运动的轨迹. 通常采用 Hopkins155 运动分割数据集<sup>[89]</sup> 作为测试数据集, 该数据集包含了 155 个运动视频序列, 每个运动序列对应一个子空间聚类问题. 由于运动特征数据点维数较高, 首先用主成分分析 (PCA)<sup>[98]</sup> 方法对数据点进行有效地降维, 然后进行子空间聚类. 表 4 给出了几种算法在 Hopkins155 数据集上的平均聚类误差率与平均计算时间.

表 3 几种算法在 Extended Yale B 人脸数据集前 10 类上聚类误差率 (%) 结果

Table 3 Clustering error (%) of different algorithms on the first 10 classes of the Extended Yale Database B

算法	SSC	LRR	LSR	LRSC	LRRSC	CASS	BD-SSC	BD-LRR
维数 = 2016	35	20.94	7.19	35.78	3.91	30	25.31	15.47
维数 = 500	35	21.56	7.19	35.78	3.91	34.69	27.34	16.25
维数 = 100	36.56	21.09	16.88	35.78	4.37	38.91	43.44	61.56

表 4 几种算法在 Hopkins155 数据集上的平均聚类误差率 (%) 与平均计算时间 (秒)

Table 4 Average clustering error (%) and mean computation time (s) when applying the different algorithms to the Hopkins155 database

算法	SSC	LRR	LSR	LRSC	LRRSC	CASS	BD-SSC	BD-LRR
均值	2.6	2.57	2.6	3.54	1.56	4.95	2.65	5.16
中值	0	0	0	0	0	0	0	0
标准差	7.55	7.39	6.93	9.69	5.48	10.47	7.53	9.84
最大值	47.84	43.38	40.15	49.25	43.38	49.25	45.50	42.06
时间	1.96	1.77	0.19	0.20	4.62	62.8	14.47	1.29

**图像分割.** 图像分割是指将图像分为若干个具有独特性质的区域, 或从中提取感兴趣目标的过程, 是图像处理 and 计算机视觉领域的热点研究问题. 图像分割本质上是对图像的特征数据进行聚类的过程, 与数据的子空间聚类有着自然的联系. 故利用稀疏子空间聚类方法可以进行有效的图像分割, 其基本过程是: 首先, 把图像过分割 (Over-segment) 成超像素 (Super-pixel), 并提取超像素的有效特征; 然后, 对特征数据进行子空间聚类, 聚类结果的每一类对应一个图像区域. 以图像超像素的彩色直方图 (Color histograms, CH) 作为特征, 李涛等<sup>[92]</sup> 提出了图像分割的加权稀疏子空间聚类方法, 张文娟等<sup>[93]</sup> 提出了非凸低秩稀疏约束的图像分割方法. Cheng 等<sup>[94]</sup> 联合多种图像特征, 如彩色直方图 (Color histograms, CH)、局部二元模式 (Local binary pattern, LBP)、基于 BoW (Bag-of-words) 的尺度不变特征变换 SIFT-BoW (SIFT based on bag-of-words) 等构成高维特征, 并对高维特征通过低秩子空间聚类来实现图像分割, 对大量自然图像的分割结果表明这种方法显著改善了图像分割的结果.

**图像显著性检测.** 图像显著性检测是近年来图像处理、计算机视觉领域研究的热点. 显著性区域通常指图像中“与众不同”的区域, 如果用其他区域进行“预测”则会产生较大的误差. 因此, 如果把图像划分成小图像块, 提取其适当特征, 则图像显著性区域对应于子空间表示模型中的稀疏“噪声” $E$  较大的部分. Lang 等<sup>[95]</sup> 结合图像的颜色、纹理和方向特征, 提出了显著性检测的多任务稀疏追踪方法, 取得了较好的效果.

### 3 稀疏子空间聚类存在的不足和进一步研究的方向

稀疏子空间聚类的性能取决于两个方面: 一方面, 模型对各种噪声、数据缺损、奇异数据的鲁棒性取决于数据项; 另一方面, 子空间表示系数矩阵的结构取决于正则项. 现有模型选择不同的度量来设计数据项与正则项, 存在一定的局限性.

