

## 具有不确定需求的混杂系统的 生产与维修控制

刘军<sup>1</sup> 芮执元<sup>1</sup> 韦尧兵<sup>1</sup> 陈积明<sup>2</sup>

**摘要** 针对不可靠生产环境, 在需求不确定并且有可能存在需求大于生产的一般性情况下, 探讨了系统生产与维修的控制问题, 提出了一种考虑追加生产能力的具有较强即时动态特性的复合三阈值控制策略. 通过将有限时域上的问题分解到无限时域上的简化方法, 在给出了相应阈值求解方法的同时, 也建议了一种近似最优的复合单阈值控制策略. 仿真结果说明及验证了各控制策略及方法.

**关键词** 混杂系统, 维修, Markov 过程, 阈值控制策略  
**中图分类号** TP273+.1

## The Production and Maintenance Control Problem of Hybrid Systems with Demand Uncertainty

LIU Jun<sup>1</sup> RUI Zhi-Yuan<sup>1</sup> WEI Yao-Bing<sup>1</sup>  
CHEN Ji-Ming<sup>2</sup>

**Abstract** Under the circumstances that the demand is uncertain, furthermore, the demand sometimes cannot be satisfied by production, the paper studies the production and maintenance control problem of failure prone production systems. A so-called complex trinal hedging point control policy is presented, which considers the problem purchasing extra production capacity. By utilizing the decomposition method that decomposes the problem form over the finite horizon to the infinite horizon, the corresponding hedging points are obtained. Meanwhile, a near-optimal single hedging point control policy is also presented. The numerical results have demonstrated the control policies and testified the method.

**Key words** Hybrid system, maintenance, Markov process, hedging point control policy

### 1 引言

众所周知, 一个生产系统一般来说都是混杂系统<sup>[1]</sup>. 在这种系统中广泛存在连续过程和随机离散事件. 对生产的管理者来说, 有两种主要的策略去应对所有这些不确定性事件对生产的影响: 依靠建立库存, 或者通过雇用临时工人、增加工作时间以及外购产品等追加生产力的办法来抵御需求大于生产情况的出现. 维修是一个企业活动中必不可少和极其重

收稿日期 2006-7-24 收修改稿日期 2006-11-20

Received July 24, 2006; in revised form November 20, 2006

国家自然科学基金(60604029), 甘肃省重大科技攻关项目(2GS063-A52-005-01), 甘肃省自然科学基金(3ZS062-B25-034), 甘肃省教育厅研究项目(0703-06)资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (60604029), the Project of the Great Technology Innovation of Gansu Province (2GS063-A52-005-01), the Natural Science Foundation of Gansu Province (3ZS062-B25-034), Research Item of Education Department of Gansu Province(0703-06)

1. 兰州理工大学机电学院 兰州 730050 2. 浙江大学工业控制国家重点实验室 杭州 310027

1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050 2. State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027

DOI: 10.1360/aas-007-1331

要的组成部分. 现代化生产的环境和特点使维修不再是一项没有效益的作业, 预防维修、全员生产维修等概念的提出都蕴含这一因素在内. 从总体上看, 应该将维修视为整个制造过程中的组成部分, 而不再是当生产线发生故障后, 简单的应急和使计划外的维修费用最小化的目的. 可以说, 同时考虑维修和生产的生产控制问题, 是现代化生产模式下各企业不可避免地要面对的研究课题.

由不可靠单设备组成的生产系统, 在有限或者无限时段上的调度和控制问题, 许多学者已经做了相应的研究, 如 Gershwin<sup>[2]</sup> 等. 本文所讨论的最优控制策略是一种最优阈值的控制策略. 一些学者, 例如 Akella 和 Kumar<sup>[3]</sup> 等已经研究过这种控制策略. 但是大多数的学者研究这个问题时都没有考虑到系统追加生产或者维修能力的可能性是存在的. 本文阐述了一种思想, 也就是说应该存在一个标准, 当低于这个标准时, 系统应该立即通过外购等手段追加生产或者维修能力. 文献 [4] 最先表达了追加生产力的思想, 本文将这种思想引入到生产与维修的同时控制问题中. Boukas<sup>[5]</sup> 对生产的预维修、矫正维修等问题做出了重要的贡献. 受文献 [6] 的启发, 遵循 Boukas 的研究轨迹, 本文研究一个流率模型, 考虑有限时段上, 在生产需求发生变化的情况下, 一个由不可靠设备组成的生产系统的生产和维修的控制问题. 这个问题是对前人在生产和维修控制问题上的深入探讨, 或者说是前人对问题的扩展. 为了便于说明问题, 一个所谓的需求阀被引入到系统中, 需求阀开启, 则系统的产品需求率为  $d$ . 在某些阶段, 生产满足需求, 在某些阶段, 生产不能满足需求. 如果需求阀关闭, 则需求率为零.

## 2 问题描述

假设一个由不可靠单设备组成的生产系统只生产一种产品, 系统模型如图 1 所示.

