

具有对称初始数据的二维反应 扩散方程的边界镇定

齐洁^{1,2} 齐金鹏^{1,2}

摘要 研究了二维圆盘上具有对称初始数据的反应扩散方程的边界控制. 由于初始条件和边界条件关于圆心旋转对称, 系统可以转化为等价的极坐标系下的一维抛物方程. 此时, 极点的奇异性成为了控制器设计中的难点. 本文设计了一系列方程变换, 消除了核函数方程中极点奇异性的影响, 将其转化为修正的 Bessel 方程, 求出了显式的核函数表达式和精确的边界反馈控制律, 扩展了偏微分方程的 backstepping 方法. 系统的收敛速度可通过改变控制器中的一个参数来调节. 然后用 Lyapunov 函数法证明了闭环系统在 H^1 范数下指数稳定, 表明了系统对初值的连续依赖. 最后用数值仿真验证了方法的有效性.

关键词 边界控制, 镇定, 反步法, 扩散反应方程, 李雅普诺夫函数

引用格式 齐洁, 齐金鹏. 具有对称初始数据的二维反应扩散方程的边界镇定. 自动化学报, 2015, 41(1): 209–214

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140108

Boundary Stabilization for a 2-D Reaction-diffusion Equation with Symmetrical Initial Data

Qi Jie^{1,2} Qi Jin-Peng^{1,2}

Abstract This paper designs a boundary controller for a 2-D reaction-diffusion equation with symmetrical initial data. The system can be transformed to an equivalent 1-D parabolic equation in the polar coordinates due to the circle rotationally symmetric initial and boundary conditions. The singularity of the pole brings a great challenge to the design. This paper designs a series function transformations to destroy the impact of the singularity of the pole on the kernel function. Finally, the kernel function is transformed to a modified Bessel function, which produces an explicit kernel as well as an explicit boundary control law. The design process expands the existing backstepping methods for partial differential equations. Also, the convergence rate can be changed by adjusting a parameter in the controller. The exponential stability in H^1 norm is proved, which implies that the system is continuous in terms of the initial conditions. The effectiveness of the method is illustrated with numerical simulations.

Key words Boundary control, stabilization, backstepping, advection-diffusion equation, Lyapunov function

Citation Qi Jie, Qi Jin-Peng. Boundary stabilization for a 2-D reaction-diffusion equation with symmetrical initial data. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(1): 209–214

收稿日期 2014-02-21 录用日期 2014-06-30
Manuscript received February 21, 2014; accepted June 30, 2014
国家自然科学基金重点项目 (61134009), 国家自然科学基金 (61104154), 中央高校基本科研业务费专项资金资助
Supported by National Natural Science Foundation Key Program of China (61134009), National Natural Science Foundation of China (61104154), and Fundamental Research Funds for the Central Universities

本文责任编辑 洪奕光
Recommended by Associate Editor HONG Yi-Guang
1. 东华大学信息科学与技术学院 上海 201620 2. 东华大学数字化纺织服装技术教育部工程研究中心 上海 201620
1. School of Information Science and Technology, Donghua Univer-

近年来, 由于实际应用的需要, 例如流体在多孔介质中的流动、湿纺碳纤维成形过程、火箭推进器动力学、化学反应、描述生物种群的关系等^[1], 分布式参数系统的控制问题受到了广泛的关注, 提出了许多控制器设计与分析的方法. 最早提出的是最优控制的方法, 根据系统的特征值将系统分解为一个有限维的不稳定系统和一个无穷维的稳定系统, 然后求解 Riccati 方程为有限维系统设计控制器^[2–3]. 其他主要方法有基于 Lyapunov 函数的方法^[4–6]、半群理论^[7–8]、滑模控制^[9]、滑模与自抗扰控制结合^[10]、模型降阶与基函数方法^[11]、采用模型预测控制的方法^[12] 和空间连续 backstepping (Spatially continuous backstepping)^[13–14]. 空间连续 backstepping 具有核函数可逆、指数稳定、不用求解繁琐的 Riccati 方程, 以及采用物理上容易实现的边界控制等优点, 引起了 PDE 控制研究领域的广泛关注^[15]. Backstepping 方法在偏微分方程中的应用始于直角坐标系下的一维抛物方程边界控制器的设计^[16], 后来扩展到不同区域上的各类方程^[17–18], 包括将二维圆柱中的涡轮流体模型简化为直角坐标系中的一维复值偏微分方程 (Ginzburg-Landau 方程)^[19], 但很少有文献研究极坐标系下的偏微分方程, 而实际应用又需要用极坐标表示弧形的边界条件, 例如在圆形容器中的化学反应、圆柱形的纤维纺丝成形过程^[20], 和从一个源点发生的热传导过程等. 而且极坐标还可以描述直角坐标系不能表示的复杂曲线, 例如玫瑰线、螺线等, 因此研究极坐标系下的边界控制问题具有重要意义.

