

基于变尺度变换减少 Sigma 点的 粒子滤波算法研究

赵光琼¹ 陈绍刚¹ 付奎² 唐忠樑² 贺威³

摘要 为了减少传统无味粒子滤波 (Unscented particle filter, UPF) 算法的计算负担, 提出了最小斜度单形无味转换 (Minimal skew simplex UT, MSSUT) 方法, 这种方法是用最小斜度无味卡尔曼滤波来产生粒子的重要性函数. 它不仅能够扩大重要性分布与系统状态的后验概率密度的重叠性, 而且能够通过减少 Sigma 点来减少计算负担. 但是, 随着状态空间维数的增加, Sigma 点集的覆盖半径增大, 导致了 Sigma 点集的聚集性变差. 辅助随机变量变尺度无味变换 (Auxiliary random variable formulation of the scaled unscented transformation, ASUT) 能够克服 Sigma 点集分布扩展的缺点. 所以, 提出了一种高维空间中改进的变尺度最小斜度无味粒子滤波 (Scaled minimal skew simplex unscented particle filter, SMSSUPF) 算法. 仿真结果表明: 在高维状态空间中, 与传统的无味粒子滤波 (UPF) 相比, 计算复杂度和计算负担显著减少. 与最小斜度无味粒子滤波 (Minimal skew simplex unscented particle filter, MSSUPF) 相比, SMSSUPF 减少了系统噪声方差和测量噪声方差所带来的估计误差.

关键词 Sigma 点, 最小斜度无味转换, 粒子滤波, 变尺度变换

引用格式 赵光琼, 陈绍刚, 付奎, 唐忠樑, 贺威. 基于变尺度变换减少 Sigma 点的粒子滤波算法研究. 自动化学报, 2015, 41(7): 1350–1355
DOI 10.16383/j.aas.2015.c140833

A Particle Filter Algorithm Based on Scaled UKF with Reduced Sigma Points

ZHAO Guang-Qiong¹ CHEN Shao-Gang¹
FU Kui² TANG Zhong-Liang² HE Wei³

Abstract In order to reduce the computation burden of conventional unscented particle filter (UPF), a method for particle filter based on minimal skew simplex unscented transformation (MSSUT) is proposed. This method uses a minimal skew simplex unscented Kalman filter to generate importance distribution of the particle filter. It can extend its overlaps and posterior probability density, and reduce the computation burden by reducing sigma points. However, the sigma point set coverage radius expands over dimension of state space, which results in the deterioration of the aggregation of sigma points. Auxiliary random variable formulation of the scaled transformation can overcome the defect of sigma point set distribution expansion. So a scaled minimal skew simplex unscented particle filter (SMSSUPF) is introduced. It is shown by simulation that compared with conventional unscented particle filter, the computation complexity of SMSSUPF can be reduced, the computation burden can be reduced, and compared with spherical simplex unscented particle filter (MSSUPF), SMSSUPF can reduce the system noise and the measurement noise variance estimation error.

Key words Sigma point, minimal skew simplex unscented transformation (MSSUT), particle filter, scaled transformation

Citation Zhao Guang-Qiong, Chen Shao-Gang, Fu Kui, Tang Zhong-Liang, He Wei. A particle filter algorithm based on scaled UKF with reduced sigma points. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(7): 1350–1355

非线性状态估计在卫星导航、雷达跟踪、统计信号及图像处理领域有着广泛的应用^[1-5]. 为了得到最优非线性估计, Jazwinski 提出了扩展卡尔曼滤波 (Extended Kalman filter, EKF), 因为它很小的计算负担而被广泛应用. 遗憾的是, 它不能处理非高斯状态估计, 因为 EKF 在实施非线性方程线性化的时候丢掉了泰勒展式的高阶项, 导致了误差的积累. 考虑到 EKF 的缺点, Julier 和 Uhlman 提出了无味卡尔曼滤波 (Unscented Kalman filter, UKF), 无味卡尔曼滤波适合任何的非线性非高斯状态估计^[6], 它不是采用逼近状态函数, 而是采用一种 UT 变换技术, 即采用确定的样本点来完成状态变量统计特性沿时间的传播. 不需要计算雅可比矩阵, 实现简单, 而且性能要比 EKF 好.

粒子滤波 (Particle filter, PF) 是一种常见的非线性非高斯状态估计方法, 但是粒子退化在粒子滤波中很常见, 所以出现了大量围绕着重要密度函数和采样方法的改进粒子滤波算法^[7-10]. 重要性密度函数采样主要有扩展卡尔曼滤波 (EKF)、无味卡尔曼滤波 (UKF)、迭代的扩展卡尔曼滤波 (Iterative extended Kalman filter, IEKF)^[11]、辅助的粒子滤波 (Auxiliary particle filter, APF)^[12], 而重采样方法目前最热的是连续的马尔科夫蒙特卡罗 (Markov chain Monte Carlo, MCMC) 采样. 在粒子滤波中, 关键的技术是找到一个合适的粒子滤波重要性函数和重采样方法. 一般地, 我们选择先验概率密度函数作为重要性密度函数, 但是忽略了当前的观测信息, 容易陷入粒子枯竭. 考虑到先验概率密度和观测信息, Eric 等提出了无味粒子滤波 (Unscented particle filter, UPF), UPF 综合了 UKF 和 PF 的优点, 利用 UKF 进行实时状态的均值 \hat{x}_{UKF} 和方差 \hat{P}_{PF} 估计, 以正态分布 $N(\hat{x}_{UKF}, \hat{P}_{PF})$ 作为 PF 粒子采样的重要性函数, 则采样粒子从高先验密度区向高似然密度区移动.

