第 33 卷 第 12 期 自 动 化 学 报 Vol. 33, No. 12
2007 年 12 月 ACTA AUTOMATICA SINICA December, 2007

参数不确定离散奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制

王惠姣 [1,2] 薛安克 [3] 鲁仁全 [3] 徐 哲 [3] 王建中 [3]

摘 要 研究了不确定离散奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制问题, 控制目标是设计一个状态反馈控制器, 对所有允许的不确定性, 闭环系统正则、因果、稳定且具干扰衰减度 γ. 首次提出了该问题的充分必要条件, 并且设计方法归结为求一个严格线性矩阵不等式 (LMI) 的可行性问题. 最后, 通过一个数值实例证实了该方法的有效性.

关键词 离散奇异系统, H_∞ 控制, 不确定, 线性矩阵不等式 (LMI)
中图分类号 TP13

Robust H_∞ Control for Discrete Singular Systems with Parameter Uncertainties

WANG Hui-Jiao[1,2] XUE An-Ke[3] LU Ren-Quan[3] XU Zhe[3] WANG Jian-Zhong[3]

Abstract This paper deals with the problem of robust H_∞ control for uncertain discrete singular systems. The problem we address is the design of a state feedback controller, such that the resulting closed-loop system is regular, causal, stable and with disturbance attenuation γ for all admissible uncertainties. Based on strict linear matrix inequality (LMI) approach, a sufficient and necessary condition for the solution to this problem is obtained for the first time. Finally, a numerical example is given to demonstrate the applicability of the proposed method.

Key words Discrete singular system, H_∞ control, uncertainty, LMI

1 引言

奇异系统是比状态空间系统更具有广泛形式的动力学系统, 它又称为描述系统、半状态系统、隐式系统、广义系统及有代数限制的微分 (差分) 系统. 它广泛产生于电力网络、电路、受限机器人、石油催化裂化等科学技术及大型工程的众多领域[1,2]. 鲁棒 H_∞ 控制一直是控制领域研究的热点. 不确定奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制问题的目标是设计控制器, 对于所有允许的不确定性, 使得相应的闭环系统正则, 无脉冲 (对于连续奇异系统) 或因果 (对于离散奇异系统), 稳定且具干扰衰减度 γ. 对于连续奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制问题已有一些研究成果[3~7], 而对于离散奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制问题, 虽然也有一些研究成果[8~10], 但在文献 [8,9] 中都没有考虑系统的不确定因素, 文献 [9] 所得的结果不是严格的线性矩阵不等式 (LMI), 因而给求解带来困难. 文献 [10] 虽然考虑了不确定因素, 且其结果是依赖于严格 LMI 的求解, 但是它得出的是充分条件, 而不是充分必要条件.

本文研究了不确定离散奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制问题, 考虑到现有结果的局限性, 首次给出了对所有允许的不确定性, 闭环系统正则、因果、稳定且具干扰衰减度 γ 的充分必要条件, 并且设计方法归结为求一个严格 LMI 的可行性问题. 最后, 通过一个数值实例证实了该方法的有效性.

2 问题描述

考虑如下不确定线性离散奇异系统

$$\begin{cases} E\boldsymbol{x}(k+1) = (A+\Delta A)\boldsymbol{x}(k) + (B+\Delta B)\boldsymbol{u}(k) + \\ \qquad\qquad B_\omega \boldsymbol{\omega}(k) \\ \quad \boldsymbol{z}(k) = C\boldsymbol{x}(k) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{u}(k) \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{\omega}(k) \in \mathbf{R}^p$, $\boldsymbol{z}(k) \in \mathbf{R}^q$ 分别为系统的状态, 控制输入, 干扰输入和受控输出. E, A, B, B_ω 和 C 为适当维数的已知常数矩阵, 且 $\mathrm{rank}\, E = r \le n$, ΔA, ΔB 是具有适当维数的不确定时变矩阵, 假设具有如下形式

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \end{bmatrix} = MF(k) \begin{bmatrix} N_a & N_b \end{bmatrix} \tag{2}$$