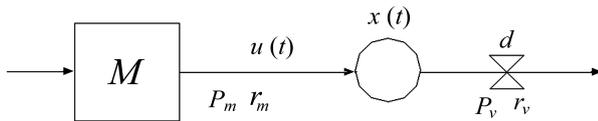


图 1 系统模型  
Fig. 1 System model

$x(t)$ 、 $u(t)$ 、 $d(t)$  分别表示系统在  $t$  时的产品盈余水平 ( $x$ )、生产率 ( $u$ ) 和产品的需求率 ( $d$ ).  $s(t) \in \{0, 1\}$  是一个连续时间 Markov 过程, 表示了系统生产设备在  $t$  时的状态, 1 表示设备处于可正常工作状态, 0 表示设备处于维修状态. 如果  $s(t) = 1$ , 生产的限制条件  $0 \leq u(t) \leq l$ ; 如果  $s(t) = 0$ ,  $u(t) = 0$ .  $l$  为设备的最大生产率. 为了同时研究生产以及维修问题, 假设  $r_m \leq r_m(t) \leq \bar{r}_m$  表示系统  $t$  时的维修率, 其中  $r_m$  表示系统的最低维修率,  $\bar{r}_m$  则表示最高维修率. 将  $r_m(t)$  引入到上述 Markov 过程的生成矩阵中, 即  $Q(t) = \begin{pmatrix} -p_m & p_m \\ r_m(t) & -r_m(t) \end{pmatrix}$ , 其中  $p_m$  表示设备的故障率, 即  $1/p_m$  表示设备连续发生二次故障之间的平均正常工作时间; 同理  $1/r_m(t)$  表示设备的平均维修时间. 在系统中引入一个时而开放, 时而关闭的需求阀来模拟需求发生变化的情况. 当需求阀处于开放的时候, 系统有一个连续的产品需求率  $d$ ; 当需求阀处于关闭的时候, 对系统而言没有产品需求. 需求阀进行开、关的切换

时间分别服从速率为  $p_v$  和  $r_d$  的指数分布. 假设系统设备与需求阀在  $t$  时的工作/故障或开/关的状态用  $(\alpha(t), \beta(t))$ ,  $\alpha(t), \beta(t) \in \{up(U), down(D)\}$  表示, 即存在四种不同的状态:  $UU$ 、 $UD$ 、 $DU$  以及  $DD$ . 设备与需求阀的平均可正常工作或者开放时间显然为  $e_m = r_m/(p_m + r_m)$  以及  $e_v = r_v/(p_v + r_v)$ . 那么系统的平均生产率即为  $E_m = l e_m$ , 平均需求率即为  $E_v = d e_v$ .  $v(t)$  表示时间  $t$  时的追加生产率.  $C = [0, \bar{k}]$  表示可供追加的生产率集.  $\bar{k}$  是可供追加的最大生产率. 不等式  $l + \bar{k} > d$  始终是成立的. 这也就是说, 只要需要, 需求总是可以满足的. 那么这个混杂系统动态模型描述如下

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} u(t) + v(t) - z(t), & \text{当 } s(t) = 1 \\ v(t) - z(t), & \text{当 } s(t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $z(t)$  表示系统需求率, 如果  $\beta(t) = up$ , 那么  $z(t) = d$ ; 如果  $\beta(t) = down$ , 那么  $z(t) = 0$ . 考虑维修及追加生产力因素, 定义目标函数如下所示

$$J(x, u, r_m, v) = \min \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[(G(t) + h(t))dt] \quad (2)$$

式中, 惩罚函数  $G$  定义为:  $G(t) = c^+ x^+ + c^- x^- + c_p s + c_r r_m \bar{s}$ .  $c^+$  和  $c^-$  分别为系统正的产品盈余水平  $x^+$  以及负的产品盈余水平  $x^-$  所引起的单位产品、单位时间的损失.  $c_p$  代表单位时间的生产损失,  $c_r r_m$  表示了单位时间的维修损失. 如果  $s = 0$ , 那么  $\bar{s} = 1$ ; 如果  $s = 1$ , 那么  $\bar{s} = 0$ .  $h(t) = c_v v$  表示以  $v$  速率追加生产率的单位时间损失.  $c_v$  则表示追加生产率的单位损失. 目标函数  $J(x, u, r_m, v)$  受式 (1) 等生产、维修条件的约束.

考虑到生产的实际过程, 根据 Hu, Vakili 和 Yu<sup>[7]</sup>、Liberopoulos 和 Caramanis<sup>[8]</sup> 的相关结论, 可以认为在本问题中阈值控制策略为一种最优控制策略. 实际上, 文献 [9] 已经证明了一个相似的问题, 且本文也只研究这种策略. 值得注意的是, 在本目标函数中系统的生产率和维修率是此函数的决策变量.

## 3 复合三阈值控制策略

### 3.1 系统 Bellman 方程

系统的状态转移矩阵如下所示

$$\begin{bmatrix} p_m p_v - p_m - p_v & p_m(1 - p_v) & (1 - p_m)p_v & p_m p_v \\ r_m(1 - p_v) & r_m p_v - r_m - p_v & r_m p_v & (1 - r_m)p_v \\ (1 - p_m)r_v & p_m r_v & p_m r_v - r_v - p_m & p_m(1 - r_v) \\ r_m r_v & (1 - r_m)r_v & r_m(1 - r_v) & r_m r_v - r_v - r_m \end{bmatrix}$$