随着状态空间维数的增加, 滤波算法的计算负担迅速地增长. 无味变换的运算量与选取的 Sigma 点的数目是成正比的, 因此, 减小运算量的主要方法就是尽量减少 Sigma 点的数目. 如果我们能够找到一种减少 Sigma 点的数目的方法, 那么无味变换的滤波算法计算效率就能得到很大提高. 对此, 许多方法已经被发展来研究此问题. Julier 于 2002 年提出了最小斜度无味转换^[13]. 2003 年, Julier 又提出了球形单形无味转换^[14]. 这两种算法的计算负担显然比 UT 转换要小得多^[15-16]. 但是 Sigma 点的覆盖半径随着维数的增加而增加, Sigma 点到中心 \bar{x} 的距离变大, 从而会产生非局部效应, 在遇到一些强非线性的情况下, 可能引进很大的误差. Julier 提出的变尺度变换可以解决这些问题, 通过该方法引入比例因子 α 控制采样点到中心点的距离及高阶项误差带来的影响, 也可以确保预测协方差的半正定性. 粒子滤波中的参数 κ , Q , R 以及粒子个数和重采样方法对精度影响很大^[17-18], 所以参数的选取非常重要.

本文主要研究了最小斜度无味转换和辅助随机变量无味

收稿日期 2014-12-03 录用日期 2015-03-03

Manuscript received December 3, 2014; accepted March 3, 2015

国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2014CB744206) 资助

Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2014CB744206)

本文责任编辑 孙长银

Recommended by Associate Editor SUN Chang-Yin

1. 电子科技大学数学科学学院 成都 611731 2. 电子科技大学机器人研究中心 成都 611731 3. 北京科技大学自动化学院 北京 100083

1. School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731 2. Center for Robotics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731 3. School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083

转换性能, 提出了变尺度最小斜度无味粒子滤波 (Scaled minimal skew simplex unscented particle filter, SMSS-UPF). 并且将 UPF、最小斜度无味粒子滤波 (Minimal skew simplex unscented particle filter, MSSUPF)、SMSSUPF 运用于非线性状态估计中. 本文的主要贡献在于在高维空间中使用最小斜度单形 Sigma 点采样代替无味粒子滤波的对称 Sigma 点采样, Sigma 采样点几乎减少了一半, 降低了计算负担. 与此同时, SMSSUPF 采用变尺度变换来提高 Sigma 点的聚集性. 在 SMSSUPF 中引入了参数 α, β, κ , 这些参数对粒子滤波的精度产生了很大的影响, 当状态模型噪声方差和量测模型噪声协方差改变时, MSSUPF 精度会变得很差, 而 SMSSUPF 和 UPF 能够保持一定的精度.

1 最小斜度 Sigma 点集

一直以来, 各种算法追求的目标之一是: 减小运算量, 提高实时性, 尤其是在一些实时性要求较高的场合显得更为突出. 传统的无味变换需要选择 $2n+1$ 个 Sigma 点, 而 n 维球形单形具有 $n+1$ 个点, 当同时考虑匹配 \mathbf{x} 的均值与协方差阵时, 所需的 Sigma 点的数目至少为 $n+1$ 个. Sigma 点数最小值 $n+1$ 的单形无味变换只能精确到二阶, 即只能匹配 \mathbf{x} 的均值和协方差. 后来考虑到其他优化的限制, 又需要一个额外点, 所以 Sigma 点数由 $2n+1$ 减少到了 $n+2$, 从而提高了无味滤波算法的运算速度.

考虑一个 n 维随机变量 \mathbf{x} 的均值和方差, 它能够代表 $n+2$ 个 Sigma 点相关权重系数和捕获随机变量的统计信息. Sigma 点信息表示如下: 设 χ_i^j 表示第 i 维向量的第 j 个状态变量, 不失一般性, 设状态向量的均值和协方差为 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, $P_{xx} = I$.

