

基于二阶广义全变差正则项的模糊图像恢复算法

任福全¹ 邱天爽¹

摘要 针对图像去模糊问题, 采用二阶广义全变差作为修复图像的正则项构建恢复模型, 并针对重建模型的高阶与非光滑特性, 给出了基于分裂 Bregman 迭代的快速算法. 实验结果表明, 该模型和数值算法能够较好地恢复被噪声和模糊污染的图像, 同时可以很好地保留图像的纹理和细节信息.

关键词 二阶广义全变差, 图像恢复, 去模糊, 分裂 Bregman 迭代

引用格式 任福全, 邱天爽. 基于二阶广义全变差正则项的模糊图像恢复算法. 自动化学报, 2015, 41(6): 1166–1172

DOI 10.16383/j.aas.2015.c130616

Blurred Image Restoration Method Based on Second-order Total Generalized Variation Regularization

REN Fu-Quan¹ QIU Tian-Shuang¹

Abstract For the blurred image restoration problem, we adopt the second-order total generalized variation as the regularization term to construct an image restoration model. For the high order and non-smooth feature of the restoration model, a fast algorithm based on the split Bregman iterative algorithm is also proposed. Experimental results show that the model and the numerical algorithm can effectively restore the images polluted by noise and blur, and they can preserve image texture and details effectively.

Key words Second-order total generalized variation, image restoration, deblurring, split Bregman iteration

Citation Ren Fu-Quan, Qiu Tian-Shuang. Blurred image restoration method based on second-order total generalized variation regularization. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(6): 1166–1172

医疗、天文等领域成像设备采集到的图像往往由于硬件限制, 受到模糊和噪声的影响, 使得图像恢复成为非常重要的研究课题, 得到了广泛的研究^[1–6]. 受全局不变模糊核和高斯噪声影响的图像观测模型可以表达为

$$f = Hu + n \quad (1)$$

其中, u 为真实图像, f 为观测图像, H 为模糊算子, n 为高斯噪声. 由于噪声的存在, 使得该问题是病态的或不稳定的, 于是对观测 f 直接做逆向求解是不可行的. 对于经典的反问题, 正则化方法是处理该问题的有效方法之一. 针对观测模型 (1), 可以构建基于图像先验信息的正则化代价函数:

$$\hat{u} = \arg \min_u \left\{ \frac{1}{2} \|Hu - f\|_2^2 + \tau R(u) \right\} \quad (2)$$

通过极小化代价函数, 求得待恢复图像 \hat{u} . 其中第 1 项为数据拟合项 (Data fitting term, DFT), 第 2 项 $R(u)$ 为基于某类先验信息的正则项, τ 为正则化参数, 用于调节数据拟合项与正则项之间的权重.

由于理论基础的完备性, 近些年, 基于正则项的图像恢复问题得到了广泛的研究, 成为图像恢复的重要方法和手段. 其中常用的正则项有 Tikhonov 正则项^[4]、全变差正则项 (Total variation, TV)^[5–7]、小波^[8] 和稀疏正则项^[9]、高阶变分正则项等. 上述的各种正则项中, 全变差正则项因其定义简单、易于实现^[10], 在图像处理和医学成像等领域得到广泛的应用. 但全变差正则项是基于图像满足分片常数先验的, 因此在应用时, 往往会造成图像非分片常数区域出现非常明显的阶梯化效应, 影响恢复图像的视觉效果.

广义全变差 (Total generalized variation, TGV) 是 Kristian 等提出的能够有效保持图像边缘和细节的正则项^[11], 并被应用于图像去噪与磁共振 (Magnetic resonance imaging, MRI) 成像^[12] 领域, 取得了非常优异的效果. 作为对 TV 正则项的推广, TGV 能有效地逼近任意阶多项式, 例如分片常

收稿日期 2013-07-01 录用日期 2015-01-30
Manuscript received July 1, 2013; accepted January 30, 2015
国家自然科学基金 (61172108, 61139001, 81241059), 国家科技支撑计划基金 (2012BAJ18B06) 资助
Support by National Natural Science Foundation of China (61172108, 61139001, 81241059) and the Science and Technology Support Program of China (2012BAJ18B06)
本文责任编辑 黄庆明
Recommended by Associate Editor HUANG Qing-Ming
1. 大连理工大学电子信息与电气工程学部 大连 116024
1. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024

量、分片放射函数等, 因此可以有效地避免 TV 正则项的阶梯效应. 按照文献 [11] 中的描述, 二阶广义全变差的定义为

$$\text{TGV}_\alpha^2(u) = \sup_v \left\{ \int_\Omega u \operatorname{div}^2 v dx \mid v \in C_c^2, \right. \\ \left. (\Omega, \operatorname{Sym}^2(\mathbf{R}^d)), \|v\|_\infty \leq \alpha_0, \|\operatorname{div} v\|_\infty \leq \alpha_1 \right\}$$

其中, Ω 是 \mathbf{R}^2 中的一个开区域, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ 为权重参数, $\operatorname{Sym}^2(\mathbf{R}^d)$ 表示 Ω 上二阶对称张量所构成的空间, 可以证明 $\operatorname{Sym}^2(\mathbf{R}^d)$ 与所有 $d \times d$ 阶矩阵构成的线性空间 $S^{d \times d}$ 是同构的; div 为对称散度算子. 进一步地, 二阶广义全变差可以等价地描述为^[12]

$$\text{TGV}_\alpha^2(u) = \min_v \int_\Omega \alpha_0 |\nabla u - v| + \alpha_1 |\varepsilon(v)| dx \quad (3)$$

