关联 Lurie 控制大系统的参数绝对稳定性

陈 宁[1]　桂卫华[1]　刘碧玉[1]

摘 要　针对一类具有不确定性参数和参考输入的关联 Lurie 大系统, 研究其参数绝对稳定性的问题, 即同时考虑参数变化引起的平衡点的改变及其稳定性的问题. 首先, 基于分散状态反馈, 研究了当不确定性参数变化和参考输入改变时, 关联 Lurie 大系统参数稳定性存在条件和参数稳定区域. 其次, 给出了在该参数稳定区域中基于矩阵不等式条件的关联大系统稳定性存在的线性矩阵不等式 (LMI) 条件. 最后, 研究了多胞型关联 Lurie 大系统参数绝对稳定性存在的充分条件和求解算法. 仿真例子说明了方法的有效性.

关键词　关联 Lurie 大系统, 参数绝对稳定性, 平衡点分析, 线性矩阵不等式
中图分类号　TP120.30

Parametric Absolute Stability of Interconnected Lurie Control Systems

CHEN Ning[1]　GUI Wei-Hua[1]　LIU Bi-Yu[1]

Abstract　This paper considers parametric absolute stability of interconnected Lurie systems, with uncertain parameters and constant reference inputs. The notion of parametric stability is a joint problem of feasibility and stability of equilibrium states as the uncertain parameters vary. First, the existing condition of parametric stability and the stable region are studied by change of the uncertain parameters and reference input based on decentralized state feedback. Then, a sufficient condition in parametric stable region for interconnected Lurie system is proposed based on linear matrix inequality method. Finally, the existing sufficient condition of polytopic-interconnected Lurie systems is given to ensure the overall system to be parametric absolutely stable. The example shows the usefulness of the proposed method.

Key words　Interconnected Lurie large scale systems, parametric absolute stability, equilibrium analysis, LMI

1 引言

关联大系统的稳定性和分散镇定问题一直是人们研究的热点[1, 2]. 在这类系统中, 平衡点的存在性及其稳定性是系统分析中两个最为重要的基本问题. 研究关联系统的传统方法一般将系统平衡点的存在性和平衡点的稳定性这两个问题分开来考虑, 并假设平衡点在所有参数值变化范围内保持固定不变. 但是这种平衡点固定不变的假设在一个实际关联大系统的分析中是不实际的. 系统中参数的变化会影响系统的结构、引起系统平衡点的移动、可能使得系统平衡点完全消失、有时甚至破坏整个系统的稳定性. 因此, 对关联大系统的控制问题研究必须考虑不确定参数对系统结构、平衡点的存在性及其稳定性的影响. 例如, 在大型电力系统中, 各个电站的负荷的改变将影响整个系统的平衡点. 平衡点随参数变化的现象给系统分析、设计和控制带来了很大的困难. 实际上, 不确定参数不但存在于大型电力系统的非线性关联上, 而且存在于各个电力子系统中. 这些系数会影响整个电力系统的结构, 并可能破坏其平衡点的稳定性, 在某些情况下, 甚至导致整个电力系统完全崩溃, 即平衡点完全消失[3, 4]. 因此, 研究非线性关联大系统不确定参数对整个大系统稳定性的影响, 不仅具有重要的理论价值, 而且具有重大的实际意义.

参数稳定性概念是九十年代由日本大阪大学控制专家 Ikeda 和美国大系统控制论先驱 Siljak 在研究人口动力学的 Lotka-Volterra 模型时首次提出[5]. 所谓参数稳定性是指系统参数变化对平衡点的存在性及其稳定性的影响. 国外许多学者对参数稳定性问题进行了一些初步的研究, 如 Ohta 和 Siljak 研究了不确定非线性系统的参数二次稳定性问题[6]; Wada 和 Ikeda 把参数稳定性的概念扩展到具有不确定性参数和定常参考输入的 Lurie 型非线性控制系统中, 提出了参数绝对稳定性的概念[7,8]; Silva 和 Dzal 在文献 [8] 的基础上, 提出了一类具有奇异扰动系统的参数绝对稳定性问题[9]; Zecevic 和 Siljak 研究了一类具有全局 Lipschitz 条件的非线性系统的参数镇定问题[10], 利用线性矩阵不等式 (LMI) 优化技术, 给出了系统在参数变化引起平衡点移动时的参数稳定化控制器的设计方法. 这些研究主要针对集中系统, 对关联 Lurie 大系统的参数稳定性的研究还远远不够深入.

收稿日期 2006-11-8　收修改稿日期 2007-4-8
Received November 8, 2006; in revised form April 8, 2007
国家自然科学重点基金 (60634020), 中国博士后科学基金 (20060390883) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60634020), Postdoctoral Science Foundation of China (20060380883)
1. 中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083
1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083
DOI: 10.1360/aas-007-1283

最近, 年晓红[11] 研究任意两个互相独立的 Lurie 控制系统能否通过关联或协调控制组成绝对稳定大系统的问题, 给出了两个 Lurie 控制系统可关联绝对稳定的充分条件, 并给出了计算关联矩阵的双线性矩阵不等式方法. 郭俊伶和廖福成[12] 利用大系统分解方法和 Lyapunov 第二方法研究了一类 Lurie 间接控制大系统, 结合 Metzler 矩阵的性质, 建立了这类 Lurie 间接控制大系统的稳定性与低维矩阵稳定之间的关系, 得到了这类 Lurie 间接控制大系统绝对稳定的充分条件, 但文中没有考虑参数不确定性的影响.

本文针对一类具有两个线性子系统的关联 Lurie 大系统, 研究了当不确定参数和参考输入改变时, 系统的参数绝对稳定性问题. 基于分散状态反馈, 研究了关联 Lurie 大系统参数稳定性存在条件和参数稳定区域, 给出了在该参数稳定区域中基于 LMI 条件的关联大系统稳定性存在的充分条件, 研究了多胞型关联 Lurie 大系统参数绝对稳定性存在的充分条件. 仿真例子说明了方法的有效性.

