

# 平面二级倒立摆的圆周行走与 镇定控制

段学超<sup>1</sup> 仇原鹰<sup>1</sup> 盛英<sup>1</sup>

**摘要** 采用拉格朗日方程建立了平面二级倒立摆的非线性动力学模型, 将其在平衡位置线性化, 得到系统在两个正交控制方向解耦的近似模型. 针对每一个方向上由互相耦合的基座小车定位子系统和摆杆镇定子系统所组成的六阶欠驱动系统, 设计了自适应滑模模糊控制器, 实现了基座小车沿圆周行走条件下摆杆的镇定控制, 验证了该控制算法对欠驱动、不稳定、多变量耦合系统的有效性.

**关键词** 平面二级倒立摆, 解耦, 欠驱动系统, 自适应滑模模糊控制  
**中图分类号** TP273, TH15

## Circular Motion and Balance Control of the Planar Double Inverted Pendulum

DUAN Xue-Chao<sup>1</sup> QIU Yuan-Ying<sup>1</sup> SHENG Ying<sup>1</sup>

**Abstract** The nonlinear dynamical model of the planar double inverted pendulum is developed with Lagrangian formulation firstly. Then, the linearization of the model at its equilibrium yields to the decoupled linear systems of the inverted pendulum in two perpendicular control directions. Both of the two systems consist of positioning subsystem of the base cart and balancing system of the poles. For each direction, the adaptive sliding mode fuzzy control approach is developed. Finally, the circular motion of the base cart is implemented while keeping the pole balance, which validates the effectiveness of the adaptive sliding mode fuzzy control strategy in underactuated, unstable, and multi-variable coupled system.

**Key words** Planar inverted pendulum, decoupling, underactuated system, adaptive sliding mode fuzzy control

### 1 引言

由于倒立摆的非线性、欠驱动、高阶次和自然不稳定特性, 对倒立摆的稳定控制涉及到控制科学中处理复杂对象的关键技术, 因此, 倒立摆是控制领域比较理想的实验设备<sup>[1, 2]</sup>. 人们期望通过这样一个严格的控制对象来检验一个新的控制方法是否有较强的处理非线性、多变量、欠驱动和绝对不稳定系统的能力, 以便将有效的控制方法运用于军工、航天和机器人等其他领域<sup>[2~5]</sup>. 直线型和旋转型倒立摆基座仅有一个自由度, 这两类倒立摆以结构简单、形象直观、构件参数易于改变和价格低廉等优点, 已经广泛用于教学实验<sup>[5, 6]</sup>. 从结构和控制难度上看, 平面倒立摆均是上述三类中最为复杂的一类, 这是因为平面倒立摆的基座具有两个自由度, 可以在平面内自由运动. 它不仅在基座平面内的两个正交控制方向存在耦合作用, 而且在每个控制方向上的摆杆镇定控制和

小车定位控制也存在着耦合. 平面倒立摆更加突出的非线性、耦合性、多变量特点, 使其控制的实现具有更大的挑战性.

本文以固高 GPIIP2002 型平面二级倒立摆为研究对象, 采用拉格朗日方程建立系统的动力学模型, 将其在平衡位置附近线性化, 得到了两个在  $X, Y$  方向解耦、各具有三个二阶子系统的六阶欠驱动系统; 针对  $X$  方向的每一个子系统设计了滑模面, 考虑滑模面斜率和各系统控制对系统动态性能的影响, 分别采用模糊推理, 根据系统状态实时调整滑模面的斜率和各子系统在系统控制中的作用, 从而构成自适应滑模模糊控制器. 将设计的控制器用于平面二级倒立摆的实物控制, 实现了基座小车的圆周行走和摆杆的镇定控制.

### 2 平面二级倒立摆的动力学模型

如图 1 所示, 平面二级倒立摆系统的机械结构由  $X, Y$  方向导轨、基座小车、两级摆杆以及连接小车和摆杆 1、摆杆 1 和摆杆 2 之间的两个虎克铰构成. 与每个虎克铰同轴装置的两个光电编码器用来测量摆杆分别绕  $X, Y$  转轴所转过的角度.