这里 M, N_a, N_b 是具有适当维数的已知常阵, $F(k)$ 为具有如下形式的有界不确定函数阵

$$F^{\mathrm{T}}(k)F(k) \le I \tag{3}$$

对于 $\boldsymbol{u}(k) = 0$ 时标称离散奇异系统

收稿日期 2006-7-6 收修改稿日期 2006-9-10
Received July 6, 2006; in revised form September 10, 2006
国家自然科学重点基金 (60434020) 资助
Supported by National Natural Science Key Foundation of China (60434020)
1. 浙江大学工业控制研究所 杭州 310027 2. 浙江理工大学自动化研究所 杭州 310018 3. 杭州电子科技大学信息与控制研究所 杭州 310018
1. National Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027 2. Institute of Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018 3. Institute of Information and Control, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018
DOI: 10.1360/aas-007-1300

$$\begin{cases} E\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + B_\omega\boldsymbol{\omega}(k) \\ \boldsymbol{z}(k) = C\boldsymbol{x}(k) \end{cases} \tag{4}$$

采用如下的定义.

定义 1[1, 2]**.**

1) 奇异系统 (4) 是正则的, 如果 $\det(\boldsymbol{z}E - A) \neq 0$;

2) 奇异系统 (4) 是因果的, 如果它是正则的且 $\deg(\det(\boldsymbol{z}E - A))=\mathrm{rank}\, E$;

3) 奇异系统 (4) 是稳定的, 如果它是正则的且所有的有限极点包含在复平面上的单位圆盘中;

4) 奇异系统 (4) 是允许的, 如果它是正则、因果且稳定的.

考虑如下无记忆线性状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u}(k) = K\boldsymbol{x}(k), K \in \mathbf{R}^{m\times n} \tag{5}$$

由式 (1), (2) 和 (5) 得相应的不确定闭环系统为

$$\begin{cases} E\boldsymbol{x}(k+1) = (A_c + \Delta A_c)\boldsymbol{x}(k) + B_\omega\boldsymbol{\omega}(k) \\ \boldsymbol{z}(k) = C\boldsymbol{x}(k) \end{cases} \tag{6}$$

其中 $A_c = A + BK$, $\Delta A_c = \Delta A + \Delta BK$.

鲁棒 H_∞ 控制问题就是确定状态反馈控制律 (5), 使对所有满足式 (2) 和 (3) 的参数不确定闭环系统, 满足以下的设计指标:

1) 对所有允许的不确定性, 当 $\boldsymbol{\omega}(k) = 0$ 时, 闭环系统 (6) 正则、因果、稳定;

2) 对零初始条件的 $\boldsymbol{x}(k)$ 及给定的正常数 $\gamma > 0$, 有

$$J = \sum_{k=0}^{\infty}(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{z}(k) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\omega}(k)) < 0$$

引理 1[11]**.** 给定适当维数矩阵 Ω, Γ 和 Ξ, 其中 Ω 是对称的, 则

$$\Omega + \Gamma F\Xi + \Xi^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}} < 0$$

对所有满足 $F^{\mathrm{T}}F \leq I$ 的矩阵 F 成立, 当且仅当存在一个常数 $\epsilon > 0$, 使得

$$\Omega + \epsilon^{-1}\Gamma\Gamma^{\mathrm{T}} + \epsilon\Xi^{\mathrm{T}}\Xi < 0$$

引理 2[12]**.** 离散奇异系统 (4) 是允许的当且仅当存在正定矩阵 $P > 0$ 和矩阵 Q 满足

$$A^{\mathrm{T}}PA - E^{\mathrm{T}}PE + QS^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}SQ^{\mathrm{T}} < 0 \tag{7}$$

其中 $S \in \mathbf{R}^{n\times(n-r)}$ 为任意满足 $E^{\mathrm{T}}S = 0$ 的列满秩矩阵.

3　主要结果

定理 1. 对于给定的常数 $\gamma > 0$, $\boldsymbol{u}(k) = 0$ 时的标称离散奇异系统 (4) 正则、因果、稳定且具干扰衰减度 γ 的充分必要条件是: 存在正定对称阵 P 和矩阵 Q, 使得

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & QS^{\mathrm{T}}B_\omega & A^{\mathrm{T}}P & C^{\mathrm{T}} \\ B_\omega^{\mathrm{T}}SQ^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I & B_\omega^{\mathrm{T}}P & 0 \\ PA & PB_\omega & -P & 0 \\ C & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

其中, $\Xi_{11} = QS^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}SQ^{\mathrm{T}} - E^{\mathrm{T}}PE$, $S \in \mathbf{R}^{n\times(n-r)}$ 为任意满足 $E^{\mathrm{T}}S = 0$ 的列满秩矩阵.