本文在极坐标系下讨论了具有对称初始和边界条件的二维反应扩散方程. 状态变量关于圆心旋转对称, 二维系统可转化为等价的一维抛物方程. 本文扩展了一般的 backstepping 方法, 讨论了具有正则奇异点的极坐标一维抛物方程的边界镇定问题. 在设计控制器时, 我们利用了极坐标下的积分定义, 采用了极坐标系下的积分微元, 构造了区别于笛卡尔坐标系下的 Volterra 映射, 简化了后续核函数的计算. 由于原系统和目标系统含有奇异点, 所以推导出来的核函数方程也含有奇异点, 根据文献 [21], 含有正则奇异点的方程仍具有不发散的解. 通过一系列的方程等价变换, 核函数方程可转化为一个修正的 Bessel 方程, 通过此 Bessel 方程的解, 可最终得到核函数的显式表达式, 进一步得到边界的精确反馈控制律. 本文没有直接处理奇异点, 而是通过假设解的具体形式, 消除了极点奇异性, 而与此同时引入了新的奇异点, 这个奇异点与变换后修正贝塞尔方程中正则奇异点相对应. 采用修正贝塞尔方程在奇异点处不发散的解, 我们得到了核函数的精确解. 并且, 控制器中还设置了一个可调参数用于调节系统的收敛速度. 通过构建与 H^1 范数等价的 Lyapunov 函数, 我们证明了闭环系统在 H^1 范数下指数稳定, 表明系统在定义域中不存在无界尖峰, 闭环系统对初值连续依赖. 本文最后用仿真实验验证了理论结果.

1 边界控制器设计

设 $B(0, R)$ 是 \mathbf{R}^2 空间中以原点为中心、 R 为半径的二维圆盘. 记 $B(0, R)$ 的边界为 ∂B , 考虑在 $\mathbf{x} \in B(0, R)$ 上的
city, Shanghai 201620 2. Engineering Research Center of Digitized Textile and Fashion Technology, Ministry of Education, Donghua University, Shanghai 201620

问题:

$$\begin{cases} u_t(t, \mathbf{x}) = \varepsilon \Delta u(t, \mathbf{x}) + \lambda u(t, \mathbf{x}) \\ u(t, \mathbf{x})|_{\partial B} = U(t) \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\lambda > 0$ 是一个常数. 在许多情况下, 初值 u_0 和边界条件 $U(t)$ 关于圆心旋转对称, 因此关于圆心旋转对称的系统 (1) 等价于下面的一维系统.

$$\begin{cases} u_t(t, r) = \varepsilon \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) + \lambda u, & (t, r) \in \mathbf{R}^+ \times (0, R) \\ u(t, R) = U(t) \\ u(0, r) = u_0(r) \end{cases} \quad (2)$$

其中, $r = |\mathbf{x}|$ 表示 \mathbf{x} 的模. 当参数 $\lambda > \frac{z_{01}^2}{R^2} \varepsilon \approx 5.78 \frac{\varepsilon}{R^2}$ 时 (其中 z_{01} 是 Bessel 函数 $J_0(\cdot)$ 的第一个零点), 系统不稳定. 因此, 需要设计边界控制器 $U(t)$, 使得从不同初值 u_0 出发的轨道均能收敛到平衡点 $u(t, x) \equiv 0$.

1.1 边界控制器设计

控制器的设计思路如下: 设计稳定的目标系统, 建立 Volterra 可逆映射关系, 实现从原系统到目标系统的等价变换; 利用原系统与目标系统的等价性, 获得核函数方程, 并求解; 最后考虑控制器与核函数的关系, 得到边界控制器的精确表达式.

定义目标系统

$$\begin{cases} w_t(t, r) = \varepsilon \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r \right) - cw, & (t, r) \in \mathbf{R}^+ \times (0, R) \\ w(t, R) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中, $c \geq 0$ 可用于调节系统的收敛速度. c 越大, 系统收敛越快.

设计 Volterra 可逆映射, 实现原系统 u 到目标系统 w 的变换

$$w(t, r) = u(t, r) - \int_0^r k(r, \rho) u(t, \rho) \rho d\rho \quad (4)$$

其中, $k(r, \rho)$ 为定义在 $\mathcal{T} = \{(r, \rho) : 0 \leq \rho \leq r \leq R\}$ 上的核函数. 积分中的 $\rho d\rho$ 是由极坐标下积分的定义得出. 将式 (4) 代入目标系统式 (3) 的左边, 可得:

$$\begin{aligned} w_t(t, r) &= u_t - \int_0^r k(r, \rho) u_t(t, \rho) \rho d\rho = \\ &= u_t - \int_0^r k(r, \rho) \left(\frac{\varepsilon}{\rho} (\rho u_r)_\rho + \lambda u \right) \rho d\rho = \\ &= \varepsilon \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) + \lambda u - \varepsilon r k(r, r) u_r(t, r) + \\ &= \varepsilon r k_\rho(r, r) u(t, r) - \int_0^r \varepsilon k_{\rho\rho}(r, \rho) \rho u(t, \rho) d\rho - \\ &= \int_0^r \varepsilon k_\rho(r, \rho) u(t, \rho) d\rho - \int_0^r \lambda k(r, \rho) u(t, \rho) d\rho \end{aligned}$$