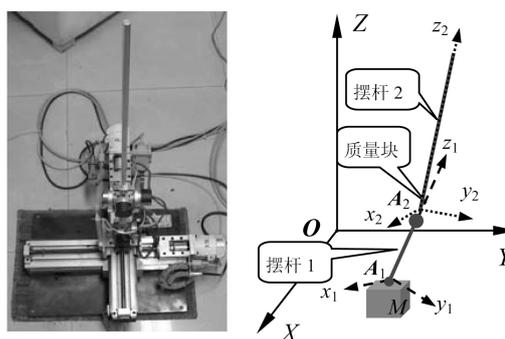


图 1 平面二级倒立摆实物和建模示意图

Fig. 1 Field model and modeling schematic diagram of the planar double inverted pendulum

#### 2.1 平面二级倒立摆的动力学模型

采用拉格朗日方程建立平面二级倒立摆系统的动力学模型. 如图 1 所示, 建立全局坐标系  $OXYZ$ ; 选取摆杆 1 与小车连接的虎克铰转动中心为基点  $A_1$ , 建立以  $A_1$  为原点、 $z_1$  轴沿摆杆轴线方向的局部坐标系  $A_1x_1y_1z_1$ ; 摆杆 2 与摆杆 1 相连接的虎克铰转动中心为基点  $A_2$ , 建立以  $A_2$  为原点、 $z_2$  轴沿摆杆轴线方向的局部坐标系  $A_2x_2y_2z_2$ . 将平面二级倒立摆抽象成小车质量块、虎克铰质量块和匀质摆杆组成的系统.  $M = 1.32 \text{ kg}$  为基座小车、关节虎克铰和编码器的总质量,  $m_k$  表示摆杆  $k$  的质量,  $l_k$  表示基点  $A_k$  到摆杆  $k$  质心的距离,  $\theta_{xk}, \theta_{yk}$  为摆杆  $k$  绕  $X, Y$  轴的转角,  $m_3$  为质量块的质量. 具体取值为:  $l_1 = 0.10 \text{ m}, l_2 = 0.275 \text{ m}, m_1 = 0.06 \text{ kg}, m_2 = 0.13 \text{ kg}, m_3 = 0.27 \text{ kg}, g = 9.8 \text{ m/s}^2$  为重力加速度.

基点  $A_1$  在  $OXYZ$  中的位置矢量为  $\mathbf{r}_{A1} = [x, y, 0]^T$ , 故小车的动能为  $T_M = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_{A1}^T \dot{\mathbf{r}}_{A1}$ . 设摆杆  $k$  相对于全局坐标系的偏角是由摆杆先绕  $X$  轴旋转  $\theta_{xk}$ , 再绕  $Y$  轴转动  $\theta_{yk}$  而合成 ( $k = 1, 2$ ). 采用横滚、俯仰、偏转角集表示的从  $A_kx_ky_kz_k$  到  $OXYZ$  的姿态旋转变换矩阵为<sup>[7]</sup>

$$R_k = \begin{bmatrix} c\theta_{yk} & s\theta_{xk}s\theta_{yk} & c\theta_{xk}s\theta_{yk} \\ 0 & c\theta_{xk} & -s\theta_{xk} \\ -s\theta_{yk} & s\theta_{xk}c\theta_{yk} & c\theta_{xk}c\theta_{yk} \end{bmatrix} \quad (1)$$

收稿日期 2006-8-24 收修改稿日期 2007-7-17  
Received August 24, 2006; in revised form July 17, 2007  
国家自然科学基金 (10433020), 教育部留学回国人员实验室基金 (030401) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (10433020) and Laboratory Fund for Returned Students of Ministry of Education (030401)  
1. 西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071  
1. School of Electromechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710071  
DOI: 10.1360/aas-007-1337

式中,  $c\theta, s\theta$  分别表示  $\cos\theta, \sin\theta$ (下同). 记  $\mathbf{r}_{0k} = [0, 0, l_k]^T$  为摆杆  $k$  的质心在坐标系  $A_k x_k y_k z_k$  中的位置矢量, 则摆杆 1、摆杆 2 和质量块的质心在  $OXYZ$  中的位置矢量分别为  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{A1} + R_1 \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{A1} + 2R_1 \mathbf{r}_{01} + R_2 \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_{A1} + 2R_1 \mathbf{r}_{01}$ . 因此摆杆 1、摆杆 2 和质量块的平动动能为

$$T_{mk}^1 = \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^T \dot{\mathbf{r}}_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2)$$

