

基于随机过程的 PSO 收敛性分析

金欣磊¹ 马龙华¹ 吴铁军¹ 钱积新¹

摘要 分析了粒子群优化算法 (PSO) 的全局收敛性. 在已有文献的假设前提下和随机系统理论上, 对 PSO 进行算法分析推导, 给出了其动力学系统依均方收敛的一个充分条件, 从而有效地避免了已有文献基于线性时变离散系统研究 PSO 收敛性的不足. 通过对所得的粒子运行轨迹图和已有文献相比较, 得到了更好的结果和判断. 通过仿真实验分析研究, 验证了该结论的有效性.

关键词 随机过程, 粒子群优化, 均方稳定, 收敛性
中图分类号 TP18

Convergence Analysis of the Particle Swarm Optimization Based on Stochastic Processes

JIN Xin-Lei¹ MA Long-Hua¹ WU Tie-Jun¹ QIAN Ji-Xin¹

Abstract This paper analyzes the global convergence of the particle swarm optimization algorithm (PSO). Based on the assumption of the previous articles and the theory of stochastic processes, this paper presents a sufficient condition for the system mean-square to be stable. The proposed condition overcomes the disadvantage of the previous studies on PSO for the linear time-varying discrete systems. Compared with the methods in the previous literature, the proposed method achieves better results. Simulations demonstrate the validity of the proposed method.

Key words Stochastic processes, particle swarm optimization (PSO), mean-square stable, convergence

1 引言

粒子群优化算法是一种基于群智能 (Swarm intelligence) 方法的演化算法 (Evolutionary computation) 技术, 该算法由美国社会心理学家 Kennedy 和电气工程师 Eberhart^[1] 于 1995 年提出, 受到人工生命 (Artificial life) 研究结果的启发, 其基本概念源于对鸟群捕食行为的研究. 研究者发现鸟群在飞行过程中经常会突然改变方向、散开、聚集, 其行为不可预测, 但其整体总保持一致性, 个体与个体之间也保持着最适宜的距离. 通过对类似生物群体行为的研究, 发现生物群体之间存在着一种社会信息共享机制, 它为群体的进化提供了一种优势, 这就是 PSO 算法的形成基础. 其数学模型的动力学方程可以简单的描述为^[2]

$$\begin{cases} v(t+1) = \omega v(t) + c_1 r_1(t)(p_i(t) - x(t)) + \\ \quad c_2 r_2(t)(p_g(t) - x(t)) \\ x(t+1) = x(t) + v(t+1) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $v(t+1)$ 、 $x(t)$ 分别为粒子的速度、位置参数, ω 为惯性权重, c_1 和 c_2 分别为认知参数和社会参数, $p_i(t)$ 、 $p_g(t)$ 分别为个体的历史最优位置、群体的历史最优位置, $r_1(t)$ 、 $r_2(t)$ 分别为两个相互独立的 $[0,1]$ 之间服从均匀分布的随机变量. 记 $\varphi_1(t) = c_1 r_1(t)$, $\varphi_2(t) = c_2 r_2(t)$, $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$, 则式 (1) 可以改写为

$$\begin{bmatrix} v(t+1) \\ x(t+1) \end{bmatrix} = A(t) \begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i(t) \\ p_g(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中

$$A(t) = \begin{bmatrix} \omega & -\varphi(t) \\ \omega & 1 - \varphi(t) \end{bmatrix}$$

有关 PSO 的全局收敛性证明研究, 大多针对具体问题进行优化仿真计算实验, 给出数值最优解以及相应的参数选择. 理论性的研究结果主要包括: Ozcan 和 Mohan 等^[3] 在假设 $p_i(t)$ 、 $p_g(t)$ 、 $\varphi(t)$ 时不变且 $\omega = 1$ 的前提下作了研究分析, 指出此时粒子的位置和速度行为可以近似看成是一正弦波状, 瞬间不同的参数决定了波的频率和振幅. Clerc 和 Kennedy^[2] 在相同的假设前提下对式 (1) 作了进一步的理论研究分析, 在此基础上给出了 CFM (Construction