在设计子空间表示模型的正则项时, 要同时考虑表示系数矩阵的稀疏性和分组效应, 稀疏性迫使使用少量数据的线性组合表示数据, 而分组效应能保证来自同一子空间的高度相关的数据聚到一组. 采用  $l_1$ -范数的稀疏子空间聚类模型 (如 SSC, W-SSC, CIL1, BD-SSC 等) 能得到稀疏表示系数矩阵, 但如果来自同一子空间的数据高度相关,  $l_1$ -范数极小化一般会随机地选择一个数据来表示, 这样产生的稀疏解不能刻画数据间的相关性, 不具有分组效应; 利用核范数作为正则项的模型 (如 LRR, LRR-LC, LRR-SC, BD-LRR 等) 和利用 Frobenius 范数作为正则项的模型 (如 LSR, CIL2 等) 有很好的分组效应, 但表示系数矩阵不稀疏, 在子集选择中很难得到正确的选择. MSR 和 NNLS 对低秩表示与稀疏表示进行组合, 以保证表示系数兼具稀疏性和分组效应, 但很难确定低秩约束与稀疏约束的权重. CASS 和 GSS 采用了与数据相关的正则项, 具有一定的数据自适应性, 但仍不能很好地平衡稀疏性和分组效应. 子空间聚类模型的上述不足是由正则项中所采用的度量带来的. 另外,  $l_1$ -范数极小化与核范数极小化问题的求解需要大量的迭代过程, 复杂度较高.

对于观测数据中的噪声、缺损、奇异样本, 采用

$\|E\|_p$  ( $\|E\|_F^2$ ,  $\|E\|_1$ ,  $\|E\|_{2,1}$ ) 范数来度量表示误差, 对于非高斯噪声和脉冲噪声采用 CIM 度量误差, 然而, 实际数据的噪声类型是未知的且很难估计, 故采用上述度量存在一定的局限性. 现有的多数模型是以观测数据本身作为字典进行子空间表示, 而观测数据中所含的噪声、缺损、奇异样本等势必会增加子空间表示的误差.

除了具体模型和算法的不足之外, 稀疏子空间聚类的理论基础还不完善. 目前, 该领域的研究主要集中于如何设计正则项使得子空间表示系数矩阵具有块对角结构, 从而有利于揭示子空间结构和进行子空间聚类. Lu 等<sup>[67]</sup> 在假设数据无噪声干扰、子空间独立且数据充分情况下, 给出了要保证子空间表示系数矩阵  $Z$  具有块对角结构, 正则项应满足的一组强制块对角 (EBD) 条件, 该条件给出了设计正则项的一般原则, 同时为验证已有正则项是否保证表示系数矩阵  $Z$  的块对角结构提供了判据, 具有重要的理论意义. 但对聚类问题来讲, 表示系数矩阵  $Z$  的块对角结构只刻画了数据的类间不相关性, 要实现精确分割, 类内应具有 consistency, 简单讲, 就是表示系数矩阵  $Z$  应满足类间稀疏、类内一致的性质.

尽管目前关于稀疏子空间聚类的研究很多, 并取得了丰富的研究成果, 但仍有许多问题有待进一步研究.

1) 针对数据项  $F(E)$ , 根据实际数据的噪声统计分布情况进行误差建模, 从而更好地拟合数据, 提高鲁棒性. Babacan 等<sup>[99]</sup> 利用 Bayesian 估计方法进行低秩矩阵估计, Zhao 等<sup>[100]</sup> 利用变分 Bayesian 估计方法进行复杂噪声下的鲁棒主成分分析, 都取得了较好的结果. 借鉴这一思想, 根据数据中噪声的统计分布进行有效的误差建模, 设计合适的正则项是稀疏子空间聚类值得研究的一个方向.

2) 设计适当的正则项  $R(Z)$ , 使得相应的子空间聚类模型得到的表示系数矩阵  $Z$  满足类间稀疏、类内一致的性质, 从而提高聚类的性能. Lu 等<sup>[71]</sup> 给出的 Trace Lasso 正则项利用了具有数据相关自适应性, 结果显示了数据的先验信息在子空间聚类中的重要性. 如何充分挖掘数据的先验信息并由此设计正则项是未来子空间聚类研究的热点之一.

3) 针对所提的子空间聚类模型, 设计快速有效的算法, 降低算法的时间复杂度, 同时考虑算法的可扩展性, 使其能有效处理大规模的数据集. 实际应用中数据的规模越来越大, 如何设计快速的可扩展的算法是子空间聚类研究的重要挑战之一.