式中, 下标  $k$  表示上述第  $k$  个部件. 此外, 摆杆 1、摆杆 2 还具有转动动能

$$T_{mk}^2 = \frac{1}{2} J_{xk} \omega_{xk}^2 + \frac{1}{2} J_{yk} \omega_{yk}^2, \quad k = 1, 2 \quad (3)$$

式中,  $J_{xk} = J_{yk} = \frac{m_k}{12} (2l_k)^2 = \frac{1}{3} m_k l_k^2$  为摆杆  $k$  绕  $x_k$  轴、 $y_k$  轴的转动惯量.  $\omega_{xk}, \omega_{yk}$  分别为摆杆  $k$  的角速度在  $x_k$  轴、 $y_k$  轴上的投影.

系统的总动能  $T$  为基座小车、摆杆 1、摆杆 2 和质量块的动能之和

$$T = T_M + T_{m1}^1 + T_{m1}^2 + T_{m2}^1 + T_{m2}^2 + T_{m3}^1 \quad (4)$$

选取  $XOY$  平面为零势能面, 小车势能为零, 摆杆 1 的势能  $V_{m1}$ , 摆杆 2 的势能  $V_{m2}$ , 质量块的势能  $V_{m3}$  分别为  $V_{m1} = m_1 g l_1 c\theta_{x1} c\theta_{y1}, V_{m2} = m_2 g (2l_1 c\theta_{x1} c\theta_{y1} + l_2 c\theta_{x2} c\theta_{y2}), V_{m3} = 2m_3 g l_1 c\theta_{x1} c\theta_{y1}$ .

系统的总势能为摆杆 1、摆杆 2 和质量块的势能之和

$$V = V_{m1} + V_{m2} + V_{m3} \quad (5)$$

由于在广义坐标  $\theta_{xk}, \theta_{yk} (k = 1, 2)$  上均无势力作用, 所以有以下拉格朗日方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{xk}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{xk}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{yk}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{yk}} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $L = T - V$  为拉格朗日算子.

为了在表述形式上保持摆角的方向和小车加速度、速度方向的一致性, 便于对模型的进一步研究, 令  $\theta_{xk} = -\varphi_{yk}, \theta_{yk} = \varphi_{xk}, k = 1, 2$ , 其中  $\varphi_{xk}, \varphi_{yk}$  分别为摆杆  $k$  沿  $X$  方向、 $Y$  方向偏离  $YOZ, XOZ$  平面的角度. 展开式 (6), 经整理并求解关于  $\ddot{\varphi}_{xk}, \ddot{\varphi}_{yk}$  的线性方程组, 得  $\ddot{\varphi}_{x1}, \ddot{\varphi}_{y1}, \ddot{\varphi}_{x2}, \ddot{\varphi}_{y2}$  的非线性表达式

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_{x1} = f_1(x, y, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \dot{x}, \dot{y}, \varphi_{x1}, \dot{\varphi}_{y1}, \dot{\varphi}_{x2}, \dot{\varphi}_{y2}, \ddot{x}, \ddot{y}) \\ \ddot{\varphi}_{y1} = f_2(x, y, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \dot{x}, \dot{y}, \varphi_{x1}, \dot{\varphi}_{y1}, \dot{\varphi}_{x2}, \dot{\varphi}_{y2}, \ddot{x}, \ddot{y}) \\ \ddot{\varphi}_{x2} = f_3(x, y, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \dot{x}, \dot{y}, \varphi_{x1}, \dot{\varphi}_{y1}, \dot{\varphi}_{x2}, \dot{\varphi}_{y2}, \ddot{x}, \ddot{y}) \\ \ddot{\varphi}_{y2} = f_4(x, y, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \dot{x}, \dot{y}, \varphi_{x1}, \dot{\varphi}_{y1}, \dot{\varphi}_{x2}, \dot{\varphi}_{y2}, \ddot{x}, \ddot{y}) \end{cases}$$

限于文章篇幅, 略去以上推导过程,  $f_1(\cdot), f_2(\cdot), f_3(\cdot), f_4(\cdot)$  的具体表达式参见文献 [8].