证明.

充分性. 由线性矩阵不等式 (8) 成立可知, 当 $\boldsymbol{\omega}(k) = 0$ 时, 根据矩阵的 Schur 补引理可得: $A^{\mathrm{T}}PA - E^{\mathrm{T}}PE + QS^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}SQ^{\mathrm{T}} < 0$, 由引理 2 和定义 1 可知离散奇异系统 (4) 是正则、因果、稳定.

对于离散奇异系统 (4), 取函数

$$V(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}PE\boldsymbol{x}(k) \tag{9}$$

$V(\boldsymbol{x}_k)$ 的前向差分为

$$\begin{aligned} \Delta V(\boldsymbol{x}_k) = &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k+1)E^{\mathrm{T}}PE\boldsymbol{x}(k+1) - \\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}PE\boldsymbol{x}(k) = \\ &(A\boldsymbol{x}(k) + B_\omega\boldsymbol{\omega}(k))^{\mathrm{T}}P(A\boldsymbol{x}(k) + \\ &B_\omega\boldsymbol{\omega}(k)) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}PE\boldsymbol{x}(k) \end{aligned} \tag{10}$$

由 $E^{\mathrm{T}}S = 0$ 可得

$$\begin{aligned} 0 = &2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k+1)E^{\mathrm{T}}SQ^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k) = \\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)(A^{\mathrm{T}}SQ^{\mathrm{T}} + QS^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{x}(k) + \\ &2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)QS^{\mathrm{T}}B_\omega\boldsymbol{\omega}(k) \end{aligned} \tag{11}$$

由 $\boldsymbol{x}(k)$ 的零初始条件知 $V(\boldsymbol{x}_0) = 0$, 因而由式 (10) 和 (11) 可得

$$\begin{aligned} J = &\sum_{k=0}^{\infty}(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{z}(k) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\omega}(k)) \leq \\ &\sum_{k=0}^{\infty}(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{z}(k) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\omega}(k)) + \\ &V(\boldsymbol{x}_\infty) - V(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=0}^{\infty}(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{z}(k) - \\ &\gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\omega}(k) + \Delta V(\boldsymbol{x}_k)) = \\ &\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k) & \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(k) \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{\omega}(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\Theta=\left[\begin{array}{cc}\Theta_{11} & \Theta_{12}\\ \Theta_{12}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I+B_\omega^{\mathrm{T}}PB_\omega\end{array}\right],$$

$$\begin{aligned}\Theta_{11}=&A^{\mathrm{T}}PA-E^{\mathrm{T}}PE+A^{\mathrm{T}}SQ^{\mathrm{T}}+QS^{\mathrm{T}}A+\\&C^{\mathrm{T}}C,\\ \Theta_{12}=&A^{\mathrm{T}}PB_\omega+QS^{\mathrm{T}}B_\omega.\end{aligned}$$

根据矩阵的 Schur 补引理, 由 LMI (8) 很容易得到 $J<0$, 故充分性得证.

必要性. 当 $\boldsymbol{\omega}(k)=0$ 时, 离散奇异系统 (4) 正则、因果、稳定, 由文献 [1] 知, 一定存在非奇异矩阵 G 和 H 使得

$$\bar{E}=GEH=\left[\begin{array}{cc}I & 0\\ 0 & 0\end{array}\right],\bar{A}=GAH=\left[\begin{array}{cc}\bar{A}_{11} & 0\\ 0 & I\end{array}\right]$$

其中 $\bar{A}_{11}\in\mathbf{R}^{r\times r}$ 为 Schur 稳定矩阵.

由 $E^{\mathrm{T}}S=0$ 和 $\mathrm{rank}S=n-r$ 可知, 矩阵 S 可参数化为

$$S=G^{\mathrm{T}}\left[\begin{array}{c}0\\ \Phi\end{array}\right]$$

其中 $\Phi\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 为非奇异矩阵.