收稿日期 2006-7-4 收修改稿日期 2007-3-16
Received July 4, 2006; in revised form March 16, 2007
国家自然科学基金 (60474064) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60474064)

1. 浙江大学工业控制技术国家重点实验室工业控制研究所 杭州 310027

1. National Laboratory for Industrial Control Technology, Institute of Industrial Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027

DOI: 10.1360/aas-007-1263

factor method) 的 3 种模型并进行了数值仿真实验. 郑泳凌^[4] 给出了一种基于递增权重策略的 PSO 模型. Chatterjee^[5] 给出了一种基于非线性递减权重策略的 PSO 模型. Trelea^[6] 基于文献 [3] 相同的假设前提下给出了 PSO 模型的稳定区域和不稳定区域以及相应的运动轨迹分析. Bergh 在文献 [7, 8] 中给出了基本 PSO 算法的全局收敛性和局部收敛性分析, 并在此基础上提出了一种保证收敛的 GPCSO 算法, 从而能保证 GPCSO 局部收敛. Emara^[9] 给出了一种基于连续系统的 PSO 模型, 并利用李亚普诺夫方法证明了其稳定性. 曾建潮^[10] 在文献 [7] 的基础上给出了以概率 1 收敛于全局最优的 PSO 算法, 并通过分析已有的 PSO 算法, 提出了一种统一模型, 通过线性系统理论分析了其收敛性^[11]. 通过对文献 [3, 7~10] 的研究发现, 在研究线性离散系统 (2) 的过程中, 均基于如下认知: 只要系统矩阵的谱半径 (特征根模的最大值) 在单位圆内即能保证系统稳定. 但是, 该结论只是线性时不变离散系统渐进稳定的充分必要条件, 而对 PSO 算法而言, 系数矩阵 $A(t)$ 是一个带有随机变量 $\varphi(t)$ 的时变系数矩阵, 其谱半径在单位圆内是系统稳定的既非充分也非必要条件. 文献 [12] 给出了两个反例, 分别说明了线性时变离散系统的谱半径在单位圆内也不稳定以及谱半径在单位圆外却能保证稳定的两种情况. 显然, 由于 $\varphi(t)$ 的时变性, 间接削弱了文献 [3, 7~10] 中的结论. 所以, 本文从随机系统的角度对 PSO 的动力学模型加以分析研究, 给出了系统依概率收敛的一个充分条件.

2 基本概念及命题

首先引入一些基本概念, 并由此对 PSO 系统进行相应的命题描述.

定义 1. 设 $X, X_n (n \geq 1)$ 是同一概率空间 (Ω, F, P) 上的随机变量, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\|X_n - X\|^2) = 0$$

成立, 则称 $\{X_n\}$ 均方收敛于 X .

定义 2. 按照文献 [2] 中的假设前提, $\omega, p_i(t), p_g(t)$ 时不变, 且对于种群最优粒子有 $p_i(t) = p_g(t)$, 并记 $p = p_i(t) = p_g(t)$, 则 PSO 的动力学模型 (2) 可以改写为

$$\begin{bmatrix} v_{t+1} \\ x_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega & -\varphi_t \\ \omega & 1 - \varphi_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t \\ x_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_t p \\ \varphi_t p \end{bmatrix} \quad (3)$$

初值条件为 $\begin{cases} v_1 = \omega v_0 - \varphi_0 x_0 + \varphi_0 p \\ x_1 = \omega v_0 + (1 - \varphi_0) x_0 + \varphi_0 p \end{cases}$.

显然, 系统 (3) 具有下列性质:

1) $v_t, x_t (t \geq 1)$ 是关于随机变量 $\varphi_i (i = 0, 1, \dots, t-1)$ 的随机过程;

2) 随机变量 φ_i, φ_j 相互独立当且仅当 $i \neq j (0 \leq i, j \leq t)$ 时成立;

3) 随机变量 v_t 和 φ_i, x_t 和 φ_i 当 $i \geq t$ 时相互独立;

4) 随机变量 φ_t 的数学期望为

$$E(\varphi_t) = \mu$$

方差为

$$D(\varphi_t) = \sigma^2$$

5) 记随机变量 $u_t = \omega + 1 - \varphi_t$, 显然有

$$E(u_t) = \omega + 1 - \mu, \quad D(u_t) = \sigma^2$$

并记 $E(u_t) = u$.