其中, $v \in C_c^2(\Omega, \operatorname{Sym}^2(\mathbf{R}^d))$ 表示定义在图像域 Ω 上的取值为二阶对称张量的函数, 即有 $v(x) \in \operatorname{Sym}^2(\mathbf{R}^d)$, $x \in \Omega$. $\varepsilon(v) = (\nabla v + \nabla v^T)/2$ 为 v 的对称化导数. 和传统的 TV 正则项相比, TGV_α^2 可以根据图像局部细节和边缘情况, 自适应地调节取值. 在图像的较平坦区域 Ω_1 , 图像二阶梯度 $\nabla^2 u$ 较小, 因此 TGV_α^2 会倾向于选择 $v = \nabla u$; 相反, 在图像边缘的区域 Ω_2 , 图像二阶梯度 $\nabla^2 u$ 的能量将会大于图像的梯度 ∇u , 因此 TGV_α^2 会倾向于选择 $v = 0$. 因此, TGV_α^2 在去除噪声影响的同时, 可以发挥图像高阶变分的优势, 有效地避免阶梯状效应的出现, 较好地保护图像的边缘和细节, 提供更加自然真实的图像.

1 模糊图像恢复模型

根据 TGV_α^2 的定义 (3) 以及基于正则化方法的图像恢复模型 (2), 可以构建基于 TGV_α^2 的图像恢复模型:

$$\hat{u} = \arg \min_u \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{H}u - \mathbf{f}\|_2^2 + \tau \text{TGV}_\alpha^2(u) \right\} = \\ \arg \min_{u,v} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{H}u - \mathbf{f}\|_2^2 + \tau \alpha_0 \|\nabla u - v\|_1 + \right. \\ \left. \tau \alpha_1 \|\varepsilon(v)\|_1 \right\} \quad (4)$$

其中, $u \in \mathbf{R}^N$ 为连续图像 u 的离散向量化, $\nabla u = [\nabla_x u; \nabla_y u] \in \mathbf{R}^{N,2}$, $v = [v_x; v_y] \in \mathbf{R}^{N,2}$, $\varepsilon(v) = [\nabla_x v_x; \frac{1}{2}(\nabla_y v_x + \nabla_x v_y); \frac{1}{2}(\nabla_y v_x + \nabla_x v_y); \nabla_y v_y] \in \mathbf{R}^{N,4}$.

本文中假设图像在每个像素点的一阶全变差 $|\nabla u|$ 与 $|\varepsilon(v)|$ 均是非迷向的, 即 $|\nabla u| = |\nabla_x u| + |\nabla_y u|$, $|\varepsilon(v)| = \sum_{i=1}^4 |\varepsilon_i(v)|_1$, 则式 (4) 可以表述为

$$(\hat{u}, \hat{v}) = \arg \min_{u,v} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{H}u - \mathbf{f}\|_2^2 + \right. \\ \tau \alpha_0 \|\nabla_x u - v_x\|_1 + \tau \alpha_0 \|\nabla_y u - v_y\|_1 + \\ \tau \alpha_1 \|\nabla_x v_x\|_1 + \tau \alpha_1 \|\nabla_x v_y + \nabla_x v_y\|_1 + \\ \left. \tau \alpha_1 \|\nabla_y v_y\|_1 \right\} \quad (5)$$

2 基于分裂 Bregman 迭代的数值算法

上述图像恢复模型 (4) 和 (5) 是含有多项 l_1 范数的最优化问题. 由于 l_1 范数具有的非光滑性特点, 为上述问题的求解带来许多不便. 分裂 Bregman 迭代算法为 l_1 优化问题的求解带来极大的便利^[13-14], 该算法通过引入中间变量, 将复杂的原优化问题转化为易于求解的子问题, 并通过交替迭代的方式进行求解, 极大地降低了求解的复杂度, 提高求解速度, 能较快地收敛到稳定的数值解. 以下我们采用分裂 Bregman 迭代的框架求解上述模型 (5).

首先引入辅助变量 $S_x, S_y, l_{xx}, l_{xy}, l_{yy}$, 并将式 (5) 做如下变量替换:

$$S_x \leftarrow \nabla_x u - v_x \\ S_y \leftarrow \nabla_y u - v_y \\ l_{xx} \leftarrow \nabla_x v_x \\ l_{xy} \leftarrow \nabla_x v_y + \nabla_y v_x \\ l_{yy} \leftarrow \nabla_y v_y$$

