最大熵试验法及其应用

刘杰[1] 王普[1] 刘炳章[2]

摘 要 通过加大载荷或者减少承载能力, 使受试样本的试验熵大大增加, 从而可使试验所需的总样本量大大减少. 从这点出发, 文中提出并开发了最大熵试验法, 并针对各种不同情况, 给出了载荷强化系数和散差的确定方法. 最后, 对最大熵试验与传统成败型 ($F = 0$) 试验的等价关系给出了证明, 并通过一个实例, 说明最大熵试验法的工程应用.

关键词 载荷, 可靠性, 熵
中图分类号 TP202+.1

Test Method with the Maximum Entropy and Its Application

LIU Jie[1] WANG Pu[1] LIU Bing-Zhang[2]

Abstract Increasing the load or decreasing the bearing capacity makes it possible to increase the test entropy of samples and also results in a large decrease in the number of total test samples. From this concept, a test method with the maximum entropy has been developed in this study, and a determination method for the intensifying factor of the load and the variation factor is given. Also, the equivalence between the test with the maximum entropy of samples and the traditional success or failure test ($F = 0$) has been demonstrated. The application of the test method with the maximum entropy is illustrated with an example.

Key words Load, reliability, entropy

1 载荷、承载能力和小子样问题

众所周知, 以正态分布为基础的应力、强度模型, 在可靠性工程里有着非常广泛的应用. 文献 [1] 将应力、强度的概念加以扩展, 并用载荷和承载能力来描述产品的可靠性. 这样, 无论是电器产品, 机械产品, 还是机电产品的可靠性问题, 都可以用载荷、承载能力的概念来分析和研究.

小子样问题是可靠性领域里的一大难题[2]. 多年来, 许多专家、学者为解决这一难题一直在不懈地努力, 但进展缓慢, 堪称步履艰难. 本文试图从信息论的角度出发, 通过对样本所含信息量 — 试验熵的定量分析, 来寻求解决小子样问题的更有效的途径.

2 最大熵试验法基本公式的推导

在信息论中, 熵是由信源以确定的概率 P 发射的信号所传输的信息量的度量. 熵 H 被定义为发射概率 P 的余对数, 即 $H = \ln 1/P$[3, 4]. 采用类似的方法, 我们在可靠性试验中, 把样本所传递的试验信息量 — 试验熵 TH, 定义为可靠度的余对数, 即 $TH = \ln 1/R = -\ln R$. 建立试验熵的概念是很有用的, 它使得定量地分析和比较两个不同的试验方案成为可能. 下面我们对图 1 中在 B 点 (用设计载荷 P_B) 所做的成败型 ($F = 0$) 试验和在 A 点 (用强化载荷 P_A) 所做的成败型 ($F = 0$) 试验进行分析、比较. 根据成败型 ($F = 0$) 试验公式, $N = \ln(1-\gamma)/\ln(R)$, 有

$$N_A(-\ln R_A) = N_B(-\ln R_B) = -\ln(1-\gamma) \tag{1}$$

式中, R 为可靠度, γ 为置信度, N 为全部成功的样本数.

由式 (1) 可明显看出, 在确定的置信度要求下, 通过强化载荷 (或者减少承载能力) 可使单个受试样本的试验熵大大增加, 从而可使强化载荷下所做的成败型 ($F = 0$) 试验所需的总样本量大大减少. 这就是最大熵试验法解决小子样可靠性试验与评估问题的基本出发点. 下面结合图 1, 推导最大熵试验法的基本公式.

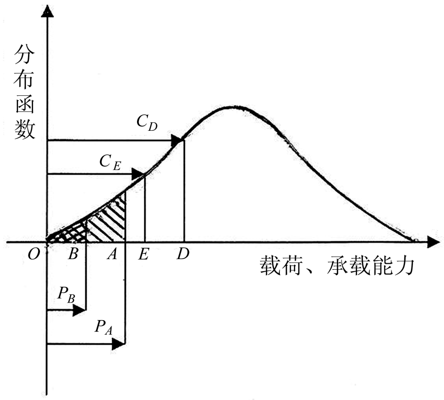

图 1 产品的不可靠度与载荷、承载能力之间的关系

Fig. 1 Comparing unreliability with load and bearing capacity of the product

首先, 把 P_A 和 P_B 的坐标值化成标准正态分布的形式, 并由图 1 可得

$$\frac{P_A}{P_B} = K = \frac{\Phi^{-1}[1-(1-\gamma)^{\frac{1}{N}}] + \frac{\mu}{\sigma}}{\Phi^{-1}(1-R) + \frac{\mu}{\sigma}} \tag{2}$$