如果令  $V_{ij}(x)$  ( $i \in \{0, 1\}$  代表设备初始状态,  $j \in \{1, 0\}$  代表需求阀在整个过程中保持为开或者关闭状态) 表示相应的系统价值函数, 考虑需求阀的动态变化情况, 暂不考虑系统外购生产力的情况, 由此可得系统完整 Bellman 方程如下所示

$$\left\{ \begin{aligned}
 J^* &= \min_{0 \leq u \leq l} \left\{ \frac{dV_{11}(x)}{dx} (u-d) \right\} + (p_m p_v - p_m - p_v) V_{11}(x) + \\
 &\quad p_m (1-p_v) V_{01}(x) + (1-p_m) p_v V_{10}(x) + p_m p_v V_{00}(x) + \\
 &\quad c^+ x^+ + c^- x^- + c_p \\
 J^* &= -\frac{dV_{01}(x)}{dx} d + c^+ x^+ + c^- x^- + \\
 &\quad \min_{r_m \leq r_m \leq \bar{r}_m} \left\{ \begin{aligned}
 &r_m (1-p_v) V_{11}(x) + (r_m p_v - r_m - p_v) V_{01}(x) + \\
 &r_m p_v V_{10}(x) + (1-r_m) p_v V_{00}(x) + c_r r_m \end{aligned} \right\} \\
 J^* &= \min_{0 \leq u \leq l} \left\{ \frac{dV_{10}(x)}{dx} u \right\} + (1-p_m) r_v V_{11}(x) + \\
 &\quad p_m r_v V_{01}(x) + (p_m r_v - r_v - p_m) V_{10}(x) + \\
 &\quad p_m (1-r_v) V_{00}(x) + c^+ x^+ + c^- x^- + c_p \\
 J^* &= \min_{r_m \leq r_m \leq \bar{r}_m} \left\{ \begin{aligned}
 &r_m r_v V_{11}(x) + (1-r_m) r_v V_{01}(x) + \\
 &r_m (1-r_v) V_{10}(x) + (r_m r_v - r_v - r_m) \times \\
 &V_{00}(x) + c_r r_m \end{aligned} \right\} + \\
 &\quad c^+ x^+ + c^- x^-
 \end{aligned} \right.$$

显然对上述系统 Bellman 方程的讨论将非常复杂. 根据前人从动态规划的角度出发所得到的最优控制的充分必要条件<sup>[10]</sup>, 如果不考虑需求阀的动态变化情况, 问题则相对简单得多. 基于这种设想, 先对各个需求状态进行讨论, 然后再引入不受需求阀动态变化情况影响的控制策略.

3.2 复合三阈值控制策略

结合系统特性, 给出近似最优的具有较强动态特性的复合三阈值控制策略如下所示

$$\left\{ \begin{aligned}
 (u, v) &= \begin{cases} (0, 0) & x > z_{mu}^* \\ (\min(l, d), 0) & x = z_{mu}^* \\ (u_1, v_1) & z_v^* < x < z_{mu}^* \quad UU \\ (l, \max(d-l, 0)) & x = z_v^* \\ (l, \bar{k}) & x < z_v^* \end{cases} \\
 (u_2, v_2) &= \begin{cases} (l, 0) & x < z_{md}^* \quad UD \\ (0, 0) & x \geq z_{md}^* \end{cases} \\
 r_m &= \begin{cases} r_1 = \begin{cases} \bar{r}_m & x < z_{du}^* \quad DU \\ r_m & x \geq z_{du}^* \end{cases} \\
 r_2 = \begin{cases} \bar{r}_m & x < z_{dd}^* \quad DD \\ r_m & x \geq z_{dd}^* \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned} \right. \quad (3)$$

其中  $z_{mu}^*$ ,  $z_v^*$ ,  $z_{md}^*$ ,  $z_{du}^*$  等代表相应阈值. 一般情况下,  $z_{mu}^*$  和  $z_v^*$  是非负标量. 这种控制策略表示当系统处于  $UU$  状态时, 如果系统的盈余水平高于  $z_{mu}^*$  就停止生产, 直至其消耗至  $z_{mu}^*$  并尽量保持这种状态; 如果系统盈余水平低于  $z_{mu}^*$  并大于  $z_v^*$  就以系统的最大生产率进行生产, 上述期间系统不追加生产力; 如果盈余水平达到  $z_v^*$ , 就通过加班、外购生产力等手段给系统追加相应大小的生产力来维持生产; 如果低于  $z_v^*$ , 就以系统最大的生产率并且追加最大生产力进行生产; 如果系统处于  $UD$  状态, 系统不追加生产力, 并且当系统此时的盈余水平不低于  $z_{md}^*$  时, 不进行生产, 当其低于  $z_{md}^*$  时, 以最大生产力进行生产; 同理, 当系统处于  $DU$  状态时, 如果系统盈余水平已经消耗至  $z_{du}^*$  以下时, 必须以系统最大可能维修能力进行维修, 而如果在  $z_{du}^*$  之上, 则以系统正常最小维修能力进行维修, 系统处于  $DD$  状态与系统处于  $DU$  状态时的维修特性是一致的, 所不同的是相应的阈值不同.

注意, 上述式 (3) 中  $z_{mu}^* \geq z_{md}^*$ ,  $z_{mu}^* \geq z_{du}^*$ ,  $z_{du}^* \geq z_{dd}^*$  成

立. 这是个似是而非的问题. 如果  $z_{du}^* > z_{mu}^*$ , 那么  $x$  在  $z_{mu}^*$  附近变化, 特别是  $x = z_{mu}^*$  时, 如果继续保持最高的维修率进行工作就与实际生产及维修情况不符了. 从另外一个角度来看, 不等式  $z_{mu}^* \geq z_{md}^*$  与  $z_{du}^* \geq z_{dd}^*$  就说明了为了满足产品需求, 系统的  $UU$  或者  $DU$  状态相对于系统  $UD$  或者  $DD$  状态, 有个更高的需求去抵御不确定性给生产带来的影响.