1) 在一维空间中, Sigma 点如下:

$$\chi_i^1 = \begin{cases} \bar{x}, & i = 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2w_1}}, & i = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2w_1}}, & i = 2 \end{cases} \quad (1)$$

且它们相应的权重系数 $\{w_i\}$, $i = 0, 1, 2$ 满足下列方程:

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 = 1 \\ -w_1x_1 + w_2x_2 = 0 \\ w_1x_1^2 + w_2x_2^2 = 1 \\ -w_1x_1^3 + w_2x_2^3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

由式 (2) 得出:

$$w_i = \begin{cases} w_0, & i = 0 \\ \frac{1-w_0}{2}, & i = 1, 2 \end{cases} \quad (3)$$

2) 在二维空间中, Sigma 点将增加到 4 个, 且新增加的向量为 $(0, x_3)$, 权系数为 w_3 . 由一维时的情形类推, 满足下列方程:

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\ -w_1x_3 + w_3x_3 - w_2x_3 = 0 \\ w_1x_3^2 + w_2x_3^2 + w_3x_3^2 = 1 \\ -w_1x_3^3 - w_2x_3^3 + w_3x_3^3 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

求解式 (4) 得到 $w_3 = 2w_1$, $x_3 = 1/\sqrt{4w_1}$.

3) 以此类推, 空间维数逐级扩展, 则 $n+1$ 维满足下面方程:

$$\begin{cases} 2w_1 + \sum_{i=3}^{n+1} w_i = 1 - w_0 \\ w_{n+1}x_{n+1} - x_{n+1} \left(2w_1 + \sum_{i=3}^n w_i \right) = 0 \\ w_{n+1}x_{n+1}^2 - x_{n+1}^2 \left(2w_1 + \sum_{i=3}^n w_i \right) = 1 \\ w_{n+1}x_{n+1}^3 - x_{n+1}^3 \left(2w_1 + \sum_{i=3}^n w_i \right) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

求解式 (5) 得出:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1-w_0}{2}, & i = 1 \\ w_1, & i = 2 \\ 2^{i-2}w_1, & i = 3, \dots, n+1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\chi_j^i = \begin{cases} \left[\chi_0^{j-1} \quad 0 \right]^T, & i = 0 \\ \left[\chi_i^{j-1} \quad \frac{-1}{\sqrt{2w_{j+1}}} \right]^T, & i = 1, \dots, j \\ \left[\mathbf{0}_{j-1} \quad \frac{1}{\sqrt{2w_{j+1}}} \right]^T, & i = j+1 \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{0}_j$ 表示 j 维零向量, χ_i^j 表示 i 维向量的第 j 个向量. Sigma 点的采样过程描述如下:

$$\mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}} + \sqrt{P} \chi_i^n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n+1 \quad (8)$$

2 变尺度无味变换

输入变量 \mathbf{x} 的统计量均值 $\bar{\mathbf{x}}$ 和协方差 P_{xx} , 确定 Sigma 点采样策略, 得到一些采样点及相应的均值加权权值 ω_i^m 和协方差加权权值 ω_i^c . 如果不采用变尺度变换, 则 $\omega_i^m = \omega_i^c = \omega_i$. 变尺度变换从 UT 变换原理出发, 引进参数 α, β, κ , 实现 Sigma 点集良好的聚集性. 假设 \mathbf{x} 是 n 维随机变量且均值和协方差分别为 $\bar{\mathbf{x}}$ 和 P_{xx} , 引入一个随机变量 \mathbf{y} 并且通过非线性转换传递样本点来计算 $\bar{\mathbf{y}}$ 和 P_{yy} .

$$\mathbf{y} = f[\mathbf{x}] \quad (9)$$

为了得到 \mathbf{y} 的均值和协方差, 在 $\bar{\mathbf{x}}$ 点利用泰勒展开式扩展 $f[\cdot]$. 对于式 (9), 设 $\mathbf{x} = \delta\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}$, $\delta\mathbf{x}$ 为 0 均值的随机变量, 并且协方差为 P_{xx} .

$$\begin{aligned} f[\mathbf{x}] &= f[\delta\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}] = \\ & f[\bar{\mathbf{x}}] + \nabla f \delta\mathbf{x} + \frac{1}{2} \nabla^2 f \delta\mathbf{x}^2 + \frac{1}{3!} \nabla^3 f \delta\mathbf{x}^3 + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

则 \mathbf{y} 的期望和协方差如下:

$$\bar{\mathbf{y}} = E[\mathbf{y}] = f[\bar{\mathbf{x}}] + \frac{1}{2} \nabla^2 f P_{xx} + \frac{1}{6} \nabla^3 f E[\delta\mathbf{x}^3] + \dots \quad (11)$$

$$\begin{aligned} P_{yy} &= E[(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T] = \\ & \nabla f P_{xx} (\nabla f)^T + \frac{1}{4} \nabla^2 f E[\delta\mathbf{x}^3] (\nabla f)^T + \\ & \frac{1}{2} \nabla f E[\delta\mathbf{x}^3] (\nabla^2 f)^T + \frac{1}{2} \nabla^2 f (E[\delta\mathbf{x}^4] + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3!} \nabla^3 f E[\delta \mathbf{x}^4] (\nabla f)^T + \dots \quad (12)$$

利用 Sigma 点的变尺度方法来克服维数的缺点, 这些点必须满足以下方程:

$$\mathbf{z}_i = \boldsymbol{\chi}_0 + \alpha(\boldsymbol{\chi}_i - \boldsymbol{\chi}_0) \quad (13)$$