2 问题描述

考虑如下关联 Lurie 控制系统

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)=A_1(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}_1(t)+B_1(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}_1(t)+\\ \qquad D_1(\boldsymbol{p})\varphi_1(\boldsymbol{e}_1(t))+\overline{A}_{12}\boldsymbol{x}_2(t)\\ \boldsymbol{y}_1(t)=C_1(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{e}_1(t)=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{y}_1(t)\end{cases}\tag{1a}$$

$$\Sigma_2:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_2(t)=A_2(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}_2(t)+B_2(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}_2(t)+\\ \qquad D_2(\boldsymbol{p})\varphi_2(\boldsymbol{e}_2(t))+\overline{A}_{21}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{y}_2(t)=C_2(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}_2(t)\\ \boldsymbol{e}_2(t)=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{y}_2(t)\end{cases}\tag{1b}$$

这里 $\boldsymbol{x}_i(t)\in\mathbf{R}^{n_i},i=1,2$, 为子系统的状态向量; $\boldsymbol{u}_i(t)\in\mathbf{R}^{m_i},i=1,2$, 为子系统的控制向量; $\boldsymbol{y}_i(t)\in\mathbf{R}^{l_i},i=1,2$, 为子系统的输出向量; 参考输入 $\boldsymbol{r}_i\in\mathbf{R}^{l_i},i=1,2$, 为包含原点的紧单连通域 $\Re_i$ 上的常向量; 且 $n_1+n_2=n$, $m_1+m_2=m$, $l_1+l_2=l$. $A_i(\boldsymbol{p}),B_i(\boldsymbol{p})$, $C_i(\boldsymbol{p})$, $D_i(\boldsymbol{p}),i=1,2$, 是具有适当维数的参数矩阵, 且关于参数 $\boldsymbol{p}$ 是连续的, 假设参数 $\boldsymbol{p}$ 属于紧单连通集 $\wp$, $\overline{A}_{12}$, $\overline{A}_{21}$ 为两子系统间的关联矩阵. 假设 $A_i(\boldsymbol{p}),B_i(\boldsymbol{p})$ 是可镇定的.

假设 1. 非线性函数 $\varphi_i(\boldsymbol{e}_i(t)):\mathbf{R}^{l_i}\to\mathbf{R}^{l_i},i=1,2$ 是连续可微且满足 $\varphi_i(0)=0$, 且

$$(D\varphi_i(\boldsymbol{e}_i))^{\mathrm{T}}=D\varphi_i(\boldsymbol{e}_i),\forall\boldsymbol{e}_i\in\mathbf{R}^{l_i},i=1,2\tag{2}$$

其中 $D\varphi_i(\boldsymbol{e}_i)$ 表示 $\varphi_i(\boldsymbol{e}_i)$ 的雅可比矩阵.

假设 2. 考虑误差 $\boldsymbol{e}_i=0$ 的邻域 E_i, 假设邻域 E_i 是由参考输入 $\boldsymbol{r}_i$ 决定的控制误差 $\boldsymbol{e}_i$ 的可能的平衡点区域, 且设对 $\forall\widehat{\boldsymbol{e}}_i\in E_i$, $\forall\boldsymbol{e}_i\in\mathbf{R}^{l_i}$ 的扇区条件为

$$\begin{aligned}0&\le(\boldsymbol{e}_i-\widehat{\boldsymbol{e}}_i)^{\mathrm{T}}(\varphi_i(\boldsymbol{e}_i)-\varphi_i(\widehat{\boldsymbol{e}}_i))\\&\le(\boldsymbol{e}_i-\widehat{\boldsymbol{e}}_i)^{\mathrm{T}}G_i(\widehat{\boldsymbol{e}}_i)(\boldsymbol{e}_i-\widehat{\boldsymbol{e}}_i)\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $G_i(\widehat{\boldsymbol{e}}_i)$ 是连续依赖 $\widehat{\boldsymbol{e}}_i\in E_i$ 的正定矩阵. 不等式 (3) 的等价形式如下

$$\begin{aligned}&(\varphi_i(\boldsymbol{e}_i)-\varphi_i(\widehat{\boldsymbol{e}}_i))^{\mathrm{T}}G_i^{-1}(\widehat{\boldsymbol{e}}_i)(\varphi_i(\boldsymbol{e}_i)-\varphi_i(\widehat{\boldsymbol{e}}_i))\le\\&(\boldsymbol{e}_i-\widehat{\boldsymbol{e}}_i)^{\mathrm{T}}(\varphi_i(\boldsymbol{e}_i)-\varphi_i(\widehat{\boldsymbol{e}}_i))\end{aligned}\tag{4}$$

本文考虑如下线性状态反馈分散控制器

$$\boldsymbol{u}_i(t)=K_i\boldsymbol{x}_i(t),i=1,2\tag{5}$$

得两个闭环子系统

$$\Sigma_{c1}:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)=(A_1(\boldsymbol{p})+B_1(\boldsymbol{p})K_1)\boldsymbol{x}_1(t)+\\ \qquad D_1(\boldsymbol{p})\varphi_1(\boldsymbol{e}_1(t))+\overline{A}_{12}\boldsymbol{x}_2(t)\\ \boldsymbol{y}_1(t)=C_1(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{e}_1(t)=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{y}_1(t)\end{cases}\tag{6a}$$

$$\Sigma_{c2}:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_2(t)=(A_2(\boldsymbol{p})+B_2(\boldsymbol{p})K_2)\boldsymbol{x}_2(t)+\\ \qquad D_2(\boldsymbol{p})\varphi_2(\boldsymbol{e}_2(t))+\overline{A}_{21}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{y}_2(t)=C_2(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}_2(t)\\ \boldsymbol{e}_2(t)=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{y}_2(t)\end{cases}\tag{6b}$$

显然当参考输入向量 $(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=0$ 时, 对任意 $p\in\wp$, 原点是该系统的一个平衡状态. 但当参考输入向量 $(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\neq0$ 时, 由于系统的线性部分与非线性部分的不确定性, 系统的平衡状态不是原点且变得未知. 因此系统的稳定性不仅依赖于参考输入同时也依赖于参数 $\boldsymbol{p}$. 为此, 作如下定义:

定义 1. 对于闭环关联 Lurie 系统 (6), 若对于任意参数向量 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\in\Re\times\wp$ 和满足假设 1 和假设 2 的非线性函数 $\varphi_i(\boldsymbol{e}_i)$, 下列条件成立:

1) 存在惟一平衡状态 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\\\boldsymbol{x}_2^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\end{bmatrix}$ 且对应的控制误差 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\\\boldsymbol{e}_2^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\end{bmatrix}\in\begin{bmatrix}E_1\\E_2\end{bmatrix}$;

2) 平衡状态 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\\\boldsymbol{x}_2^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\end{bmatrix}$ 是全局渐近稳定的.