则可得如下增广拉格朗日函数:

$$\left(u^{k+1}, v^{k+1}, S^{k+1}, L^{k+1} \right) = \\ \arg \min_{u,v,S,L} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{H}u - \mathbf{f}\|_2^2 + \tau \alpha_0 \|S\|_1 + \right. \\ \tau \alpha_1 \|L\|_1 + \frac{\lambda_1}{2} \|S_x - (\nabla_x u - v_x) - d_x^k\|_2^2 + \\ \frac{\lambda_1}{2} \|S_y - (\nabla_y u - v_y) - d_y^k\|_2^2 + \\ \frac{\lambda_2}{2} \|l_{xx} - \nabla_x v_x - b_{xx}^k\|_2^2 + \\ \frac{\lambda_2}{2} \|l_{xy} - (\nabla_x v_y + \nabla_y v_x) - b_{xy}^k\|_2^2 + \\ \left. \frac{\lambda_2}{2} \|l_{yy} - \nabla_y v_y - b_{yy}^k\|_2^2 \right\} \quad (6)$$

以及辅助变量更新:

$$d_x^{k+1} = d_x^k + \left(\nabla_x u^{k+1} - v_x^{k+1} - S_x^{k+1} \right) \\ d_y^{k+1} = d_y^k + \left(\nabla_y u^{k+1} - v_y^{k+1} - S_y^{k+1} \right) \\ b_{xx}^{k+1} = b_{xx}^k + \nabla_x v_x^{k+1} - l_{xx}^{k+1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{xy}^{k+1} &= \mathbf{b}_{xy}^k + (\nabla_x \mathbf{v}_y^{k+1} + \nabla_y \mathbf{v}_x^{k+1}) - \mathbf{l}_{xy}^{k+1} \\ \mathbf{b}_{yy}^{k+1} &= \mathbf{b}_{yy}^k + \nabla_y \mathbf{v}_y^{k+1} - \mathbf{l}_{yy}^{k+1} \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_x; \mathbf{S}_y]$, $\mathbf{L} = [\mathbf{l}_{xx}; \mathbf{l}_{xy}; \mathbf{l}_{yy}]$, λ_1, λ_2 为非负的惩罚参数. 通过文献 [14] 的论述可知, 当辅助变量 $\mathbf{b}, \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{0}$ 时, 优化问题 (6) 与原图像恢复问题 (5) 是同解的. 为了快速有效地求解式 (6), 应用交替迭代的方法, 将式 (6) 转化为一列易于求解、并且各自具有闭合解的子问题.

1) \mathbf{u} -子问题:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{k+1} &= \arg \min_{\mathbf{u}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{f}\|_2^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_1}{2} \|\mathbf{S}_x - (\nabla_x \mathbf{u} - \mathbf{v}_x) - \mathbf{d}_x\|_2^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_1}{2} \|\mathbf{S}_y - (\nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{v}_y) - \mathbf{d}_y\|_2^2 \right\} \end{aligned}$$

对上式右侧的目标函数关于 \mathbf{u} 求梯度, 整理可以得到:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda_1 \nabla_x^T \nabla_x + \lambda_1 \nabla_y^T \nabla_y) \mathbf{u} &= \\ \mathbf{H}^T \mathbf{f} + \lambda_1 \nabla_x^T (\mathbf{v}_x^k + \mathbf{S}_x^k - \mathbf{d}_x^k) + \\ \lambda_1 \nabla_y^T (\mathbf{v}_y^k + \mathbf{S}_y^k - \mathbf{d}_y^k) \end{aligned}$$

由于假设图像 u 满足周期性边界条件, 可以通过快速傅里叶变换求解上式

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{k+1} &= \\ \mathcal{F}^{-1} \frac{\mathcal{F}[\mathbf{H}^T \mathbf{f} + \lambda_1 \nabla_x^T (\mathbf{v}_x^k + \mathbf{S}_x^k - \mathbf{d}_x^k) + \lambda_1 \nabla_y^T (\mathbf{v}_y^k + \mathbf{S}_y^k - \mathbf{d}_y^k)]}{\mathcal{F}(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda_1 \nabla_x^T \nabla_x + \lambda_1 \nabla_y^T \nabla_y)} \end{aligned} \quad (8)$$

其中, \mathcal{F} 为二维傅里叶变换算子, \mathcal{F}^{-1} 为逆二维傅里叶变换算子.

2) $(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)$ -子问题

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_x^{k+1}, \mathbf{v}_y^{k+1}) &= \arg \min_{\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y} \left\{ \frac{\lambda_1}{2} \|\mathbf{S}_x^k - \right. \\ &\quad \left. (\nabla_x \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{v}_x) - \mathbf{d}_x^k\|_2^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_1}{2} \|\mathbf{S}_y^k - (\nabla_y \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{v}_y) - \mathbf{d}_y^k\|_2^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_2}{2} \|\mathbf{l}_{xx}^k - \nabla_x \mathbf{v}_x - \mathbf{b}_{xx}^k\|_2^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_2}{2} \|\mathbf{l}_{xy}^k - (\nabla_y \mathbf{v}_x + \nabla_x \mathbf{v}_y) - \mathbf{b}_{xy}^k\|_2^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_2}{2} \|\mathbf{l}_{yy}^k - \nabla_y \mathbf{v}_y - \mathbf{b}_{yy}^k\|_2^2 \right\} \end{aligned}$$

整理过程同上, 可以得到如 $\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y$ 的线性方程组:

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} + \tau_1 \nabla_x^T \nabla_x + \tau_1 \nabla_y^T \nabla_y] \mathbf{v}_x + \tau_1 \nabla_y^T \nabla_x \mathbf{v}_y &= \\ \tau_1 \nabla_x^T (\mathbf{l}_{xx}^k - \mathbf{b}_{xx}^k) + \tau_1 \nabla_y^T (\mathbf{l}_{xy}^k - \mathbf{b}_{xy}^k) + \\ \nabla_x \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{S}_x^k + \mathbf{d}_x^k \\ [\mathbf{I} + \tau_1 \nabla_x^T \nabla_x + \tau_1 \nabla_y^T \nabla_y] \mathbf{v}_y + \tau_1 \nabla_x^T \nabla_y \mathbf{v}_x &= \\ \tau_1 \nabla_y^T (\mathbf{l}_{yy}^k - \mathbf{b}_{yy}^k) + \tau_1 \nabla_x^T (\mathbf{l}_{xy}^k - \mathbf{b}_{xy}^k) + \\ \nabla_y \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{S}_y^k + \mathbf{d}_y^k \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\tau_1 = \lambda_2 / \lambda_1$.

令

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{I} + \tau_1 \nabla_x^T \nabla_x + \tau_1 \nabla_y^T \nabla_y \\ \mathbf{A}_3 &= \tau_1 \nabla_y^T \nabla_x \\ \mathbf{B}_1^k &= \tau_1 \nabla_x^T (\mathbf{l}_{xx}^k - \mathbf{b}_{xx}^k) + \tau_1 \nabla_y^T (\mathbf{l}_{xy}^k - \mathbf{b}_{xy}^k) + \\ &\quad \nabla_x \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{S}_x^k + \mathbf{d}_x^k, \\ \mathbf{B}_2^k &= \tau_1 \nabla_y^T (\mathbf{l}_{yy}^k - \mathbf{b}_{yy}^k) + \tau_1 \nabla_x^T (\mathbf{l}_{xy}^k - \mathbf{b}_{xy}^k) + \\ &\quad \nabla_y \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{S}_y^k + \mathbf{d}_y^k \end{aligned}$$

则在图像周期性边界条件的假设下, 通过二维快速傅里叶变换算子 \mathcal{F} , 式 (9) 可以写为

$$\begin{cases} \mathcal{F}\mathbf{A}_1 \cdot \mathcal{F}\mathbf{v}_x + \mathcal{F}\mathbf{A}_3 \cdot \mathcal{F}\mathbf{v}_y = \mathcal{F}\mathbf{B}_1^k \\ \mathcal{F}\mathbf{A}_3^T \cdot \mathcal{F}\mathbf{v}_x + \mathcal{F}\mathbf{A}_1 \cdot \mathcal{F}\mathbf{v}_y = \mathcal{F}\mathbf{B}_2^k \end{cases} \quad (10)$$

其中, \cdot 表示向量元素间的对应点积, 那么可以通过如下公式快速求解得到 $(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)$:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_x^{k+1} = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\mathcal{F}\mathbf{A}_1 \cdot \mathcal{F}\mathbf{B}_1^k - \mathcal{F}\mathbf{A}_3 \cdot \mathcal{F}\mathbf{B}_2^k}{\mathcal{F}\mathbf{A}_1 \cdot \mathcal{F}\mathbf{A}_1 - \mathcal{F}\mathbf{A}_3^T \cdot \mathcal{F}\mathbf{A}_3} \right] \\ \mathbf{v}_y^{k+1} = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\mathcal{F}\mathbf{A}_1 \cdot \mathcal{F}\mathbf{B}_2^k - \mathcal{F}\mathbf{A}_3^T \cdot \mathcal{F}\mathbf{B}_1^k}{\mathcal{F}\mathbf{A}_1 \cdot \mathcal{F}\mathbf{A}_1 - \mathcal{F}\mathbf{A}_3^T \cdot \mathcal{F}\mathbf{A}_3} \right] \end{cases} \quad (11)$$

3) \mathbf{S} -子问题

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y) &= \arg \min_{\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y} \left\{ \tau \alpha_0 \|\mathbf{S}_x\|_1 + \tau \alpha_0 \|\mathbf{S}_y\|_1 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_1}{2} \|\mathbf{S}_x - \nabla_x \mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{v}_x^{k+1} - \mathbf{d}_x^k\|_2^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_1}{2} \|\mathbf{S}_y - \nabla_y \mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{v}_y^{k+1} - \mathbf{d}_y^k\|_2^2 \right\} \end{aligned}$$

可以通过简单的非线性收缩算子 $\text{shrink}_\mu(\cdot)$ 进行求解:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_x = \text{shrink}_{\frac{\tau\alpha_0}{\lambda_1}} \left(\nabla_x \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{v}_x^{k+1} + \mathbf{d}_x^k \right) \\ \mathbf{S}_y = \text{shrink}_{\frac{\tau\alpha_0}{\lambda_1}} \left(\nabla_y \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{v}_y^{k+1} + \mathbf{d}_y^k \right) \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\text{shrink}_{\mu}(\cdot)$ 为非线性收缩算子^[15-16].