同样可以定义

$$\bar{B}_\omega=GB_\omega=\left[\begin{array}{c}\bar{B}_{\omega1}\\ \bar{B}_{\omega2}\end{array}\right],\bar{C}=CH=\left[\begin{array}{cc}\bar{C}_1 & \bar{C}_2\end{array}\right]$$

并令 $\bar{P}=G^{-\mathrm{T}}PG^{-1},\bar{Q}=H^{\mathrm{T}}Q$ 和 $\bar{S}=G^{-\mathrm{T}}S$, 则在矩阵 Θ 两边分别乘以 $\mathrm{diag}\{H^{\mathrm{T}},I\}$ 和 $\mathrm{diag}\{H,I\}$ 可得

$$\bar{\Theta}=\left[\begin{array}{cc}\bar{\Theta}_{11} & \bar{\Theta}_{12}\\ \bar{\Theta}_{12}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I+\bar{B}_\omega^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{B}_\omega\end{array}\right]$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}_{11}=&\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{A}-\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{E}+\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{S}\bar{Q}^{\mathrm{T}}+\bar{Q}\bar{S}^{\mathrm{T}}\bar{A}+\\&\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C},\\ \bar{\Theta}_{12}=&\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{B}_\omega+\bar{Q}\bar{S}^{\mathrm{T}}\bar{B}_\omega.\end{aligned}$$

由 $J=\sum_{k=0}^{\infty}(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{z}(k)-\gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\omega}(k))<0$ 及文献 [13] 可知一定存在对称正定矩阵 $\bar{P}_1$ 使得

$$\left[\begin{array}{cc}\bar{A}_{11}^{\mathrm{T}}\bar{P}_1\bar{A}_{11}-\bar{P}_1+\bar{C}_1^{\mathrm{T}}\bar{C}_1 & \bar{\Gamma}_{12}\\ \bar{\Gamma}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{\Gamma}_{22}\end{array}\right]<0 \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}&\bar{\Gamma}_{12}=\bar{A}_{11}^{\mathrm{T}}\bar{P}_1\bar{B}_{\omega1}-\bar{C}_1^{\mathrm{T}}\bar{C}_2\bar{B}_{\omega2},\\ &\bar{\Gamma}_{22}=-\gamma^2 I+\bar{B}_{\omega2}^{\mathrm{T}}\bar{C}_2^{\mathrm{T}}\bar{C}_2\bar{B}_{\omega2}+\bar{B}_{\omega1}^{\mathrm{T}}\bar{P}_1\bar{B}_{\omega1},\end{aligned}$$

则由该不等式可知

$$\bar{\Theta}=\left[\begin{array}{cc}\bar{\Theta}_{11} & \bar{\Theta}_{12}\\ \bar{\Theta}_{12}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I+\bar{B}_\omega^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{B}_\omega\end{array}\right]<0 \tag{14}$$

同时有一组可行解为

$$\bar{P}=\left[\begin{array}{cc}\bar{P}_1 & 0\\ 0 & \bar{C}_2^{\mathrm{T}}\bar{C}_2+\beta I\end{array}\right]$$

$$\bar{S}=\left[\begin{array}{c}-\bar{C}_1^{\mathrm{T}}\bar{C}_2\Phi^{-\mathrm{T}}\\ 0\\ -(\bar{C}_2^{\mathrm{T}}\bar{C}_2+\beta I)\Phi^{-\mathrm{T}}\end{array}\right]$$

其中 $\beta>0$ 为一充分小的标量.

根据矩阵的初等变换原理, 由式 (14) 容易得出式 (8) 成立, 故必要性得证. □

以下定理进一步给出当 $\boldsymbol{u}(k)\neq 0$ 时, 不确定离散奇异系统 (1) 对应的标称系统采用控制律 (5) 得到的闭环系统

$$\left\{\begin{array}{l}E\boldsymbol{x}(k+1)=(A+BK)\boldsymbol{x}(k)+B_\omega\boldsymbol{\omega}(k)\\ \qquad\boldsymbol{z}(k)=C\boldsymbol{x}(k)\end{array}\right. \tag{15}$$

正则、因果、稳定且具干扰衰减度 γ 的严格 LMI 设计方法.