4 生产可以满足需求时

4.1 需求阀保持“开”状态

当需求阀处于“开”状态, 对系统而言, 产品的需求率始终保持为  $d$ , 将这种有限时域上的问题在无限时域上扩展, 以定理的形式给出阈值  $z_{mu}^*$  和  $z_{du}^*$  二者之间的关系.

**定理 1.** 在复合近似最优三阈值控制策略下,  $z_{mu}^*$  与  $z_{du}^*$  存在如下关系:

如果  $z_{du}^* > 0$ , 那么

$$z_{mu}^* = z_{du}^* + H \times \ln [ W ( (c^+ + c^-)(l r_m - d r_m - p_m d) \times \exp(L(d \bar{r}_m + p_m d - l \bar{r}_m)) + c^+ (\bar{r}_m - r_m) ) ] \quad (4)$$

如果  $z_{du}^* < 0$ , 那么

$$z_{mu}^* = z_{du}^* + H \times \ln [ W ( (c^+ + c^-)(l \bar{r}_m - d \bar{r}_m - p_m d) \times \exp(L(d r_m + p_m d - l r_m)) - c^- (\bar{r}_m - r_m) ) ] \quad (6)$$

式中,  $W = \frac{\bar{r}_m p_m}{c^+(l-d)(p_m + r_m)(l \bar{r}_m - d \bar{r}_m - p_m d)}$ ,  $L = \frac{z_{du}^*}{d(l-d)}$ ,  $H = \frac{1}{l r_m - d r_m - p_m d}$ .

**证明.** 文献 [6] 提供了一种根据相关阈值确定概率密度分布的方法. 暂且不考虑需求阀动态的影响, 假设产品需求率保持为  $d$ ,  $z_{du}^* \leq z_{mu}^*$  的条件以及简化后的阈值控制策略将整个状态空间基本分成两部分, 即  $x(t) \leq z_{du}^*$  与  $z_{du}^* < x(t) \leq z_{mu}^*$ , 分别用  $s^-$  与  $s^+$  表示  $x(t) \leq z_{du}^*$  与  $z_{du}^* < x(t) \leq z_{mu}^*$ ,  $s(t) \in \{0, 1\}$  代表了设备的状态. 利用文献 [6] 的结论, 可以得到系统位于相应各个状态区间的概率密度  $f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, s)$ , 以一个引理的方式直接给出其结果:

**引理 1.** 在复合近似最优三阈值控制策略下, 系统在各个状态区间上的概率密度函数  $f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, s)$  以及  $x(t) = z_{mu}^*$  时的概率  $p_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(z_{mu}^*)$  为

$$\left\{ \begin{aligned}
 f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 1^-) &= d^2 p_m \Delta(z_{du}^*, z_{mu}^*) \quad x \in (-\infty, z_{du}^*) \\
 f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 0^-) &= d p_m (l-d) \Delta(z_{du}^*, z_{mu}^*) \quad x \in (-\infty, z_{du}^*) \\
 f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 1^+) &= d^2 p_m \Delta(z_{du}^*, z_{mu}^*) \quad x \in [z_{du}^*, z_{mu}^*) \\
 f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 0^+) &= d p_m (l-d) \Delta(z_{du}^*, z_{mu}^*) \quad x \in [z_{du}^*, z_{mu}^*) \\
 p_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(z_{mu}^*) &= d^2 (l-d) \Delta(z_{du}^*, z_{mu}^*)
 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

式中  $\Delta(z_{du}^*, z_{mu}^*) = \psi(z_{du}^*, z_{mu}^*) \theta(\bar{r}_m) \theta(r_m) \exp\{\pi(r_m, z_{du}^*)\}$ ,  $\psi(z_{du}^*, z_{mu}^*) = (d(l-d)\theta(\bar{r}_m)(p_m + r_m) \exp\{-\theta(r_m)(z_{du}^* - z_{mu}^*)\} - l p_m (\bar{r}_m - r_m))^{-1}$ ,  $\pi(r_m, z_{du}^*) = -\theta(r_m)(z_{du}^* - z_{mu}^*)$ ,  $\theta(r_m) = \frac{l r_m - d r_m - d p_m}{d(l-d)}$ .

显然, 当  $x$  趋向于  $-\infty$  时,  $f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 1^-)$  与  $f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 0^-)$  都为零. 因此, 如果  $z_{du}^* < 0$ , 在不考虑需求阀动态及追加生产力的情况下, 根据式 (2) 与 (6), 相应损

失函数为

$$J^- = -c^- [\int_{-\infty}^{z_{du}^*} x(f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 1^-) + f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 0^-))dx + \int_{z_{du}^*}^0 x(f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 1^+) + f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 0^+))dx] + c^+ [\int_0^{z_{mu}^*} x(f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 1^+) + f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 0^+))dx + z_{mu}^* p_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(z_{mu}^*)] + c_p [\int_{-\infty}^{z_{du}^*} f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 1^-)dx + \int_{z_{du}^*}^{z_{mu}^*} f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 1^+)dx + p_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(z_{mu}^*)] + c_r [\bar{r}_m \times \int_{-\infty}^{z_{du}^*} f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 0^-)dx + r_m \int_{z_{du}^*}^{z_{mu}^*} f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 0^+)dx] \tag{8}$$