定义 3. PSO 动力学模型经迭代产生的位置参数序列 $\{x_0, x_1, \dots, x_t, \dots\}$ 是一个随机变量序列, 若满足定义 2 的假设前提且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\|X_t - p\|^2) = 0$$

成立, 则称随机变量序列 x_t 依均方收敛于 p .

3 基于随机系统的 PSO 动力学收敛性分析

已有文献的 PSO 收敛性分析大多基于线性系统理论, 通过把线性时变系统转换成线性定常系统加以分析, 从而可以利用成熟的线性定常稳定判据. 但是往往存在一个不足之处, 即不恰当地把线性定常系统的稳定判据“系数矩阵 $A(t)$ 的特征根模小于 1”直接应用到线性时变系统上, 间接削弱了结论的有效性. 本节把原有的时变系统通过随机过程理论转换成概率意义下的线性定常系统加以分析研究, 通过分析位置参数序列 $x_0, x_1, \dots, x_t, \dots$ 的数学期望和方差给出系统均方稳定的一个充分条件.

引理 1. 序列 $E(x_t)$ 收敛的充分条件是

$$\begin{cases} 0 < \mu < 2(\omega + 1) \\ |\omega| < 1 \end{cases}$$

证明. 显然 (3) 的差分方程形式为

$$x_{t+2} = (\omega + 1 - \varphi_{t+1})x_{t+1} - \omega x_t + \varphi_{t+1}p \quad (4)$$

对 x_t 取数学期望可以得到关于 $E(x_t)$ 的差分方程

$$E(x_{t+2}) - E(u_{t+1}x_{t+1}) + E(\omega x_t) = \mu p$$

考虑到 u_{t+1} 和 x_{t+1} 相互独立, 上式可以化简为

$$E(x_{t+2}) - uE(x_{t+1}) + \omega E(x_t) = \mu p \quad (5)$$

对应其齐次方程为

$$E(x_{t+2}) - uE(x_{t+1}) + \omega E(x_t) = 0$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - u\lambda + \omega = 0 \quad (6)$$

其特征根为

$$e_1 = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4\omega}}{2} \quad e_2 = \frac{u - \sqrt{u^2 - 4\omega}}{2}$$

且已知初值条件

$$E(x_0) = x_0$$

$$E(x_1) = \omega v_0 + (1 - \mu)x_0 + \mu p$$

其通解形式为

$$E(x_t) = k_1 e_1^t + k_2 e_2^t + C \quad (7)$$

其中 k_1, k_2 由初值条件决定.

容易解得

$$k_1 = \frac{-e_2 E(x_0) + E(x_1) + (e_2 - 1)p}{e_1 - e_2}$$

$$k_2 = \frac{-e_1 E(x_0) - E(x_1) - (e_1 - 1)p}{e_1 - e_2}$$

$$C = p$$

由于初值的任意性, 仅考虑二阶差分方程 (7) 对应齐次方程的特征方程的根的模在单位圆的情况. 根据 Jury 判据可以知道, 该二阶差分方程 (7) 的解稳定的充分必要条件为

$$\begin{cases} 1 + \omega > |u| \\ |\omega| < 1 \end{cases}$$

由此可以解得

$$\begin{cases} 0 < \mu < 2(\omega + 1) \\ |\omega| < 1 \end{cases} \quad (8)$$

. 即当条件 (8) 成立时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(x_t) = p$$

引理 1 得证.