则称闭环 Lurie 大系统 (6) 是参数绝对稳定的, 也称 Lurie 控制系统 (1) 是参数绝对分散镇定.

本文主要目标是寻求分散控制器 (5) 使得闭环大系统 (6) 参数绝对稳定.

3 平衡点分析

对于任意参数 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\in\Re\times\wp$, 关联 Lurie 系统 (6) 的平衡状态 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\\ \boldsymbol{x}_2^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\end{bmatrix}$ 是如下方程

$$\begin{aligned}&(A_1(\boldsymbol{p})+B_1(\boldsymbol{p})K_1)\boldsymbol{x}_1(t)+D_1(\boldsymbol{p})\varphi_1(\boldsymbol{e}_1(t))+\\&\overline{A}_{12}\boldsymbol{x}_2(t)=0\\&\boldsymbol{e}_1(t)=\boldsymbol{r}_1-C_1(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}_1(t)\end{aligned}\tag{7a}$$

$$\begin{aligned}&(A_2(\boldsymbol{p})+B_2(\boldsymbol{p})K_2)\boldsymbol{x}_2(t)+D_2(\boldsymbol{p})\varphi_2(\boldsymbol{e}_2(t))+\\&\overline{A}_{21}\boldsymbol{x}_1(t)=0\\&\boldsymbol{e}_2(t)=\boldsymbol{r}_2-C_2(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}_2(t)\end{aligned}\tag{7b}$$

的解. 在假设 2 的等价不等式 (4) 中, 令 $\widehat{\boldsymbol{e}}_i=0$, 得如下条件

$$\varphi_i^{\rm T}(\boldsymbol{e}_i)G_i^{-1}(0)\varphi_i(\boldsymbol{e}_i)\le\boldsymbol{e}_i^{\rm T}\varphi_i(\boldsymbol{e}_i)\tag{8}$$

在条件 (8) 下给出方程 (7) 解的存在条件.

定理 1. 若对于任意 $\boldsymbol{p}\in\wp$, 存在适当维数的对称矩阵 $X=X(\boldsymbol{p})$ 和分散状态反馈器 K_1,K_2, 使得如下矩阵不等式成立

$$R(\boldsymbol{p})=\begin{bmatrix}X^{\rm T}(\boldsymbol{p})M(\boldsymbol{p})+M^{\rm T}(\boldsymbol{p})X(\boldsymbol{p}) & X^{\rm T}(\boldsymbol{p})L(\boldsymbol{p})+J\\ L^{\rm T}(\boldsymbol{p})X(\boldsymbol{p})+J^{\rm T} & 2G^{-1}(0)\end{bmatrix}\ge 0\tag{9}$$

其中

$$M(\boldsymbol{p})=\begin{bmatrix}A_1(\boldsymbol{p})+B_1(\boldsymbol{p})K_1 & \overline{A}_{12} & 0 & 0\\ \overline{A}_{21} & A_2(\boldsymbol{p})+B_2(\boldsymbol{p})K_2 & 0 & 0\\ C_1(\boldsymbol{p}) & 0 & I & 0\\ 0 & C_2(\boldsymbol{p}) & 0 & I\end{bmatrix}$$

$$L(\boldsymbol{p})=\begin{bmatrix}D_1(\boldsymbol{p}) & 0\\ 0 & D_2(\boldsymbol{p})\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix}0\\ -I\end{bmatrix}$$

$$G^{-1}(0)=\begin{bmatrix}G_1^{-1}(0) & 0\\ 0 & G_2^{-1}(0)\end{bmatrix}$$

则对任意参数 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\in\Re\times\wp$ 和任意满足条件 (8) 的非线性函数 $\varphi_i(\boldsymbol{e}_i), i=1,2$, 方程 (7) 存在解 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{e}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\\ \boldsymbol{e}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1^{\rm T}(t)\ \ \boldsymbol{x}_2^{\rm T}(t))^{\rm T}$, $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1^{\rm T}(t)\ \ \boldsymbol{e}_2^{\rm T}(t))^{\rm T}$ 且

$$\boldsymbol{e}^e(\boldsymbol{e},\boldsymbol{p})\in E^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})=\left\{\widehat{\boldsymbol{e}}\in\mathbf{R}^l:\|\widehat{\boldsymbol{e}}\|\le\frac{2\|X_2(\boldsymbol{p})\boldsymbol{r}\|}{\lambda_{\min}[R(\boldsymbol{p})]}\right\}\tag{10}$$

其中 $X_2(\boldsymbol{p})$ 是矩阵 $X(\boldsymbol{p})$ 的最下面的 m 行构成的子块. $\|\cdot\|$ 表示 Euclidean 模, $\lambda_{\min}[\cdot]$ 表示最小特征值.

为了证明定理 1 需要如下引理:

引理 1[5]**.** 对于方程 $f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r})=0$, 若对 $(\boldsymbol{z}^*,\boldsymbol{r}^*)\in\mathbf{R}^{n+m}\times\Re$, 有 $f(\boldsymbol{z}^*,\boldsymbol{r}^*)=0$, 且存在正数 $\mu>0$ 使得

$$\|f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r})-f(\boldsymbol{z}^*,\boldsymbol{r}^*)\|\ge\mu\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^*\|,\quad\forall\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^{n+m},\forall\boldsymbol{r}\in\Re\tag{11}$$

则对于任意参数 $\boldsymbol{r}\in\Re$, 方程 $f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r})=0$ 有解 $\boldsymbol{z}^e(\boldsymbol{r})$.