4) 进一步完善其理论, 寻求更广泛的应用领域. 根据实际应用问题中数据的特征, 建立具体的子空间聚类模型. 扩展稀疏子空间聚类的应用领域也是一个重要发展方向.

## 4 结论

本文对稀疏子空间聚类的模型、算法和应用等方面进行了详细分析, 指出了存在的问题, 展望了进一步研究的方向.

## References

- 1 Donoho D L. High-dimensional data analysis: the curses and blessings of dimensionality. *American Mathematical Society Math Challenges Lecture*, 2000. 1–32
- 2 Parsons L, Haque E, Liu H. Subspace clustering for high dimensional data: a review. *ACM SIGKDD Explorations Newsletter*, 2004, **6**(1): 90–105
- 3 Vidal R. Subspace clustering. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2011, **28**(2): 52–68
- 4 Agrawal R, Gehrke J, Gunopulos D, Raghavan P. Automatic subspace clustering of high dimensional data for data mining applications. *ACM SIGMOD Record*, 1998, **27**(2): 94–105
- 5 Lu L, Vidal R. Combined central and subspace clustering for computer vision applications. In: *Proceedings of the 23rd International Conference on Machine Learning (ICML)*. Pittsburgh, USA: ACM, 2006. 593–600
- 6 Hong W, Wright J, Huang K, Ma Y. Multi-scale hybrid linear models for lossy image representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, **15**(12): 3655–3671
- 7 Yang A Y, Wright J, Ma Y, Sastry S. Unsupervised segmentation of natural images via lossy data compression. *Computer Vision and Image Understanding*, 2008, **110**(2): 212–225
- 8 Vidal R, Soatto S, Ma Y, Sastry S. An algebraic geometric approach to the identification of a class of linear hybrid systems. In: *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, HI, USA: IEEE, 2003. 167–172
- 9 Boulton T E, Brown L G. Factorization-based segmentation of motions. In: *Proceedings of the 1991 IEEE Workshop on Visual Motion*. Princeton, NJ: IEEE, 1991. 179–186
- 10 Wu Y, Zhang Z Y, Huang T S, Lin J Y. Multibody grouping via orthogonal subspace decomposition. In: *Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. Kauai, HI, USA: IEEE, 2001. **2**: 252–257
- 11 Vidal R, Ma Y, Sastry S. Generalized principal component analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, **27**(12): 1945–1959
- 12 Rao S R, Yang A Y, Sastry S S, Ma Y. Robust algebraic segmentation of mixed rigid-body and planar motions from two views. *International Journal of Computer Vision*, 2010, **88**(3): 425–446
- 13 Ma Y, Yang A Y, Derksen H, Fossum R. Estimation of subspace arrangements with applications in modeling and segmenting mixed data. *SIAM Review*, 2008, **50**(3): 413–458