我们考虑将 \mathbf{x} 的均值通过非线性方程转换为另一个随机变量, $\mathbf{z} = g[\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \alpha, \mu]$, 这里

$$g[\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \alpha, \mu] = \frac{f[\bar{\mathbf{x}} + \alpha(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})] - f[\bar{\mathbf{x}}]}{\mu} + f[\bar{\mathbf{x}}] \quad (14)$$

其中, α 是一个正的尺度参数, 在 $\bar{\mathbf{x}}$ 处展开 $g[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$.

$$g[\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \alpha, \mu] = f[\bar{\mathbf{x}}] + \nabla f \frac{\alpha}{\mu} \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \nabla^2 f \frac{\alpha^2}{\mu} \delta \mathbf{x}^2 + \frac{1}{3!} \nabla^3 f \frac{\alpha^3}{\mu} \delta \mathbf{x}^3 + \dots \quad (15)$$

计算期望, \mathbf{z} 的均值得:

$$\bar{\mathbf{z}} = f[\bar{\mathbf{x}}] + \frac{1}{2} \nabla^2 f \frac{\alpha^2}{\mu} P_{xx} + \frac{1}{6} \nabla^3 f \frac{\alpha^3}{\mu} E[\delta \mathbf{x}^3] + \dots \quad (16)$$

辅助的随机变量的变尺度无迹变换总结如下:

$$\mathbf{Z}_i = \frac{f[\bar{\mathbf{x}} + \alpha(\boldsymbol{\chi}_i - \bar{\mathbf{x}})] - f[\bar{\mathbf{x}}]}{\alpha^2} + f[\bar{\mathbf{x}}] \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{z}} = \sum_{i=0}^p W_i \mathbf{Z}_i \quad (18)$$

$$P = \alpha^2 \sum_{i=0}^p W_i (\mathbf{Z}_i - \bar{\mathbf{z}})(\mathbf{Z}_i - \bar{\mathbf{z}})^T \quad (19)$$

3 变尺度最小斜度无味粒子滤波

在最小偏度单形采样中, 采样点并非中心对称, 低维扩展而来的采样点到中心点的距离会随着维数的增加而产生非局部效应问题, 从而影响精度. 变尺度变换可以采用调整参数 α 的值来解决非局部效应问题, 通过引入参数 α 和 β 来保证协方差矩阵的半正定性. 另一方面, Sigma 点从 $2n + 1$ 个点减少到了 $n + 2$ 个点, 这种方法减少了 Sigma 点和提高了运算效率.

变尺度最小斜度无味粒子滤波算法如下:

步骤 1. 初始化: $\hat{\mathbf{x}}_0 = E[\mathbf{x}_0]$, $S_0 = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]$.

步骤 2. 当 $k \geq 1$, 计算 $n + 1$ 个 Sigma 点 $\boldsymbol{\chi}_i$ 和权重 w_i . 通过尺度变换, 引入 α 和 β 参数, 比例因子 α 控制 Sigma 点中心点的距离且是一个较小的正数, 取值范围在 $[10^{-4}, 1]$ 上, 则 β 引入随机变量 \mathbf{x} 的先验分布信息.

步骤 2.1. 选择权重 $\omega_{m0}, \omega_{c0}, 0 \leq \omega_{m0} \leq 1, 0 \leq \omega_{c0} \leq 1$, 计算其他权重 ω_i , 下面的权值做比例修正^[19].

$$\begin{cases} \omega_{m0} = \frac{\kappa}{n + \kappa} \\ \omega_{c0} = \frac{\kappa}{(n + \kappa) + (1 - \alpha^2 + \beta)} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \omega_0^m = \frac{\omega_{m0}}{\alpha^2} + (1 - \frac{1}{\alpha^2}) \\ \omega_0^c = \frac{\omega_{c0}}{\alpha^2} + (1 + \beta - \alpha^2) \\ \omega_1 = \frac{(1 - \omega_0^m)}{\alpha^2 2^n}, & i = 1 \\ \omega_2 = \omega_1, & i = 2 \\ \omega_i^m = \omega_i^c = \omega_i = \frac{2^{i-1} \omega_1}{\alpha^2}, & i = 3, \dots, n + 1 \end{cases} \quad (21)$$

其中, $\kappa = \alpha^2(n + \lambda) - n$, ω_i 是第 i 个点的权重且满足 $\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i = 1$.

步骤 2.2. 初始化: 一维最小斜度单行点 $\boldsymbol{\chi}$ 描述如下:

$$\boldsymbol{\chi}_0^1 = [0], \quad \boldsymbol{\chi}_1^1 = \left[\frac{-1}{\sqrt{2\omega_1}} \right], \quad \boldsymbol{\chi}_2^1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega_1}} \right]$$

$\boldsymbol{\chi}_i^j$ 代表 j 维随机变量第 i 个采样点, $\mathbf{0}_j$ 代表 j 维向量.