## 2.2 平面二级倒立摆动力学模型的线性化解耦

平面二级倒立摆唯一的自然平衡位置为<sup>[8]</sup>:  $\mathbf{X}_e = (x, y, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}_{x1}, \dot{\varphi}_{y1}, \dot{\varphi}_{x2}, \dot{\varphi}_{y2}, \ddot{x}, \ddot{y})^T = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ .

将以上四个函数  $f_k(\cdot) (k = 1, 2, 3, 4)$  在平衡位置进行泰勒级数展开并线性化, 得  $\ddot{\varphi}_{x1}, \ddot{\varphi}_{y1}, \ddot{\varphi}_{x2}, \ddot{\varphi}_{y2}$  在  $X, Y$  方向的线性解耦表达式

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_{xk} = K_{k1} \varphi_{x1} + K_{k2} \varphi_{x2} + K_{k3} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi}_{yk} = K_{(k+2)1} \varphi_{y1} + K_{(k+2)2} \varphi_{y2} + K_{(k+2)3} \ddot{y} \\ k = 1, 2 \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $K_{11} = K_{31} = 65.33, K_{12} = K_{32} = -14.81, K_{13} = K_{33} = -5.16, K_{21} = K_{41} = -35.64, K_{22} = K_{42} = 34.81, K_{23} = K_{43} = 0.83$ .

平面二级倒立摆系统采用加速度输入, 因此输入量的矢量形式为:  $\mathbf{u} = [u_x, u_y]^T = [\ddot{x}, \ddot{y}]^T$ .

定义状态变量  $\mathbf{X}_x = [x, \varphi_{x1}, \varphi_{x2}, \dot{x}, \dot{\varphi}_{x1}, \dot{\varphi}_{x2}]^T, \mathbf{X}_y = [y, \varphi_{y1}, \varphi_{y2}, \dot{y}, \dot{\varphi}_{y1}, \dot{\varphi}_{y2}]^T$ , 则系统的动力学模型分别在  $X, Y$  方向描述为

$$\dot{\mathbf{X}}_x = A_x \mathbf{X}_x + B_x u_x \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_y = A_y \mathbf{X}_y + B_y u_y \quad (9)$$

式中,  $A_x = A_y, B_x = B_y$  均由式 (7) 中的各系数常值构造. 式 (8) 表明通过在平衡位置的线性化, 平面二级倒立摆的近似动力学模型在  $X, Y$  方向完全相同且互相解耦, 因此在  $X, Y$  方向倒立摆可以分别采用同样的控制算法.

## 3 二级倒立摆自适应滑模模糊控制

### 3.1 控制器设计

智能控制和变结构控制均可用于解决非线性问题, 因此两者可以很好地结合起来, 形成智能变结构控制, 有效地克服了传统变结构控制理论对控制对象数学模型的依赖性和控制过程中的抖振现象, 同时还保持了其鲁棒性强的优点, 能够更好地解决复杂非线性系统的控制问题<sup>[9~11]</sup>.

滑模模糊控制是典型的智能变结构控制方法, 它在滑模控制系统的趋近阶段通过模糊逻辑调节控制作用来补偿未建模动力学的影响, 使系统轨迹既能快速趋近滑动面, 又能降低抖振, 从而提高控制系统的品质<sup>[12~14]</sup>.

考虑式 (8) 所示的倒立摆线性化模型, 选取状态变量为  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \varphi_1, x_4 = \dot{\varphi}_1, x_5 = \varphi_2, x_6 = \dot{\varphi}_2$ , 略去变量  $\varphi_x, u_x$  中代表方向的下标符号  $x$ , 那么平面二级倒立摆在  $X$  方向的数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g_1(\mathbf{X}) + b_1(\mathbf{X})u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= g_2(\mathbf{X}) + b_2(\mathbf{X})u \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= g_3(\mathbf{X}) + b_3(\mathbf{X})u \end{aligned} \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$  的各分量依次表示小车位置、小车速度、摆杆 1 的摆角、摆杆 1 的角速度、摆杆 2 的摆角以及摆杆 2 的角速度,  $g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X}), g_3(\mathbf{X}), b_1(\mathbf{X}), b_2(\mathbf{X}), b_3(\mathbf{X})$  为连续的线性函数,  $u$  是对小车的控制输入量.