其中, K 称为载荷强化系数, $1 \le K < M$. 关于 K 的取值范围, 在第 3 节中将详细说明. 整理式 (2), 最后得到最大熵试验法的基本公式

$$N = \frac{\ln(1-\gamma)}{\ln\{1-\Phi[(K-1)\frac{\mu}{\sigma} - K\Phi^{-1}(R)]\}} \tag{3}$$

其中 $1 \le K < M$, R 为产品的可靠度, γ 为所要求的置信度, μ 为产品载荷或承载能力的均值, σ 为产品载荷或承载能力的均方差, K 为载荷强化系数, M 为产品的可靠性设计裕度, N 为最大熵试验所需要的样本量, Φ 为正态分布分位数符号.

3 载荷强化系数 K 的确定方法

载荷强化系数 K 的确定, 是最大熵试验法非常重要的组成部分. 为了增大样本试验熵, 通常可采用如下两种技术途径: 1) 在保持承载能力不变的情况下, 尽量加大载荷; 2) 在保持载荷不变的情况下, 尽量减少承载能力. 下面结合图 1, 首先介绍设计裕度的概念. 在产品的可靠性设计中, 当产品的设计载荷 P_B 确定以后, 在决定产品的设计承载能力 C_D 时, 总是留有一定的裕量, 用于补偿由于多种随机的不确定性因素对产品所带来的不利影响. 一般来说, 在散差一定的情况下, 产品的可靠性要求越高, 设计裕度应当越大. 通常, 用 M 来表示可靠性设计裕度, 即 $M = C_D/P_B$.

收稿日期 2006-8-23 收修改稿日期 2007-1-8
Received August 23, 2006; in revised form January 8, 2007
1. 北京工业大学电子信息与控制工程学院 北京 100022 2. 中国航天标准化研究所 北京 100830
1. School of Electronic Information and Control Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100022 2. China Aerospace Standardization Institute, Beijing 100830
DOI: 10.1360/aas-007-1226

对于情况 1) 在保持承载能力不变的情况下, 尽量加大载荷. 这种情况确定载荷强化系数比较简单

$$K=\frac{P_A}{P_B}=1+\frac{P_A-P_B}{P_B} \tag{4}$$

其中, P_A 是载荷增大后的值. 从式 (4) 可以看出, 当 $P_A=P_B$, 即载荷没有增大时, 上式取最小值 $K=1$; 当 P_A 逐渐增大, 样本的试验熵也逐渐增大, 直到 $P_A=C_D$ 时, 上式取最大值 $K=M$. 但是, 为了保障最大熵试验法实施的成功概率, K 只能略小于 M . 所以对于情况 1), K 的取值范围为 $1\leq K<M$.

对于情况 2), 在保持载荷不变的情况下, 尽量减少承载能力. 这种情况确定载荷强化系数就稍微复杂一点. 要注意, 承载能力的减少, 相当于承载能力不变, 载荷增大, 这是一个问题的两个方面. 令承载能力的减少量 $C_D-C_E=P_A-P_B$ (承载能力不变时载荷的增加量), 这时, 根据式 (4) 和设计裕度的定义, 可得到

$$K=1+\frac{C_D-C_E}{P_B}=1+\frac{C_D-C_E}{C_D}M \tag{5}$$

从式 (5) 可以看到, 在保持载荷不变, 减少承载能力的情况下, 载荷强化系数 K 不仅与承载能力的减少量有关, 还与产品的设计裕度 (或者设计载荷) 有很大关系. 关于这一点是非常重要的, 因为它往往被人忽视, 从而导致错误.