4) \mathbf{l} -子问题

以 \mathbf{l}_{xx} 为例:

$$\mathbf{l}_{xx}^{k+1} = \arg \min \left\{ \tau\alpha_1 \|\mathbf{l}_{xx}\|_1 + \frac{\lambda_2}{2} \|\mathbf{l}_{xx} - \nabla_x \mathbf{v}_x - \mathbf{b}_{xx}^k\|_2^2 \right\}$$

可以通过非线性收缩算子 $\text{shrink}_{\mu}(\cdot)$ 求解出 \mathbf{l}_{xx} :

$$\mathbf{l}_{xx}^{k+1} = \text{shrink}_{\frac{\tau\alpha_1}{\lambda_2}} \left(\nabla_x \mathbf{v}_x^{k+1} + \mathbf{b}_{xx}^k \right)$$

同理, 可以求解出 $\mathbf{l}_{xy}, \mathbf{l}_{yy}$, 如下:

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{xy}^{k+1} = \text{shrink}_{\frac{\tau\alpha_1}{\lambda_2}} \left(\nabla_x \mathbf{v}_y^{k+1} + \nabla_y \mathbf{v}_x^{k+1} + \mathbf{b}_{xy}^k \right) \\ \mathbf{l}_{yy}^{k+1} = \text{shrink}_{\frac{\tau\alpha_1}{\lambda_2}} \left(\nabla_y \mathbf{v}_y^{k+1} + \mathbf{b}_{yy}^k \right) \end{cases} \quad (13)$$

求解模型 (5) 的基于分裂 Bregman 迭代的算法流程如下:

算法 1. 基于 TGV 正则项模糊图像恢复模型的分裂 Bregman 迭代算法

输入. 观测图像 f , 模糊矩阵 H , 模型参数 $\tau, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$, 收敛参数 ϵ_0 .

初始化. $\mathbf{u}^0 = \mathbf{f}$, $\mathbf{L}^0 = [\mathbf{l}_{xx}^0, \mathbf{l}_{xy}^0, \mathbf{l}_{yy}^0] = \mathbf{0}$, $\mathbf{S}^0 = [\mathbf{S}_x^0, \mathbf{S}_y^0] = \mathbf{0}$, $(\mathbf{d}_x^0, \mathbf{d}_y^0) = \mathbf{0}$, $(\mathbf{b}_{xx}^0, \mathbf{b}_{xy}^0, \mathbf{b}_{yy}^0) = \mathbf{0}$.

$k = 1$.

while $\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_2^2 / \|\mathbf{u}^k\|_2^2 \leq \epsilon_0$ **do**

 执行式 (8), 得到 \mathbf{u} -子问题的解;

 执行式 (11), 得到 $(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)$ -子问题的解;

 执行式 (12), 得到 $(\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y)$ -子问题的解;

 执行式 (13), 得到 \mathbf{L} -子问题的解;

 执行式 (7), 更新辅助变量;

$k = k + 1$

end while.

输出. 恢复图像 \mathbf{u} , 迭代次数.

3 数值实验

本节通过对一些灰度图像数值仿真实验, 验证本文提出模型和相应算法的有效性以及在边缘和纹理等区域重建结果的优越性. 仿真实验中考虑退化图像是由清晰的灰度图像经过高斯模糊、运动模糊或平均模糊并加一定幅度的高斯白噪声得到的. 为了验证算法的有效性, 与三种有效的图像去模糊算法进行比较, 这三种算法分别是: 基

于全变差 (TV) 的图像去模糊^[5]、基于自适应全变差 (Adaptive total variation, ATV) 的图像去模糊^[17] 以及基于稀疏正则项的图像去模糊算法^[9]. 采用两种最常用的图像质量评价指标: 峰值信噪比 (Peak signal to noise ratio, PSNR) 和结构相似性指标 (Structural similarity, SSIM) 来评估各算法恢复图像的质量. 实验参数设置: 以下的数值实验中, 均在模糊图像上添加了标准差 $\sigma_n = 5$ 的高斯白噪声, 并且在所有的实验中, 本文算法参数按照经验性选取的方式, 实验中选取 τ 是按照在区间 $[\max(\sigma_n^2, 15)/80 - 0.15, \max(\sigma_n^2, 15)/80 + 0.15]$ 内以 0.02 为尺度遍历, 以寻找最佳参数. $\alpha_0 = 0.5$, $\alpha_1 = 1$. 其他各算法在各实验中的重要参数设置如下: 1) Cameraman 图像的实验中, TV 正则化恢复模型参数: $\mu = 600$, $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 20$, $\gamma = 1.618$; 自适应 TV 正则化恢复模型参数: $\theta = 0.5$; 基于稀疏正则化算法参数: $\lambda = 0.06$, 迭代次数 $k = 5$. 2) Starfish 图像的实验中, TV 正则化恢复模型参数: $\mu = 525$, $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 20$, $\gamma = 1.618$; 自适应 TV 正则化恢复模型参数: $\theta = 0.48$; 基于稀疏正则化算法参数: $\lambda = 0.07$, 迭代次数 $k = 5$. 3) Zebra 图像的实验中, TV 正则化恢复模型参数: $\mu = 750$, $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 20$, $\gamma = 1.618$; 自适应 TV 正则化恢复模型参数: $\theta = 0.4$; 基于稀疏正则化算法参数: $\lambda = 0.05$, 迭代次数 $k = 5$.