将式 (4) 代入目标系统式 (3) 的右边, 得:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r \right) - cw = \\ &= \varepsilon \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) - \varepsilon r k(r, r) u_r(t, r) - \\ &= cu - \varepsilon \left(2k(r, r) + r \frac{dk(r, r)}{dr} + r k_r(r, r) \right) u(t, r) - \\ &= \int_0^r \left(\varepsilon \frac{k_r(r, \rho)}{r} + \varepsilon k_{rr}(r, \rho) - ck(r, \rho) \right) u(t, \rho) \rho d\rho \end{aligned}$$

令左边项等于右边项, 并利用式 (2), 计算得到:

$$\begin{aligned} &\lambda u - \varepsilon r k(r, r) u_r(t, r) + \\ &= \varepsilon r k_\rho(r, r) u(t, r) - \int_0^r \varepsilon k_{\rho\rho}(r, \rho) \rho u(t, \rho) d\rho - \\ &= \int_0^r \varepsilon k_\rho(r, \rho) u(t, \rho) d\rho - \int_0^r \lambda k(r, \rho) u(t, \rho) d\rho = \\ &= -cu - \varepsilon \left(2k(r, r) + r \frac{dk(r, r)}{dr} + r k_r(r, r) \right) u(t, r) - \\ &= \int_0^r \left(\varepsilon \frac{k_r(r, \rho)}{r} + \varepsilon k_{rr}(r, \rho) - ck(r, \rho) \right) u(t, \rho) \rho d\rho \end{aligned}$$

因此, 核函数满足下面的双曲偏微分方程:

$$k_{rr}(r, \rho) - k_{\rho\rho}(r, \rho) + \frac{1}{r} k_r(r, \rho) - \frac{1}{\rho} k_\rho(r, \rho) = \frac{\lambda + c}{\varepsilon} k(r, \rho) \quad (5)$$

其边界条件为

$$\frac{dk(r, r)}{dr} + \frac{k(r, r)}{r} = -\frac{\lambda + c}{2r\varepsilon} \quad (6)$$

1.2 核函数求解

通过一系列的等价变换, 可求出核函数的显式表达.

具体的求解过程如下: 首先假设解具有形式 $k(r, \rho) = \Phi \left(\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(r^2 - \rho^2)} \right)$, 则 k 的各项偏导数为

$$k_r = \frac{\lambda + c}{\varepsilon} r \left(\frac{\lambda + c}{\varepsilon} (r^2 - \rho^2) \right)^{-\frac{1}{2}} \Phi' \quad (7)$$

$$k_\rho = -\frac{\lambda + c}{\varepsilon} \rho \left(\frac{\lambda + c}{\varepsilon} (r^2 - \rho^2) \right)^{-\frac{1}{2}} \Phi' \quad (8)$$

$$\begin{aligned} k_{rr} &= \frac{\lambda + c}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda + c}{\varepsilon} r^2 \right) \left(\frac{\lambda + c}{\varepsilon} (r^2 - \rho^2) \right)^{-1} \Phi'' - \\ &= \frac{\lambda + c}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda + c}{\varepsilon} \rho^2 \right) \left(\frac{\lambda + c}{\varepsilon} (r^2 - \rho^2) \right)^{-\frac{3}{2}} \Phi' \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} k_{\rho\rho} &= \frac{\lambda + c}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda + c}{\varepsilon} \rho^2 \right) \left(\frac{\lambda + c}{\varepsilon} (r^2 - \rho^2) \right)^{-1} \Phi'' - \\ &= \frac{\lambda + c}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda + c}{\varepsilon} r^2 \right) \left(\frac{\lambda + c}{\varepsilon} (r^2 - \rho^2) \right)^{-\frac{3}{2}} \Phi' \end{aligned} \quad (10)$$

代入式 (5) 并令 $x = \sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(r^2 - \rho^2)}$, 可得:

$$\Phi''(x) + \frac{3}{x} \Phi'(x) = \Phi(x) \quad (11)$$

由于 $\frac{dk(r,r)}{dr} = k_r(r,r) + k_\rho(r,r)$ 以及式 (7) 和式 (8), 则式 (6) 可写为

$$\Phi(0) = -\frac{\lambda + c}{2\varepsilon} \tag{12}$$

$\rho = 0$ 和 $r = 0$ 都是核函数方程式 (5) 和式 (6) 的奇异点. 通过上面的变换, $\lim_{\rho \rightarrow 0} k_\rho(r, \rho) = 0$, 所以系统可消除奇异点 $\rho = 0$ 的影响, 而使式 (5) 和式 (6) 成立. 但同时也引入了新的奇异点 $\rho = r$, 即 $x = 0$, 根据系统的物理意义, 核函数 $< \infty$, 因此在下面求解的过程中去掉了在奇异点发散的解.