下面根据式 (5) 观察当承载能力 C_E 由大变小时, 载荷强化系数 K 的变化情况. 当 C_E 最大, 即 $C_E=C_D$ 时, $K=1$; 当承载能力 C_E 由大变小, 变到 $C_E=P_B$ 时, $K=M$. 同样, 为了保障最大熵试验法实施的成功概率, C_E 应大于 P_B. 因此, 对于情况 2), 载荷强化系数 K 的取值范围仍然是 $1\leq K<M$.

在工程应用中, 有时试验人员对受试产品的设计裕度 (或者设计载荷) 并不清楚, 即 M 未知. 在这种情况下, 又如何来确定载荷强化系数 K 的大小呢? 在设计裕度 M 未知 (或者设计载荷 P_B 未知) 的情况下, 虽然式 (5) 已不能应用, 但这时, 可以用每单位承载能力的平均载荷之比来估计载荷强化系数 K. 即

$$\hat{K}=\frac{P_B/C_E}{P_B/C_D}=\frac{C_D}{C_E}\approx K \tag{6}$$

下面, 分两种情况来说明式 (6) 是合理的.

1) 承载能力减少幅度很大, 以至于使 $C_E\to P_B$ 时, 由式 (5) 可知 $\hat{K}\to C_D/C_E\to K$. 显然, 这时的估计起码是无偏的.

2) 承载能力减少幅度较小, 这时的估计是有偏的, 但仅仅是估计偏小而已. 因为 $K-\hat{K}=1+\frac{C_D-C_E}{P_B}-\frac{C_D}{C_E}=\frac{(C_D-C_E)(C_E-P_B)}{P_BC_E}>0$.

综合上述两种情况, 不难得出如下结论:

在产品的设计裕度 M 未知 (或者设计载荷 P_B 未知) 的情况下, 可以用 $\hat{K}=\frac{C_D}{C_E}$ 的值来代替最大熵试验法基本公式 (3) 中的载荷强化系数 K, 这种偏于保守的估计, 不会影响可靠性试验与评估的结果. 相比之下, 只不过需要多试验几个样本而已.

4　散差 σ/μ 的估计和最大包罗

在最大熵试验法的基本公式 (3) 中, 散差 σ/μ 的倒数, 也是一个非常重要的参数. 一个产品的载荷或者承载能力的散差, 是由许多因素决定的. 例如, 材料本身散布的力学特性, 加工工艺的不一致性, 以及产品工作的环境条件的影响等. 散差 σ/μ 和前面所说的设计裕度 M 是影响产品可靠性的两大要素, 要提高产品的可靠性, 不能盲目的任意加大设计裕度 M, 因为 M 增大往往是以成本的增加为代价的. 在这种情况下, 尽量减少散差 σ/μ 就显得格外重要. 一般产品的散差 σ/μ 应控制在 5% ~ 15% 之间.

在做最大熵试验以前, 有些批量产品的散差估计值是已知的, 只要稍加修订, 即可直接引用. 在产品散差未知的情况下, 可以通过一定数量样本的 Bruceton 试验来确定[5]. 例如, 有如下一组数据 (参见表 1), 可求出散差的估计值为 $\hat{s}=\hat{\sigma}/\mu$. 其中, $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}X_j$, $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{n}(X_j-\hat{\mu})^2}$, 现在的问题是, 必须用多少个样本做试验, 才能使散差的估计值 $\hat{s}$ 以尽可能大的概率接近母体的真值 $s=\sigma/\mu$ 呢?

在图 2 中, 从上到下依次排列三条曲线, 分别代表 $\gamma=0.85$, $\gamma=0.90$ 和 $\gamma=0.95$ 时, 样本数 n 与 $\hat{s}/s$ 的关系. 以置信度 $\gamma=0.90$ 为例, 当样本数 $n=50$ 时, 可使 $\hat{s}/s=0.95$; 当样本数 $n=24$ 时, 可使 $\hat{s}/s=0.90$ 以上. 根据上述结果, 可以确定母体散差真值的最大包罗. 即可以用 24～50 个样本来做 Bruceton 试验, 当 $n=50$ 时, $s=\sigma/\mu=\hat{s}/0.95$; 当 $n=24$ 时, $s=\sigma/\mu=\hat{s}/0.90$.