- 14 Ho J, Yang M H, Lim J, Lee K C, Kriegman D. Clustering appearances of objects under varying illumination conditions. In: Proceedings of the 2003 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Madison, WI, USA: IEEE, 2003. 1: 11–18
- 15 Bradley P S, Mangasarian O L.  $k$ -plane clustering. *Journal of Global Optimization*, 2000, **16**(1): 23–32
- 16 Tipping M E, Bishop C M. Mixtures of probabilistic principal component analyzers. *Neural Computation*, 1999, **11**(2): 443–482
- 17 Fischler M A, Bolles R C. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*, 1981, **24**: 381–395
- 18 Ma Y, Derksen H, Hong W, Wright J. Segmentation of multivariate mixed data via lossy data coding and compression. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2007, **29**(9): 1546–1562
- 19 Von Luxburg U. A tutorial on spectral clustering. *Statistics and Computing*, 2007, **17**(4): 395–416
- 20 Chen G L, Lerman G. Spectral curvature clustering (SCC). *International Journal of Computer Vision*, 2009, **81**(3): 317–330
- 21 Lauer F, Schnorr C. Spectral clustering of linear subspaces for motion segmentation. In: Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). Kyoto, Japan: IEEE, 2009. 678–685
- 22 Shi J B, Malik J. Normalized cuts and image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, **22**(8): 888–905
- 23 Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, **20**(1): 33–61
- 24 Candés E J. Compressive sampling. In: Proceedings of the 2006 International Congress of Mathematics. Madrid, Spain: the European Mathematical Society, 2006. 1433–1452
- 25 Donoho D L. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289–1306
- 26 Davenport M A, Duarte M F, Eldar Y C, Kutyniok G. Introduction to compressed sensing. *Compressed Sensing: Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- 27 Liu Fang, Wu Jiao, Yang Shu-Yuan, Jiao Li-Cheng. Research advances on structured compressive sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(12): 1980–1995 (刘芳, 武娇, 杨淑媛, 焦李成. 结构化压缩感知研究进展. *自动化学报*, 2013, **39**(12): 1980–1995)
- 28 Elad M, Aharon M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, **15**(12): 3736–3745
- 29 Li T, Wang W W, Feng X C, Xu L. Image denoising using low-rank dictionary and sparse representation. In: Proceedings of the 10th International Conference on Computational Intelligence and Security (CIS'2014). Kunming, Yunnan Province, China: IEEE, 2014. 228–232
- 30 Yang J C, Wright J, Huang T S, Ma Y. Image super-resolution via sparse representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, **19**(11): 2861–2873
- 31 Starck J L, Elad M, Donoho D L. Image decomposition via the combination of sparse representations and a variational approach. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, **14**(10): 1570–1582
- 32 Elhamifar E, Vidal R. Sparse subspace clustering. In: Proceedings of the 2009 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Miami, FL, USA: IEEE, 2009. 2790–2797
- 33 Elhamifar E, Vidal R. Sparse subspace clustering: algorithm, theory, and applications. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, **35**(11): 2765–2781
- 34 Elhamifar E, Vidal R. Sparsity in unions of subspaces for classification and clustering of high-dimensional data. In: Proceedings of the 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. Monticello, Illinois, USA: IEEE, 2011. 1085–1089
- 35 Li C G, Guo J, Zhang H G. Local sparse representation based classification. In: Proceedings of the 20th International Conference on Pattern Recognition (ICPR). Istanbul, Turkey: IEEE, 2010. 649–652
- 36 Yin J, Liu Z H, Jin Z, Yang W K. Kernel sparse representation based classification. *Neurocomputing*, 2012, **77**(1): 120–128
- 37 Wright J, Yang A Y, Ganesh A, Sastry S S, Ma Y. Robust face recognition via sparse representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, **31**(2): 210–227
- 38 Zhang L, Yang M, Feng X C. Sparse representation or collaborative representation: which helps face recognition? In: Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). Barcelona, Spain: IEEE, 2011. 471–478
- 39 Wright J, Ma Y, Mairal J, Sapiro G, Huang T S, Yan S C. Sparse representation for computer vision and pattern recognition. *Proceedings of the IEEE*, 2010, **98**(6): 1031–1044
- 40 Zhang H Y, Lin Z C, Zhang C. A counterexample for the validity of using nuclear norm as a convex surrogate of rank. *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*. Berlin Heidelberg: Springer, 2013. 226–241
- 41 Candés E J, Tao T. The power of convex relaxation: near-optimal matrix completion. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, **56**(5): 2053–2080
- 42 Ma Jian-Wei, Xu Jie, Bao Yue-Quan, Yu Si-Wei. Compressive sensing and its application: from sparse to low-rank regularized optimization. *Signal Processing*, 2012, **28**(5): 609–623 (马坚伟, 徐杰, 鲍跃全, 于四伟. 压缩感知及其应用: 从稀疏约束到低秩约束优化. *信号处理*, 2012, **28**(5): 609–623)