进一步, 令 $\Psi(x) = x\Phi(x)$, 方程变为

$$\begin{cases} x^2\Psi''(x) + x\Psi'(x) - (1 + x^2)\Psi = 0 \\ \Psi(0) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

这是修正的一阶贝塞尔方程 (Bessel function), 其解可表示为

$$\Psi(x) = C_1 I_1(x) + C_2 K_1(x) \tag{14}$$

返回到函数 Φ 得

$$\Phi(x) = C_1 \frac{I_1(x)}{x} + C_2 \frac{K_1(x)}{x} \tag{15}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} K_1(x) = \infty$, 所以 $C_2 = 0$. 由边界条件式 (12), 可求解参数 $C_1 = -\frac{\lambda+c}{\varepsilon}$. 因此, 核函数的封闭解为

$$k(r, \rho) = -\frac{\lambda + c}{\varepsilon} \frac{I_1 \left[\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(r^2 - \rho^2)} \right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(r^2 - \rho^2)}} \tag{16}$$

由于 $\rho = r$ 对于核函数及其导数具有奇异性, 所以需要验证边界条件式 (6) 是否满足. 由于 $\lim_{r \rightarrow \rho} k(r, \rho) = -\frac{\lambda+c}{2\varepsilon}$, 因此还需检查 $\frac{dk(r,r)}{dr}$ 是否为零. 将核函数的解带入 $\frac{dk(r,r)}{dr}$, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow r} k_r(r, \rho) + k_\rho(r, \rho) &= \lim_{\rho \rightarrow r} -\frac{\lambda + c}{\varepsilon} \left[(I_0 + I_2) \frac{r - \rho}{2(r^2 - \rho^2)} - \right. \\ &\quad \left. \frac{I_1}{\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(r^2 - \rho^2)}} \frac{r - \rho}{r^2 - \rho^2} \right] = \lim_{\rho \rightarrow r} -\frac{\lambda + c}{\varepsilon(r + \rho)} \times \\ &\quad \left[\frac{(I_0 + I_2)}{2} - \frac{I_1 \left[\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(r^2 - \rho^2)} \right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(r^2 - \rho^2)}} \right] = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

即可验证边界条件式 (6).

由变换式 (4), 可得边界控制器:

$$u(t, R) = -\frac{\lambda + c}{\varepsilon} \int_0^R \frac{I_1 \left[\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(R^2 - \rho^2)} \right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(R^2 - \rho^2)}} u(t, \rho) \rho d\rho \tag{18}$$

2 H^1 稳定性

本节证明系统的稳定性. 首先定义二维系统式 (1) 在圆

盘 $B(0, R)$ 上的 L^2 和 H^1 范数为

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x})\|_{L^2(B)} &= \left(\int_B |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\int_0^R \int_{-\pi}^\pi |f(r, \theta)|^2 r d\theta dr \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x})\|_{H^1(B)} &= \|f(\mathbf{x})\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{L^2} = \\ &= \|f(\mathbf{x})\|_{L^2} + \left\| \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\|_{L^2} + \\ &= \left\| \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\|_{L^2} \end{aligned} \tag{20}$$

式 (19) 和式 (20) 用到了笛卡尔坐标到极坐标的转化关系. 当函数关于圆心对称, 函数对 θ 的偏导数等于零, 则可通过研究如下等价的范数得出二维系统式 (1) 的稳定性.

$$\|f(r)\|_{L^2} = \left(\int_0^R |f(r)|^2 r dr \right)^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

$$\|f(r)\|_{H^1} = \|f(r)\|_{L^2} + \|f_r(r)\|_{L^2} \tag{22}$$

首先讨论目标系统的稳定性, 给出下面的引理.

引理 1. 如果初始值 $w_0(r) \in H^1$ 且满足相容条件 $w_0(R) = 0$, 则存在 $D, \alpha > 0$, 使得系统 $w(t, r)$ 在 H^1 范数下指数稳定, 即

$$\|w(t, r)\|_{H^1} \leq D e^{-\alpha t} \|w_0\|_{H^1} \tag{23}$$

证明. 首先讨论系统 $w(t, r)$ 解的存在性与正则性. 在空间 $L^2(0, R; r dr)$ 中引入算子: $Aw = -(w_r r + \frac{1}{r} w_r)$, $D(A) = \{w \in L^2(0, R; r dr), Aw \in L^2(0, R; r dr), w(R) = 0\}$, 则 A 是 $L^2(0, R; r dr)$ 的一个正自伴算子. 运用 Hille-Yoida 定理, 可得 $w(t, r)$ 的存在性与正则性^[22].