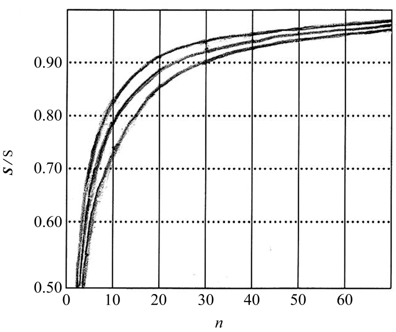

图 2　散差的估计值和母体真值之比与样本数之间的关系

Fig. 2　Comparing the ratio of estimate of variation factor to real value of matrix with the number of samples

表 1　Bruceton 试验数据表

Table 1　A group of Bruceton test data

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
18.0																			×	
17.5						×		×				×		×		×		○		×
17.0			×		○		○		×		○		○		○		○			
16.5		○		○						○										
16.0	○																			

5 等价试验关系的证明

为了验证产品的可靠性, 通常是在设计载荷 P_B 下做成败型 ($F=0$) 的试验, 其结果是无人质疑的. 现在, 为了减少试验的样本量, 我们不做设计载荷 P_B 下的成败型 ($F=0$) 的试验, 而是在强化载荷 P_A 下做最大熵试验. 强化载荷 P_A 下做的最大熵试验能否完全等价地取代原来设计载荷 P_B 下的成败型 ($F=0$) 的试验, 需要从理论上给予证明. 为此, 引入有关等价关系的规定[6] 作为引理, 叙述如下:

引理. 设 U 和 V 都是点 O 的开邻域, f 和 g 是分别定义于 U 和 V 上的光滑函数. $f: U\to \mathbf{R}$ 和 $g: V\to \mathbf{R}$ (这里的 $\mathbf{R}$ 指实数域) 是等价的, 当且仅当存在点 O 的开邻域 $W\subset U\cap V$, 使得 $f\mid W=g\mid W$.

$$f=N_A\ln R_A=\frac{\ln(1-\gamma)}{\ln\{1-\Phi[(K-1)\frac{\mu}{\sigma}-K\Phi^{-1}(R_B)]\}}\times$$
$$\ln[1-\Phi(\frac{P_A-\mu}{\sigma})]=\frac{\ln(1-\gamma)}{\ln\{1-\Phi[(K-1)\frac{\mu}{\sigma}+K\frac{(\frac{P_A}{K}-\mu)}{\sigma}]\}}\times$$
$$\ln[1-\Phi(\frac{P_A-\mu}{\gamma})] \tag{7}$$

由式 (7) 可明显看出, f 是定义在 $U=P_A$ 之上的光滑函数.

$$g=N_B\ln R_B=N_B\ln[1-\Phi(\frac{P_B-\mu}{\sigma})] \tag{8}$$

由式 (8) 可明显看出, g 是定义在 $V=P_B$ 之上的光滑函数. 又由于 $1\le K<M$, 即 $1\le P_A(OA)/P_B(OB)<M$, 所以有 $U\cap V=P_A\cap P_B=OA\cap OB=OB=P_B$, 即在 O 点存在一个开邻域 $W=P_B(OB)$, 满足 $W\subset U\cap V$; 另一方面, 将式 (7) 进一步变化并整理, 得

$$f\mid W=f\mid P_B=$$
$$\frac{\ln(1-\gamma)}{\ln\{1-\Phi[(K-1)\frac{\mu}{\sigma}+K\frac{(\frac{P_B}{K}-\mu)}{\sigma}]\}}\ln[1-\Phi(\frac{KP_B-\mu}{\gamma})]= \tag{9}$$
$$\ln(1-\gamma)$$

根据成败型 ($F=0$) 可靠性试验评估式 (1), 将式 (8) 改写成

$$g\mid W=g\mid P_B=N_B\ln[1-\Phi(\frac{P_B-\mu}{\sigma})]=\ln(1-\gamma) \tag{10}$$

将式 (9) 和式 (10) 做比较后可看出, $f\mid W=g\mid W$ 成立. 所以, 最后可得出如下结论:

结论. 通过合理选择载荷强化系数 $K(1\le K<M)$, 可以使得在 A 点用强化载荷 (P_A) 所做的最大熵试验, 与在 B 点用传统的设计载荷 (P_B) 所做的成败型 ($F=0$) 的试验完全等价.