证明. 对于任意固定的参数 $\boldsymbol{p}\in\wp$, 定义如下函数

$$f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r})=\begin{bmatrix}A_1(\boldsymbol{p})+B_1(\boldsymbol{p})K_1\boldsymbol{x}_1(t)+D_1(\boldsymbol{p})\varphi_1(\boldsymbol{e}_1(t))+\\ \overline{A}_{12}\boldsymbol{x}_2(t)\\ (A_2(\boldsymbol{p})+B_2(\boldsymbol{p})K_2)\boldsymbol{x}_2(t)+D_2(\boldsymbol{p})\varphi_2(\boldsymbol{e}_2(t))+\\ \overline{A}_{21}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{e}_1(t)-\boldsymbol{r}_1+C_1(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{e}_2(t)-\boldsymbol{r}_2+C_2(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}=$$

$$[M(\boldsymbol{p})\ \ L(\boldsymbol{p})]\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}\\ \varphi(\boldsymbol{e})\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{r}\end{bmatrix}=0$$

其中 $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x}_1^{\rm T}(t)\ \ \boldsymbol{x}_2^{\rm T}(t)\ \ \boldsymbol{e}_1^{\rm T}(t)\ \ \boldsymbol{e}_2^{\rm T}(t))^{\rm T}$, $\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}_1^{\rm T}\ \ \boldsymbol{r}_2^{\rm T})^{\rm T}$, $\varphi(\boldsymbol{e})=(\varphi_1^{\rm T}(\boldsymbol{e}_1)\ \ \varphi_2^{\rm T}(\boldsymbol{e}_2))^{\rm T}$.

接下来证明函数 $f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r})$ 满足引理 1 的条件. 由于 $(\boldsymbol{z}^*,\boldsymbol{r}^*)=0$, $f(\boldsymbol{z}^*,\boldsymbol{r}^*)=0$, 由扇区条件 (8), 有

$$\begin{aligned}&2\|X(\boldsymbol{p})\|\|\boldsymbol{z}\|\|f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r})-f(0,\boldsymbol{r})\|\ge\\&2\boldsymbol{z}^{\rm T}X^{\rm T}(\boldsymbol{p})(f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r})-f(0,\boldsymbol{r}))\ge\\&2\boldsymbol{z}^{\rm T}X^{\rm T}(\boldsymbol{p})(f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r})-f(0,\boldsymbol{r}))+\\&2\left\{\varphi_1^{\rm T}(\boldsymbol{e}_1)G_1^{-1}(0)\varphi_1(\boldsymbol{e}_1)-\boldsymbol{e}_1^{\rm T}\varphi_1(\boldsymbol{e}_1)\right\}+\\&2\left\{\varphi_2^{\rm T}(\boldsymbol{e}_2)G_2^{-1}(0)\varphi_2(\boldsymbol{e}_2)-\boldsymbol{e}_2^{\rm T}\varphi_2(\boldsymbol{e}_2)\right\}\ge\\&2\boldsymbol{z}^{\rm T}X^{\rm T}(\boldsymbol{p})[M(\boldsymbol{p})\ \ L(\boldsymbol{p})]\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}\\ \varphi(\boldsymbol{e})\end{bmatrix}+\\&2\left\{\varphi_1^{\rm T}(\boldsymbol{e}_1)G_1^{-1}(0)\varphi_1(\boldsymbol{e}_1)-\boldsymbol{e}_1^{\rm T}\varphi_1(\boldsymbol{e}_1)\right\}+\\&2\left\{\varphi_2^{\rm T}(\boldsymbol{e}_2)G_2^{-1}(0)\varphi_2(\boldsymbol{e}_2)-\boldsymbol{e}_2^{\rm T}\varphi_2(\boldsymbol{e}_2)\right\}=\\&\left[\boldsymbol{z}^{\rm T}\ \ \varphi^{\rm T}(\boldsymbol{e})\right]R(\boldsymbol{p})\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}\\ \varphi(\boldsymbol{e})\end{bmatrix}\end{aligned}$$

由于 $R(\boldsymbol{p})>0$, 故

$$
\begin{aligned}
&2\|X(\boldsymbol{p})\|\|\boldsymbol{z}\|\|f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r})-f(0,\boldsymbol{r})\| \geq \\
&\lambda_{\min}[R(\boldsymbol{p})]\left\|\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{z}\\ \varphi(\boldsymbol{e})\end{array}\right]\right\|^2 \geq \\
&\lambda_{\min}[R(\boldsymbol{p})]\|\boldsymbol{z}\|^2
\end{aligned}
$$

因此不等式

$$
\|f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r})-f(0,\boldsymbol{r})\| \geq \frac{\lambda_{\min}[R(\boldsymbol{p})]}{2\|X(\boldsymbol{p})\|}\|\boldsymbol{z}\| \tag{12}
$$

成立, 即引理 1 的条件满足. 因此方程 $f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r})=0$ 存在解 $\boldsymbol{z}^e(\boldsymbol{r})=\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{x}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\\ \boldsymbol{e}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\end{array}\right]$. 最后对于任意参数 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\in\Re\times\wp$ 计算平衡点 $\boldsymbol{e}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ 的存在区域 $E^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$, 令 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^e(\boldsymbol{r})$, 由方程 $f(\boldsymbol{z}^e(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r})=0$ 得

$$
\begin{aligned}
&2\{\boldsymbol{z}^e(\boldsymbol{r})\}^{\mathrm{T}}X_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{r} \geq \left[\{\boldsymbol{z}^e(\boldsymbol{r})\}^{\mathrm{T}} \quad \varphi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}))\right] \times \\
&R(\boldsymbol{p})\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{z}^e(\boldsymbol{r})\\ \varphi^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{e}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})]\end{array}\right] \geq \lambda_{\min}[R(\boldsymbol{p})]\|\boldsymbol{z}^e(\boldsymbol{r})\|^2
\end{aligned}
$$

因此, $2\|X_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{r}\| \geq \lambda_{\min}[R(\boldsymbol{p})]\|\boldsymbol{e}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\|$, 即式 (10) 成立. □