引理 2. 序列 $D(x_t)$ 收敛的充分条件是

$$\begin{cases} 1 + a_2 + a_1 + a_0 > 0 \\ 1 - a_2 + a_1 - a_0 > 0 \\ 1 > |a_0| \\ 1 - a_0^2 > |a_1 - a_2 a_0| \end{cases}$$

且

$$\begin{cases} 0 < \mu < 2(\omega + 1) \\ |\omega| < 1 \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} a_2 = \omega - u^2 - \sigma^2 \\ a_1 = u^2 \omega - \sigma^2 \omega - \omega^2 \\ a_0 = -\omega^3 \end{cases}$$

证明. 对 x_t 取方差可以得到关于 $D(x_t)$ 的差分方程

$$D(x_{t+2}) = E(x_{t+2}^2) - E^2(x_{t+2}) \quad (9)$$

(9) 的第一项可以写为

$$E(x_{t+2}^2) = E((u_{t+1}x_{t+1} - \omega x_t + \varphi_{t+1}p)^2)$$

$$= E(u_{t+1}^2 x_{t+1}^2 + \omega^2 x_t^2 + \varphi_{t+1}^2 p^2 -$$

$$2u_{t+1}\omega x_{t+1}x_t + 2u_{t+1}\varphi_{t+1}p x_{t+1} -$$

$$2\varphi_{t+1}\omega p x_t) \quad (10)$$

考虑到 u_{t+1}^2 和 x_{t+1}^2 , u_{t+1} 和 $x_{t+1}x_t$, $u_{t+1}\varphi_{t+1}$ 和 $x_t + 1$, φ_{t+1} 和 x_t 分别独立无关, 有

$$E(u_{t+1}^2) = E((1 + \omega - \varphi_{t+1})^2) = u^2 + \sigma^2$$

$$E(\varphi_{t+1}^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

$$E(u_{t+1}\varphi_{t+1}) = u\mu - \sigma^2$$

式 (10) 可以化简为

$$E(x_{t+1}^2) = (u^2 + \sigma^2)E(x_{t+1}^2) + \omega^2 E(x_t^2) +$$

$$(u^2 + \sigma^2)p^2 - 2u\omega E(x_{t+1}x_t) +$$

$$2(u\mu - \sigma^2)pE(x_{t+1}) - 2\mu\omega pE(x_t)$$

式 (9) 的第二项可以写为

$$E(x_{t+2}^2) = (uE(x_{t+1}) - \omega E(x_t) + \mu p)^2 =$$

$$u^2 E(x_{t+1})^2 + \omega^2 E(x_t)^2 + \mu^2 p^2 -$$

$$2u\omega E(x_{t+1})E(x_t) + 2u\mu p E(x_{t+1}) -$$

$$2\mu\omega p E(x_t)$$

由上述两式化简 (9), 可以得到

$$D(x_{t+2}) = (u^2 + \sigma^2)D(x_{t+1}) + \omega^2 D(x_t) +$$

$$\sigma^2 (E(x_{t+1}) - p)^2 - 2u\omega (E(x_{t+1}x_t) -$$

$$E(x_{t+1})E(x_t)) \quad (11)$$

计算 $E(x_{t+1})x_t - E(x_{t+1})E(x_t)$, 其中

$$E(x_{t+1}x_t) = E(x_t(u_t x_t - \omega x_{t-1} + \varphi_t p)) =$$

$$E(u_t)E(x_t^2) - \omega E(x_t x_{t-1}) + pE(\varphi_t)E(x_t) =$$

□

$$\begin{aligned}
 & uE(x_t^2) - \omega E(x_t x_{t-1}) + \mu p E(x_t) \\
 E(x_{t+1})E(x_t) &= E(u_t x_t - \omega x_{t-1} + \varphi_t p)E(x_t) = \\
 & (E(u_t)E(x_t) - \omega E(x_{t-1}) + pE(\varphi_t))E(x_t) = \\
 & uE^2(x_t) - \omega E(x_t)E(x_{t-1}) + \mu p E(x_t)
 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
 E(x_{t+1}E_t) - E(x_{t+1})E(x_t) &= \\
 uD(x_t) - \omega(E(x_t x_{t-1}) - E(x_t)E(x_{t-1})) & \quad (12)
 \end{aligned}$$