定理 2. 对于给定的常数 $\gamma>0$, 标称离散奇异系统 (15) 正则、因果、稳定且具干扰衰减度 γ 的充分必要条件是: 存在正定对称阵 P 和矩阵 Q,Y,Z, 使得

$$\left[\begin{array}{cccc}\Phi_{11} & \Phi_{12} & Z^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} & B_\omega\\ \Phi_{12}^{\mathrm{T}} & \Phi_{22} & Z^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} & 0\\ CZ & CZ & -\gamma^2 I & 0\\ B_\omega^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -I\end{array}\right]<0 \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}&\Phi_{11}=(A-E)Z+Z^{\mathrm{T}}(A-E)^{\mathrm{T}}+BY+Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}},\\ &\Phi_{12}=EP+QS^{\mathrm{T}}-Z^{\mathrm{T}}+(A-E)Z+BY,\\ &\Phi_{22}=-Z-Z^{\mathrm{T}}+P,\end{aligned}$$

$S\in\mathbf{R}^{n\times(n-r)}$ 为任意满足 $ES=0$ 的列满秩矩阵, 则一个合适的状态反馈控制律为

$$\boldsymbol{u}(k)=YZ^{-1}\boldsymbol{x}(k) \tag{17}$$

证明.

必要性. 采用同文献 [3] 一样的假设, 系统 (15) 可改写为下式

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{E}\bar{\boldsymbol{x}}(k+1)=\bar{A}\bar{\boldsymbol{x}}(k)+\bar{B}_\omega\boldsymbol{\omega}(k)\\ \qquad\boldsymbol{z}(k)=\bar{C}\bar{\boldsymbol{x}}(k)\end{array}\right. \tag{18}$$

其中

$$\bar{E}=\begin{bmatrix} E & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{x}}(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)\end{bmatrix},$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} E & I\\ A+BK-E & -I\end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_\omega=\begin{bmatrix}0\\ B_\omega\end{bmatrix},\quad \bar{C}=\begin{bmatrix} C & 0\end{bmatrix}$$

以及 $\boldsymbol{y}(k)=E\boldsymbol{x}(k+1)-E\boldsymbol{x}(k)$.

由定理 1 知, 系统 (18) 是正则、因果、稳定且具干扰衰减度 γ, 则式 (8) 成立, 分别用 $\bar{E}$, $\bar{A}$, $\bar{B}_\omega$, $\bar{C}$, $\bar{S}$, $\bar{P}$, $\bar{Q}$ 替代式 (8) 中的 E, A, B_ω, C, S, P, Q, 且选择

$$\bar{P}=\begin{bmatrix} P & 0\\ 0 & \alpha I\end{bmatrix}, \bar{Q}=\begin{bmatrix} Q & I\\ 0 & I\end{bmatrix}, \bar{S}=\begin{bmatrix} S & 0\\ 0 & Z\end{bmatrix}$$

其中 $P\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为正定对称阵, $S\in\mathbf{R}^{n\times(n-r)}$ 为任意满足 $E^{\mathrm{T}}S=0$ 的列满秩矩阵, $Z\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为任意非奇异阵, $Q\in\mathbf{R}^{n\times(n-r)}$ 为任意矩阵. 因此, 容易得出 $\bar{S}$ 为任意满足 $\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{S}=0$ 的列满秩矩阵. 由矩阵的 Schur 补引理且令 $\alpha\to 0$ 可得

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & Z^{\mathrm{T}}B_\omega & C^{\mathrm{T}}\\ \Psi_{12}^{\mathrm{T}} & -Z-Z^{\mathrm{T}}+P & Z^{\mathrm{T}}B_\omega & 0\\ B_\omega^{\mathrm{T}}Z & B_\omega^{\mathrm{T}}Z & -\gamma^2 I & 0\\ C & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}<0 \tag{19}$$

其中

$$\Psi_{11}=(A+BK-E)^{\mathrm{T}}Z+Z^{\mathrm{T}}(A+BK-E),$$
$$\Psi_{12}=E^{\mathrm{T}}P+QS^{\mathrm{T}}-Z^{\mathrm{T}}+(A+BK-E)^{\mathrm{T}}Z.$$

应用对偶定理[10], 分别用 E^{T}, $(A+BK)^{\mathrm{T}}$, C^{T}, B_ω^{T} 替代 LMI (19) 中的 E, $(A+BK)$, B_ω, C, 并令 $Y=KZ$, 可得 LMI (16), 故必要性得证.