6 工程应用

例. 以两个航天器在空间对接为例, 对接初始条件范围给出的最小轴向相对速度 $v_{x,\min}=0.16\,\text{m/s}$, 设计人员在最严酷的偏差组合下, 用轴向相对速度 $v_x=0.14\,\text{m/s}$, 成功地进行了 6 次捕获试验. 根据以往的试验数据, 已知散差, 设计裕度 $M=1.5$. 在置信度 $\gamma=0.7$ 的要求下, 评估该对接机构捕获可靠性所达到的水平.

$$C_D=\frac{1}{2}mv_{x,\min}^2=0.0128\,\text{m}, C_E=\frac{1}{2}mv_x^2=0.0098\,\text{m}$$

根据式 (5), $K=1+\frac{0.0128-0.0098}{0.0128}\times 1.5=1.35$. 由最大熵试验法基本式 (3) 可直接导出可靠性评估公式, 即

$$R=\Phi[\frac{(K-1)\frac{\mu}{\sigma}-\Phi^{-1}\{1-\exp[\frac{\ln(1-\gamma)}{N}]\}}{K}]=$$
$$\Phi[\frac{(1.35-1)\frac{100}{10}-\Phi^{-1}\{1-\exp[\frac{\ln(1-0.7)}{6}]\}}{1.35}]=0.9994$$

为此, 在减少承载能力的情况下 ($K=1.35$), 我们仅做了 6 次成功捕获的最大熵试验, 就得到了对接机构捕获可靠性 0.9994 的评估结果. 若用常规的成败型试验方法, 评估同样的可靠性, 至少需要做 $N=\dfrac{\ln(1-0.7)}{0.9994}=2006$ 次试验. 由此可明显看出, 用最大熵试验法解决小子样可靠性试验与评估问题是非常有效的[7].

致谢

感谢北京工业大学尹金玉教授对本项研究的支持与帮助.

References

1 Lewis E E. *Introduction to Reliability Engineering*. New York: John Wiley and Sons, 1987

2 Nachlas J A. *Reliability Engineering*. France: CRC Press, 2005

3 Saridis G N. *Entropy in Control Engineering*. USA: World Scientific, 2001

4 Jia Shi-Lou. *The Foundation of Information Theory*. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2001
(贾世楼. 信息论理论基础. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001)

5 Lapin L. Probability and statistics for modern engineering. *Technometrics*, 1991, **33**(4): 490

6 Li Yang-Cheng. *Theory about the Odd Point of Smooth Mapping*. Beijing: Chinse Science Press, 2002
(李养成. 光滑映射的奇点理论. 北京: 科学出版社, 2002)

7 Liu Bing-Zhang, Ding Tong-Cai. Small-scale reliability assessment method for high reliability and its application. *Quality and Reliability*. 2004, (1): 19∼23
(刘炳章, 丁同才. 小子样验证高可靠性的可靠性评估方法及其运用. 质量与可靠性, 2004, (1): 19∼23)

刘 杰 北京工业大学博士研究生. 主要研究方向为智能控制理论及应用. 本文通信作者. E-mail: liujie@itsc.com.cn
(**LIU Jie** Ph. D. candidate at School of Electronic Information and Control Engineering, Beijing University of Technology. His research interest covers intelligent control and its application. Corresponding author of this paper.)

王 普 北京工业大学教授. 主要研究方向为智能控制理论及应用. E-mail: wangpu@bjut.edu.cn
(**WANG Pu** Professor at Beijing University of Technology. His research interest covers intelligent control and its application.)

刘炳章 中国航天标准化研究所教授. 主要研究方向为可靠性理论及应用. E-mail: oceo@163.com
(**LIU Bing-Zhang** Professor at China Aerospace Standardization Institute. His research interest covers reliability and its application.)