步骤 2.3. 根据下面的方法, 将向量序列扩展到 n 维, $j = 2, \dots, n$.

$$\boldsymbol{\chi}_i^j = \begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_0^{j-1} \\ 0 \end{bmatrix}, & i = 0 \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_i^j \\ -\frac{1}{\sqrt{2\omega_j}} \end{bmatrix}, & i = 1, 2, \dots, j \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_j \\ 1 \\ \sqrt{2\omega_j} \end{bmatrix}, & i = j + 1 \end{cases} \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\chi}_i = (\boldsymbol{\chi}_i^1, \boldsymbol{\chi}_i^2, \dots, \boldsymbol{\chi}_i^n)^T$$

步骤 3. 计算采样点:

$$\boldsymbol{\chi}_k = [\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{x}}_k + \sqrt{\alpha^2(n + \kappa)} \boldsymbol{\chi}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_k + \sqrt{\alpha^2(n + \kappa)} \boldsymbol{\chi}_n] \quad (23)$$

步骤 4. Sigma 点通过系统方程传播如下:

$$\boldsymbol{\chi}_{k|k-1} = f_k(\boldsymbol{\chi}_{k-1}, k - 1) \quad (24)$$

步骤 5. 估计 $\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}$ 的状态均值和协方差:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{N+1} \omega_i \boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1} \quad (25)$$

$$P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{N+1} \omega_i (\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \times (\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T + P_\omega \quad (26)$$

步骤 6. 计算量测预测步骤:

$$\mathbf{z}_{k|k-1} = h_k(\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}) \quad (27)$$

步骤 7. 估计量测预测的均值和协方差:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{N+1} \omega_i \mathbf{z}_{i,k|k-1} \quad (28)$$

$$P_{z_k} = \alpha^2 \sum_{i=0}^{N+1} \omega_i (\mathbf{z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \times (\mathbf{z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T + P_v \quad (29)$$

$$P_{xz} = \sum_{i=0}^{N+1} \omega_i [\mathbf{x}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] [\mathbf{z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}]^T \quad (30)$$

步骤 8. 计算滤波增益和修正协方差:

$$K_k = P_{xz} P_{z_k}^{-1} \quad (31)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + K_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \quad (32)$$

$$P_k = P_{k|k-1} - K_k P_{z_k} K_k^T \quad (33)$$

步骤 9. 从重要密度中抽取 N 个粒子, $i = 1, \dots, N$.

$$\mathbf{x}_k^{(i)} \sim N(\mathbf{x}_k^{(i)}; \mathbf{x}_k^{(i)}, P_k^{(i)}) \quad (34)$$

步骤 10. 计算每一个粒子的权重:

$$\omega_k^{(i)} = p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) \bar{\omega}_{k-1}^{(i)} \quad (35)$$

$$\omega_T = \sum_{i=1}^N \omega_k^{(i)}$$

$$\bar{\omega}_k^{(i)} = \frac{\omega_k^{(i)}}{\omega_T} \quad (36)$$

步骤 11. 如果 $N_{eff} < N_{th}$, 设 $\bar{\omega}_k^{(i)} = 1/N$, 重采样 $\{[\mathbf{x}_k^{(i)}, \omega_k^{(i)}]_{i=1}^N\}$.

步骤 12. 输出:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N \bar{\omega}_k^{(i)} \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(i)}) \quad (37)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = E(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N \bar{\omega}_k^{(i)} \mathbf{x}_k^{(i)} \quad (38)$$

$$\hat{P}_k = \sum_{i=1}^N \bar{\omega}_k^{(i)} (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^{(i)}) (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^{(i)})^T \quad (39)$$

粒子滤波基本包括两部分: 重要性密度函数和重采样方法. 这里最小斜度重采样方法和 UPF 的重采样方法一致, 所以我们只考虑粒子滤波中重要性密度函数的选取, 在最小斜度中就考虑 Sigma 点的选取. 随着维数的增加, Sigma 点到中心点的距离越来越远, 且权值会变得越来越小. 文献 [16] 指出, 在最小斜度单形 Sigma 滤波中, 状态一步预测的非线性误差会通过观测模型传递到观测一步预测, 导致最终滤波发散. 通过变尺度方法的处理, 可以提高算法的稳定性, 降低高阶项误差的影响. 文献 [20] 指出, 变尺度无味变换在均值和协方差的估计上可以精确到二阶, 三阶以上的误差要通过参数 α 来控制, 同时, 这些参数还可以保证估计协方差的半正定性, 而且变尺度变换在保证性能的同时计算量也不会增加. 文献 [19] 指出, 变尺度最小斜度 Sigma 采样位置由参数 α 控制, 即

$$d_i = \alpha \sqrt{\boldsymbol{\chi}_i^j L L^T \boldsymbol{\chi}_i^j}$$

距离越远采样点的参考价值越小, 即产生了非局部效应问题, 所以这个采样点应该控制在一定的范围. 对采样点做比例 UT 变换方程 (23), 相当于对式 (9) 做变换^[13]:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x} + \alpha(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}))$$

由此可以看出, \mathbf{y} 的均值和协方差都达到了二阶截断精度, 并且可以用 α 来调节高阶误差项, 进而提高估计精度.