- 43 Peng Yi-Gang, Suo Jin-Li, Dai Qiong-Hai, Xu Wen-Li. From compressed sensing to low-rank matrix recovery: theory and applications. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(7): 981–994  
(彭义刚, 索津莉, 戴琼海, 徐文立. 从压缩传感到低秩矩阵恢复: 理论与应用. *自动化学报*, 2013, **39**(7): 981–994)
- 44 Candés E J, Recht B. Exact matrix completion via convex optimization. *Foundations of Computational Mathematics*, 2009, **9**(6): 717–772
- 45 Cai J F, Candés E J, Shen Z W. A singular value thresholding algorithm for matrix completion. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, **20**(4): 1956–1982
- 46 Candés E J, Li X D, Ma Y, Wright J. Robust principal component analysis? *Journal of the ACM*, 2011, **58**(3): 11.
- 47 Liu G C, Lin Z C, Yu Y. Robust subspace segmentation by low-rank representation. In: Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning (ICML). Haifa, Israel, 2010. 663–670
- 48 Liu G C, Lin Z C, Yan S C, Sun J, Yu Y, Ma Y. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, **35**(1): 171–184
- 49 Zhang Y, Jiang Z L, Davis L S. Learning structured low-rank representations for image classification. In: Proceedings of the 2013 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Portland, OR, USA: IEEE, 2013. 676–683
- 50 Li L Y, Li S, Fu Y. Learning low-rank and discriminative dictionary for image classification. *Image and Vision Computing*, 2014, **32**(10): 814–823
- 51 Chen C F, Wei C P, Wang Y C F. Low-rank matrix recovery with structural incoherence for robust face recognition. In: Proceedings of the 2012 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Providence, RI: IEEE, 2012. 2618–2625
- 52 Zheng Y G, Zhang X R, Yang S Y, Jiao L C. Low-rank representation with local constraint for graph construction. *Neurocomputing*, 2013, **122**: 398–405
- 53 Chen J, Zhang Y. Subspace clustering by exploiting a low-rank representation with a symmetric constraint [Online], available: <http://arxiv.org/pdf/1403.2330v2.pdf>, April 23, 2015
- 54 Vidal R, Favaro P. Low rank subspace clustering (LRSC). *Pattern Recognition Letters*, 2014, **43**: 47–61
- 55 Costeira J P, Kanade T. A multibody factorization method for independently moving objects. *International Journal of Computer Vision*, 1998, **29**(3): 159–179
- 56 Hu H, Lin Z C, Feng J J, Zhou J. Smooth representation clustering. In: Proceedings of the 2014 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Columbus, OH, USA: IEEE, 2014. 3834–3841
- 57 He X F, Niyogi P. Locality preserving projections. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2003, **16**: 153–160
- 58 Liu W F, Pokharel P P, Principe J C. Correntropy: properties and applications in non-Gaussian signal processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(11): 5286–5298
- 59 Lu C Y, Tang J H, Lin M, Lin L, Yan S C, Lin Z C. Correntropy induced  $L_2$  graph for robust subspace clustering. In: Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). Sydney, NSW, Australia: IEEE, 2013. 1801–1808
- 60 Zhang Y Y, Sun Z N, He R, Tan T N. Robust subspace clustering via half-quadratic minimization. In: Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). Sydney, NSW, Australia: IEEE, 2013. 3096–3103
- 61 Feng J S, Lin Z C, Xu H, Yan S C. Robust subspace segmentation with block-diagonal prior. In: Proceedings of the 2014 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Columbus, OH, USA: IEEE, 2014. 3818–3825
- 62 Elhamifar E, Vidal R. Clustering disjoint subspaces via sparse representation. In: Proceedings of the 2010 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP). Dallas, Texas, USA: IEEE, 2010. 1926–1929
- 63 Wang S S, Yuan X T, Yao T S, Yan S C, Shen J L. Efficient subspace segmentation via quadratic programming. In: Proceedings of the 25th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI). San Francisco, California, USA: AAAI Press, 2011. 519–524.
- 64 Luo D J, Nie F P, Ding C, Huang H. Multi-subspace representation and discovery. *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*. Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 405–420
- 65 Liu G C, Yan S C. Latent low-rank representation for subspace segmentation and feature extraction. In: Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). Barcelona, Spain: IEEE, 2011. 1615–1622
- 66 Zhuang L S, Gao H Y, Lin Z C, Ma Y, Zhang X, Yu N H. Non-negative low rank and sparse graph for semi-supervised learning. In: Proceedings of the 2012 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Providence, RI: IEEE, 2012. 2328–2335
- 67 Lu C Y, Min H, Zhao Z Q, Zhu L, Huang D S, Yan S C. Robust and efficient subspace segmentation via least squares regression. In: Proceedings of the the 2012 Computer Vision-European Conference on Computer Vision (ECCV). Florence, Italy: Springer Berlin Heidelberg, 2012. 347–360
- 68 Pham D S, Budhaditya S, Phung D, Venkatesh S. Improved subspace clustering via exploitation of spatial constraints. In: Proceedings of the 2012 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Providence, RI: IEEE, 2012. 550–557