首先, 对经典的 Cameraman 图像进行仿真实验. 对原清晰图像模糊处理, 其点扩散函数 (Point spread function, PSF) 为支撑域为 9×9 、标准差 $\sigma_h = 1.5$ 的高斯模糊, 并在模糊图像上添加标准差 $\sigma_n = 5$ 的零均值高斯白噪声. 退化图像如图 1(b) 所示, PSNR = 24.98 dB, SSIM = 0.627. 随后, 我们分别采用基于 TV 正则项算法、自适应 TV 正则项算法和基于稀疏正则化算法对退化的图像进行处理并对恢复的结果进行比较. 如图 1(e) 所示, 基于稀疏表达恢复算法可以较好地去除图像中的高斯白噪声, 并在一定程度上保持图像中较大的边缘和纹理, 但是, 不能很好地保持较小的细节, 并且处理后图像边缘有较明显的“羽毛化”效果和较明显的伪影, 相应恢复图像的 PSNR 较低. 如图 1(c) 和图 1(d) 所示, 基于 TV 的算法和基于 ATV 的算法虽然在一定程度上保持边缘和细节, 但是由于较强噪声的存在, 使得 TV 正则项在约束恢复图像的同时, 为图像带来了比较明显的分片常数效果, 导致图像有明显的阶梯状视觉效应. ATV 算法自适应地选取最优的正则化参数, 但阶梯状效应仍然存在.

随后, 对 Starfish 和 Zebra 两幅图像分别进行水平夹角 135° 、支撑域为 21 个像素点的运动模糊和支撑域为 9×9 的平均模糊, 并分别添加 $\sigma_n = 5$

的高斯白噪声. 图 2 和图 3 给出了采用基于 TV 正则化的恢复模型、基于自适应 TV 正则化的恢复模型和基于稀疏正则化的恢复模型对退化图像的处理结果和细节比较. 可以看出, 基于 TGV 的图像恢复算法在保持图像边缘和细节上要优于其他三种算法. 表 1 列出上述实验中各种恢复算法基于客观指标 PSNR 与 SSIM 具体结果. 通过系统比较可以发现, 本文提出的算法在重建的客观指标上优于其他几种算法.

参数分析: 本文的所有实验中, 将参数 α_0 与 α_1 固定, 并通过参数 τ 来调整正则项的权重, 经验上, 在本文的实验中, τ 的取值接近 $\max(\sigma_n^2, 15)/80$, 在

表 1 实验结果比较 PSNR 和 SSIM
Table1 Comparison of experimental result with PSNR and SSIM

图像	模糊	指标	退化	TV	ATV	Sparse	TGV
Cameraman	高斯 9, 1.5	PSNR	23.32	25.85	25.93	26.05	26.17
		SSIM	0.628	0.817	0.822	0.828	0.831
Starfish	运动 21, 135	PSNR	20.36	24.94	25.04	24.32	25.27
		SSIM	0.461	0.697	0.691	0.698	0.705
Zebra	平均 9 × 9	PSNR	18.62	21.31	21.22	21.28	21.46
		SSIM	0.414	0.638	0.621	0.637	0.645