联立式 (11) 和 (12) 可以得到关于 $D(x_t)$ 的差分方程形式

$$\begin{aligned}
 D(x_{t+2}) + (\omega - u^2 - \sigma^2)D(x_{t+1}) + \\
 (u^2\omega - \sigma^2\omega - \omega^2)D(x_t) - \omega^3 D(x_{t-1}) = \\
 \sigma^2(E(x_{t+1}) - p)^2 \quad (13)
 \end{aligned}$$

显然, 其齐次方程的特征方程为

$$\begin{aligned}
 \lambda^3 + (\omega - u^2 - \sigma^2)\lambda^2 + \\
 (u^2\omega - \sigma^2\omega - \omega^2)\lambda - \omega^3 = 0 \quad (14)
 \end{aligned}$$

假设其特征根分别为 e_3, e_4, e_5 , 则其通解形式为

$$\begin{aligned}
 D(x_t) = k_3 e_3^t + k_4 e_4^t + k_5 e_5^t + \\
 h_1 e_1^{2t} + h_2 e_2^{2t} + h_3 (e_1 e_2)^t
 \end{aligned}$$

为了简单起见, 仅考虑三阶差分方程 (13) 对应齐次方程的特征方程的根的模在单位圆的情况. 根据 Jury 判据可以知道, 该三阶差分方程 (13) 对应齐次方程零解稳定的一个充分条件为

$$\begin{cases} 1 + a_2 + a_1 + a_0 > 0 \\ 1 - a_2 + a_1 - a_0 > 0 \\ 1 > |a_0| \\ 1 - a_0^2 > |a_1 - a_2 a_0| \end{cases} \quad (15)$$

其中, $\begin{cases} a_2 = \omega - u^2 - \sigma^2 \\ a_1 = u^2\omega - \sigma^2\omega - \omega^2 \\ a_0 = -\omega^3 \end{cases}$. 当式 (8) 成立时,

可以解得

$$\underline{\omega} < \omega < \bar{\omega} \quad (16)$$

其中,

$$\underline{\omega} = \frac{\mu^2 - \sigma^2 - \sqrt{(\mu^2 - \sigma^2)^2 - 8\mu((\mu - 1)^2 + \sigma^2 - 1)}}{4\mu} \quad (17)$$

$$\bar{\omega} = \frac{\mu^2 - \sigma^2 + \sqrt{(\mu^2 - \sigma^2)^2 - 8\mu((\mu - 1)^2 + \sigma^2 - 1)}}{4\mu} \quad (18)$$

显然, 当 (ω, μ, σ) 满足式 (8) 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} E(x_t) = p$; 当 (ω, μ, σ) 同时满足式 (8) 和 (15) 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} D(x_t) = 0$. 引理 2 得证. \square

定理 1. 当 $\lim_{t \rightarrow \infty} E(x_t) = p$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} D(x_t) = 0$ 成立, 则有随机变量序列 x_t 均方收敛于 p .

证明. 当 (ω, μ, σ) 同时满足式 (8) 和 (15) 时可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} E(x_t) = p$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} D(x_t) = 0$ 成立.

则

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} E((x_t - p)^2) &= \lim_{t \rightarrow \infty} E(x_t^2 - 2px_t + p^2) = \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} (D(x_t) + E^2(x_t) - 2pE(x_t) + P^2) &= \\
 0 + p^2 - 2p^2 + p^2 &= 0
 \end{aligned}$$

显然随机变量序列 x_t 均方收敛于 p . \square

结论. 在满足式 (3) 的假设条件及式 (8) 和 (15) 成立的前提下, 可知, PSO 算法的位置参数 x_t 均方收敛于 p .