充分性. 由 LMI (16) 成立及式 (17) 得 $Y=KZ$, 应用对偶定理, 可得 LMI (19) 成立, 由定理 1 知, 系统 (18) 是正则、因果、稳定且具干扰衰减度 γ, 因系统 (18) 等价于系统 (15), 故充分性得证. □

以下定理给出不确定离散奇异系统鲁棒 H_∞ 控制器设计方法.

定理 3. 考虑不确定离散奇异系统 (1), 对于给定的常数 $\gamma>0$, 当且仅当存在正定对称阵 P, 矩阵 Q,Y,Z 和常数 $\varepsilon>0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Phi_{12} & Z^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} & B_\omega & \Lambda_{15}\\ \Phi_{12}^{\mathrm{T}} & \Phi_{22} & Z^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} & 0 & \Lambda_{15}\\ CZ & CZ & -\gamma^2 I & 0 & 0\\ B_\omega^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -I & 0\\ \Lambda_{15}^{\mathrm{T}} & \Lambda_{15}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\varepsilon I\end{bmatrix}<0 \tag{20}$$

可构建一个合适的状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u}(k)=YZ^{-1}\boldsymbol{x}(k)$$

使得对所有允许的不确定性, 相应的闭环系统 (6) 正则、因果、稳定且具干扰衰减度 γ, 其中

$$\Lambda_{11}=(A-E)Z+Z^{\mathrm{T}}(A-E)^{\mathrm{T}}+BY+Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\varepsilon MM^{\mathrm{T}},$$

$$\Lambda_{15}=(N_aZ+N_bY)^{\mathrm{T}},$$

Φ_{12},Φ_{22} 的值同式 (16) 中的值, $S\in\mathbf{R}^{n\times(n-r)}$ 为任意满足 $ES=0$ 的列满秩矩阵.

证明.

必要性. 由定理 2 可知, 闭环系统 (6) 正则、因果、稳定且具干扰衰减度 γ, 则分别用 $A+MF(k)N_a, B+MF(k)N_b$ 替代式 (16) 中的 A,B, 即

$$\Phi+\begin{bmatrix}M\\0\\0\\0\end{bmatrix}F(k)\begin{bmatrix}\Lambda_{15}^{\mathrm{T}} & \Lambda_{15}^{\mathrm{T}} & 0 & 0\end{bmatrix}+$$
$$\begin{bmatrix}\Lambda_{15}\\ \Lambda_{15}\\0\\0\end{bmatrix}F^{\mathrm{T}}(k)\begin{bmatrix}M^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}<0 \tag{21}$$

其中 Φ 为 LMI (16) 的左边项, $\Lambda_{15}=(N_aZ+N_bY)^{\mathrm{T}}$, 由引理 1 可得, 式 (20) 成立. 故必要性得证.

充分性. 由式 (20) 和引理 1, 根据矩阵的 Schur 补引理可得, 式 (21) 成立. 由定理 2 可知, 不确定离散奇异系统 (1) 对所有允许的不确定性, 相应的闭环系统 (6) 正则、因果、稳定且具干扰衰减度 γ. □

注. 如果干扰衰减度 γ 给定, 可通过解 LMI (20) 的可行性问题得到一个合适的状态反馈控制律. 否则, 可通过解下面的最优问题

$$\begin{aligned}&\min_{P,Q,Y,Z,\varepsilon}\gamma\\ &\mathrm{s.t.\,LMI\,(20), P>0,}\varepsilon>0\end{aligned} \tag{22}$$

得到一个最小的干扰衰减度.

4 数值实例

以下通过一个例子来说明提出的鲁棒 H_∞ 控制器设计方法的有效性. 考虑系统具有如下参数:

$$E=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix}0.7&0.9\\1.2&0.5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_\omega=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0.1\\0.1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{N}_a=\begin{bmatrix}0.2\\0.2\end{bmatrix}^{\rm T},\qquad N_b=1,$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1\\0.9\end{bmatrix}^{\rm T},\qquad F(k)=I$$

并令 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}^{\rm T}$.