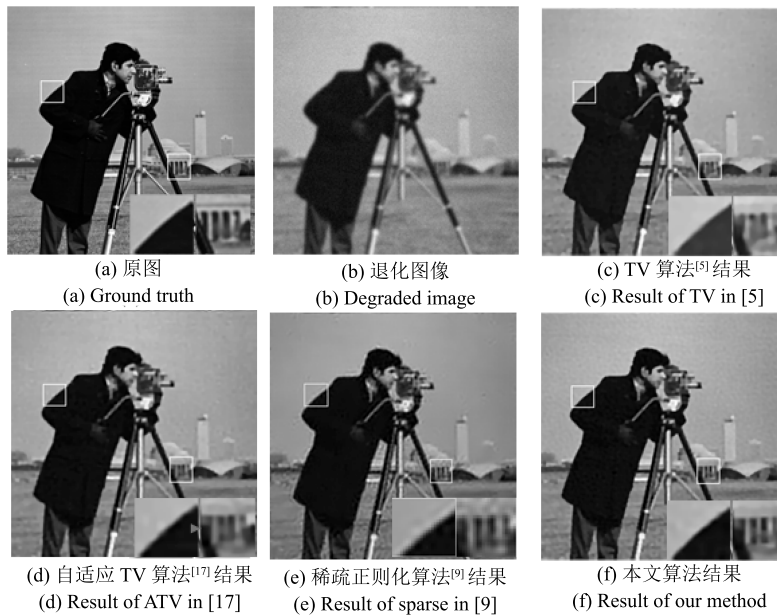


图 1 Cameraman 图像处理结果
Fig. 1 Results of Cameraman image

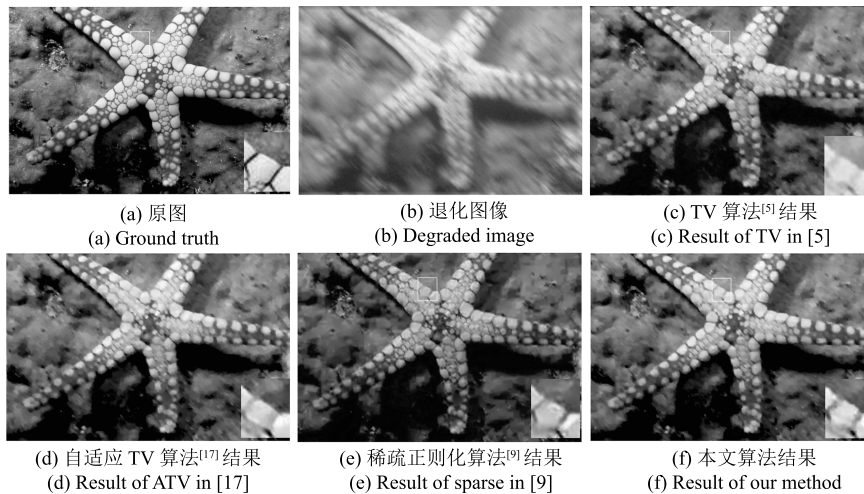


图 2 Starfish 图像处理结果
Fig. 2 Results of Starfish image

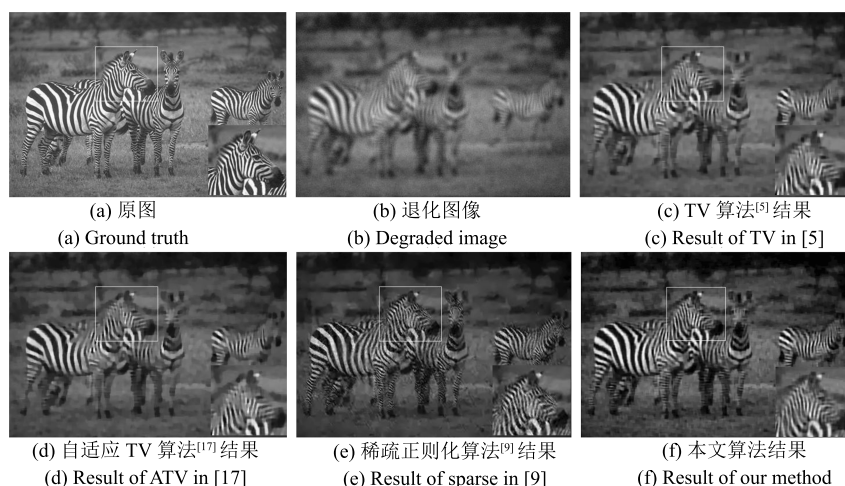


图3 Zebra 图像处理结果
Fig. 3 Results of Zebra image

实验过程中发现, 当 τ 选取较大数值时, 会造成恢复结果的过平滑; 当 τ 的取值较小时, 会由于约束效果的不足, 造成恢复图像有一定量的噪声残留。

算法运算时间与算法收敛性: 由于图像的 TGV 是图像的二阶微分信息, 运算量相比一阶的 TV 略大一些. 但是由于采用了基于分裂 Bregman 的快速求解算法, 求解过程可以较快地达到收敛. 图 4 (a) 和图 4 (b) 分别描述了本文算法与采用文献 [11–12] 中原始-对偶算法的归一化图像差异能量随迭代次数变化的曲线. 通过对迭代曲线相比较可以发现, 本文提出的算法在较少的迭代步数下, 可以很快地达到收敛, 而原始-对偶算法往往需要较多的迭代步数才能收敛. 以 256×256 的 Cameraman 图像为例, 在 CPU 配置为 Intel i3 3210 M, 内存为 4 GB 的运

算平台上实现, 本文算法在 5 秒中内可以达到收敛并给出最优解, 而采用文献 [11–12] 中的原始-对偶算法则需要 10.22 秒达到收敛并给出最优解. 图 5 给出了相应的 PSNR 指标随迭代次数变化曲线.

4 结论

本文研究了基于二阶广义全变差正则项的模糊图像恢复问题, 并采用分裂 Bregman 迭代的算法来求解该模型中的双 l_1 范数正则项问题, 将原问题转化为一组易于求解并且有闭合解的子问题. 实验结果表明, 该模型和数值算法能够较好地恢复被噪声和模糊污染的图像, 同时可以更好地保留图像的细节信息.