在实际应用中, PSO 动力学模型如式 (2) 所述, 且随机变量 φ_1, φ_2 具有下列性质: φ_1, φ_2 分别为服从于 $[0, c_1], [0, c_2]$ 的均匀分布, 则

$$\begin{aligned}
 E(\varphi_t) &= E(\varphi_{1t}) + E(\varphi_{2t}) = \frac{c_1 + c_2}{2} \\
 D(\varphi_t) &= D(\varphi_{1t}) + D(\varphi_{2t}) = \frac{c_1^2 + c_2^2}{12}
 \end{aligned}$$

即有

$$\mu = \frac{c_1 + c_2}{2}, \sigma^2 = \frac{c_1^2 + c_2^2}{12}$$

通常取 $c_1 = c_2$, 即 $\mu = c_1 = c_2$. 图 1 给出了当 $1 \leq \mu \leq 2$, 即 φ 在 $[0, 2]$ 至 $[0, 4]$ 之间均匀分布时, 系统服从均方稳定时的变化范围. 显然, 上限和下限之间的区域即为系统服从均方稳定的区域. 例如: 当 $\mu = 2$, 即 $c_1 = c_2 = 2$ 时, 从图 1 可以知道, 采用固定权重的 PSO 算法依均方稳定的权重参数 ω 的取值范围是 $[0.3333, 0.5]$ 之间的任意常数.

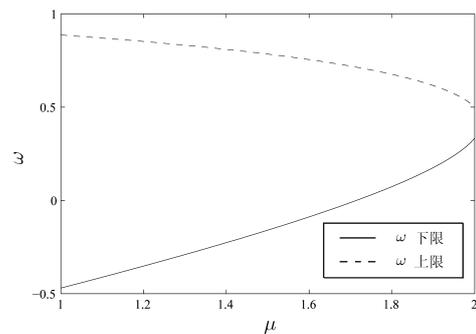


图 1 PSO 系统均方收敛时 μ 和 ω 的关系图
Fig.1 $\mu - \omega$ when system is mean-square stable

4 仿真实验分析

参照文献 [8] 中假设, 给出采用固定权重 ω 的 PSO 算法的粒子的运动轨迹分析. 区别在于文献 [8] 设定 φ 时不变, 而本文设定 φ 是服从于 $[0, c_1 + c_2]$ 上的辛普森分布.

$$x(0) = 10, v(0) = 10$$

$$p = p_1 = p_g = 1, c_1 = c_2 = 2$$

则式 (3) 可以化简为

$$\begin{aligned}
 x(1) &= 10\omega - 10(r_1 + r_2) + 10 \\
 x(t+1) &= (\omega + 1 - 2r_1 - 2r_2)x(t) - \\
 &\quad \omega x(t-1) + 2(r_1 + r_2)
 \end{aligned}$$

图 2 和图 3 描绘了当粒子满足系统均方稳定的充分条件时的运动轨迹图, 从图中可以看出粒子能迅速进入稳定状态.

图 4 描绘了当粒子不满足收敛的充分条件时的两种运动轨迹图, 从图中可以看出粒子既可能迅速进入稳定状态, 也有可能始终不稳定. 这从侧面说明了定理 1 只是系统稳定的一个充分条件, 也就是说当定理 1 不成立时, 系统可能稳定, 也有可能不稳定.

显然, 图 3 的设定条件就是文献 [2] 中 CFM 法的一组常用参数, 从随机过程角度很好地验证了这组参数的收敛性, 从而避免了利用 PSO 系统系数矩阵特征根模小于 1 的不足之处.

此外, 对图 2~4 和文献 [8] 的图 8~11 进行比较可以看到, 后者基于 φ 时不变基础上描述粒子运动轨迹, 没有充分考虑到随机因素对系统的影响, 而本文中的粒子运动轨迹图充分考虑到了随机因素对系统的影响, 得到了更有意义的粒子运动轨迹图, 从而很好地验证了 PSO 系统基于随机过程均方稳定的充分条件.