同理, 当  $z_{du}^* > 0$  时可得相应的损失函数

$$J^+ = -c^- [\int_{-\infty}^0 x(f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 1^-) + f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 0^-))dx] + c^+ [\int_0^{z_{du}^*} x(f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 1^-) + f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 0^-))dx + \int_{z_{du}^*}^{z_{mu}^*} x(f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 1^+) + f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 0^+))dx + z_{mu}^* p_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(z_{mu}^*)] + c_p [\int_{-\infty}^{z_{du}^*} f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 1^-)dx + \int_{z_{du}^*}^{z_{mu}^*} f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 1^+)dx + p_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(z_{mu}^*)] + c_r [\bar{r}_m \times \int_{-\infty}^{z_{du}^*} f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 0^-)dx + r_m \int_{z_{du}^*}^{z_{mu}^*} f_{z_{du}^*, z_{mu}^*}(x, 0^+)dx] \tag{9}$$

因此, 利用无约束问题的最优性的条件, 取  $\frac{\partial J(z_{du}, z_{mu})}{\partial z_{du}} - \frac{\partial J(z_{du}, z_{mu})}{\partial z_{mu}} = 0$ , 化简即可得到上述结论.  $\square$

得到了有关  $z_{mu}^*$  与  $z_{du}^*$  关系的结论, 剩下的问题就是求取  $z_{mu}^*$  或者  $z_{du}^*$ , 这个问题现在也显得相当容易了.

**定理 2.** 在近似最优三阈值控制策略下, 最优阈值  $z_{du}^*$  为如果  $z_{du}^* > 0$ , 则有

$$z_{du}^* = \frac{d(l-d)}{p_m d + \bar{r}_m d - l\bar{r}_m} \ln \left[ \frac{c^+}{(c^+ + c^-)(p_m d + r_m d - l\bar{r}_m)} \times (t(\bar{r}_m - d\bar{r}_m - p_m d) + (l-d)(\bar{r}_m - r_m)) \right] \tag{10}$$

式中,  $t$  是下列方程的解

$$t \exp(t) = -\frac{(l-d)(p_m + r_m)}{p_m l} \exp \left\{ \frac{(c_p + p_m c_r)(l r_m - d r_m - p_m d)^2 + c^+ d l (2(l r_m - d r_m - p_m d) + p_m l)}{c^+ d l (l-d)(r_m + p_m)} \right\} \tag{11}$$

如果  $z_{du}^* < 0$ , 则有

$$z_{du}^* = -\frac{d(l-d)}{l r_m - d r_m - p_m d} \ln \left( \frac{v(\sigma)}{p_m l (c^+ + c^-) (l \bar{r}_m - d \bar{r}_m - p_m d)} \right) \tag{12}$$

式中,  $v(\sigma) = c^+ (l \bar{r}_m - d \bar{r}_m - p_m d) (l r_m - d r_m - p_m d + p_m l) \exp(\sigma) + c^- l p_m (l-d)(\bar{r}_m - r_m)$ , 其中,  $\sigma \in \mathbf{R}$  是下列方程的一个解

$$c^+ d l (r_m + p_m) (l-d)(l \bar{r}_m - d \bar{r}_m - p_m d) \sigma = d l (c^+ + c^-) (r_m + p_m) (l-d)(l \bar{r}_m - d \bar{r}_m - p_m d) \times \ln \left\{ \frac{(l-d)(c^- l p_m (\bar{r}_m - r_m) + c^+ (r_m + p_m) (l \bar{r}_m - d \bar{r}_m - p_m d) \exp(\sigma))}{l p_m (c^+ + c^-) (l \bar{r}_m - d \bar{r}_m - p_m d)} \right\} - (l r_m - d r_m - p_m d) (c^+ l d (l \bar{r}_m - d \bar{r}_m - p_m d) - c^- l d (r_m + p_m) \times (l-d) + (p_m c_r + c_p) (l r_m - d r_m - p_m d) (l \bar{r}_m - d \bar{r}_m - p_m d)) \tag{13}$$

**证明.** 将式 (4) 代入到式 (8) 中并取  $\frac{dJ^+}{dz_{du}} = 0$ , 计算化简, 即可得到本定理的式 (9); 同理, 将式 (5) 代入到式 (7) 中并取  $\frac{dJ^-}{dz_{du}} = 0$ , 计算化简, 即可得到式 (11).  $\square$

注意  $z_{du}^* \leq z_{mu}^*$  以及  $z_{mu}^*$  一般为正值的前提条件, 如果求得的解符合上述关系式, 就得到了所要的解. 如果存在正、负多解情况, 则根据实际生产情况, 选取  $z_{du}^*$  为负时对应“真值”情况下的阈值. 当然式 (12) 也有两个可能解, 这就需要逐一进行验证, 方能得到相关最优阈值.

### 4.2 需求阀保持“关”状态

当需求阀保持“关”状态, 说明系统无产品需求, 因此也不需要追加生产力. 这种情况下求取近似最优的阈值  $z_{md}^*$  与  $z_{dd}^*$  主要考虑的是产品需求为零对系统造成的影响.

**定理 3.** 当需求阀保持“关”状态, 如果取需求率大小为  $E_v$ , 则  $z_{md}^*$  与  $z_{dd}^*$  的关系如同  $z_{mu}^*$  与  $z_{du}^*$  一样, 满足式 (4)、(5)、(9) 和 (11).

**证明.** 略.

这个定理的证明很简单,  $z_{md}^*$  与  $z_{dd}^*$  的关系如同  $z_{mu}^*$  与  $z_{du}^*$  的关系在本质上是一样的, 问题的关键在于用  $E_v$  取代  $d$  是否合适, 答案是显然的. 需求阀处“关闭”状态时, 并不意味着产品需求真正为零, 这也与实际生产不相符合, 考虑需求阀的动态作用, 只不过此时系统较需求阀处“开放”状态有个更低的抵御不确定需求的要求.  $E_v$  在一定意义上就表示需求阀处关闭状态时系统平均产品需求率的大小. 当然此时得到的相关阈值不是最优, 只能是近似最优.