进一步研究系统的稳定性. 设 Lyapunov 函数为

$$V_1 = \frac{1}{2} \|w(t, r)\|_{L^2}^2 \tag{24}$$

求 V_1 对时间的导数, 得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \int_0^R w_t w r dr = \\ &= - \int_0^R \frac{\varepsilon}{r} (w_r r)_r w r dr - c \int_0^R w^2 r dr = \\ &= -\varepsilon \int_0^R (w_r)^2 r dr - c \int_0^R w^2 r dr = \\ &= -\varepsilon \|w_r\|_{L^2}^2 - c \|w\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{25}$$

上面的推导中采用了分步积分法. 根据极坐标下的 Poincare 不等式:

$$\|w\|_{L^2}^2 \leq 4R^2 \|w_r\|_{L^2}^2 \tag{26}$$

V_1 的导数可写为

$$\dot{V}_1 \leq -\left(\frac{\varepsilon}{4R^2} + c\right) \|w\|_{L^2}^2 \leq -\alpha_0 V_1 \tag{27}$$

其中, $\alpha_0 = \frac{\varepsilon}{2R^2} + 2c$. 由于 V_1 与 L^2 范数等价, 所以 w 在 L^2 范数指数下稳定. 定义与 H^1 范数等价的 Lyapunov 函数:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \|w_r\|_{L^2}^2 \tag{28}$$

则:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \int_0^R (w_{rt} w_r) r dr = \\ &\dot{V}_1 - \int_0^R w_t (w_r r)_r dr = \\ &\dot{V}_1 - \varepsilon \int_0^R \frac{1}{r} |(r w_r)_r|^2 dr + \int_0^R c w (w_r r)_r dr = \\ &\dot{V}_1 - \varepsilon \int_0^R \frac{1}{r} |(r w_r)_r|^2 dr - \int_0^R c (w_r)^2 r dr \leq \\ &\dot{V}_1 - c \|w_r\|_{L^2}^2 \leq -\alpha V_2 \end{aligned} \quad (29)$$

其中, $\alpha = 2c$. \square

引理 2. 如果函数 $g(r)$ 定义为函数 $f(r)$ 的 Volterra 变换:

$$g(r) = f(r) + \int_0^r \rho F(r, \rho) f(\rho) d\rho \quad (30)$$

其中, $F(r, \rho) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{T})$, $\mathcal{T} = \{(r, \rho) : 0 \leq \rho \leq r \leq R\}$, 则

$$\|g(r)\|_{L^2} \leq B_1 \|f(r)\|_{L^2} \quad (31)$$

$$\|g(r)\|_{H^1} \leq B_2 \|f(r)\|_{H^1} \quad (32)$$

证明. 因为 $F(r, \rho) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{T})$, 则有 $\forall (r, \rho) \in \mathcal{T}$, 使得 $|F(r, \rho)| \leq M$ 且 $|F_r(r, \rho)| \leq M_r$.

$$\begin{aligned} \|g(r)\|_{L^2} &\leq \|f(r)\|_{L^2} + \left\| \int_0^r \rho F(r, \rho) f(\rho) d\rho \right\|_{L^2} = \\ &\|f(r)\|_{L^2} + \left[\int_0^R \left| \int_0^r \rho F(r, \rho) f(\rho) d\rho \right|^2 r dr \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\|f(r)\|_{L^2} + M \left[\int_0^R \frac{r^3}{2} dr \int_0^R |f(\rho)|^2 \rho d\rho \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &(1 + M \frac{R^2}{2\sqrt{2}}) \|f(r)\|_{L^2} \end{aligned} \quad (33)$$

上面的推导用到了 Hölder 不等式. 令 $B_1 = 1 + M \frac{R^2}{2\sqrt{2}}$, 即证明了不等式 (31).

$$\begin{aligned} \|g(r)\|_{H^1} &\leq \|g(r)\|_{L^2} + \|g_r(r)\|_{L^2} \leq \\ &B_1 \|f(r)\|_{L^2} + \|f_r(r) + r F(r, r) f(r) + \\ &\int_0^r \rho F_r(r, \rho) f(\rho) d\rho\|_{L^2} \leq \\ &B_1 \|f(r)\|_{L^2} + \|f_r(r)\|_{L^2} + RM \|f(r)\|_{L^2} + \\ &M_r \left[\int_0^R \frac{r^3}{2} dr \int_0^R |f(\rho)|^2 \rho d\rho \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &(B_1 + M_r \frac{R^2}{2\sqrt{2}} + RM) \|f(r)\|_{L^2} + \|f_r(r)\|_{L^2} \end{aligned}$$