4 仿真和实验分析

通过一个典型的非线性系统来比较 MSSUPF、SMSSUPF 以及 UPF 的性能, 系统方程和观测方程如下:

$$\begin{aligned} x_k &= 1 + \sin(0.4\pi k) + 0.5x_{k-1} + w_{k-1} \\ y_k &= \begin{cases} 0.2x_k^2 + v_k, & k \leq 30 \\ 0.5x_k - 2 + v_k, & k > 30 \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

观测时间 $T = 500$, 初始状态 $\mathbf{x}_0 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0]^T$, 参数设为 $\alpha = 0.01$, $\beta = 2$, $\lambda = 0$, 粒子数 N 是 100. 状态估计的均值为 $\hat{\mathbf{x}}_k$, 模拟的均方误差定义为

$$RMSE = \left(\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\hat{\mathbf{x}}_k - x_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

在粒子滤波中, 时间更新计算一步预测估计误差协方差时, 状态模型噪声协方差矩阵 Q 和量测模型噪声协方差矩阵 R 会影响一步预测估计误差协方差矩阵大小, 导致最终的估计误差协方差阵错误. 而最终估计误差协方差矩阵决定了采样点分布范围的半径, 所以参数 Q 和 R 对粒子滤波精度影响很大.

下面研究 Q 对粒子滤波的精度影响, 设

$$Q = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{bmatrix} \quad (41)$$

图 1 和图 2 分别表示在 $r = 10$ 的情况下, $q = 0.1$ 和 $q = 0.01$ 时, 三种粒子滤波的精度仿真结果. 表 1 表示在 $r = 10$ 的情况下, 三种粒子滤波性能比较. 由此可以看出, q 的取值对三种粒子滤波的影响很大, q 值取得太大, 系统模型不能有效地利用状态模型对测量噪声进行修正, 因此三种滤波都呈现 q 越大精度越低. 但是 UPF 和 SMSSUPF 都能在一定范围内保持精度, 而 MSSUPF 随着 q 值增大, 出现了发散的情况.

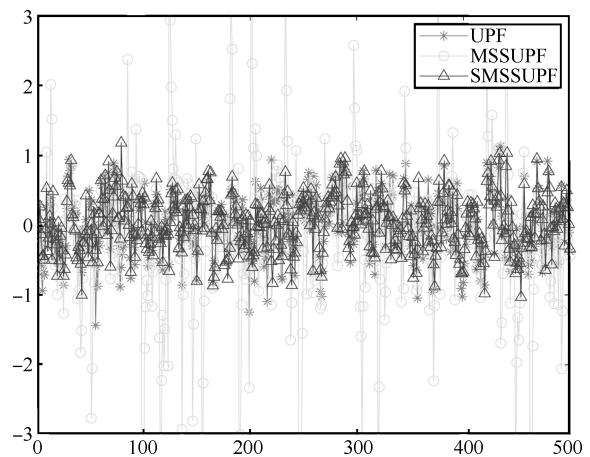


图 1 三种滤波算法在 $q = 0.1$ 时性能比较

Fig. 1 Performance of three different filter with $q = 0.1$

表 1 Q 不同值对粒子滤波性能的影响
Table 1 Performance influence of different particle filters with different Q

Algorithm	$q = 1$	$q = 0.1$	$q = 0.01$	$q = 0.001$	$q = 0.0001$	$q = 0.00001$	Time (s)
UPF	1.4984	0.84851	0.15573	0.082985	0.086643	0.055827	21.683
MSSUPF	5.8083	5.2345	1.6428	0.95403	0.6575	0.19036	17.812
SMSSUPF	1.3037	0.77029	0.14889	0.061668	0.070857	0.049811	18.337

表 2 R 不同值对粒子滤波性能的影响
Table 2 Performance influence of different particle filters with different R

Algorithm	$r = 1$	$r = 5$	$r = 10$	$r = 20$	$r = 50$	$r = 100$	Time (s)
UPF	0.6945	0.77943	0.83746	0.86939	0.9355	0.85154	20.313
MSSUPF	0.80361	1.6707	3.2526	4.2874	5.0471	6.5444	17.089
SMSSUPF	0.71223	0.75518	0.95492	0.84799	0.86805	0.84255	17.444

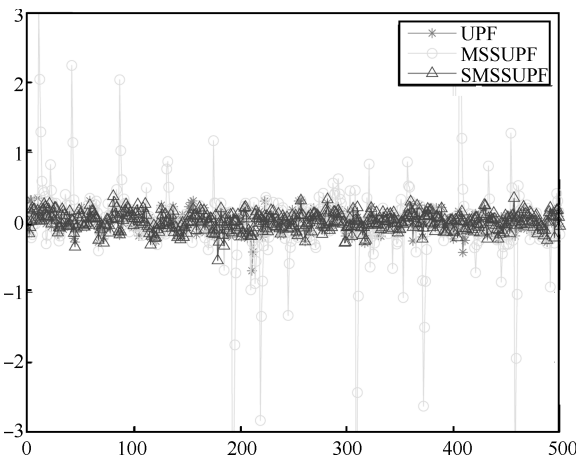


图 2 三种滤波算法在 $q = 0.01$ 时性能比较
Fig. 2 Performance of three different filters with $q = 0.01$

下面研究 R 对粒子滤波的精度影响, 设

$$R = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \quad (42)$$

图 3 和图 4 分别表示在 $q = 0.3$ 的情况下, $r = 1$ 和 $r = 20$ 时, 三种粒子滤波的精度仿真结果. 表 2 表示在 $q = 0.3$ 的情况下, 三种粒子滤波性能比较. 由此可以看出, r 的取值对三种粒子滤波的影响很大, r 值取得太大, MSSUPF 的精度会随着 r 值增大而降低, 进而发散, 但是 UPF 和 SMSSUPF 都能保持一定的精度. 相反, r 很小, 三种滤波算法的精度都是相当.