- 69 Wang H J, Qi H N, Zhang G Q. Grouping subspace segmentation [Online], available: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=arnum-ber=6475152>, April 23, 2015
- 70 Saha B, Pham D S, Phung D, Venkatesh S. Sparse subspace clustering via group sparse coding. In: Proceedings of the 2013 SIAM International Conference on Data Mining (SDM 2013). Austin, Texas, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013. 130–138
- 71 Lu C Y, Feng J S, Lin Z C, Yan S C. Correlation adaptive subspace segmentation by Trace Lasso. In: Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). Sydney, Australia: IEEE, 2013. 1345–1352
- 72 Soltanolkotabi M, Candés E J. A geometric analysis of subspace clustering with outliers. *The Annals of Statistics*, 2012, **40**(4): 2195–2238
- 73 Wei S M, Lin Z C. Analysis and improvement of low rank representation for subspace segmentation [Online], available: <http://arxiv.org/pdf/1107.1561.pdf>, April 23, 2015
- 74 Lin Z C, Chen M M, Ma Y. The augmented Lagrange multiplier method for exact recovery of corrupted low-rank matrices. UIUC Technical Report UILU-ENG-09-2215, arXiv preprint arXiv: 1009.5055, 2010
- 75 Nikolova M, Ng M K. Analysis of half-quadratic minimization methods for signal and image recovery. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2005, **27**(3): 937–966
- 76 Lin Z C, Liu R S, Su Z X. Linearized alternating direction method with adaptive penalty for low-rank representation. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2011. 612–620
- 77 Lin Z C, Liu R S, Li H. Linearized alternating direction method with parallel splitting and adaptive penalty for separable convex programs in machine learning. *Machine Learning*, 2015, **99**(2): 287–325
- 78 Patel V M, Van Nguyen H, Vidal R. Latent space sparse subspace clustering. In: Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). Darling Harbour, Sydney: IEEE, 2013. 225–232
- 79 Zhang X, Sun F C, Liu G C, Ma Y. Fast low-rank subspace segmentation. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2014, **26**(5): 1293–1297
- 80 Liu Y Y, Jiao L C, Shang F H. An efficient matrix factorization based low-rank representation for subspace clustering. *Pattern Recognition*, 2013, **46**(1): 284–292
- 81 Liu Y Y, Jiao L C, Shang F H, Yin F, Liu F. An efficient matrix bi-factorization alternative optimization method for low-rank matrix recovery and completion. *Neural Networks*, 2013, **48**: 8–18
- 82 Liu Y Y, Jiao L C, Shang F H. A fast tri-factorization method for low-rank matrix recovery and completion. *Pattern Recognition*, 2013, **46**(1): 163–173
- 83 Favaro P, Vidal R, Ravichandran A. A closed form solution to robust subspace estimation and clustering. In: Proceedings of the 2011 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Providence, RI: IEEE, 2011. 1801–1807
- 84 Peng X, Zhang L, Yi Z. Scalable sparse subspace clustering. In: Proceedings of the 2013 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Portland, OR, USA: IEEE, 2013. 430–437
- 85 Peng X, Zhang L, Yi Z. An out-of-sample extension of sparse subspace clustering and low rank representation for clustering large scale data sets [Online], available: <http://arxiv.org/pdf/1309.6487v1.pdf>, April 23, 2015
- 86 Ma L, Wang C H, Xiao B H, Zhou W. Sparse representation for face recognition based on discriminative low-rank dictionary learning. In: Proceedings of the 2012 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Providence, RI: IEEE, 2012. 2586–2593
- 87 Qian J J, Yang J, Zhang F L, Lin Z C. Robust low-rank regularized regression for face recognition with occlusion. In: Proceedings of the 2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW). Columbus, Ohio, USA: IEEE, 2014. 21–26
- 88 Gui J, Sun Z N, Jia W, Hu R X, Lei Y K, Ji S W. Discriminant sparse neighborhood preserving embedding for face recognition. *Pattern Recognition*, 2012, **45**(8): 2884–2893
- 89 Tron R, Vidal R. A benchmark for the comparison of 3-d motion segmentation algorithms. In: Proceedings of the 2007 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Minneapolis, MN: IEEE, 2007. 1–8
- 90 Rao S R, Tron R, Vidal R, Ma Y. Motion segmentation via robust subspace separation in the presence of outlying, incomplete, or corrupted trajectories. In: Proceedings of the 2008 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Anchorage, AK: IEEE, 2008. 1–8
- 91 Rao S R, Tron R, Vidal R, Ma Y. Motion segmentation in the presence of outlying, incomplete, or corrupted trajectories. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010, **32**(10): 1832–1845
- 92 Li Tao, Wang Wei-Wei, Zhai Dong, Jia Xi-Xi. Weighted-sparse subspace clustering method for image segmentation. *Systems Engineering and Electronics*, 2014, **36**(3): 580–585  
(李涛, 王卫卫, 翟栋, 贾西西. 图像分割的加权稀疏子空间聚类方法. *系统工程与电子技术*, 2014, **36**(3): 580–585)
- 93 Zhang Wen-Juan, Feng Xiang-Chu. Image super-pixels segmentation method based on the non-convex low-rank and sparse constraints. *Journal of Xidian University*, 2013, **40**(5): 86–91  
(张文娟, 冯象初. 非凸低秩稀疏约束的图像超像素分割方法. *西安电子科技大学学报 (自然科学版)*, 2013, **40**(5): 86–91)
- 94 Cheng B, Liu G C, Wang J D, Huang Z Y, Yan S C. Multi-task low-rank affinity pursuit for image segmentation. In: Proceedings of the 2011 International Conference on Computer Vision (ICCV). Barcelona, Spain: IEEE, 2011. 2439–2446
- 95 Lang C Y, Liu G C, Yu J, Yan S C. Saliency detection by multitask sparsity pursuit. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, **21**(3): 1327–1338