令 $B_2 = \max\{B_1 + M_r \frac{R^2}{2\sqrt{2}} + RM, 1\}$, 即证明了不等式 (32). \square

引理 2 表明函数 g 和 f 的 L^2 与 H^1 范数是等价的. 由于变换式 (4) 可逆, 则从 w 到 u 的可逆变换为

$$u(t, r) = w(t, r) + \int_0^r l(r, \rho) w(t, \rho) \rho d\rho \quad (34)$$

得到逆变换核函数为

$$l(r, \rho) = -\frac{\lambda + c}{\varepsilon} \frac{J_1 \left[\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}} (r^2 - \rho^2) \right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}} (r^2 - \rho^2)} \quad (35)$$

正、逆变换的核函数均有 $k(r, \rho), l(r, \rho) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{T})$, 所以运用引理 2 和引理 1, 可得:

定理 1. 系统式 (2) 在边界控制器式 (18) 的作用下指数稳定, 即存在 $D_1, D_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$, 使得

1) 如果初始条件 $u_0 \in L^2$, 则 $u \in \mathcal{C}([0, \infty), L^2)$ 且

$$\|u(t, r)\|_{L^2} \leq D_1 e^{-\alpha_1 t} \|u_0\|_{L^2} \quad (36)$$

2) 如果初始条件 $u_0 \in H^1$ 且满足相容条件

$$u_0(R) = \int_0^R \frac{\lambda + c}{\varepsilon} \frac{I_1 \left[\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}} (R^2 - \rho^2) \right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}} (R^2 - \rho^2)} u_0(\rho) \rho d\rho \quad (37)$$

则有 $u \in \mathcal{C}([0, \infty), H^1)$ 且

$$\|u(t, r)\|_{H^1} \leq D_2 e^{-\alpha_2 t} \|u_0\|_{H^1} \quad (38)$$

3 仿真

为了检验控制器的性能, 采用有限差分方法设计仿真实验. 仿真参数为边界值 $R = 1$, 控制参数 $c = 3$, 系统的反应项参数 $\lambda = 20$, 扩散系数 $\varepsilon = 1$. 将方程沿轴向 r 80 等分, 共 $N = 81$ 个端点, 步长为 $h_r = \frac{R}{N-0.5} = 0.0125$, 时间步长为 $\Delta t = 0.01$ s. r_i 按照中心点取值, 即 $r_i = (i - 1/2)h_r$, $i = 1, \dots, N$. 对于 $i = 2, \dots, N - 1$, 空间轴向采用三点中心离散化, 截断误差为 $O(h_r^2)$.

$$\dot{u}_i = \frac{\varepsilon(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}))}{h_r^2} + \frac{\varepsilon(u_{i+1} - u_{i-1}))}{2r_i h_r} + \lambda r_i^2 u_i \quad (39)$$

对于 $i = 1$, 由步长 h_r 与 r_i 的关系, 可以消去 u_0 前面的系数, 所以离散化表达式为

$$\dot{u}_1 = \frac{2\varepsilon(u_2 - u_1)}{h_r^2} + \lambda u_1 \quad (40)$$

时间方向采用 Crank-Nicolson 方法, 其截断误差为 $O(\Delta t^2)$. 方程的离散化表达式为

$$\frac{u_i^{t+1} + u_i^t}{\Delta t} = \frac{\varepsilon((r_i u_r^{t+1})_r + (r_i u_r^t)_r)}{2r_i} + \frac{\lambda(u_i^{t+1} + u_i^t)}{2} \quad (41)$$

令 $\varepsilon = 1$, 进一步整理为

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{\Delta t}{2h_r^2} + \frac{\Delta t}{4r_i h_r}\right) u_{i+1}^{t+1} + \left(1 + \frac{\Delta t}{h_r^2} - \frac{\lambda \Delta t}{2}\right) u_i^{t+1} + \\ &\left(-\frac{\Delta t}{2h_r^2} + \frac{\Delta t}{4r_i h_r}\right) u_{i-1}^{t+1} = \\ &\left(\frac{\Delta t}{2h_r^2} + \frac{\Delta t}{4r_i h_r}\right) u_{i+1}^t + \left(1 - \frac{\Delta t}{h_r^2} + \frac{\lambda \Delta t}{2}\right) u_i^t + \\ &\left(\frac{\Delta t}{2h_r^2} - \frac{\Delta t}{4r_i h_r}\right) u_{i-1}^t \end{aligned} \quad (42)$$

Dirichlet 边界控制器 $i = N$ 采用了 Simpson 规则进行数值积分.