5 结论

本文中, 我们在精度与计算负担上分析了变尺度变换和最小斜度变换, 提出了改进的粒子滤波算法. 新算法利用变尺度最小斜度无味卡尔曼滤波更新粒子, 提高了 Sigma 点的聚集性, 保证了估计协方差矩阵的半正定性. SMSSUPF 采用 SMSSUT 变换取得了重要性概率密度. 一方面, 相比于 UPF, SMSSUT 采用了最小斜度单形的 Sigma 点采样, 采样

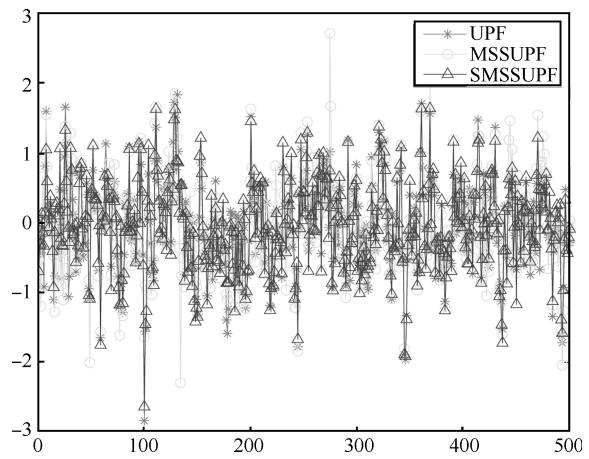


图 3 三种滤波算法在 $r = 1$ 时性能比较
Fig. 3 Performance of three different filters with $r = 1$

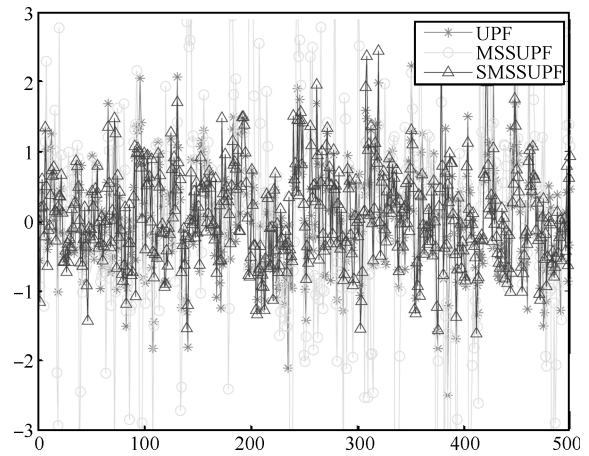


图 4 三种滤波算法在 $r = 20$ 时性能比较
Fig. 4 Performance of three different filters with $r = 20$

的数量少于 UT 变换, 所以 SMSSUPF 在保证滤波性能的前提下, 降低了算法的计算量; 另一方面, 相比于 MSSUPF, 通过比较 SMSSUPF 和 MSSUPF, 仿真结果数据显示: 在系统噪声方差和测量噪声方差很大的情况下, SMSSUPF 的精度比 MSSUPF 的精度高, 而且 MSSUPF 出现了发散的情况. 所以 SMSSUPF 是一种很好的非线性非高斯算法.