- 96 Basri R, Jacobs D W. Lambertian reflectance and linear subspaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, **25**(2): 218–233
- 97 Lee K C, Ho J, Kriegman D. Acquiring linear subspaces for face recognition under variable lighting. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, **27**(5): 684–698
- 98 Oja E. Simplified neuron model as a principal component analyzer. *Journal of Mathematical Biology*, 1982, **15**(3): 267–273
- 99 Babacan S D, Luessi M, Molina R, Katsaggelos A K. Sparse Bayesian methods for low-rank matrix estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(8): 3964–3977
- 100 Zhao Q, Meng D Y, Xu Z B, Zuo W M, Zhang L. Robust principal component analysis with complex noise. In: Proceedings of the 31st International Conference on Machine Learning (ICML). Beijing, China, 2014. 55–63



**王卫卫** 西安电子科技大学数学与统计学院教授。2001 年获西安电子科技大学理学博士学位。主要研究方向为小波、变分偏微分方程、低秩表示、稀疏表示在图像处理中的应用。

E-mail: wwwang@mail.xidian.edu.cn  
(**WANG Wei-Wei** Professor at the School of Mathematics and Statistics,

Xidian University. She received her Ph. D. degree in applied mathematics from Xidian University in 2001. Her research interest covers wavelets, variational and partial differential equations, sparse representation, low rank representation and their applications in image processing.)



**李小平** 西安电子科技大学数学与统计学院博士研究生。主要研究方向为子空间聚类、稀疏表示、低秩表示在图像处理中的应用。本文通信作者。

E-mail: lixpxd2011@163.com

(**LI Xiao-Ping** Ph. D. candidate at the School of Mathematics and Statistics, Xidian University. His research

interest covers subspace clustering, sparse representation, low-rank representation and their applications in image processing. Corresponding author of this paper.)

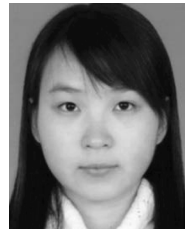


**冯象初** 西安电子科技大学数学与统计学院教授。1999 年获得西安电子科技大学理学博士学位。主要研究方向为数值分析、小波、图像处理的偏微分方程方法。

E-mail: xcfeng@mail.xidian.edu.cn

(**FENG Xiang-Chu** Professor at the School of Mathematics and Statistics, Xidian University. He received his Ph. D. degree in

applied mathematics from Xidian University in 1999. His research interest covers numerical analysis, wavelets, and partial differential equations for image processing.)



**王斯琪** 西安电子科技大学数学与统计学院博士研究生。主要研究方向为图像处理中的数学问题。

E-mail: pearlwangxd@163.com

(**WANG Si-Qi** Ph. D. candidate at the School of Mathematics and Statistics, Xidian University. Her research interest covers mathematical problems in

image processing.)