$$u_N = \sum_{m=1}^N a_m k_m u_m \quad (43)$$

其中, $k_m = -\frac{\lambda+c}{\epsilon} r_m \frac{I_1 \left[\sqrt{\frac{\lambda+c}{\epsilon} (R^2 - r_m^2)} \right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c}{\epsilon} (R^2 - r_m^2)}}$. 根据 Simpson 积分法则, N 选为奇数, 参数 a_m 取值为

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{h_r}{3}, & m &= \{1, N\} \\ a_m &= \frac{4h_r}{3}, & m &= \{2, 4, \dots, N-1\} \\ a_m &= \frac{2h_r}{3}, & m &= \{3, 5, \dots, N-2\} \end{aligned}$$

设置状态变量的初始值为标准差等于 10 的均匀分布随机数, 并满足相容条件. 首先不加反馈控制, 令边界条件 $u(t, R) = 0$, 得到系统的开环响应如图 1 所示. 然后在边界施加状态反馈控制, 得到系统的闭环响应如图 2 所示.

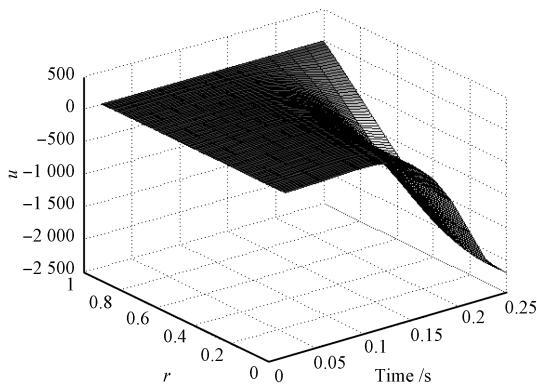


图 1 系统的开环响应 u 随时间和 r 的变化趋势
Fig. 1 The open-loop response u versus time and r

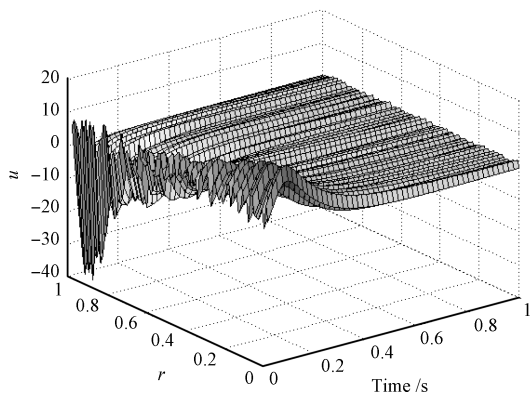


图 2 系统的闭环响应 u 随时间和 r 的变化趋势
Fig. 2 The closed-loop response u versus time and r

由图 1 可知, 系统的开环响应不稳定, 随着时间增加, 系统状态迅速发散. 而采用了边界反馈控制之后, 系统状态快速趋向于平衡点 0, 在 0.5s 左右, 系统就趋于稳定, 参见图 2. 图 3 给出边界控制的绝对值大小, 同样也在 0.5s 左右迅速收敛到 0.

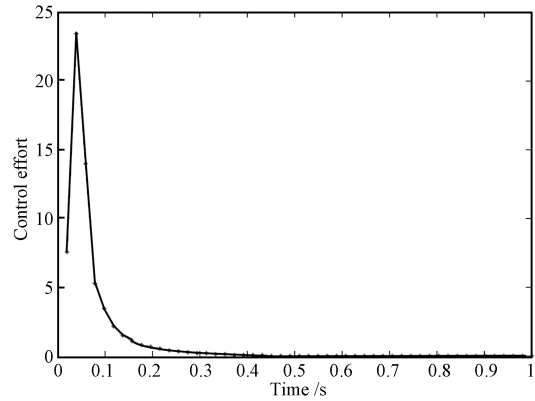


图 3 系统的边界控制 $|u(t, 1)|$ 随时间的变化趋势
Fig. 3 The control effort $|u(t, 1)|$ versus time

4 结论

本文考虑系统初始和边界条件关于圆心旋转对称的情况, 研究了二维圆盘上的反应扩散方程的边界镇定. 通过将系统转化为极坐标系下的一维等价系统, 为其设计了边界反馈控制器, 并分析了系统在 H^1 范数下的指数稳定性. 本文扩展了偏微分方程的 backstepping 边界控制器的设计方法, 建立了新的 Volterra 映射形式, 采用了新的控制核函数, 得到了显式表达的精确控制律. 由于 L^2 范数稳定只能保证系统的平均值收敛, 但不保证避免空间域中某点出现发散尖峰, 所以我们证明了闭环系统在 H^1 范数下的指数稳定性. H^1 稳定性保证了闭环系统的状态不会出现发散的尖峰, 在整个空间域具有连续的初值依赖性. 系统的仿真表明闭环系统稳定, 所设计的边界控制器能使开环不稳定的系统迅速收敛到稳态值.