对于一个给定的 $\gamma=0.5$, 利用 Matlab LMI 工具箱解 LMI (20) 的可行性问题, 可得

$$P=\begin{bmatrix}1.8801&-1.9147\\-1.9147&1.9804\end{bmatrix},\ \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1.8619\\1.9380\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}3.6594&-5.4817\end{bmatrix},\quad \varepsilon=5,$$

$$Z=\begin{bmatrix}13.8506&-13.1636\\-14.8422&14.2721\end{bmatrix}$$

以及一个合适的状态反馈控制律为

$$\boldsymbol{u}(k)=\begin{bmatrix}-8.6600&-9.3900\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$$

对应的闭环系统, 选定干扰输入 $\boldsymbol{\omega}(k)$ 如图 1 所示, 则输出 $\boldsymbol{z}(k)$ 的轨迹如图 2 所示.

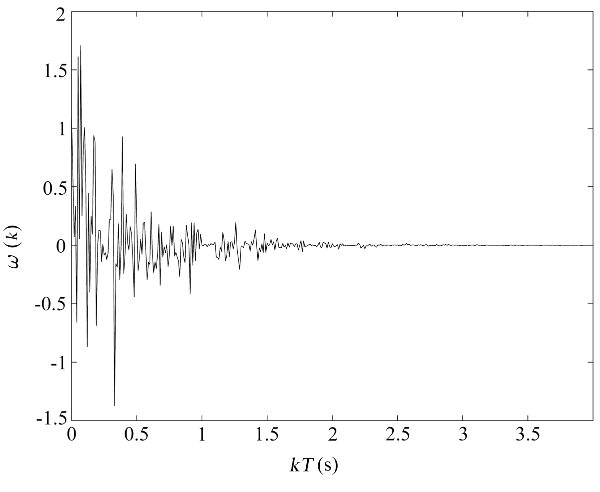

图 1 输入信号 $\boldsymbol{\omega}(k)$ 的轨迹

Fig. 1 The trajectory of $\boldsymbol{\omega}(k)$

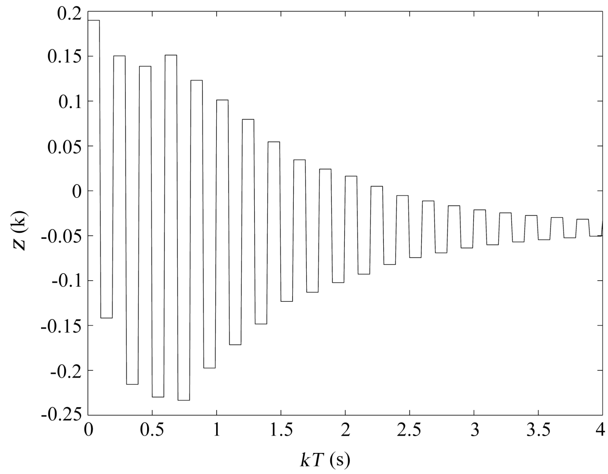

图 2 输出信号 $\boldsymbol{z}(k)$ 的轨迹

Fig. 2 The trajectory of $\boldsymbol{z}(k)$

当干扰衰减度 γ 未知时, 通过选取不同的 γ, 求解凸优化问题式 (22), 可以得到不同的状态反馈控制器 K. 表 1 给出了 K 和 γ 的关系, 从表中可以看出, γ 越小, 得到的控制器 K 越大, 在实际系统设计的时候, 根据需要可以折中选择合适的 γ 值, 以求得相应的控制器.

表 1 K 和 γ 的关系

Table 1 Relationship of K and γ

γ	0.4	0.6	0.8
$\boldsymbol{K}$	[-12.8209 -13.5425]	[-4.4695 -5.2594]	[-3.3362 -4.1119]

通过折半搜索法, 得到最小的衰减度为 $\gamma=0.37$, 通过解凸优化问题式 (22), 可以得到其解为

$$P=\begin{bmatrix}1.4780&-1.5207\\-1.5207&1.5653\end{bmatrix},\ \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1.4772\\1.5215\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}2.8519&-4.3117\end{bmatrix},\quad \varepsilon=5,$$

$$Z=\begin{bmatrix}11.2912&-10.9262\\-11.9679&11.6654\end{bmatrix}$$

以及一个合适的状态反馈控制律为

$$\boldsymbol{u}(k)=\begin{bmatrix}-14.5082&-15.2539\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$$

5 结论

本文研究了一类范数有界参数不确定离散奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制问题. 给出了对于所有允许的参数不确定性, 闭环系统正则、因果、稳定且具干扰衰减度 γ 的充分必要条件, 并提供了基于严格 LMI

的状态反馈控制律的设计方法. 最后, 通过一个数值实例验证了该设计方法的有效性.