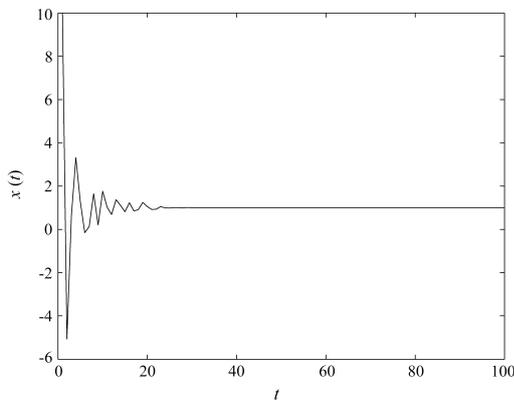


图 2 粒子的轨迹图 $\omega = 0.4, c_1 = c_2 = 2$

Fig. 2 Stochastic particle trajectory, using $\omega = 0.4, c_1 = c_2 = 2$

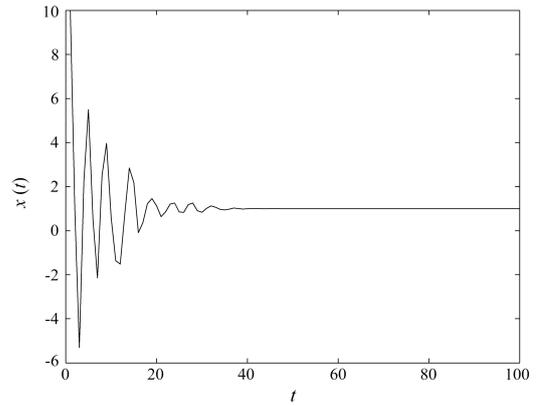


图 3 粒子的轨迹图 $\omega = 0.7, c_1 = c_2 = 1.4$

Fig. 3 Stochastic particle trajectory, using $\omega = 0.7, c_1 = c_2 = 1.4$

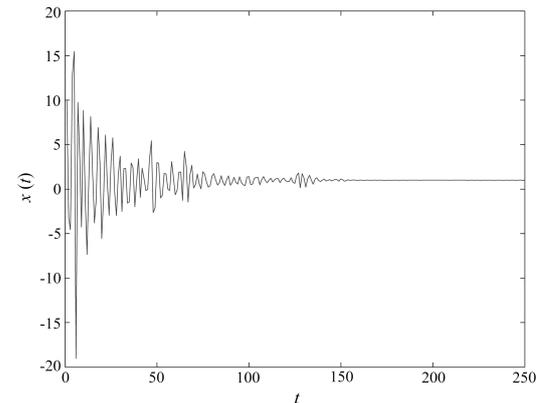
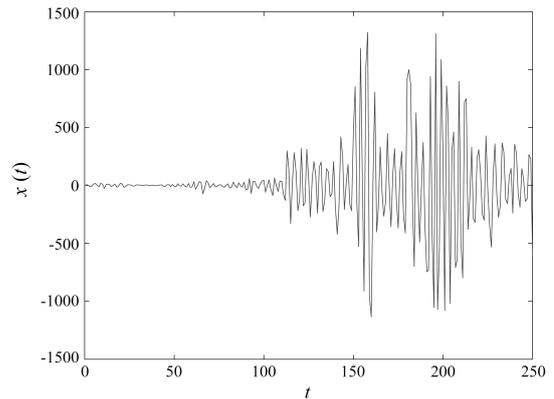


图 4 粒子的轨迹图 $\omega = 0.8, c_1 = c_2 = 2$

Fig. 4 Stochastic particle trajectory, using $\omega = 0.8, c_1 = c_2 = 2$

5 结论

已有文献对 PSO 系统稳定性的分析大多基于线性系统理论, 在稳定性分析和证明过程中往往规避了 PSO 系统是一个带有随机因素的线性时变系统. 本文从随机过程角度出发, 把原有的带随机因素的线性时变系统在概率意义下转换成线性定常系统

加以分析研究,很好地解决了已有文献中的不足,给出了系统依均方稳定的一个充分条件,从而说明基于随机过程理论的分析研究方法将会是对 PSO 系统稳定性分析的重要方法之一。