针对式 (10) 所描述的具有三个子系统的六阶欠驱动二级倒立摆系统, 控制目标是确定有界的控制律  $u$  使得系统在各状态量有界的前提下,  $x_i$  快速跟踪参考输入量  $x_{di}$ . 对于二级倒立摆系统, 需要同时对摆杆进行镇定控制和对小车进行定位控制, 故各偏角和小车的速度量均无需参考输入, 即  $x_{di} = 0, i = 2, 3, \dots, 6$ .

将系统 (8) 分解为小车定位子系统、摆杆 1 镇定子系统、摆杆 2 镇定子系统, 即

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = g_1(\mathbf{X}) + b_1(\mathbf{X})u \quad (11)$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = g_2(\mathbf{X}) + b_2(\mathbf{X})u \quad (12)$$

$$\dot{x}_5 = x_6, \quad \dot{x}_6 = g_3(\mathbf{X}) + b_3(\mathbf{X})u \quad (13)$$

显然三个子系统通过控制量  $u$  耦合. 因此, 为了实现两个子系统的解耦, 定义三个滑模函数

$$\begin{aligned} s_1 &= x_2 + \lambda_1 x_1 \\ s_2 &= x_4 + \lambda_2 x_3 \\ s_3 &= x_6 + \lambda_3 x_5 \end{aligned} \quad (14)$$

其中,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  为正实数.

由文献 [15, 16] 知, 控制系统的动态性能对滑模函数的斜率  $\lambda_i$  非常敏感, 当其值过大时, 系统上升时间会变小, 但超调量和调节时间会增大; 当  $\lambda_i$  过小时, 减小了超调量和调节时间, 但上升时间会变大. 为了获得良好的控制性能, 需要设计一个自适应控制律来实时调整滑模函数的斜率<sup>[12, 15~17]</sup>.

文献 [15~17] 采用模糊推理方法对滑模面的斜率  $\lambda$  进行实时调整. 为了便于实时控制, 本文根据状态跟踪误差的绝对值对  $\lambda$  进行线性调整, 即对第  $k$  个子系统

$$\lambda_k = \lambda_k^b + B_k |x_{2k-1} - x_{d2k-1}|, \quad k = 1, 2, 3 \quad (15)$$

式中,  $\lambda_k^b$  为  $\lambda_k$  的基本值,  $B_k$  为  $\lambda_k$  的调节斜率. 当小车位置跟踪误差的绝对值或摆角的绝对值较大时, 由式 (15) 将得到一个较大的输出值  $\lambda_k$ , 使相对应的滑模函数  $s_k$  的斜率增大从而导致系统的状态快速进入滑动模态进而回到平衡点.

根据以上三个滑模函数 ( $s_1, s_2$  和  $s_3$ ), 进一步定义合成滑模函数  $s = s_1 + \lambda_4 s_2 + \lambda_5 s_3$ , 其中  $\lambda_4, \lambda_5$  为实数. 调整这两个系数可以调节小车定位子系统 and 一、二级摆杆镇定子系统在滑模函数中的影响作用. 减小  $\lambda_4, \lambda_5$  的值, 就加强了小车定位子系统的作用; 反之, 增大  $\lambda_4, \lambda_5$  的值, 就加强了摆杆镇定子系统的作用. 合成滑模函数的斜率设为  $\lambda_l = \lambda_l^b + B_l \Delta\lambda_l, l = 4, 5$ , 其中  $\lambda_l^b$  为  $\lambda_l$  的基值,  $B_l$  是  $\lambda_l$  的调整斜率,  $\Delta\lambda_l$  是调整变量. 通过下列的 Mamdani 型模糊推理确定  $\Delta\lambda_l$  的值

$$R_j: \text{If } |s_{l-2}| \text{ is } F_{l-2}^j \text{ then } \Delta\lambda_l \text{ is } \Delta\lambda_l^j \quad (16)$$