References

1 Dai L. *Singular Control Systems*. New York: Springer-Verlag, 1989

2 Lewis F L. A survey of linear singular systems. *Circuits, System, Signal Processing*, 1986, **5**(1): 3∼36

3 Fridman E, Shaked U. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(2): 253∼270

4 Xu S, Lam J, Yang C. Robust H_∞ control for uncertain singular systems with state delay. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, **13**(13): 1213∼1223

5 Kim J H, Lee J H, Park H B. Robust H_∞ control of singular systems with time delays and uncertainties via LMI approach. In: Proceedings of American Control Conference. Anchorage, AK: 2002. 620∼621

6 Xue A K, Shi T, Lu R Q. Robust H_∞ optimal guaranteed cost control for a class of nonlinear uncertain singular delay systems. In: Proceedings of International Conference on Industrial Electronics. IEEE, 2006. 11∼15

7 Lu R Q, Su H Y, Chu J. Robust H_∞ control for a class of uncertain Lure′s singular systems with time-delays. In: Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control. Hawaii, USA: IEEE, 2003. 5585∼5590

8 Zhang G M, Jia Y M. New results on discrete-time bounded real lemma for singular systems: strict linear inequality conditions. In: Proceedings of American Control Conference. Anchorage, AK: 2002. 634∼638

9 Xu S, Yang C. H_∞ state feedback control for discrete singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(7): 1405∼1409

10 Ji X, Su H Y, Chu J. Robust H_∞ control for uncertain discrete singular time-delay systems. In: Proceedings of International Conference on Sensing, Computing and Automation. IEEE, 2006. 2489∼2493

11 Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertin linear systems. *IEEE Systems and Control Letters*, 1987, **8**(4): 351∼357

12 Xu S Y, Lam J. Robust stability and stabilization of discrete singular systems: an equivalent characterization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(4): 568∼574

13 de Souza C E, Xie L. On the discrete-time bounded real lemma with application in the characterization of static state feedback H_∞ controllers. *Systems and Control Letters*, 1992, **18**(1): 61∼71

王惠姣 浙江大学工业控制研究所博士研究生, 浙江理工大学讲师, 主要研究方向为鲁棒控制、奇异系统的控制和信息融合. 本文通信作者.
E-mail: hjwang@hdu.edu.cn
(**WANG Hui-Jiao** Ph. D. candidate at National Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University. She is currently a lecturer at Zhejiang Sci-Tech University. Her research interest covers robust control, singular system control, and information fusion. Corresponding author of this paper.)

薛安克 杭州电子科技大学教授, 主要研究方向为鲁棒控制、信息融合、智能控制和奇异系统的控制.
E-mail: akxue@hdu.edu.cn
(**XUE An-Ke** Professor at Hangzhou Dianzi University. His research interest covers robust control, information fusion, intelligent control, and singular system control.)

鲁仁全 博士, 副教授, 主要研究方向为鲁棒控制、奇异系统的控制和信息融合.
E-mail: rqlu@hdu.edu.cn
(**LU Ren-Quan** Ph. D., associate professor. His research interest covers robust control, singular system control, and information fusion.)

徐 哲 博士, 副教授, 主要研究方向为鲁棒控制、流程工业生产优化调度.
E-mail: xuzhe0956@sina.com
(**XU Zhe** Ph. D., associate professor. His research interest covers robust control and optimal scheduling for process industries.)

王建中 副教授, 主要研究方向为鲁棒控制、流程工业生产优化调度.
E-mail: wangjz@hdu.edu.cn
(**WANG Jian-Zhong** Ph. D., associate professor. His research interest covers robust control and optimal scheduling for process industries.)