### 4.3 近似最优单阈值控制策略

对生产和维修而言, 近似最优复合三阈值控制策略是一种动态策略, 需要根据需求状态不停地调整生产. 但如果需求率变化过快, 上述复合三阈值控制策略的工作情况就可能变得很差. 而且如果需求是不可观测的, 生产就难以执行. 在这种情况下, 就有必要采取别的控制策略来控制生产, 这也就是本节提出近似最优单界点控制策略的原因. 注意, 如果产品的需求率以及设备的维修率是不变的, 根据文献 [3] 等学者的工作就可以确定一个有关生产的最优单阈值的控制策略, 即

$$u = \begin{cases} r & x < z^* \\ \min(l, d) & x = z^* \\ 0 & x > z^* \end{cases} \tag{14}$$

现在只不过由于需求与生产的动态变化, 这个最优阈值  $z^*$  难以确定罢了.

根据生产设备状态过程与需求阀状态过程等不确定性因素, 可以认为系统的生产过程是由以下两种情况综合而成: 1) 系统具有不确定的生产和维修, 而产品需求率是确定的; 2) 系统具有不确定的生产和需求, 而设备的维修率是确定的. 这是个似是而非的问题. 对生产而言, 用  $z_1^*$  和  $z_2^*$  分别表示上述两种情况下的最优阈值, 用  $z_m^*$  表示最优单阈值  $z^*$  的一个近似值.

对第一种情况, 可以很容易地确定  $z_1^*$  的大小. 在前面的章节中, 已经解决过类似的问题. 只要用  $E_v$  取代系统位于需求阀处于“开”状态时所得相关结论中的需求率  $d$ , 即可求得  $z_1^*$ . 注意, 这里考虑了需求阀的动态特性. 对于第二种情况, 为了得到  $z_2^*$ , 令  $r_{ma}$  为整个生产过程中的平均校正维修率, 取  $r_{ma} = (\bar{r}_m + r_m)/2$ . 同理, 可以认为这种情况是由一个具

有不确定生产, 但具有确定需求的生产过程与一个具有确定生产, 但具有不确定需求的生产过程综合而成. 假设其相应的阈值分别为  $z_{21}^*$ ,  $z_{22}^*$ . 根据 Baris<sup>[11]</sup> 的工作, 可以认为对于具有不确定生产, 却具有确定需求的生产过程, 可以通过下列式子求得相应的阈值

$$z_{21}^* = \max \left\{ 0, -Q \frac{e_m}{1 - e_m} \frac{(l - E_v)E_v}{E_m - E_v} \times \ln \left[ \frac{c^+ e_m (l - E_v)}{(c^+ + c^-)(1 - e_m)E_v} \right] \right\} \quad (15)$$

式中  $Q = \frac{2(1 - e_m)}{r_{ma}}$ . 而且, 对于具有确定生产和不确定需求的生产过程, 系统可视为由一个具有固定最大生产率  $E_m$ , 且不考虑其变化方差的设备来代替原设备而组成的生产系统. 在这种情况下, 因为存在生产可以满足需求的前提条件, 即说明生产在任何时候都能满足需求, 因此, 这种情况下的相关阈值  $z_{22}^*$  为零. 由于可以认为  $z_2^*$  为上述两种情况下所得阈值之和, 所以有  $z_2^* = z_{21}^*$  成立.

本节已经单独研究了各个不确定事件对生产的影响情况, 并得到了相应的阈值, 综上所述, 给出结论如下

$$z_m^* = z_1^* + z_2^* = z_1^* + z_{21}^* \quad (16)$$

$z_m^*$  所对应的校正维修的阈值可以通过第 4.1 节的结论直接得到, 在此就不加赘述了.

### 5 生产不能满足需求时

当生产不能满足需求时,  $E_v > E_m$  成立, 即说明在生产过程的某个阶段有可能需要通过增加劳动时间、外购生产力等手段给系统追加生产力. 据复合近似最优三阈值控制策略, 这个标准即为系统盈余水平阈值  $z_v^*$ . 以下介绍通过问题简化的方法求取追加生产力阈值  $z_v^*$ .

如果在有限时域上考虑生产不能满足需求的一个确定的需求状态, 阈值控制策略如果为最优控制策略, 很明显系统轨迹基本上保持在状态空间  $x \leq 0$  上. 换句话说, 在  $[0, z']$  上的轨迹是短暂和有限的.  $z'$  为某一未知正阈值. 考虑到生产的实际情况, 当生产不能满足需求时, 维修变量应该取固定的最大维修率, 并且当库存 (订货需求) 低于某个层面时, 必须追加生产力. 在这种情况下, 目标函数  $J(x, u, r_m, v)$  可以用函数  $J_1 = \min \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E(\int_0^T (c^- x^- + c_p s + c_r \bar{r}_m \bar{s} + c_v v) dt)$  来近似代替. 在这种情况下, 考虑系统的动态特性及生产故障的 Markov 过程特性,  $z_v^*$  将主要由损失函数  $J_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E(\int_0^T (c^- x^- + c_v v) dt)$  确定. 而且利用反向思维, 这个系统可以转化为一个具有不确定生产率  $d$  (需求阀开放或者关闭) 和不确定的需求率  $u_s$  的生产系统. 注意: 如果  $s = 1$ , 则有  $u_s = l$ ; 如果  $s = 0$ , 则有  $u_s = 0$ . 这样在式 (3) 的控制策略下, 考虑系统的状态空间特性,  $J_2$  就可以近似转换为  $J_3 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E(\int_0^T (c^- x^+ + c_v \bar{k} x^-) dt)$ . 这是因为在式 (3) 控制策略下, 系统盈余水平在空间  $[-\infty, z_v^*]$  和  $[z_{mu}^*, \infty]$  内的轨迹是短暂的和有限到达的. 而且在正常生产条件下, 也不鼓励追加生产力的行为. 很明显, 对这个问题存在一个最优单阈值控制策略, 并且相关阈值的求解方法在第 4.3 节中已经做过介绍. 直接利用相关结论, 整理符号, 再考虑到当  $E_m < E_v$  时生产的实际意义, 指出当库存 (订货需求) 低于某个阈值时需要追加生产力的近似的最优阈值为