4 稳定性分析

令 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\in\Re\times\wp$ 是任意固定的参数向量, 且 $\boldsymbol{x}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})=\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{x}_1^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\\ \boldsymbol{x}_2^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\end{array}\right]$ 是闭环系统 (6) 的平衡状态, 则下列系统与系统 (4) 等价

$$
\left\{\begin{aligned}
\dot{\widetilde{\boldsymbol{x}}}_1(t)=&(A_1(\boldsymbol{p})+B_1(\boldsymbol{p})K_1)\widetilde{\boldsymbol{x}}_1(t)+\\
&D_1(\boldsymbol{p})\widetilde{\varphi}_1(-C_1(\boldsymbol{p})\widetilde{\boldsymbol{x}}_1(t))+\overline{A}_{12}\widetilde{\boldsymbol{x}}_2(t))\\
\dot{\widetilde{\boldsymbol{x}}}_2(t)=&(A_2(\boldsymbol{p})+B_2(\boldsymbol{p})K_2)\widetilde{\boldsymbol{x}}_2(t)+\\
&D_2(\boldsymbol{p})\widetilde{\varphi}_2(C_2(\boldsymbol{p})\widetilde{\boldsymbol{x}}_2(t))+\overline{A}_{21}\widetilde{\boldsymbol{x}}_1(t))
\end{aligned}\right. \tag{13}
$$

其中系统 (13) 的平衡状态为 $\widetilde{\boldsymbol{x}}=\left[\begin{array}{c}\widetilde{\boldsymbol{x}}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{x}}_2\end{array}\right]=0$, $\widetilde{\boldsymbol{x}}_i(t)=\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{x}_i^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$, $\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{\boldsymbol{e}}_i)=\varphi_i(\widetilde{\boldsymbol{e}}_i+\boldsymbol{e}_i^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}))-\varphi_i(\boldsymbol{e}_i^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}))$, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_i=-C_i(\boldsymbol{p})\widetilde{\boldsymbol{x}}_i(t)$ $(i=1,2)$, 非线性函数 $\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{\boldsymbol{e}}_i)$ $(i=1,2)$ 满足 $\widetilde{\varphi}_i(0)=0(i=1,2)$, 且

$$
(D\widetilde{\varphi}_i(\boldsymbol{e}_i))^{\mathrm{T}}=D\widetilde{\varphi}_i(\boldsymbol{e}_i), \forall\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\in\mathbf{R}^{l_i}, i=1,2 \tag{14}
$$

进一步, 若 $\boldsymbol{e}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\in E$, 则 $\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{\boldsymbol{e}}_i)$ $(i=1,2)$ 满足

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\varphi}_i^{\mathrm{T}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_i)G_i^{-1}(\boldsymbol{e}_i^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}))\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{\boldsymbol{e}}_i) \leq \widetilde{\boldsymbol{e}}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{\boldsymbol{e}}_i),\\
&\forall\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\in\mathbf{R}^{l_i}, i=1,2
\end{aligned} \tag{15}
$$

显然系统 (1) 的平衡状态 $\boldsymbol{x}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ 的稳定性与系统 (13) 的平衡状态 $\widetilde{\boldsymbol{x}}=0$ 的稳定性等价.

定理 2. 若对于任意 $\boldsymbol{p}\in\wp$, 存在适当维数的对称矩阵 $X=X(\boldsymbol{p})$ 和分散状态反馈器 K_1, K_2, 使得矩阵不等式 (9) 成立, 且对任意参考输入 $\boldsymbol{r}\in\Re$, 有 $E^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\subset E$, 又对任意参数 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\in\Re\times\wp$, 存在正定矩阵 $H_1=H_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})>0$, $H_2=H_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})>0$, 和实数 $v_1=v_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$, $v_2=v_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$, 使得式 (16a), (16b) 和 (17) (见本页下方) 成立

$$
H_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})+v_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})C_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})G_{e1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})C_1(\boldsymbol{p})>0 \tag{16a}
$$

$$
H_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})+v_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})C_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})G_{e2}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})C_2(\boldsymbol{p})>0 \tag{16b}
$$

其中 $G_{ei}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ 是式 (15) 中矩阵 $G_i[e_i^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})](i=1,2)$ 的上界, 即

$$
G_{ei}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) \geq G_i(\widehat{\boldsymbol{e}}_i), \qquad \forall\widehat{\boldsymbol{e}}_i\in E_i^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) \tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_{11}=&A_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})H_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})+H_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})A_1(\boldsymbol{p})+\\
&K_1^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})H_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})+H_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})B_1(\boldsymbol{p})K_1\\
\Phi_{13}=&H_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})D_1(\boldsymbol{p})-v_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})A_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})C_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})-\\
&v_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})K_1^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})C_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})\\
\Phi_{22}=&A_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})H_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})+H_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})A_2(\boldsymbol{p})+\\
&K_2^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})H_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})+H_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})B_2(\boldsymbol{p})K_2\\
\Phi_{24}=&H_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})D_2(\boldsymbol{p})-v_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})A_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})C_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})-\\
&v_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})K_2^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})C_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})\\
\Phi_{33}=&-v_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})D_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})C_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})-\\
&v_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})C_1(\boldsymbol{p})D_1(\boldsymbol{p})-G_{e1}^{-1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\\
\Phi_{44}=&-v_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})D_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})C_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})-\\
&v_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})C_2(\boldsymbol{p})D_2(\boldsymbol{p})-G_{e2}^{-1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})
\end{aligned} \tag{19}
$$

则 Lurie 系统 (1) 是参数绝对镇定的.

证明. 取如下 Lyapunov 函数

$$
\begin{aligned}
V(\widetilde{\boldsymbol{x}})=&\sum_{i=1}^{2}\Big\{\widetilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}(t)H_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\widetilde{\boldsymbol{x}}_i(t)+2v_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\cdot\\
&\int_0^1(-C_i(\boldsymbol{p})\widetilde{\boldsymbol{x}}_i(t))^{\mathrm{T}}\widetilde{\varphi}_i(-\theta C_i(\boldsymbol{p})\widetilde{\boldsymbol{x}}_i(t))\mathrm{d}\theta\Big\}
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\Phi=\left[\begin{array}{cccc}
\Phi_{11} & H_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\overline{A}_{12}+\overline{A}_{21}^{\mathrm{T}}H_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) & \Phi_{13} & -v_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\overline{A}_{21}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})\\
\overline{A}_{12}^{\mathrm{T}}H_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})+H_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\overline{A}_{21} & \Phi_{22} & -v_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\overline{A}_{12}^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}) & \Phi_{24}\\
\Phi_{13}^{\mathrm{T}} & -v_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})C_1(\boldsymbol{p})\overline{A}_{12} & \Phi_{33} & 0\\
-v_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})C_2(\boldsymbol{p})\overline{A}_{21} & \Phi_{24}^{\mathrm{T}} & 0 & \Phi_{44}
\end{array}\right]<0 \tag{17}
$$