References

- 1 Kennedy J, Eberhart R. Particle swarm optimization. In: Proceedings of International Conference on Neural Networks. Perth, Australia: IEEE, 1995. 1942~1948
- 2 Clerc M, Kennedy J. The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(1): 58~73
- 3 Ozcan E, Mohan C K. Particle swarm optimization: surfing the waves. In: Proceedings of Congress on Evolutionary Computation. Washington D. C., USA: IEEE, 1999. 1939~1944
- 4 Zheng Y L, Ma L H, Zhang L Y, Qian J X. On the convergence analysis and parameter selection in particle swarm optimization. In: Proceedings of the 2nd International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Xi'an, China: IEEE, 2003. 1802~1807
- 5 Chatterjee A, Siarry P. Nonlinear inertia weight variation for dynamic adaptation in particle swarm optimization. *Computers and Operations Research*, 2006, 33(3): 859~871
- 6 Trelea I C. The particle swarm optimization algorithm: convergence analysis and parameter selection. *Information Processing Letters*, 2003, 85(6): 317~325
- 7 Bergh F van den. An Analysis of Particle Swarm Optimizer [Ph.D. dissertation], University of Pretoria, South Africa, 2002
- 8 Bergh F van den, Engelbrecht A P. A study of particle swarm optimization particle trajectories. *Information Sciences*, 2006, 176(8): 937~971
- 9 Emara H M, Fattah A H A. Continuous swarm optimization technique with stability analysis. In: Proceedings of American Control Conference. Cairo, Egypt: 2004. 2811~2817
- 10 Zeng Jian-Chao, Jie Jing, Cui Zhi-Hua. *Particle Swarm Optimization*. Beijing: Science Press, 2004
(曾建潮, 介婧, 崔志华. 微粒群算法. 北京: 科学出版社, 2004)
- 11 Zeng Jian-Chao, Cui Zhi-Hua. A new unified model of particle swarm optimization and its theoretical analysis. *Journal of Computer Research and Development*, 2006, 43(1): 96~100
(曾建潮, 崔志华. 微粒群算法的统一模型及分析. 计算机研究与发展, 2006, 43(1): 96~100)
- 12 Xiao Yang, Du Xi-Yu. Theorem and algorithm of asymptotic stability test for time variant discrete system. *Journal of Northern Jiaotong University*, 1998, 22(6): 1~7
(肖扬, 杜锡钰. 时变离散系统的渐近稳定性校验定理及算法. 北方交通大学学报, 1998, 22(6): 1~7)



金欣磊 浙江大学系统工程研究所博士研究生. 主要研究方向为多目标优化, 智能计算.

E-mail: xljin@cie.shmtu.edu.cn

(**JIN Xin-Lei** Ph.D. candidate at Institute of Systems Engineering, Zhejiang University. His research interest covers multi-objectives optimization and intelligent computing.)



马龙华 浙江大学工业控制研究所副研究员. 2001 年获浙江大学控制科学与工程博士学位, 主要研究方向为复杂系统的建模与优化, 自然计算, 智能数据处理技术及应用. 本文通信作者.

E-mail: lhma@iipc.zju.edu.cn

(**MA Long-Hua** Associate professor at Institute of Industrial Control, Zhejiang University. He received his Ph.D. degree from Zhejiang University in 2001. His research interest covers modeling and optimization for complex systems, natural computing, and intelligent data processing. Corresponding author of this paper.)



吴铁军 浙江大学工业控制研究所教授. 2002 年获得北京师范大学信息学院电子系学士学位, 主要研究方向为大系统分散智能控制决策, 离散事件系统与混合动态系统, 神经控制理论.

E-mail: tjwu@zju.edu.cn

(**WU Tie-Jun** Professor at Institute of Industrial Control, Zhejiang University. His research interest covers distributed intelligent control and intelligent management for large scale system, discrete event systems and hybrid dynamical system, and neural control system.)



钱积新 浙江大学工业控制研究所教授, 主要研究方向为复杂系统的建模与优化.

E-mail: jxqian@iipc.zju.edu.cn

(**QIAN Ji-Xin** Professor at Institute of Industrial Control, Zhejiang University. His research interest covers modeling and optimization for complex systems.)