$$z_v^* = \frac{2e_m}{r_m} \frac{(l - d)d}{d - E_m} \ln \left[ \frac{c^-}{c^- + c_v \bar{k}} \frac{d}{E_m} \right] \quad (17)$$

注意, 这种方法实际上是在整个时域上对生产不能满足需求的某个阶段进行扩展并加以研究的结果. 而且在式 (3) 的控制策略下, 这种近似主要是考虑到在  $[-\infty, z_v^*]$  和  $[z_{mu}^*, \infty]$  上的状态轨迹是短暂的、有限的. 如果在一个有限时间内考虑这个问题, 这种近似当然也是不准确的. 所以上述结论并不是准确的解析表达式, 只是目标值的一种近似. 但是这种方法避免了求解复杂的动态规划问题, 简单的计算就可以得到适宜的参考值.

### 6 仿真研究

近似最优复合三阈值控制策略的优点在于, 当需求阀处于关闭状态, 并且系统状态处于  $z_{md}^* < x < z_{mu}^*$  时, 阻止系统进行不必要的生产. 单阈值控制策略就不能处理这种情况, 因此就会产生不必要的生产损失. 不光对生产情况, 对系统的维修情况而言, 情况也是一样的. 取  $c^+ = 1, c^- = 3, p_m = 0.2, l = 5, d = 2.4, r_v = 10$ . 为了简化问题方便计算, 取  $\bar{r}_m = r_m = r_m, c_r = c_p = 0$ . 图 2 表示在采用复合三阈值控制策略而不采用近似最优单阈值控制策略情况下, 系统节省的成本与需求阀关闭率之间的变化关系图.

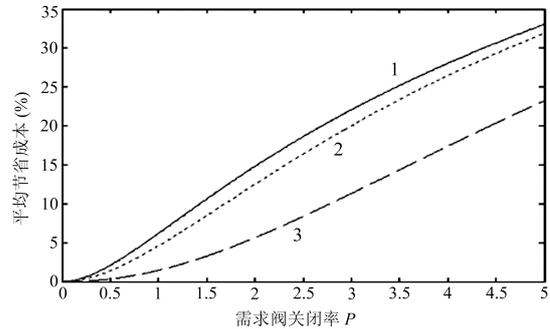


图 2 系统平均节省成本与需求阀关闭率关系图

Fig. 2 System average saving cost vs. breakdown rate of the demand valve

对曲线 1 而言,  $r_m = 21$ ; 对曲线 2 而言,  $r_m = 10$ ; 对曲线 3 而言,  $r_m = 4$ . 图 2 表明, 在采用复合三阈值控制策略下, 随着需求阀关闭率的增加, 系统所节省的成本也在增加, 这是因为系统状态保持在  $z_{md}^* < x < z_{mu}^*$  区域内的时间与系统状态在  $x < z_{md}^*$  区域内的时间相比, 不可忽略, 在此区域内产生的成本损失对系统的总损失产生了很大的影响, 因此复合三阈值控制策略就可以发挥作用, 工作良好. 但是, 可以看到, 当需求阀的关闭率非常小时, 采用复合三阈值控制策略所节省的成本几乎为零. 这是因为当系统处于需求阀关闭状态时, 系统状态保持在  $z_{md}^* < x < z_{mu}^*$  区域内的时间远远小于在  $x < z_{md}^*$  区域内的时间, 因此在此区域内节省的损失相比于系统的总损失来说非常小, 可以忽略不计. 当然, 这种情况下, 单阈值控制策略就能很好的发挥作用. 这也就是说, 当需求阀的关闭率非常小的时候, 近似最优的单阈值控制策略可以作为一个更为简单的控制策略来替代复合三阈值控制策略. 由图可见, 当维修率增加时, 系统节省的成本也在增加, 这是因为没有考虑维修成本的原因, 即  $c_r = 0$  的结果.