其中 $H_i = H_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}), i = 1,2$ 是正定矩阵, $v_i = v_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}), i=1,2$ 为实数且满足

$$H_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})+v_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})C_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})G_i[\boldsymbol{e}_i^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})]C_i(\boldsymbol{p})>0,\quad i=1,2$$

在此条件下, 显然 $V(\widetilde{\boldsymbol{x}})$ 正定, 沿方程 (13) 对 $V(\widetilde{\boldsymbol{x}})$ 求导就可推导出定理 2. □

5　具有多胞型线性部分的 Lurie 大系统的参数稳定性条件

在应用定理 2 的条件时, 必须检查矩阵不等式在参数区间 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\in\Re\times\wp$ 是否成立. 若系统的系数矩阵在参数空间中是多胞型的, 且所有参数是以线性的形式出现在矩阵不等式中, 则原系统中每个参数矩阵不等式的解的存在性就可以等价为该矩阵不等式在多胞型顶点上的解的存在性问题.

本节假定系统 (1) 的线性部分的系数矩阵可以表示为具有 l 个顶点的矩阵, 即

$$\begin{aligned}A_1(\boldsymbol{p})&=\sum_{i=1}^{l}p_iA_{1i},\quad B_1(\boldsymbol{p})=\sum_{i=1}^{l}p_iB_{1i}\\ C_1(\boldsymbol{p})&=\sum_{i=1}^{l}p_iC_{1i},\quad D_1(\boldsymbol{p})=\sum_{i=1}^{l}p_iD_{1i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_2(\boldsymbol{p})&=\sum_{i=1}^{l}p_iA_{2i},\quad B_2(\boldsymbol{p})=\sum_{i=1}^{l}p_iB_{2i}\\ C_2(\boldsymbol{p})&=\sum_{i=1}^{l}p_iC_{2i},\quad D_2(\boldsymbol{p})=\sum_{i=1}^{l}p_iD_{2i}\end{aligned}\tag{21}$$

其中参数向量 $\boldsymbol{p}=[p_1,\ \cdots\ ,p_l]$, 所属的区域为

$$\wp=\left\{\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^l:\sum_{i=1}^{l}p_i=1,\ p_i\geq 0, i=1,2,\cdots,l\right\}\tag{22}$$

首先, 考虑平衡点的存在性和邻域 $\boldsymbol{e}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$.

定理 3. 若对于任意 $\boldsymbol{p}\in\wp$, 存在适当维数的对称矩阵 X 和分散状态反馈器 K_1,K_2, 使得如下矩阵不等式成立

$$R_i=\begin{bmatrix}X^{\mathrm{T}}M_i+M_i^{\mathrm{T}}X & X^{\mathrm{T}}L_i+J\\ L_i^{\mathrm{T}}X+J^{\mathrm{T}} & 2G^{-1}(0)\end{bmatrix}>0,\quad i=1,2,\cdots,l\tag{23}$$

其中

$$M_i=\begin{bmatrix}A_{1i}+B_{1i}K_1 & \overline{A}_{12} & 0 & 0\\ \overline{A}_{21} & A_{2i}+B_{2i}K_2 & 0 & 0\\ C_{1i} & 0 & I & 0\\ 0 & C_{2i} & 0 & I\end{bmatrix}$$

$$L_i=\begin{bmatrix}D_{1i} & 0\\ 0 & D_{2i}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad J_i=\begin{bmatrix}0\\ -I\end{bmatrix}$$

$$G^{-1}(0)=\begin{bmatrix}G_1^{-1}(0) & 0\\ 0 & G_2^{-1}(0)\end{bmatrix}$$

则对任意参数 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\in\Re\times\wp$, 具有多胞型的关联 Lurie 大系统存在一个平衡态和误差向量 $\boldsymbol{e}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$, 满足

$$e^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\in\overline{E}^e=\left\{\widehat{e}\in\mathbf{R}^l:\|\widehat{\boldsymbol{e}}\|\leq \frac{2\|X_2\|}{\min\limits_i\lambda_{\min}[R_i]}\max_{\boldsymbol{r}\in\Re}\|\boldsymbol{r}\|\right\}\tag{24}$$

其中 X_2 是矩阵 X 的最下面的 m 行构成的子块.

证明. 令定理 1 中的 $R(\boldsymbol{p})=\sum\limits_{i=1}^{l}\boldsymbol{p}_iR_i$, 并利用 $\lambda_{\min}[R(\boldsymbol{p})]\geq\min\limits_i[R_i]$, 可以推导出定理 3. □

下面讨论稳定性条件. 假设由式 (24) 定义的区域 $\overline{E}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ 满足 $\overline{E}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\subset E$, 可以获得如下定理.

定理 4. 设存在一个适当维数的对称矩阵 X 和分散状态反馈器 K_1,K_2, 满足所有不等式 (23), 对给定的区域和参考输入 $\boldsymbol{r}$, 满足 $\overline{E}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\subset E$. 假定存在正定对称矩阵 $H_i(i=1,2,\cdots,l)$ 和实数 v_1,v_2 满足如下线性矩阵不等式

$$\begin{aligned}&U_{1ii}>0,\quad U_{1ik}+U_{1ki}>0,\quad U_{2ii}>0\\ &U_{2ik}+U_{2ki}>0,\quad Q_{ii}>0,\quad Q_{ik}+Q_{ki}>0\\ &i=1,2,\cdots,l,\quad k=i+1,i+2,\cdots,l\end{aligned}\tag{25}$$

其中,

$$\begin{aligned}U_{1ik}&=H_{1i}+v_1C_{1i}^{\mathrm{T}}\overline{G}_{e1}C_{1k},\\ U_{2ik}&=H_{2i}+v_2C_{2i}^{\mathrm{T}}\overline{G}_{e2}C_{2k},\end{aligned}\tag{26}$$

$$Q_{ik}=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & H_{1k}\overline{A}_{12}+\overline{\boldsymbol{A}}_{21}^{\mathrm{T}}H_{2k} & \Phi_{13} & -v_2\overline{\boldsymbol{A}}_{21}^{\mathrm{T}}C_{2k}^{\mathrm{T}}\\ \overline{A}_{12}^{\mathrm{T}}H_{1k}+H_{2k}\overline{\boldsymbol{A}}_{21} & \Phi_{22} & -v_1\overline{A}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{1k}^{\mathrm{T}} & \Phi_{24}\\ \Phi_{13}^{\mathrm{T}} & -v_1C_{1k}\overline{A}_{12} & \Phi_{33} & 0\\ -v_2C_{2k}\overline{A}_{21} & \Phi_{24}^{\mathrm{T}} & 0 & \Phi_{44}\end{bmatrix}\tag{27}$$