其中,  $R_j$  是第  $j$  条规则 (共  $n$  条),  $F_{l-2}^j$  是输入变量  $|s_{l-2}|$  的模糊集,  $\Delta\lambda_l^j$  是输出变量  $\Delta\lambda_l$  的第  $j$  个模糊集,  $l = 4, 5$ . 采用重心法进行输出变量的去模糊化, 即

$$\Delta\lambda_l = \left( \sum_{j=1}^n \mu_{F_l^j}(|s_{l-2}|) \times \Delta\lambda_l^j \right) / \sum_{j=1}^n \mu_{F_l^j}(|s_{l-2}|) \quad (17)$$

其中,  $\mu_{F_l^j}(|s_{l-2}|)$  是第  $j$  条规则得出的  $s_{l-2}$  的隶属度函数值,  $l = 4, 5$ . 因此, 若摆杆镇定子系统远离其滑模面, 将得到一个较大的  $\lambda_l$  值. 在这种情况下, 摆杆镇定子系统在合成滑

模函数中占主要作用, 相应的控制作用将使得摆杆镇定子系统的状态变小. 同时, 由于摆杆镇定子系统状态变小, 合成滑模函数的斜率  $\lambda$  也会变小, 其结果是在组合滑模函数中定位子系统优先于摆杆镇定子系统, 小车可以运动到其目标位置.

对于  $X$  方向的倒立摆系统, 组合滑模函数  $s$  作为滑模模糊控制的输入量. 为了确定最后的控制量 (小车的加速度), 设计了如下的模糊推理规则

$$R_k: \text{If } s \text{ is } F^k \text{ then } u \text{ is } U^k \quad (18)$$

其中,  $R_k$  是第  $k$  条规则 (共  $p$  条),  $F^k$  是  $s$  的模糊集,  $U^k$  是输出变量  $s$  的模糊集. 输出量的去模糊化仍然采用重心法实现

$$u = \left( \sum_{k=1}^p \mu_{F^k}(s) \times U^k \right) / \sum_{k=1}^p \mu_{F^k}(s) \quad (19)$$

式中,  $\mu_{F^k}(|s|)$  是第  $k$  条规则得出的  $s$  的隶属度函数值,  $u$  是自适应滑模模糊控制器的输出值.

### 3.2 控制器参数的确定

滑模函数的斜率按照式 (15) 得出, 合成滑模面的斜率则由  $\lambda_4, \lambda_5$  给定,  $\Delta\lambda_l$  是调整变量, 其值通过模糊推理 (16) 确定.  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, 5)$  的基值  $\lambda_i^b$  和变化斜率  $B_i$  这些基本参数则是根据已有的控制经验和仿真结果设定的, 从而保证闭环控制系统的渐近稳定性.

针对图 2 所示的平面二级倒立摆系统的自适应滑模模糊控制框图, 控制器的基本参数选为:  $B_1 = 0.66, B_2 = 0.8, B_3 = 0.12, B_4 = -0.04, B_5 = -1.82, \lambda_1^b = 1.02, \lambda_2^b = 14.8, \lambda_3^b = 5.5, \lambda_4^b = -0.2, \lambda_5^b = -0.48$ . 模糊调节器 1, 2 的输入变量分为零 (ZE)、正小 (PS)、正中 (PM)、正大 (PB) 四个模糊集, 各模糊集均选取均匀分布的全交迭、对称隶属度函数. 模糊调节器 3 根据合成滑模函数  $s$  的值推理出倒立摆系统的控制量, 其输入变量  $s$  分为负大 (NB)、负小 (NS)、零 (ZE)、正小 (PS)、正大 (PB) 五个模糊集, 为了实现对控制量的饱和和限制, 正大、负大选为梯形隶属度函数, 其余选取三角形隶属度函数.