取  $l = 6, \bar{k} = 3, \bar{r}_m = r_m = r_m = 0.3, p_m = 0.1, c^+ = 0.2, c^- = 0.8, c_r = c_p = 0, c_v = 4$ , 图 3 表示用本文方法得到的关于追加生产力阈值与需求率  $d$  之间的关系变化图. 文献 [9] 也建议了一种近似求解追加生产力阈值的简化方法. 图 4 为用文献 [9] 的方法得到的关于追加生产力阈值

与需求率  $d$  之间的关系变化图。

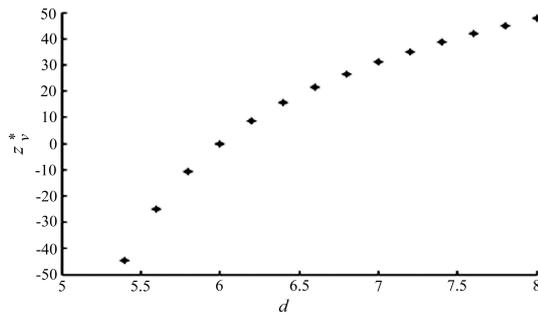


图 3 需求率与追加生产力阈值  $z_v^*$  关系图

Fig. 3 Demand rate vs. hedging point  $z_v^*$

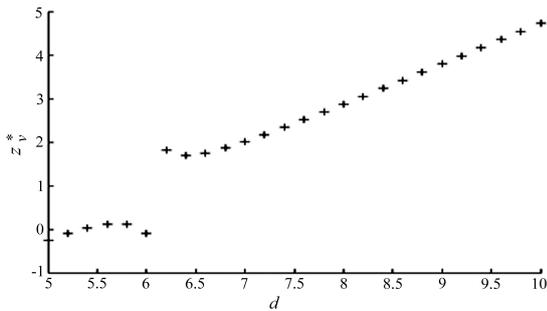


图 4 需求率与追加生产力阈值  $z_v^*$  关系图

Fig. 4 Demand rate vs. hedging point  $z_v^*$

图 3 和图 4 基本都反映了随着需求率的递增, 追加生产力阈值也随之递增的关系, 并且如果需求率相当大, 大约是 6 的时候, 用这两种方法得到的最优阈值都大于 0. 在某种程度上这是因为两种方法都是近似的方法. 然而实际上它却反映了在生产中如果需求率足够大, 即使此时的库存是正值, 也应该外购生产力这样的事实. 另外本文的结果相对于文献 [9] 的结果偏大, 这是因为本文将特定的需求状态在整个时域上扩展而单独加以研究的结果. 如果需求层变化很快, 本文的结果就比文献 [9] 的结果有更大的误差. 而如果需求层变化很慢, 本文的结果就比较优越.

## 7 结语

当维修不再是一项没有效益的作业, 而将维修视为整个制造过程中的组成部分后, 对生产以及维修同时进行控制的问题就显得愈发重要. 本文将维修率也作为一个控制变量引入到传统经典的流率模型中并引入追加生产力的概念, 建议了一种具有很强动态特性的复合三阈值控制策略, 给出了相应阈值的求取方法. 同时也建议了一种近似最优的单界点控制策略的确定办法, 这个策略主要是基于需求不可观测的基础之上提出来的, 是对复合三阈值控制策略的进一步补充. 仿真研究说明了这两种控制策略的应用环境和范围, 并对追加生产力阈值的求取方法进行了补充说明.

## References

- 1 Athans M. Challenge to control: a collective view. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 1987, **32**(4): 274~285
- 2 Gershwin S B. Hierarchical flow control: a framework for scheduling and planning discrete events in manufacturing systems. *Proceedings of the IEEE*, 1989, **77**(1): 195~209

- 3 Akella R, Kumar P R. Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(2): 116~126
- 4 Huang L, Hu J Q, Pirooz V. Optimal control of a multi-state manufacturing system: control of production rate and temporary increase in capacity. In: *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Florida, USA: IEEE, 1998. 2155~2159
- 5 Boukas E K, Yang H. Optimal control of manufacturing flow and preventive maintenance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(6): 881~885
- 6 Sharifnia A. Production control of a manufacturing system with multiple machine states. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, **33**(7): 620~625
- 7 Hu J Q, Vakili P, Yu G X. Optimality of hedging point policies in the production control of failure prone manufacturing systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(9): 1875~1880
- 8 Liberopoulos G, Caramanis M. Production control of manufacturing systems with production rate-dependent failure rates. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(4): 889~895
- 9 Huang L, Hu J Q, Vakili P. *Recent Advance in Manufacturing Engineering*. Berlin: Springer-Verlag, 1996, 31~60
- 10 Rishel R. Control of systems with jump Markov disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, **20**(2): 241~244
- 11 Tan B. Production control of a pull system with production and demand uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(5): 779~782

刘 军 博士, 兰州理工大学机电学院副教授. 2005 年毕业于浙江大学. 主要研究方向为混杂系统、生产调度与控制.

E-mail: lzhjliu@eyou.com

(LIU Jun Ph. D., associate professor at School of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou University of Technology. He received his Ph. D. degree in engineering from Zhejiang University in 2005. His research interest covers hybrid system, production scheduling and control.)

芮执元 兰州理工大学教授. 主要研究方向为先进制造系统及数字制造技术、计算机仿真. E-mail: Zhiy\_rui@lut.cn

(RUI Zhi-Yuan Professor at Lanzhou University of Technology. His research interest covers advanced manufacturing system, numerical manufacturing technology, and computer simulation technology.)

韦尧兵 兰州理工大学教授. 主要研究方向为虚拟制造、计算机仿真. E-mail: weiyb@lut.cn

(WEI Yao-Bing Professor at Lanzhou University of Technology. His research interest covers virtual manufacturing technology and computer simulation technology.)

陈积明 博士, 浙江大学信息学院助理教授. 主要研究方向为无线传感器/执行器网络、实时调度理论. 本文通信作者.

E-mail: jmchen@iipc.zju.edu.cn

(CHEN Ji-Ming Ph. D., assistant professor at Zhejiang University. His research interest covers wireless sensor/actor networks and weakly hard real-time scheduling. Corresponding author of this paper.)