式 (27) 中,

$$\Phi_{11}=A_{1i}^{\mathrm{T}}H_{1k}+H_{1k}A_{1i}+K_1^{\mathrm{T}}B_{1i}^{\mathrm{T}}H_{1k}+H_{1k}B_{1i}K_1$$
$$\Phi_{13}=H_{1k}+D_{1i}-v_1A_{1i}^{\mathrm{T}}C_{1k}^{\mathrm{T}}-v_1K_1^{\mathrm{T}}B_{1i}^{\mathrm{T}}C_{1k}^{\mathrm{T}}$$
$$\Phi_{22}=A_{2i}^{\mathrm{T}}H_{2k}+H_{2k}A_{2i}+K_2^{\mathrm{T}}B_{2i}^{\mathrm{T}}H_{2k}+H_{2k}B_{2i}K_2$$
$$\Phi_{24}=H_{2k}+D_{2i}-v_2A_{2i}^{\mathrm{T}}C_{2k}^{\mathrm{T}}-v_2K_2^{\mathrm{T}}B_{2i}^{\mathrm{T}}C_{2k}^{\mathrm{T}}$$
$$\Phi_{33}=-v_1D_{1i}^{\mathrm{T}}C_{1k}^{\mathrm{T}}-v_1C_{1k}D_{1i}-\overline{G}_{e1}^{-1}$$
$$\Phi_{44}=-v_2D_{2i}^{\mathrm{T}}C_{2k}^{\mathrm{T}}-v_2C_{2k}D_{2i}-\overline{G}_{e2}^{-1}$$

$\overline{G}_{e1}$, $\overline{G}_{e2}$ 为与参数 $\boldsymbol{p}$ 无关的对称正定阵, 满足

$$\overline{G}_{e1}\geq G(\boldsymbol{e}_1),\overline{G}_{e2}\geq G(\boldsymbol{e}_2),\forall\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\in\overline{E}^e \tag{28}$$

则具有多胞型参数的 Lurie 系统是参数绝对镇定的.

证明. 将式 (16) 中的 $G_{e1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$, $G_{e2}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ 替换为 $\overline{G}_{e1}$, $\overline{G}_{e2}$, 用 $H_1(\boldsymbol{p})$, $H_2(\boldsymbol{p})$ 替换 $H_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$, $H_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$, 这里

$$\begin{aligned}H_1(\boldsymbol{p})&=\sum_{i=1}^{l}p_iH_{1i}\\H_2(\boldsymbol{p})&=\sum_{i=1}^{l}p_iH_{2i}\end{aligned} \tag{29}$$

则式 (16) 和 (17) 可以分别表示为

$$\sum_{i=1}^{l}p_i\sum_{k=1}^{l}p_kU_{1ik}=\sum_{i=1}^{l}p_i^2U_{1ii}+\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{k=i+1}^{l}p_ip_k(U_{1ik}+U_{1ki})>0$$
$$\sum_{i=1}^{l}p_i\sum_{k=1}^{l}p_kU_{2ik}=\sum_{i=1}^{l}p_i^2U_{2ii}+\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{k=i+1}^{l}p_ip_k(U_{2ik}+U_{2ki})>0$$
$$\sum_{i=1}^{l}p_i\sum_{k=1}^{l}p_kQ_{ik}=\sum_{i=1}^{l}p_i^2Q_{ii}+\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{k=i+1}^{l}p_ip_k(Q_{ik}+Q_{ki})<0 \tag{30}$$

其中 U_{1ik},U_{2ik},Q_{ik} 分别由式 (26) 和 (27) 定义.

如果式 (25) 成立, 即定理 3 的条件满足, 则具有多胞型参数的 Lurie 系统是参数绝对镇定的. □

6 算例

本节给出一个数值例子. 考虑具有两个子系统的关联 Lurie 大系统, 其线性部分具有多胞型的系数矩阵 (21), 其系数矩阵分别为

$$A_{11}=\begin{bmatrix}-4&1\\0&-3\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{B}_{11}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{C}_{11}=[1\quad 1],\quad\boldsymbol{D}_{11}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$
$$A_{12}=\begin{bmatrix}-4&1\\0&-2\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{B}_{12}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{C}_{12}=[1\quad 1],\quad\boldsymbol{D}_{12}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$
$$A_{13}=\begin{bmatrix}-3&1\\0&-3\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{B}_{13}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{C}_{13}=[1\quad 1],\quad D_{13}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$
$$\begin{gathered}A_{21}=-5,\quad B_{21}=1,\quad C_{21}=1,\quad D_{21}=1\\A_{22}=-5,\quad B_{22}=1,\quad C_{22}=1,\quad D_{22}=1\\A_{23}=-5,\quad B_{23}=1,\quad C_{23}=1,\quad D_{23}=1\\\overline{\boldsymbol{A}}_{12}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{A}_{21}=[0\quad -4]\end{gathered} \tag{31}$$

令参考输入 $\boldsymbol{r}$ 的范围 $\Re=\boldsymbol{r}\in\mathbf{R}^2:\|\boldsymbol{r}\|\leq 1$. 假定扇区条件 (4) 在 $\boldsymbol{e}=0$ 的邻域 $E=\boldsymbol{e}\in\mathbf{R}^2:\|\boldsymbol{e}\|\leq 6$ 中成立. 并定义正定对称矩阵为

$$G_1(e_1)=\begin{cases}1+0.1\|e_1\|, & |e_1\|\leq 4\\1.4, & 4<\|e_1\|\leq 6\end{cases} \tag{32}$$

$$G_2(e_2)=\begin{cases}0.5+0.1\|e_2\|, & |e_2\|\leq 4\\0.9, & 4<\|e_2\|\leq 6\end{cases} \tag{33}$$

对多胞型关联 Lurie 大系统, 证明定理 3 和定理 4 的条件将得到满足.