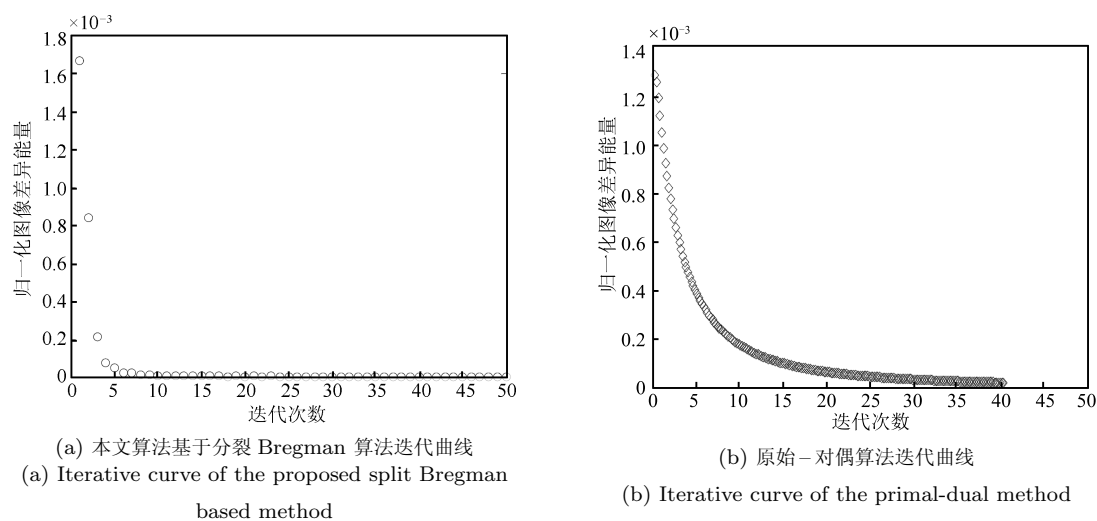


图4 本文算法与采用原始-对偶算法恢复 Cameraman 图像归一化图像差异能量随迭代过程变化曲线比较
Fig. 4 Comparison of the normalized difference energy iterative curve of our method and the primal-dual method for Cameraman image

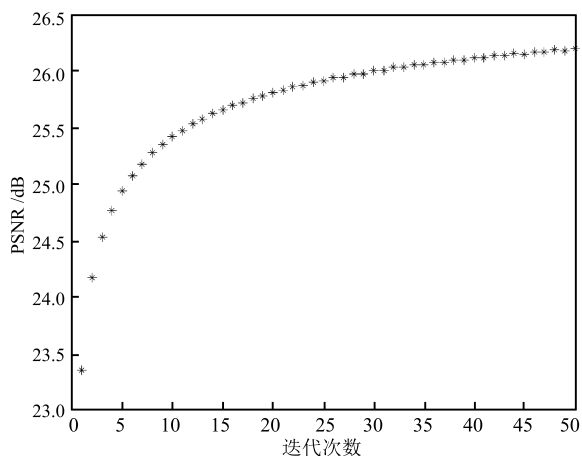


图 5 本文算法恢复 Cameraman 图像的 PSNR 随迭代过程变化曲线

Fig. 5 The PSNR result of Cameraman image of our method as iterations progress

References

- Lucy B. An iterative technique for the rectification of observed distributions. *Astronomical Journal*, 1974, **79**(6): 745–754
- Richardson W H. Bayesian-based iterative method of image restoration. *Journal of the Optical Society of America*, 1972, **62**(1): 55–59
- Krishnan D, Fergus R. Fast image deconvolution using hyper-Laplacian priors. In: Proceedings of the 2009 Advances in Neural Information Processing Systems. Vancouver, British Columbia: Curran Associates, Inc., 2009. 1033–1041
- Galatsanos N P, Katsaggelos A K. Methods for choosing the regularization parameter and estimating the noise variance in image restoration and their relation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1992, **1**(3): 322–336
- Wang W L, Yang J F, Yin W T, Zhang Y. A new alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, **1**(3): 248–272
- Babacan S D, Molina R, Katsaggelos A K. Variational Bayesian blind deconvolution using a total variation prior. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, **18**(1): 12–26
- He Chuan, Hu Chang-Hua, Zhang Wei, Shi Biao. Box-constrained total-variation image restoration with automatic parameter estimation. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(8): 1804–1811
(何川, 胡昌华, 张伟, 师彪. 区间约束的全变差图像复原和自动参数估计. *自动化学报*, 2014, **40**(8): 1804–1811)
- Bioucas-Dias J M. Bayesian wavelet-based image deconvolution: a GEM algorithm exploiting a class of heavy-tailed priors. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, **15**(4): 937–951
- Zhang H, Zhang Y N. Sparse representation based iterative incremental image deblurring. In: Proceedings of the 16th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). Cairo, Egypt: IEEE, 2009. 1293–1296
- Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 1992, **60**(1–4): 259–268
- Kristian B, Karl K, Thomas P. Total generalized variation. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2010, **3**(3): 492–526
- Knoll F, Bredies K, Pock T, Stollberger R. Second order total generalized variation (TGV) for MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2011, **65**(2): 480–491
- Yin W T, Osher S, Goldfarb D, Darbon J. Bregman iterative algorithms for ℓ_1 -minimization with applications to compressed sensing. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, **1**(1): 143–168
- Goldstein T, Osher S. The split Bregman method for L_1 -regularized problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, **2**(2): 323–343
- Beck A, Teboulle M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, **2**(1): 183–202
- Puig A T, Wiesel A, Fleury G, Hero A O. Multidimensional shrinkage-thresholding operator and group LASSO penalties. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, **18**(6): 363–366
- Oliveira J P, Bioucas-Dias J M, Figueiredo M A T. Adaptive total variation image deblurring: a majorization-minimization approach. *Signal Processing*, 2009, **89**(9): 1683–1693



任福全 大连理工大学电子信息与电气工程学部博士研究生. 2010 年获得大连理工大学数学系硕士学位. 主要研究方向为图像恢复与重建.

E-mail: renfu_quan@163.com

(REN Fu-Quan Ph. D. candidate at the Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology. He received his master degree from the School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology in 2010. His research interest covers image restoration and reconstruction.)



邱天爽 大连理工大学电子信息与电气工程学部教授. 主要研究方向为信号处理与医学图像处理. 本文通信作者.

E-mail: qiutsh@dlut.edu.cn

(QIU Tian-Shuang Professor at the Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology. His research interest covers signal processing and medical image processing. Corresponding author of this paper.)