References

- 1 Padhi R, Ali S F. An account of chronological developments in control of distributed parameter systems. *Annual Reviews in Control*, 2009, **33**(1): 59–68
- 2 Butkovskii A G. The maximum principle for optimum systems with distributed parameters. *Automation and Remote Control*, 1961, **22**(10): 1156–1169
- 3 Triggiani R. Boundary feedback stabilizability of parabolic equations. *Applied Mathematics and Optimization*, 1980, **6**(1): 201–220
- 4 Fard M, Sagatun S. Exponential stabilization of a transversely vibrating beam via boundary control. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, **240**(4): 613–622
- 5 Li Jian, Liu Yun-Gang. Adaptive boundary control for a class of uncertain heat equations. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 469–473
(李健, 刘允刚. 一类不确定热方程自适应边界控制. *自动化学报*, 2012, **38**(3): 469–473)
- 6 Guo B Z, Kang W. The Lyapunov approach to boundary stabilization of an anti-stable one-dimensional wave equation with boundary disturbance. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, **24**(1): 54–69
- 7 Rebarber R. Conditions for the equivalence of internal and external stability for distributed parameter systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, **38**(6): 994–998

- 8 Ge Z, Zhu G, Feng D. Degenerate semi-group methods for the exponential stability of the first order singular distributed parameter systems. *Journal of Systems Science & Complexity*, 2008, **21**(2): 260–266
- 9 Cheng M B, Radisavljevic V, Su W C. Sliding mode boundary control of a parabolic PDE system with parameter variations and boundary uncertainties. *Automatica*, 2011, **47**(2): 381–387
- 10 Guo B Z, Liu J J. Sliding mode control and active disturbance rejection control to the stabilization of one-dimensional schrödinger equation subject to boundary control matched disturbance. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, **24**(16): 2194–2212
- 11 Li H X, Qi C K. Modelling of distributed parameter systems for applications — a synthesized review from time-space separation. *Journal of Process Control*, 2010, **20**(8): 891–901
- 12 Dubljevic S, El-Farra N H, Mhaskar P, Christofides P D. Predictive control of parabolic PDEs with state and control constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, **16**(16): 749–772
- 13 Krstic M. Systematization of approaches to adaptive boundary stabilization of pdes. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, **16**(16): 801–818
- 14 Vazquez R, Krstic M. Boundary observer for output-feedback stabilization of thermaluid convection loop. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, **18**(4): 789–797
- 15 Li Xiao-Guang, Liu Jin-Kun. Continuum backstepping control algorithms in partial differential equation orientation: a review. *Control Theory & Applications*, 2012, **29**(7): 825–832
(李晓光, 刘金琨. 面向偏微分方程的连续反演控制算法综述. 控制理论与应用, 2012, **29**(7): 825–832)
- 16 Smyshev A, Krstic M. Closed-form boundary state feedbacks for a class of 1-D partial integro-differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(12): 2185–2202
- 17 Krstic M, Smyshev A. *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*. Philadelphia: SIAM, 2008.
- 18 Vazquez R, Krstic M. Marcum Q-functions and explicit kernels for stabilization of 2×2 linear hyperbolic systems with constant coefficients. *Systems & Control Letters*, 2014, **68**: 33–42
- 19 Aamo O M, Smyshev A, Krstic M. Boundary control of the linearized Ginzburg-Landau model of vortex shedding. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2005, **43**(6): 1953–1971
- 20 Wang Yue, Wu Cheng-Xun. Study on non-solvent diffusion of PAN-based carbon fiber precursor in dry-jet wet spinning process. *Chemical Industry and Engineering*, 2007, **22**(4): 28–31
(王玥, 吴承训. 聚丙烯腈基碳纤维原丝在干湿法纺丝中非溶剂扩散过程的研究. 化学工业与工程, 2007, **22**(4): 28–31)
- 21 Tang K T. *Mathematical Methods for Engineers and Scientists*. Berlin: Springer-Verlag, 2007. 142–186
- 22 Brezis H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2011. 326–328

齐 洁 东华大学信息科学与技术学院副教授. 主要研究方向为分布式参数系统控制, 多智能体协同控制与优化. E-mail: jieqi@dhu.edu.cn
(**QI Jie** Associated professor at the School of Information Sciences and Technology, Donghua University. Her research interest covers distributed parameter system control and multi-agent system cooperated control and optimization.)

齐金鹏 东华大学信息科学与技术学院副教授. 主要研究方向为系统分析与建模, 分布式参数系统, 数据分析与智能算法. 本文通信作者. E-mail: qipengkai@126.com
(**QI Jin-Peng** Associate professor at the School of Information Science and Technology, Donghua University. His research interest covers systematic analysis and modeling, distributed parameter systems, data analysis, and intelligent algorithm. Corresponding author of this paper.)