首先, 说明 $A(\boldsymbol{p})$ 参数绝对稳定性. 容易验证两个子系统是稳定的.

接着, 考虑定理 3 中平衡点存在的条件. 求解关于变量 X 和分散状态反馈器 K_1,K_2 的不等式 (23), 得到可行解如下

$$X=\begin{bmatrix}-0.39&0.10&0.006&0.52&0.01\\0.10&-0.56&-0.02&0.47&-0.29\\0.06&-0.02&-0.40&0.25&0.24\\0.52&0.47&0.25&2.65&-0.02\\0.01&-0.29&0.24&-0.02&2.64\end{bmatrix} \tag{34}$$

对应的状态反馈控制器为 $\boldsymbol{K}_1 = [-2.4 \quad -1.8]$, $K_2 = -4.0$. 因此, 多胞型关联 Lurie 大系统存在平衡态. 由于 $\|X_2\| = 2.76$, $\min\limits_i \lambda_{\min}[R_i] = 1.83$, 因此, 对任意的 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) \in \Re \times \wp$, $\boldsymbol{e}^e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ 稳定区域 $\overline{E}^e$ 为

$$\overline{E}^e = \{\boldsymbol{e} \in \mathbf{R}^2 : \|e\| \leq 3.01\}. \qquad (35)$$

最后, 验证定理 4 中平衡态稳定性的条件. 从稳定区域 (35) 中, 可以得 $\overline{E}^e \subset E$.

下面选择 $\overline{G}_{e1} = 1.48$, $\overline{G}_{e2} = 1$, 作为满足式 (28) $G(\boldsymbol{e})(\boldsymbol{e} \in \overline{E}^e)$ 的上界. 求解关于变量 $H_{1i}, H_{2i}, (i = 1, 2, 3)$ 和正数 v_1, v_2 的不等式 (25), 对应的解为

$$H_{11} = \begin{bmatrix} 37.85 & 15.89 \\ 15.89 & 60.57 \end{bmatrix}, H_{12} = \begin{bmatrix} 41.78 & 15.78 \\ 15.78 & 60.43 \end{bmatrix}$$

$$H_{13} = \begin{bmatrix} 20.78 & 16.27 \\ 16.27 & 21.17 \end{bmatrix}, v_1 = 2.97$$

$$H_{21} = 17.84,\ H_{22} = 17.68,\ H_{23} = 1.98,\ v_2 = 0.06 \qquad (36)$$

因此, 定理 4 的所有条件均得到满足, 多胞型 Lurie 系统可参数绝对镇定.

7 结论

本文推导出了关联 Lurie 控制系统的基于矩阵不等式的参数绝对稳定性的充分条件. 对于具有多胞型的 Lurie 大系统, 采用状态反馈的方法, 通过求解有限个非参数线性矩阵不等式就能获得使系统参数绝对稳定的条件. 此方法很容易推广到具有 n 个子系统组成的关联 Lurie 大系统的情形. 仿真例子说明了算法的有效性.

References

1 Siljak D D. *Large-scale Dynamic Systems: Stability and Structure*. New York: North-Holland, 1978

2 Siljak D D. *Decentralized Control of Complex Systems*. Cambirdge: Academic Press, 1991. 480

3 Kwatny H G, Pasrija A K, Bahar L Y. Static bifurcations in electric power networks: loss of steady-state stability and voltage collapse. *IEEE Transactions on Circuits Systems*, 1986, **33**(10): 981∼991

4 Zecevic A I, Miljkovic D M. The effects of generation redispatch on Hopf bifurcations in electric power systems. *IEEE Transactions on Circuits Systems*, 2002, **49**(8): 1180∼1186

5 Ikeda M, Ohta Y, Siljak D D. *Parametric Stability, New Trends in System Theory*. Boston: Birkhauser, 1991

6 Ohta Y, Siljak D D. Parametric quadratic stabilizability of uncertain nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 1994, **22**(6): 437∼444

7 Wada T, Ikeda M, Ohta Y, Siljak D D. Parametric absolute stability of Lur′e systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(11): 1649∼1653

8 Wada T, Ikeda M, Ohta Y, Siljak D D. Parametric absolute stability of multivariable Lur′e systems: a Popov-type condition and application of polygon interval arithmetic. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1997, **30**(6): 3713∼3723

9 Silva G, Dzul F A. Parametric absolute stability of a class of singularly perturbed systems. In: Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control. Florida, USA: IEEE, 1998. 1422∼1427

10 Zecevic A I, Siljak D D. Stabilization of nonlinear systems with moving equilibria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(6): 1036∼1040

11 Nian Xiao-Hong, Li Xin-Bo, Yang Ying, Zuo Zhi-Qiang. Bilinear matrix inequality approach to the absolute stability of interconnected Lurie control systems. *Control Theory and Applications*, 2005, **22**(6): 999∼1004
(年晓红, 李鑫波, 杨莹, 左志强. Lurie 控制系统的关联绝对稳定性–双线性矩阵不等式方法. 控制理论与应用, 2005, **22**(6): 999∼1004)

12 Guo Jun-Ling, Liao Fu-Cheng. Absolute stability of Lurie indirect control large-scale systems. *Journal of University of Science and Technology Beijing*, 2006, **28**(7): 704∼708
(郭俊伶, 廖福成. Lurie 间接控制大系统的绝对稳定性. 北京科技大学学报, 2006, **28**(7): 704∼708)

陈 宁 中南大学副教授. 主要研究方向为大系统的稳定性分析, 分散鲁棒控制. 本文通信作者.
E-mail: ningchen@mail.csu.edu.cn
(**CHEN Ning** Associate professor at Central South University. Her research interest covers stability analysis of large-scale systems, robust decentralized control. Corresponding author of this paper.)

桂卫华 中南大学教授. 主要研究方向为大系统的分散控制, 优化控制和过程控制. E-mail: gwh@mail.csu.edu.cn
(**GUI Wei-Hua** Professor at Central South University. His research interest covers decentralized control for large-scale systems, optimal control, and process control.)

刘碧玉 中南大学教授. 主要研究方向为分散控制和鲁棒控制.
E-mail: biyuliu@hotmail.com
(**LIU Bi-Yu** Professor at Central South University. Her research interest covers decentralized control and robust control.)