References

- 1 Rigatos G G. A derivative-free Kalman filtering approach to state estimation-based control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, **59**(10): 3987–3997
 - 2 Kong L, Kong L F, Wu P L. Adaptive Gaussian particle filter for nonlinear state estimation. In: Proceedings of the 31st Chinese Control Conference. Hefei, China: IEEE, 2012. 2146–2150
 - 3 Zhang X C. A novel cubature Kalman filter for nonlinear state estimation. In: Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control. Florence, Italy: IEEE, 2013. 7797–7802
 - 4 Hu J P, Liu Z X, Wang J H, Wang L, Hu X M. Estimation, intervention and interaction of multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(11): 1796–1804
 - 5 Wen Xin-Yu. Disturbance observer based control for a class of nonlinear systems with input time-delay. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(9): 1882–1888
(文新宇. 一类含输入时滞非线性系统的干扰观测器控制. 自动化学报, 2014, **40**(9): 1882–1888)
 - 6 Novara C, Ruiz F, Milanés M. A new approach to optimal filter design for nonlinear systems. In: Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 5484–5489
 - 7 Zhang F R, Cao J S, Xu Z H. An improved particle swarm optimization particle filtering algorithm. In: Proceedings of the International Conference on 2013 Communications, Circuits and Systems. Chengdu, China: IEEE, 2013. 173–177
 - 8 Zuo Jun-Yi, Zhang Yi-Zhe, Liang Yan. Particle filter based on adaptive part resampling. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(4): 647–652
(左军毅, 张怡哲, 梁彦. 自适应不完全重采样粒子滤波器. 自动化学报, 2012, **38**(4): 647–652)
 - 9 Zhu J, Wang X L, Fang Q S. The improved particle filter algorithm based on weight optimization. In: Proceedings of the 2013 International Conference on Information Science and Cloud Computing Companion. Guangzhou, China: IEEE, 2013. 351–356
 - 10 Ouyang Cheng, Ji Hong-Bing, Guo Zhi-Qiang. Improved multiple model particle PHD and CPHD filtering algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 341–348
(欧阳成, 姬红兵, 郭志强. 改进的多模型粒子 PHD 和 CPHD 滤波算法. 自动化学报, 2012, **38**(3): 341–348)
 - 11 Li L Q, Ji H B, Luo J H. The iterated extended Kalman particle filtering. *Journal of Xidian University (Natural Science)*, 2007, **34**(2): 233–238
 - 12 Charalampidis A C, Papavassilopoulos G P. Improved auxiliary and unscented particle filter variants. In: Proceedings of the 52nd IEEE Annual Conference on Decision and Control. Florence, Italy: IEEE, 2013. 7040–7046
 - 13 Julier S J. The scaled unscented transformation. In: Proceedings of the American Control Conference. Anchorage, AK: IEEE, 2002. 4555–4559
 - 14 Julier S J. The spherical simplex unscented transformation. In: Proceedings of the American Control Conference. Denver, USA: IEEE, 2003. 2430–2434
 - 15 Guo W Y, Han C Z, Lei M. Research on particle filter based on spherical unscented transformation. In: Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing, China: IEEE, 2008. 8388–8392
 - 16 Tian Jun, Qian Jian-Sheng, Li Shi-Yin. Unscented particle filter using iterative minimal skew simplex UKF. *Control and Decision*, 2011, **26**(6): 888–892
(田隽, 钱建生, 李世银. 迭代最小斜度单型 Sigma 采样 UPF 算法. 控制与决策, 2011, **26**(6): 888–892)
 - 17 Ning Xiao-Lin, Fang Jian-Cheng, Ma Xin. Impact of UPF filter parameters on spacecraft celestial navigation performance. *Chinese Space Science and Technology*, 2010, **30**(3): 1–11
(宁晓琳, 房建成, 马辛. UPF 滤波参数对航天器天文导航性能的影响. 中国空间科学技术, 2010, **30**(3): 1–11)
 - 18 Guo Ying-Shi, Wang Chang, Zhang Ya-Qi. Analysis of noise variance's effect on Kalman filter result. *Computer Engineering and Design*, 2014, **35**(2): 641–645
(郭应时, 王畅, 张亚岐. 噪声方差对卡尔曼滤波结果影响分析. 计算机工程与设计, 2014, **35**(2): 641–645)
 - 19 Jiang Wei-Nan, Zhou Hai-Yin, Duan Xiao-Jun, Pan Xiao-Gang. Adaptive selecting method for scaling factor of scaled unscented transformation. *Chinese Space Science and Technology*, 2008, **28**(3): 1–6
(姜伟南, 周海银, 段晓君, 潘晓刚. 比例 UT 变换的一种比例因子自适应选取方法. 2008, **28**(3): 1–6)
 - 20 Cheng Shui-Ying. Unscented transformation and unscented Kalman filtering. *Computer Engineering and Applications*, 2008, **44**(24): 25–35
(程水英. 无味变换与无味卡尔曼滤波. 计算机工程与应用, 2008, **44**(24): 25–35)
- 赵光琼 电子科技大学数学科学学院硕士研究生. 主要研究方向为控制论. E-mail: zhaoguangqiong.math@gmail.com
(ZHAO Guang-Qiong Master student at the School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China. Her main research interest is control theory.)
- 陈绍刚 电子科技大学数学科学学院教授. 主要研究方向为概率论与数理统计. E-mail: csg1966@163.com
(CHEN Shao-Gang Professor at the School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China. His research interest covers probability and mathematical statistics.)
- 付奎 电子科技大学计算机科学与工程学院硕士研究生. 主要研究方向为信息融合. E-mail: kf.uestc@gmail.com
(FU Kui Master student at the School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China. His main research interest is information fusion.)
- 唐忠梁 电子科技大学计算机科学与工程学院博士研究生. 主要研究方向为控制科学与工程. E-mail: zhongliang.isit@gmail.com
(TANG Zhong-Liang Ph.D. candidate at the School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China. His research interest covers control science and engineering.)
- 贺威 北京科技大学自动化学院教授. 主要研究方向为智能控制和机器人技术. 本文通信作者. E-mail: hewei.ac@gmail.com
(HE Wei Professor at the School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing. His research interest covers intelligent control and robotics technology. Corresponding author of this paper.)