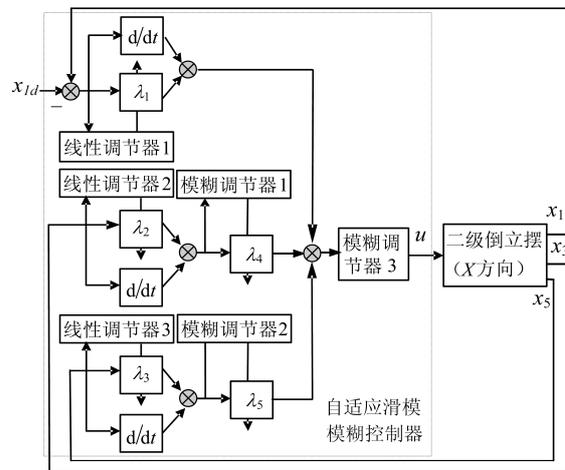


图 2 平面二级倒立摆自适应滑模模糊控制框图

Fig. 2 Block diagram of the adaptive sliding mode fuzzy control for planar inverted pendulum

### 4 实验结果

平面二级倒立摆不具备自动起摆的条件, 所以需要手动

将两根摆杆均竖起到各自平衡位置附近,待实时控制模块启动,对平面二级倒立摆的基座小车施加控制作用后放开摆杆,摆杆便在计算机的控制作用下保持平衡。

本实验规划使平面二级倒立摆的基座小车用 20 s 时间行走于一个圆心在点 (7.0, 0) cm, 半径为 7 cm 的圆周轨迹,以验证控制算法的有效性。平面二级倒立摆基座小车进行圆周行走的轨迹如图 3 所示。对于 X, Y 方向的位置跟踪曲线来说,在曲率半径小的区间段小车及摆杆的向心加速度增大,摆杆倾斜的可能性增加;在 XY 二维平面上,由于必须通过基座小车的运动来镇定摆杆导致了倒立摆基座小车的圆周行走轨迹并不能与目标轨迹完全吻合。

在平面二级倒立摆的基座小车进行圆周行走的过程中,两摆杆的偏角均在很小的范围内变化, X, Y 方向摆角的幅度分别在 0.003 rad, 0.004 rad 之内,且摆杆 1 比摆杆 2 偏离平衡位置的幅度更大。正是为了将摆杆镇定在平衡位置附近,基座小车必须根据控制算法的指令做相应方向的加速运动,使得小车定位子系统的跟踪效果受到影响。虽然自适应滑模模糊控制算法不能理想化地实现系统控制的完全解耦,但已很大地降低了耦合程度。

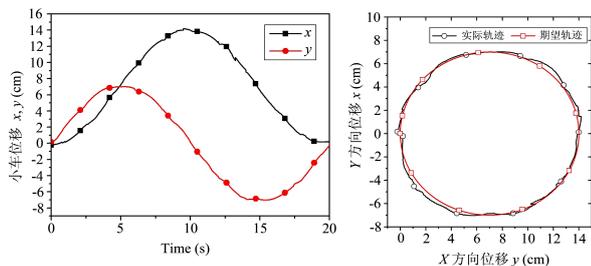


图 3 平面二级倒立摆控制实验结果

Fig. 3 Experimental results of the planar double inverted pendulum control

## 5 结论

自适应滑模控制器将滑模控制和模糊控制有机结合起来,并且通过自适应调整滑模函数的斜率以保证控制系统的动态性能。系统的控制量通过模糊推理给出,从而降低了控制器对倒立摆线性化模型的依赖性。既降低了控制器的设计难度,又保证了良好的控制品质。平面二级倒立摆基座小车的圆周行走和镇定控制实验证实了自适应滑模模糊控制策略在由多个子系统互相耦合的欠驱动系统的控制中的有效性。

## References

- Hermida E B, Cieri L J. Extended capabilities of an inverted torsion pendulum. *Polymer Testing*, 2006, **25**(2): 276~279
- Ruan X, Ding M, Gong D, Qiao J. On-line adaptive control for inverted pendulum balancing based on feedback-error-learning. *Neurocomputing*, 2007, **70**(4-6): 770~776
- Buczek F L, Cooney K M, Walker M R, Rainbow M J, Concha M C, Sanders J O. Performance of an inverted pendulum model directly applied to normal human gait. *Clinical Biomechanics*, 2006, **21**(3): 288~296
- Kodys A D, Murray R, Cassady L, Choueiri E Y. An inverted pendulum thrust stand for high-power electric thrusters. In: Proceedings of AIAA/ASME/SAE/ASEE 42nd Joint Propulsion Conference and Exhibit. Sacramento, USA: AIAA, 2006. 5008~5021
- Chandrasekara C, Davari A. Inverted pendulum: an experiment for control laboratory. In: Proceedings of the 36th

Southeastern Symposium on System Theory. Atlanta, USA: IEEE, 2004. 570~573

- Yubai K, Okuhara K, Hirai J. Gain-scheduling control of rotary inverted pendulum by weight optimization and  $H_\infty$  loop shaping procedure. *IEEE Transactions on Electronics, Information and Systems*, 2006, **126**(12): 1504~1513
- Craig J J. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control (Third Edition)*. MA: Prentice Hall, 2004
- Duan Xue-Chao. On the Modeling, Control and Experiment of the Planar Inverted Pendulum [Master dissertation], Xidian University, 2006  
(段学超. 平面倒立摆的建模、控制与实验研究 [硕士学位论文], 西安电子科技大学, 2006)
- Passino M, Yurkovich S. *Fuzzy Control*. Beijing: Tsinghua University Press, 2001
- Yao Hui-Qiong, Huang Ji-Qi, Wu Han-Song. *Variable Structure Control Systems*. Chongqing: Chongqing University Press, 1997  
(姚荟琼, 黄继起, 吴汉松. 变结构控制系统. 重庆: 重庆大学出版社, 1997)
- Young K D, Utkin V I, Ozguner U. A control engineer's guide to sliding mode control. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 1999, **7**(3): 328~342
- Huang S J, Lin W C. Adaptive fuzzy controller with sliding surface for vehicle suspension control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2003, **11**(4): 550~559
- Zhang Yan-Xin, Zhang Si-Ying. Fuzzy indirect adaptive sliding mode tracking control for a class of nonlinear interconnected system. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(5): 658~665  
(张严心, 张嗣瀛. 一类非线性互联系统的间接自适应模糊滑模跟踪控制. 自动化学报, 2003, **29**(5): 658~665)
- Li Lu-Yu, Ou Jin-Ping. Adaptive fuzzy sliding mode control for nonlinear vibration reduction of structure. *Journal of Vibration Engineering*, 2006, **19**(3): 319~325  
(李芦钰, 欧进萍. 结构非线性振动的自适应模糊滑模跟踪控制. 振动工程学报, 2006, **19**(3): 319~325)
- Liu D, Yi J, Zhao D, Wang W. Adaptive sliding mode fuzzy control for a two-dimensional overhead crane. *Mechatronics*, 2005, **15**(5): 505~522
- Lin C M, Mon Y J. Decoupling control by hierarchical fuzzy sliding-mode controller. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005, **13**(4): 593~598
- Liu Dian-Tong, Yi Jian-Qiang, Tan Min. Adaptive sliding mode fuzzy control for a class of nonlinear system. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(1): 144~150  
(刘殿通, 易建强, 谭民. 一类非线性系统的自适应滑模模糊控制. 自动化学报, 2004, **30**(1): 144~150)

段学超 西安电子科技大学机电工程学院博士研究生。主要研究方向为并联机器人技术。本文通信作者。

E-mail: xchduan@xidian.edu.cn

(DUAN Xue-Chao Ph. D. candidate at School of Electromechanical Engineering, Xidian University. His main research interest is parallel manipulators. Corresponding author of this paper.)

仇原鹰 西安电子科技大学机电工程学院教授。主要研究方向为机械CAD/CAE, 机电光一体化。

E-mail: yyqiu@mail.xidian.edu.cn

(QIU Yuan-Ying Professor at School of Electromechanical Engineering, Xidian University. His research interest covers mechanical CAD/CAE and optical-mechatronics.)

盛英 西安电子科技大学机电工程学院副教授。主要研究方向为流体操纵与控制系统。E-mail: ysheng@xidian.edu.cn

(SHENG Ying Associate professor at School of Electromechanical Engineering, Xidian University. Her research interest covers hydro-control and control system development.)